Алгебра и анализ
Том 32 (2020), №1

ОПЕРАТОР МАКСВЕЛЛА В ЦИЛИНДРЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, НЕ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПОПЕРЕЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© Н. Д. ФИЛОНОВ

Мы рассматриваем оператор Максвелла в трехмерном цилиндре, сечение которого — односвязная ограниченная область с липшицевой границей. Предполагаем, что коэффициенты — скалярные функции, зависящие только от продольной переменной. Мы показываем, что квадрат такого оператора унитарно эквивалентен ортогональной сумме четырех скалярных эллиптических операторов второго порядка. В случае, когда коэффициенты периодичны вдоль оси цилиндра, спектр оператора Максвелла абсолютно непрерывен.

Введение

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей, $\Pi = U \times \mathbb{R}$ — трехмерный цилиндр. Мы исследуем самосопряженный оператор Максвелла $\mathcal{M}$ в цилиндре Π с условиями идеальной проводимости на границе. Это матричный дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, описывающими диэлектрическую и магнитную проницаемости среды, заполняющей цилиндр. Точное определение будет дано ниже, см. определение 1.2. В общем случае естественно предполагать, что коэффициенты ε и μ — (3×3)-матрично-значные функции, ограниченные и положительно определенные,

$$0 < \varepsilon_0 \mathbb{1} \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon_1 \mathbb{1}, \quad 0 < \mu_0 \mathbb{1} \leqslant \mu(x) \leqslant \mu_1 \mathbb{1}. \tag{0.1}$$

В §2 мы покажем, что в спектре такого оператора есть лакуна с центром в нуле, см. ниже лемму 2.3. В остальном тексте мы будем предполагать, что ε и μ — скалярные функции (в цилиндре изотропная среда), и что они *не зависят от поперечных переменных* x_1 *и* x_2,

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x_3), \quad \mu(x) = \mu(x_3). \tag{0.2}$$

Ключевые слова: оператор Максвелла, односвязный цилиндр, абсолютная непрерывность спектра.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского Научного Фонда №17-11-01069.

В этих предположениях мы докажем, что квадрат оператора Максвелла $\mathcal{M}^2$ унитарно эквивалентен ортогональной сумме четырех скалярных эллиптических операторов второго порядка, см. ниже теорему 1.3. Скалярные эллиптические операторы проще для исследования. В частности, мы рассмотрим случай, когда коэффициенты ε и μ еще и периодичны вдоль оси цилиндра,

$$\varepsilon(x_3 + a) = \varepsilon(x_3), \quad \mu(x_3 + a) = \mu(x_3), \tag{0.3}$$

и достаточно гладкие. Мы покажем на основе теоремы 1.3, что в этой ситуации спектр оператора Максвелла абсолютно непрерывен, см. теорему 1.5. Ранее абсолютная непрерывность оператора Максвелла в цилиндре была установлена в следующих ситуациях:

- ε и μ — скалярные достаточно гладкие функции, периодичные вдоль оси цилиндра; сечение U — прямоугольник или круг, см. [7];
- ε и μ — матрично-значные ограниченные функции, не зависящие от продольной переменной, $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_1, x_2)$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$; U — ограниченная область с липшицевой границей, см. [4].

§1. Формулировка результатов

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \mathrm{Lip}$, $\Pi = U \times \mathbb{R}$. Граничные условия, входящие в определение оператора Максвелла, мы будем понимать в смысле интегральных тождеств.

Определение 1.1. Пусть $u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$.

ν) Если $\operatorname{div} u \in L_2(\Pi)$, то

$$u_\nu|_{\partial\Pi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_\Pi \langle u, \nabla\omega\rangle dx = -\int\limits_\Pi \operatorname{div} u\, \overline{\omega} dx \quad \forall\ \omega \in W_2^1(\Pi).$$

τ) Если $\operatorname{rot} u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$, то

$$u_\tau|_{\partial\Pi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_\Pi \langle u, \operatorname{rot} z\rangle dx = \int\limits_\Pi \langle \operatorname{rot} u, z\rangle dx$$
$$\forall\ z \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} z \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3).$$

Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$. Нам понадобится также несколько функциональных пространств. Пусть ε, μ удовлетворяют (0.1). Подпространства соленоидальных функций:

$$J(\tau, \varepsilon) = \{u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \varepsilon) : \operatorname{div}(\varepsilon u) = 0\},$$
$$J(\nu, \mu) = \{v \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \mu) : \operatorname{div}(\mu v) = 0,\ (\mu v)_\nu|_{\partial\Pi} = 0\}.$$

Кроме того, введем пространство

$$F(\Pi, s) = \{u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3),\ \operatorname{div}(su) \in L_2(\Pi)\},$$

с нормой

$$\|u\|^2_{F(\Pi,s)} = \|\operatorname{rot} u\|^2_{L_2(\Pi)} + \|\operatorname{div}(su)\|^2_{L_2(\Pi)} + (su, u)_{L_2(\Pi)}, \quad s = \varepsilon \text{ или } \mu,$$

и его подпространства

$$F(\tau, \varepsilon) = \{u \in F(\Pi, \varepsilon) : u_\tau|_{\partial\Pi} = 0\},$$
$$F(\nu, \mu) = \{v \in F(\Pi, \mu) : (\mu v)_\nu|_{\partial\Pi} = 0\}.$$

Наконец, введем обозначения

$$\Phi(\tau, \varepsilon) = F(\tau, \varepsilon) \cap J(\tau, \varepsilon), \quad \Phi(\nu, \mu) = F(\nu, \mu) \cap J(\nu, \mu).$$

Определение 1.2. Оператор Максвелла действует в гильбертовом пространстве $J(\tau, \varepsilon) \oplus J(\nu, \mu)$ по формуле

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \\ -i\mu^{-1} \operatorname{rot} E \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{M} = \Phi(\tau, \varepsilon) \oplus \Phi(\nu, \mu).$$

Легко показать, что оператор Максвелла самосопряжен, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$, см., например, [1]. Он имеет блочную структуру

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & R^* \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

где взаимно сопряженные операторы

$$R = -i\mu^{-1} \operatorname{rot}, \quad R^* = i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}$$

заданы на

$$\operatorname{Dom} R = \Phi(\tau, \varepsilon), \quad \operatorname{Dom} R^* = \Phi(\nu, \mu).$$

Из такой структуры вытекает, что операторы $\mathcal{M}$ и $-\mathcal{M}$ унитарно эквивалентны, и спектр оператора $\mathcal{M}$ симметричен относительно нуля.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1.3. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in$ Lip, $\Pi = U \times \mathbb{R}$. Пусть коэффициенты ε и μ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям* (0.1) *и* (0.2). *Тогда квадрат оператора Максвелла $\mathcal{M}^2$ унитарно эквивалентен ортогональной сумме*

$$\mathcal{A}_D \oplus \mathcal{A}_D \oplus \mathcal{A}_N \oplus \mathcal{A}_N.$$

Здесь $\mathcal{A}_D$ и $\mathcal{A}_N$ — самосопряженные эллиптические операторы, $\mathcal{A}_D = -\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\cdot))$ с краевым условием Дирихле в $L_2(\Pi, \mu)$;

$\mathcal{A}_N = -\varepsilon^{-1}(\operatorname{div}(\mu^{-1}\nabla\cdot))$ *с краевым условием Неймана в гильбертовом пространстве*

$$\Big\{\varphi \in L_2(\Pi, \varepsilon) : \int\limits_U \varphi(x)\, dx_1 dx_2 = 0 \quad \textit{при п.в.} \quad x_3 \in \mathbb{R}\Big\}. \tag{1.1}$$

Замечание 1.4. Оператор $\mathcal{A}_D$ отвечает положительной квадратичной форме

$$\int\limits_\Pi \varepsilon^{-1}|\nabla\varphi|^2 dx, \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

в пространстве $L_2(\Pi, \mu)$; оператор $\mathcal{A}_N$ — положительной квадратичной форме

$$\int\limits_\Pi \mu^{-1}|\nabla\varphi|^2 dx, \quad \varphi \in W_2^1(\Pi), \quad \int\limits_U \varphi(x)\, dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{при п.в.} \quad x_3 \in \mathbb{R},$$

в гильбертовом пространстве (1.1).

Теорема 1.5. *Пусть в условиях теоремы* 1.3 *функции* ε *и* μ *удовлетворяют условию* (0.3) *при некотором* $a > 0$, *и*

$$\varepsilon, \mu \in W^2_{r,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad r > 1. \tag{1.2}$$

Тогда спектр оператора $\mathcal{M}$ *абсолютно непрерывен.*

§2. Обратимость оператора Максвелла

Тот факт, что оператор Максвелла в цилиндре с односвязным сечением имеет ограниченный обратный, известен (см. ниже замечание 2.6). Мы приводим необходимые факты для удобства читателя.

Введем ортогональные проекторы $P(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $P(\nu, \mu)$) в пространстве $L_2(\Pi, \varepsilon)$ (соответственно $L_2(\Pi, \mu)$) на подпространство $J(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $J(\nu, \mu)$). Следующая лемма доказана в [1, лемма 1.1a) и лемма 1.8a)].

Лемма 2.1. *Пусть матрицы-функции* ε, $\widetilde{\varepsilon}$, μ *и* $\widetilde{\mu}$ *удовлетворяют* (0.1). *Оператор* $P(\tau, \varepsilon)$ (*соответственно* $P(\nu, \mu)$) *непрерывно и взаимнооднозначно переводит пространство* $J(\tau, \widetilde{\varepsilon})$ *в* $J(\tau, \varepsilon)$ (*соответственно* $J(\nu, \widetilde{\mu})$ *в* $J(\nu, \mu)$) *и пространство* $\Phi(\tau, \widetilde{\varepsilon})$ *в* $\Phi(\tau, \varepsilon)$ (*соответственно* $\Phi(\nu, \widetilde{\mu})$ *в* $\Phi(\nu, \mu)$). *Обратное отображение дается оператором* $P(\tau, \widetilde{\varepsilon})$ (*соответственно* $P(\nu, \widetilde{\mu})$).

Лемма 2.2 (см. [4, теорема 10.3]). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей, $\varepsilon(x) \equiv \mu(x) \equiv \mathbb{1}$. Тогда*

$$\sigma(\mathcal{M}) = \left(-\infty, -\sqrt{\lambda_2^{\mathcal{N}}}\right] \cup \left[\sqrt{\lambda_2^{\mathcal{N}}}, \infty\right),$$

где $\lambda_2^{\mathcal{N}}$ — второе собственное значение (первое ненулевое) оператора Лапласа задачи Неймана в области U.

Лемма 2.3. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \mathrm{Lip}$. Пусть матрицы-функции ε, μ удовлетворяют* (0.1). *Тогда в спектре оператора $\mathcal{M}$ есть лакуна с центром в нуле $(-\delta(\varepsilon,\mu), \delta(\varepsilon,\mu))$, где*

$$\delta(\varepsilon,\mu) \geqslant \sqrt{\frac{\lambda_2^{\mathcal{N}}}{\|\varepsilon\|_{L_\infty} \|\mu\|_{L_\infty}}}.$$

В частности, оператор Максвелла имеет ограниченный обратный оператор в $J(\tau,\varepsilon) \oplus J(\nu,\mu)$.

Доказательство. Из определения оператора Максвелла вытекает, что

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\|^2 &= \|Ru\|^2_{L_2(\Pi,\mu)} + \|R^* v\|^2_{L_2(\Pi,\varepsilon)} \\
&= (\mu^{-1} \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u)_{L_2(\Pi)} + (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v)_{L_2(\Pi)} \\
&= \big(\mu^{-1} \operatorname{rot}(P(\tau,\mathbb{1})u), \operatorname{rot}(P(\tau,\mathbb{1})u)\big)_{L_2(\Pi)} \\
&\quad + \big(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(P(\nu,\mathbb{1})v), \operatorname{rot}(P(\nu,\mathbb{1})v)\big)_{L_2(\Pi)} \\
&\geqslant \|\mu\|^{-1}_{L_\infty} \|\operatorname{rot}(P(\tau,\mathbb{1})u)\|^2_{L_2(\Pi)} + \|\varepsilon\|^{-1}_{L_\infty} \|\operatorname{rot}(P(\nu,\mathbb{1})v)\|^2_{L_2(\Pi)}.
\end{aligned}$$

Теперь из леммы 2.2 вытекает, что

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\|^2 &\geqslant \lambda_2^{\mathcal{N}} \left(\|\mu\|^{-1}_{L_\infty} \|P(\tau,\mathbb{1})u\|^2_{L_2(\Pi)} + \|\varepsilon\|^{-1}_{L_\infty} \|P(\nu,\mathbb{1})v\|^2_{L_2(\Pi)} \right) \\
&\geqslant \lambda_2^{\mathcal{N}} \|\varepsilon\|^{-1}_{L_\infty} \|\mu\|^{-1}_{L_\infty} \left(\|P(\tau,\mathbb{1})u\|^2_{L_2(\Pi,\varepsilon)} + \|P(\nu,\mathbb{1})v\|^2_{L_2(\Pi,\mu)} \right) \\
&\geqslant \lambda_2^{\mathcal{N}} \|\varepsilon\|^{-1}_{L_\infty} \|\mu\|^{-1}_{L_\infty} \left(\|u\|^2_{L_2(\Pi,\varepsilon)} + \|v\|^2_{L_2(\Pi,\mu)} \right),
\end{aligned}$$

так как

$$u = P(\tau,\varepsilon) P(\tau,\mathbb{1}) u, \quad v = P(\nu,\mu) P(\nu,\mathbb{1}) v$$

в силу леммы 2.1. □

Следствие 2.4. *В условиях леммы 2.3 ядра операторов R и R^* тривиальны*, $\ker R = \{0\}$, $\ker R^* = \{0\}$.

Замечание 2.5. Леммы 2.2 и 2.3 имеются уже в [2]. Однако это работа практически недоступна, поэтому мы привели доказательство леммы 2.3 и дали другую ссылку для леммы 2.2. Кроме того, у Дунаева в [2] вместо $\lambda_2^{\mathcal{N}}$ фигурирует число $\delta := \min(\lambda_1^{\mathcal{D}}, \lambda_2^{\mathcal{N}})$, где $\lambda_1^{\mathcal{D}}$ — первое собственное значение оператора Лапласа задачи Дирихле в области U. Теперь известно, что $\lambda_2^{\mathcal{N}} < \lambda_1^{\mathcal{D}}$ для любой области U (см. [9] или [3]).

Замечание 2.6. Тот факт, что в спектре оператора Максвелла есть лакуна в случае, когда коэффициенты тривиальны, $\varepsilon(x) \equiv \mu(x) \equiv \mathbb{1}$ (в цилиндре вакуум), сечение односвязно (если сечение многосвязно, то лакуны нет), и граница гладкая, хорошо известен, см. [12, §91]. В работе [4] это утверждение обобщено на случай липшицевых границ.

§3. Функциональные пространства

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей, $\partial U \in \mathrm{Lip}$, $\Pi = U \times \mathbb{R}$.

Лемма 3.1. *Имеют место ортогональные разложения*

$$L_2(U, \mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_1\varphi \\ \partial_2\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathring{W}_2^1(U) \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \end{pmatrix} : \psi \in W_2^1(U) \right\},$$

$$L_2(U, \mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_1\varphi \\ \partial_2\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in W_2^1(U) \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \end{pmatrix} : \psi \in \mathring{W}_2^1(U) \right\}.$$

Доказательство. Первое равенство доказано в [4, лемма 10.1]. Второе получается из первого поворотом на 90 градусов. □

Пусть ε и μ — скалярные функции в цилиндре Π, удовлетворяющие условиям (0.1) и (0.2). Введем обозначения

$$\mathcal{H}(\tau, \varepsilon) := L_2\big(\mathbb{R}, \mathring{W}_2^1(U)\big), \qquad \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}(\tau,\varepsilon)} = \int_\Pi \left(|\partial_1\varphi|^2 + |\partial_2\varphi|^2\right) \varepsilon(x_3)\,dx,$$

$$\mathcal{H}(\nu, \mu) := L_2\big(\mathbb{R}, W_2^1(U) \ominus \{\mathrm{const}\}\big), \quad \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}(\nu,\mu)} = \int_\Pi \left(|\partial_1\varphi|^2 + |\partial_2\varphi|^2\right) \mu(x_3)\,dx.$$

Мы будем писать просто $\mathcal{H}(\tau)$, $\mathcal{H}(\nu)$, когда нам будет неважно, какая норма введена в этих пространствах.

Лемма 3.2. *Пространство $C_0^\infty(\Pi)$ плотно в $\mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$. Положим

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x_3| < N, \\ 0, & |x_3| > N. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_N \in \mathcal{H}(\tau,\varepsilon)$ и что $\varphi_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в $\mathcal{H}(\tau,\varepsilon)$. Далее, пусть $\varphi_{N,\rho}$ — усреднение функции φ_N по переменной x_3 с параметром ρ. Ясно, что

$$\varphi_{N,\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathring{W}_2^1(U)) \subset \mathring{W}_2^1(\Pi) \quad \text{и} \quad \varphi_{N,\rho} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} \varphi_N \ \text{ в } \ \mathcal{H}(\tau,\varepsilon).$$

Следовательно, $\mathring{W}_2^1(\Pi)$, а значит и $C_0^\infty(\Pi)$, плотно в $\mathcal{H}(\tau,\varepsilon)$. □

Введем теперь пространства

$$K(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\nu) \right\} \equiv \left\{ \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\nu) \right\},$$

$$K(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\tau) \right\} \equiv \left\{ \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\tau) \right\},$$

$$L(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_1\varphi \\ \partial_2\varphi \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathcal{H}(\sigma),\ \omega \in L_2(\Pi) \right\}, \quad \sigma = \tau \ \text{ или } \ \nu.$$

Ясно, что $K(\nu) \subset K(\tau)$ и $L(\tau) \subset L(\nu)$. В силу леммы 3.1 имеем

$$K(\tau) \oplus_\varepsilon L(\tau) = L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \varepsilon), \quad K(\nu) \oplus_\mu L(\nu) = L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \mu). \tag{3.1}$$

Отметим, что эти равенства выполняются для всех скалярных функций ε, μ, удовлетворяющих (0.1), (0.2), в частности, для $\varepsilon \equiv \mathbb{1}$ и для $\mu \equiv \mathbb{1}$. Когда мы будем рассматривать пространства K и L как подпространства гильбертовых пространств $L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \varepsilon)$, то будем писать $K(\tau,\varepsilon)$ и т. п.

Лемма 3.3. *Имеют место равенства*:

$$K(\tau) = \bigl\{ f \in J(\tau,\varepsilon) : f_3 = 0 \bigr\}, \quad K(\nu) = \bigl\{ f \in J(\nu,\mu) : f_3 = 0 \bigr\}.$$

Доказательство. По определению условие $f \in J(\tau,\varepsilon)$ при $f_3 = 0$ эквивалентно тому, что

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^2), \quad \int\limits_\Pi \varepsilon(x_3)(f_1\partial_1\varphi + f_2\partial_2\varphi)dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Выберем в $\mathring{W}_2^1(U)$ какой-нибудь ортонормированный базис $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$. Если $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то $\varphi(x) := \varphi_m(x_1,x_2)\psi(x_3) \in \mathring{W}_2^1(\Pi)$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Bigl(\int\limits_U (f_1\partial_1\varphi_m + f_2\partial_2\varphi_m)dx_1dx_2 \Bigr) \varepsilon(x_3)\psi(x_3)dx_3 = 0 \quad \forall\ \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

откуда

$$\int\limits_U (f_1\partial_1\varphi_m + f_2\partial_2\varphi_m)dx_1dx_2 = 0 \quad \text{при п.в. } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, для функций $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^2)$ следующие условия эквивалентны:

$$\int\limits_\Pi \varepsilon(x_3)(f_1\partial_1\varphi + f_2\partial_2\varphi)dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{при п.в. } x_3 \in \mathbb{R} \quad \int\limits_U (f_1\partial_1\varphi + f_2\partial_2\varphi)dx_1dx_2 = 0 \quad \forall\ \varphi \in \mathring{W}_2^1(U)$$

(мы доказали “$\Rightarrow$”; обратная импликация очевидна). Последнее соотношение в силу леммы 3.1 эквивалентно тому, что $f \in K(\tau)$.

Равенство $K(\nu) = \{f \in J(\nu, \mu) : f_3 = 0\}$ доказывается совершенно аналогично. □

Следствие 3.4. *Имеют место равенства*

$$K(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon) = \{f \in \Phi(\tau, \varepsilon) : f_3 = 0\},$$
$$K(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu) = \{f \in \Phi(\nu, \mu) : f_3 = 0\}.$$

Лемма 3.5. *Имеют место равенства*

$$L(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon) = \{f \in \Phi(\tau, \varepsilon) : (\operatorname{rot} f)_3 = 0\},$$
$$L(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu) = \{f \in \Phi(\nu, \mu) : (\operatorname{rot} f)_3 = 0\}.$$

Доказательство. Оба включения $\subset$ очевидны.

Пусть поле $f \in \Phi(\tau, \varepsilon)$ таково, что $(\operatorname{rot} f)_3 = 0$. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$. Тогда

$$(f, \operatorname{rot} z)_{L_2(\Pi)} = (\operatorname{rot} f, z)_{L_2(\Pi)} = 0 \qquad \text{при} \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

откуда $f \perp K(\tau)$. Следовательно, $f \in L(\tau)$ в силу (3.1) при $\varepsilon = \mathbb{1}$. Тем самым

$$\big\{f \in \Phi(\tau, \varepsilon) : (\operatorname{rot} f)_3 = 0\big\} \subset L(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon).$$

Пусть теперь $f \in \Phi(\nu, \mu)$, $(\operatorname{rot} f)_3 = 0$. Тогда (3.2) имеет место для всех $\psi \in C_0^\infty(\Pi)$. В силу леммы 3.2 соотношение (3.2) выполняется и для всех $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$, откуда $f \perp K(\nu)$, и следовательно, $f \in L(\nu)$ в силу (3.1) при $\mu = \mathbb{1}$. Тем самым

$$\big\{f \in \Phi(\nu, \mu) : (\operatorname{rot} f)_3 = 0\big\} \subset L(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu). \qquad \square$$

§4. Преобразование Фурье вдоль оси

Введем преобразование Фурье по переменной x_3:

$$\widehat{u}(x_1,x_2,k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ikx_3} u(x)\, dx_3.$$

Лемма 4.1. *Пусть*

$$u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \quad \operatorname{rot} u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \quad u_\tau|_{\partial\Pi} = 0.$$

Тогда

$$\widehat{u}_3(\,\cdot\,,\,\cdot\,,k) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(U) \quad \textit{при п.в.} \;\; k \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Имеем

$$(\operatorname{rot} u)\widehat{\ }(x_1,x_2,k) = \begin{pmatrix} \partial_2\widehat{u}_3 - ik\widehat{u}_2 \\ ik\widehat{u}_1 - \partial_1\widehat{u}_3 \\ \partial_1\widehat{u}_2 - \partial_2\widehat{u}_1 \end{pmatrix}.$$

По условию $u, \operatorname{rot} u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$, следовательно, $\widehat{u}, (\operatorname{rot} u)\widehat{\ } \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$ и

$$\widehat{u}_3(\,\cdot\,,\,\cdot\,,k) \in W_2^1(U) \quad \text{при п.в.} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Далее, пусть $z = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega \in W_2^1(\Pi)$. Тогда $(u, \operatorname{rot} z)_{L_2(\Pi)} = (\operatorname{rot} u, z)_{L_2(\Pi)}$ в силу определения 1.1 τ). Следовательно,

$$\int\limits_{\Pi} \big\langle \widehat{u}, (\operatorname{rot} z)\widehat{\ } \big\rangle \, dx_1 dx_2 dk = \int\limits_{\Pi} \big\langle (\operatorname{rot} u)\widehat{\ }, \widehat{z} \,\big\rangle \, dx_1 dx_2 dk. \tag{4.2}$$

Поскольку

$$(\operatorname{rot} z)\widehat{\ } = \begin{pmatrix} 0 \\ ik\widehat{\omega} \\ -\partial_2\widehat{\omega} \end{pmatrix},$$

то

$$\int\limits_{\Pi} \Big(-ik\widehat{u}_2\overline{\widehat{\omega}} - \widehat{u}_3\partial_2\overline{\widehat{\omega}} \Big)\, dx_1 dx_2 dk = \int\limits_{\Pi} (\partial_2\widehat{u}_3 - ik\widehat{u}_2)\, \overline{\widehat{\omega}}\, dx_1 dx_2 dk$$

и

$$\int\limits_{\Pi} \Big(\partial_2\widehat{u}_3\overline{\widehat{\omega}} + \widehat{u}_3\partial_2\overline{\widehat{\omega}} \Big)\, dx_1 dx_2 dk = 0.$$

Дальше действуем аналогично доказательству леммы 3.3. Выберем в $W_2^1(U)$ какой-нибудь ортонормированный базис $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$. Если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$\omega(x) := \overline{\psi_m(x_1,x_2)}\varphi(x_3) \in W_2^1(\Pi) \quad \text{и} \quad \widehat{\omega}(x_1,x_2,k) = \overline{\psi_m(x_1,x_2)}\widehat{\varphi}(k).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Pi} \left(\partial_2 \widehat{u}_3 \psi_m + \widehat{u}_3 \partial_2 \psi_m\right) \overline{\widehat{\varphi}(k)} dx_1 dx_2 dk = 0.$$

Ввиду произвольности $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ получаем

$$\int\limits_{U} \left(\partial_2 \widehat{u}_3 \psi_m + \widehat{u}_3 \partial_2 \psi_m\right) dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{при п.в. } k \in \mathbb{R},$$

и

$$\text{при п.в. } k \in \mathbb{R} \qquad \int\limits_{U} \left(\partial_2 \widehat{u}_3 \psi + \widehat{u}_3 \partial_2 \psi\right) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall\, \psi \in W_2^1(U).$$

Аналогично, подставляя в (4.2) поля вида $z = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$ при $\omega \in W_2^1(\Pi)$, получим

$$\text{при п.в. } k \in \mathbb{R} \quad \int\limits_{U} \left(\partial_1 \widehat{u}_3 \psi + \widehat{u}_3 \partial_1 \psi\right) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall\, \psi \in W_2^1(U).$$

Отсюда вытекает, что $\widehat{u}_3|_{\partial U} = 0$ при почти всех $k \in \mathbb{R}$. Тем самым выполняется (4.1). □

Лемма 4.2. *Пусть* $u \in \Phi(\tau, \mathbb{1})$, $\operatorname{rot} u \in L(\nu)$. *Тогда* $u_3 \equiv 0$.

Доказательство. Условие $\operatorname{rot} u \in L(\nu)$ означает, что

$$\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 = \partial_1 \varphi, \quad \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 = \partial_2 \varphi$$

при некоторой $\varphi \in \mathcal{H}(\nu)$. Снова сделаем преобразование Фурье по x_3. Получим

$$\partial_2 \widehat{u}_3 - ik \widehat{u}_2 = \partial_1 \widehat{\varphi}, \quad ik \widehat{u}_1 - \partial_1 \widehat{u}_3 = \partial_2 \widehat{\varphi}, \tag{4.3}$$

где $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}(\nu)$. Кроме того, по условию

$$\int\limits_{\Pi} \langle u, \nabla \omega \rangle dx = 0 \quad \forall\, \omega \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

откуда

$$\int\limits_{\Pi} \left(\widehat{u}_1 \partial_1 \overline{\widehat{\omega}} + \widehat{u}_2 \partial_2 \overline{\widehat{\omega}} - ik \widehat{u}_3 \overline{\widehat{\omega}}\right) dx_1 dx_2 dk = 0 \quad \forall\, \omega \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Аналогично рассуждениям в доказательстве леммы 3.3 или леммы 4.1 выводим, что

$$\text{при п.в. } k\in\mathbb{R} \qquad \int\limits_U (\widehat{u}_1\partial_1\psi+\widehat{u}_2\partial_2\psi-ik\widehat{u}_3\psi)\,dx_1dx_2=0 \quad \forall\ \psi\in\mathring{W}_2^1(U).$$

Домножая это равенство на ik и используя формулы (4.3), получим

$$\int\limits_U \big((\partial_1\widehat{u}_3+\partial_2\widehat{\varphi})\partial_1\psi+(\partial_2\widehat{u}_3-\partial_1\widehat{\varphi})\partial_2\psi+k^2\widehat{u}_3\psi\big)\,dx_1dx_2=0.$$

С другой стороны, при почти всех $k\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_U (\partial_2\widehat{\varphi}\,\partial_1\psi-\partial_1\widehat{\varphi}\,\partial_2\psi)\,dx_1dx_2=0 \qquad \forall\ \psi\in C_0^\infty(U),$$

и следовательно, для любой $\psi\in\mathring{W}_2^1(U)$. Поэтому

$$\text{при п.в. } k\in\mathbb{R} \quad \int\limits_U \big(\partial_1\widehat{u}_3\partial_1\psi+\partial_2\widehat{u}_3\partial_2\psi+k^2\widehat{u}_3\psi\big)\,dx_1dx_2=0 \quad \forall\,\psi\in\mathring{W}_2^1(U).$$

В силу предыдущей леммы $\widehat{u}_3(\,\cdot\,,\,\cdot\,,k)\in\mathring{W}_2^1(U)$ при почти всех $k\in\mathbb{R}$. Подставляя в последнее равенство $\psi=\overline{\widehat{u}_3}$, получим $\widehat{u}_3=0$ почти везде, и следовательно, $u_3\equiv 0$. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть* $u\in\Phi(\tau,\varepsilon)$, ε *удовлетворяет условию* (0.2), $\operatorname{rot}u\in L(\nu)$. *Тогда* $u\in K(\tau)$.

Доказательство. Положим $u_0=P(\tau,\mathbb{1})u$. По лемме 2.1 $u_0\in\Phi(\tau,\mathbb{1})$ и

$$u=u_0+\nabla\varphi,\quad \varphi\in\mathring{W}_2^1(\Pi),\quad \operatorname{rot}u=\operatorname{rot}u_0.$$

По лемме 4.2 отсюда вытекает, что $(u_0)_3=0$. Следовательно,

$$\int\limits_\Pi ((u_0)_1\partial_1\omega+(u_0)_2\partial_2\omega)\,dx=0 \quad \forall\ \omega\in\mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Отсюда точно так же, как при доказательстве леммы 3.3, вытекает, что

$$\text{при п.в. } x_3\in\mathbb{R} \quad \int\limits_U ((u_0)_1\partial_1\psi+(u_0)_2\partial_2\psi)dx_1dx_2=0 \quad \forall\ \psi\in\mathring{W}_2^1(U).$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Pi \varepsilon\langle u_0,\nabla\psi\rangle dx=0 \quad \forall\ \psi\in\mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Кроме того, по условию

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon\langle u, \nabla\psi\rangle dx = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

откуда

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon\langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle dx = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Подставляя $\psi = \varphi$, получаем $\varphi \equiv 0$. Тем самым $u = u_0$ и $u_3 = 0$. Теперь согласно следствию 3.4 $u \in K(\tau)$. $\square$

§5. Инвариантные подпространства оператора Максвелла

Введем пространства

$$V_D := \big(L(\tau) \cap J(\tau, \varepsilon)\big) \oplus K(\nu), \quad V_N := K(\tau) \oplus \big(L(\nu) \cap J(\nu, \mu)\big).$$

Тогда

$$J(\tau, \varepsilon) \oplus J(\nu, \mu) = V_D \oplus_{\varepsilon,\mu} V_N. \tag{5.1}$$

Напомним, что в силу леммы 2.3 оператор Максвелла ограниченно обратим.

Лемма 5.1. *V_N — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{M}^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V_N$, то есть

$$f \in K(\tau), \quad g \in L(\nu) \cap J(\nu, \mu).$$

Пусть

$$\mathcal{M}^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Тогда $v \in \Phi(\nu, \mu)$, $i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v = f$. При этом $(\operatorname{rot} v)_3 = 0$. По лемме 3.5 $v \in L(\nu) \cap J(\nu, \mu)$. Кроме того, $u \in \Phi(\tau, \varepsilon)$, $-i\mu^{-1} \operatorname{rot} u = g$, откуда $\operatorname{rot} u \in L(\nu)$. По лемме 4.3 $u \in K(\tau)$. Тем самым $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V_N$. $\square$

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть ε, μ — скалярные функции, удовлетворящие* (0.2). *Тогда разложение* (5.1) *приводит оператор Максвелла $\mathcal{M}$.*

Положим

$$\mathcal{M}_D := \mathcal{M}|_{V_D}, \quad \mathcal{M}_N := \mathcal{M}|_{V_N}.$$

Тогда

$$\mathcal{M}_D = \begin{pmatrix} 0 & iR_D(\nu) \\ -iR_D(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & iR_N(\nu) \\ -iR_N(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} &R_D(\tau) = \mu^{-1}\operatorname{rot}, && \operatorname{Dom} R_D(\tau) = L(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon), \\ &R_D(\nu) = \varepsilon^{-1}\operatorname{rot}, && \operatorname{Dom} R_D(\nu) = K(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu), \\ &R_N(\tau) = \mu^{-1}\operatorname{rot}, && \operatorname{Dom} R_N(\tau) = K(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon), \\ &R_N(\nu) = \varepsilon^{-1}\operatorname{rot}, && \operatorname{Dom} R_N(\nu) = L(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu). \end{aligned}$$

Ясно, что операторы $R_D(\tau)$ и $R_D(\nu)$ взаимно сопряжены, и что операторы $R_N(\tau)$ и $R_N(\nu)$ взаимно сопряжены. Отметим, что разложение (5.1) приводит также оператор $\mathcal{M}^2$, при этом

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_D^2 \oplus \mathcal{M}_N^2, \tag{5.2}$$

и

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^2 \in \sigma(\mathcal{M}_D^2) \cup \sigma(\mathcal{M}_N^2).$$

§6. Оператор $\mathcal{M}_D^2$

По построению

$$\mathcal{M}_D^2 = \begin{pmatrix} R_D(\nu)R_D(\tau) & 0 \\ 0 & R_D(\tau)R_D(\nu) \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

В силу следствия 2.4 ядра операторов $R_D(\tau)$ и $R_D(\nu)$ тривиальны, поэтому произведения $R_D(\nu)R_D(\tau)$ и $R_D(\tau)R_D(\nu)$ унитарно эквивалентны. Оператор $\mathcal{M}_D^2$ унитарно эквивалентен ортогональной сумме двух операторов $R_D(\tau)R_D(\nu)$, и

$$\sigma(\mathcal{M}_D^2) = \sigma(R_D(\tau)R_D(\nu)).$$

Далее, положительный самосопряженный оператор $R_D(\tau)R_D(\nu)$ отвечает квадратичной форме a_D в пространстве $K(\nu, \mu)$,

$$a_D[v] = \|R_D(\nu)v\|^2_{L_2(\Pi,\varepsilon)} = (\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v)_{L_2(\Pi)},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} a_D &= K(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu) \\ &= \left\{ v = \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \psi \in \mathcal{H}(\tau) : \partial_1\partial_3\psi, \partial_2\partial_3\psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi \in L_2(\Pi) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы установить унитарную эквивалентность оператора $R_D(\tau)R_D(\nu)$ и некоторого скалярного эллиптического оператора, введем вспомогательный оператор

$$B_D := \sqrt{-\Delta_D}, \quad \operatorname{Dom} B_D = \mathring{W}_2^1(U),$$

где $-\Delta_D$ — оператор Лапласа задачи Дирихле в $L_2(U)$. Ясно, что

$$\operatorname{Ran} B_D = L_2(U)$$

и

$$\|B_D\varphi\|_{L_2(U)} = \|\nabla\varphi\|_{L_2(U)} \quad \forall\, \varphi \in \mathring{W}_2^1(U). \tag{6.2}$$

Лемма 6.1. *Пусть* $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$. *Тогда*

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi \in L_2(\Pi) \quad \Longleftrightarrow \quad B_D\psi \in \mathcal{H}(\tau), \tag{6.3}$$

и в этой ситуации

$$\begin{aligned}\big(&\varepsilon^{-1}(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi\big)_{L_2(\Pi)} \\ &= \big(\varepsilon^{-1}\partial_1(B_D\psi), \partial_1(B_D\psi)\big)_{L_2(\Pi)} + \big(\varepsilon^{-1}\partial_2(B_D\psi), \partial_2(B_D\psi)\big)_{L_2(\Pi)}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Доказательство. Поскольку $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$, то $\psi(\,\cdot\,,\,\cdot\,,x_3) \in \mathring{W}_2^1(U)$ при почти всех $x_3 \in \mathbb{R}$. Следовательно, при почти всех $x_3 \in \mathbb{R}$ имеют место эквивалентности

$$(\partial_1^2+\partial_2^2)\psi \in L_2(U) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \in \operatorname{Dom} B_D^2 \quad \Longleftrightarrow \quad B_D\psi \in \operatorname{Dom} B_D = \mathring{W}_2^1(U),$$

откуда вытекает (6.3), и

$$\|(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi\|_{L_2(U)} = \|B_D(B_D\psi)\|_{L_2(U)} = \|\nabla(B_D\psi)\|_{L_2(U)}$$

в силу (6.2). Возводя последнее равенство в квадрат и интегрируя по x_3 с весом $\varepsilon^{-1}(x_3)$, получим (6.4). □

Лемма 6.2. *Пусть* $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$. *Тогда*

$$\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\tau) \quad \text{и} \quad (B_D\psi)\widehat{\ } = B_D\widehat{\psi}.$$

Эта лемма очевидна.

Лемма 6.3. *Пусть* $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$, $\partial_1\partial_3\psi, \partial_2\partial_3\psi \in L_2(\Pi)$. *Тогда*

$$\partial_3\psi \in \mathcal{H}(\tau), \quad \partial_3(B_D\psi) \in L_2(\Pi), \quad \partial_3(B_D\psi) = B_D(\partial_3\psi).$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ функции ψ. Ясно, что

$$\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\tau) \quad \text{и} \quad k\partial_1\widehat{\psi}, k\partial_2\widehat{\psi} \in L_2(\Pi).$$

Отсюда следует, что $k\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\tau)$, поэтому и $\partial_3\psi \in \mathcal{H}(\tau)$. Далее,

$$k(B_D\widehat{\psi}) \in L_2(\Pi) \quad \Longrightarrow \quad \partial_3(B_D\psi) \in L_2(\Pi),$$
$$(\partial_3(B_D\psi))\widehat{\ } = ikB_D\widehat{\psi} = B_D(ik\widehat{\psi}) = (B_D(\partial_3\psi))\widehat{\ },$$

откуда $\partial_3(B_D\psi) = B_D(\partial_3\psi)$. □

Объединяя леммы 6.1 и 6.3, получаем для функции

$$v = \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Dom} a_D$$

цепочку равенств

$$a_D[v] = (\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v)_{L_2(\Pi)} = \int\limits_\Pi \varepsilon^{-1}\left(|\partial_1\partial_3\psi|^2 + |\partial_2\partial_3\psi|^2 + |\partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi|^2\right) dx$$
$$= \int\limits_\Pi \varepsilon^{-1}\left(|\partial_3 B_D\psi|^2 + |\partial_1 B_D\psi|^2 + |\partial_2 B_D\psi|^2\right) dx = \int\limits_\Pi \varepsilon^{-1}\left|\nabla(B_D\psi)\right|^2 dx.$$

Теорема 6.4. *Оператор $R_D(\tau)R_D(\nu)$ унитарно эквивалентен самосопряженному оператору*

$$\mathcal{A}_D = -\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\cdot))$$

с краевым условием Дирихле в $L_2(\Pi,\mu)$.

Доказательство. Оператор $R_D(\tau)R_D(\nu)$ соответствует квадратичной форме a_D в гильбертовом пространстве $K(\nu,\mu)$. Оператор, сопоставляющий

$$v = \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto B_D\psi, \quad \psi \in \mathcal{H}(\tau),$$

осуществляет изоморфизм $K(\nu,\mu) \to L_2(\Pi,\mu)$,

$$\int\limits_\Pi \mu\left(|\partial_1\psi|^2 + |\partial_2\psi|^2\right) dx = \int\limits_\Pi \mu|B_D\psi|^2 dx.$$

При этом в силу лемм 6.1 и 6.3 область определения $\operatorname{Dom} a_D$ переходит в множество $\mathring{W}_2^1(\Pi)$, и

$$a_D[v] = \int\limits_\Pi \varepsilon^{-1}\left|\nabla(B_D\psi)\right|^2 dx.$$

Тем самым $R_D(\tau)R_D(\nu)$ унитарно эквивалентен самосопряженному оператору, отвечающему квадратичной форме

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon^{-1} |\nabla\varphi|^2 \, dx, \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Pi,\mu)$, то есть оператору $\mathcal{A}_D$. $\square$

§7. Оператор $\mathcal{M}_N^2$

Изучение оператора $\mathcal{M}_N^2$ проводится аналогично изучению $\mathcal{M}_D^2$. По построению

$$\mathcal{M}_N^2 = \begin{pmatrix} R_N(\nu)R_N(\tau) & 0 \\ 0 & R_N(\tau)R_N(\nu) \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

В силу следствия 2.4 ядра операторов $R_N(\tau)$ и $R_N(\nu)$ тривиальны, поэтому произведения $R_N(\nu)R_N(\tau)$ и $R_N(\tau)R_N(\nu)$ унитарно эквивалентны, и оператор $\mathcal{M}_N^2$ унитарно эквивалентен ортогональной сумме двух операторов $R_N(\tau)R_N(\nu)$,

$$\sigma(\mathcal{M}_N^2) = \sigma(R_N(\tau)R_N(\nu)).$$

Положительный самосопряженный оператор $R_N(\tau)R_N(\nu)$ отвечает квадратичной форме a_N в пространстве $K(\tau,\varepsilon)$,

$$a_N[u] = \|R_N(\nu)u\|^2_{L_2(\Pi,\mu)} = (\mu^{-1}\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u)_{L_2(\Pi)},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} a_N &= K(\tau) \cap \Phi(\tau,\varepsilon) \\ &= \left\{ u = \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \psi \in \mathcal{H}(\nu) : \partial_1\partial_3\psi, \partial_2\partial_3\psi, (\partial_1^2+\partial_2^2)\psi \in L_2(\Pi) \right\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим оператор Лапласа задачи Неймана $-\Delta_N$ в гильбертовом пространстве

$$\left\{ \varphi \in L_2(U) : \int\limits_U \varphi(x)\, dx_1 dx_2 = 0 \right\},$$

и положим

$$B_N := \sqrt{-\Delta_N}, \quad \operatorname{Dom} B_N = \left\{ \varphi \in W_2^1(U) : \int\limits_U \varphi(x)\, dx_1 dx_2 = 0 \right\}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{Ran} B_N = \left\{ \varphi \in L_2(U) : \int\limits_U \varphi(x)\, dx_1 dx_2 = 0 \right\}, \quad \|B_N\varphi\|_{L_2(U)} = \|\nabla\varphi\|_{L_2(U)}.$$

Следующие три леммы аналогичны леммам 6.1, 6.2, 6.3.

Лемма 7.1. *Пусть* $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$. *Тогда*

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi \in L_2(\Pi) \quad \Longleftrightarrow \quad B_N\psi \in \mathcal{H}(\nu),$$

и

$$\begin{aligned}&\big(\mu^{-1}(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi\big)_{L_2(\Pi)}\\ &\qquad = \big(\mu^{-1}\partial_1(B_N\psi), \partial_1(B_N\psi)\big)_{L_2(\Pi)} + \big(\mu^{-1}\partial_2(B_N\psi), \partial_2(B_N\psi)\big)_{L_2(\Pi)}.\end{aligned}$$

Лемма 7.2. *Пусть* $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$. *Тогда*

$$\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\nu) \quad \text{и} \quad (B_N\psi)\widehat{\ } = B_N\widehat{\psi}.$$

Лемма 7.3. *Пусть* $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$, $\partial_1\partial_3\psi, \partial_2\partial_3\psi \in L_2(\Pi)$. *Тогда*

$$\partial_3\psi \in \mathcal{H}(\nu), \quad \partial_3(B_N\psi) \in L_2(\Pi), \quad \partial_3(B_N\psi) = B_N(\partial_3\psi).$$

Оператор, сопоставляющий

$$u = \begin{pmatrix} \partial_2\varphi \\ -\partial_1\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto B_N\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}(\nu),$$

осуществляет изоморфизм

$$K(\tau, \varepsilon) \to \Big\{ w \in L_2(\Pi, \varepsilon) : \int\limits_U w(x)\, dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{п.в.} \quad x_3 \in \mathbb{R} \Big\}.$$

При этом

$$\int\limits_\Pi \varepsilon\left(|\partial_1\varphi|^2 + |\partial_2\varphi|^2\right) dx = \int\limits_\Pi \varepsilon|B_N\varphi|^2 dx$$

и

$$\begin{aligned}a_N[u] &= \int\limits_\Pi \mu^{-1}\left(|\partial_1\partial_3\varphi|^2 + |\partial_2\partial_3\varphi|^2 + |\partial_1^2\varphi + \partial_2^2\varphi|^2\right) dx\\ &= \int\limits_\Pi \mu^{-1}\left(|\partial_3 B_N\varphi|^2 + |\partial_1 B_N\varphi|^2 + |\partial_2 B_N\varphi|^2\right) dx = \int\limits_\Pi \mu^{-1}\,|\nabla(B_N\varphi)|^2\, dx.\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 7.4. *Оператор* $R_N(\tau)R_N(\nu)$ *унитарно эквивалентен самосопряженному оператору*

$$\mathcal{A}_N = -\varepsilon^{-1}(\operatorname{div}(\mu^{-1}\nabla\,\cdot))$$

с краевым условием Неймана в гильбертовом пространстве (1.1).

Из разложения (5.2), соотношений (6.1), (7.1) и теорем 6.4 и 7.4 вытекает теорема 1.3.

§8. Абсолютная непрерывность спектра

В этом параграфе мы обсудим ситуацию, когда коэффициенты ε и μ (не зависящие от поперечных переменных) периодичны вдоль оси цилиндра. Цель — доказать теорему 1.5.

Мы будем использовать следующий известный факт. Пусть дан дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами. Рассмотрим его сужение на ячейку периодов с квазипериодическими граничными условиями. Предположим, что соответствующая резольвента компактна в пространстве L_2 на ячейке периодов. Тогда в спектре исходного оператора сингулярно непрерывная компонента отсутствует (см. [10, 6] или [11]).

Кроме того, нам понадобится

Теорема 8.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, $\partial U \in \mathrm{Lip}$. Пусть V — вещественнозначная функция в цилиндре $\Pi = U \times \mathbb{R}$,*

$$V(x_1, x_2, x_3 + a) = V(x_1, x_2, x_3) \text{ почти везде}, \ V \in L_r\left((0, a), L_2(U)\right), \quad r > 1.$$

Тогда спектры операторов Шрёдингера $H = -\Delta + V$ задач Дирихле и Неймана в $L_2(\Pi)$ абсолютно непрерывны.

Приведем также результат про оператор Шрёдингера с третьим краевым условием.

Теорема 8.2. *Пусть U и V удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Пусть σ — вещественная функция на границе $\partial\Pi$, не зависящая от x_3, и*

$$\sigma \in L_r(\partial U), \quad r > 1.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$h[u] = \int\limits_{\Pi} \left(|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2\right) dx + \int\limits_{\partial\Pi} \sigma(x_1, x_2)|u(x)|^2 dS(x),$$

$$\operatorname{Dom} h = W_2^1(\Pi).$$

Тогда спектр самосопряженного оператора, отвечающего квадратичной форме h, абсолютно непрерывен.

Теоремы 8.1 и 8.2 содержатся в работе [5, см. теорема 3.3, следствия 3.4 и 3.5, и §7.1].

Лемма 8.3. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \mathrm{Lip}$. Пусть коэффициенты ε и μ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям (0.1), (0.2) и (0.3) при некотором $a > 0$, и $\varepsilon, \mu \in W^2_{r,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $r > 1$. Тогда спектр оператора $\mathcal{A}_D$, определенного в теореме 1.3, абсолютно непрерывен.*

Доказательство. Достаточно показать, что в спектре оператора $\mathcal{A}_D$ нет собственных значений. Предположим, что функция $\varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi)$ и число λ таковы, что

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\varepsilon^{-1}\nabla\varphi\right) = \lambda\mu\varphi, \\ \varphi|_{\partial\Pi} = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Введем функцию $f(x) = \varepsilon(x_3)^{-1/2}\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{\nabla\varphi}{\varepsilon} = \frac{\nabla f}{\varepsilon^{1/2}} + \frac{\varepsilon'(x_3) f e_3}{2\varepsilon^{3/2}},$$

и уравнение (8.1) переписывается как

$$-\frac{\Delta f}{\varepsilon^{1/2}} - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon^{3/2}}\right)' f = \lambda\mu\varepsilon^{1/2} f.$$

Следовательно, функция $f \in \mathring{W}_2^1(\Pi)$ является собственной функцией (отвечающей собственному числу ноль) оператора Шрёдингера в цилиндре с краевым условием Дирихле и с периодическим потенциалом

$$V = -\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon^{3/2}}\right)' - \lambda\mu\varepsilon.$$

При этом $V \in L_{r,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ в силу условия $\varepsilon, \mu \in W^2_{r,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. По теореме 8.1 отсюда вытекает, что $f \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$. $\square$

Лемма 8.4. *В условиях леммы* 8.3 *спектр оператора* $\mathcal{A}_N$, *определенного в теореме* 1.3, *абсолютно непрерывен.*

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме. Предположим, что функция $\psi \in W_2^1(\Pi)$ и число λ таковы, что

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\mu^{-1}\nabla\psi\right) = \lambda\varepsilon\psi, \\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Pi} = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Введем функцию $g(x) = \mu(x_3)^{-1/2}\psi(x)$. Тогда

$$\begin{cases} -\Delta g + Wg = 0, \\ \left.\frac{\partial g}{\partial\nu}\right|_{\partial\Pi} = 0, \end{cases}$$

где

$$W = -\mu^{1/2}\left(\frac{\mu'}{2\mu^{3/2}}\right)' - \lambda\mu\varepsilon \in L_{r,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

Функция $g \in W_2^1(\Pi)$ является собственной функцией оператора Шрёдингера в цилиндре с краевым условием Неймана и с периодическим потенциалом W. По теореме 8.1 отсюда вытекает, что $g \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$. $\square$

Теперь из лемм 8.3 и 8.4 и теоремы 1.3 вытекает теорема 1.5.

Замечание 8.5. В случае "хорошей" границы теорема 1.5 вытекает из результатов работы [7]. В этой работе рассмотрен оператор Максвелла со скалярными коэффициентами в цилиндре $\Pi = U \times \mathbb{R}$. Про сечение $U \subset \mathbb{R}^2$ предполагалось, что это — ограниченная область с C^2-гладкой границей, или что U ограничена, выпукла и граница ∂U — кусочно C^2-гладкая. Доказано (см. [7, теорема 1.4 и замечание 1.9]), что абсолютная непрерывность оператора Максвелла вытекает из отсутствия собственных значений в спектре матричного оператора Шрёдингера $-\Delta + V$, действующего на функции $\Phi \in W_2^1(\Pi, \mathbb{C}^6)$ с краевыми условиями

$$\Phi_\tau^{(1)}\Big|_{\partial\Pi} = 0, \qquad \Phi_\nu^{(2)}\Big|_{\partial\Pi} = 0,$$
$$\Big(\partial_\nu \Phi^{(1)} + (\Sigma\Phi)^{(1)}\Big)_\nu\Big|_{\partial\Pi} = 0, \quad \Big(\partial_\nu \Phi^{(2)} + (\Sigma\Phi)^{(2)}\Big)_\tau\Big|_{\partial\Pi} = 0,$$

где $\Phi^{(1)} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, $\Phi^{(2)} = (\Phi_4, \Phi_5, \Phi_6)$,

$$V = \begin{pmatrix} W(\varepsilon) - \varepsilon\mu\lambda^2 I_3 & -2i\lambda F \\ 2i\lambda F & W(\mu) - \varepsilon\mu\lambda^2 I_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$W_{jk}(\mu) = \big((2\mu)^{-1}\Delta\mu - (4\mu^2)^{-1}|\nabla\mu|^2\big)\delta_{jk} + \mu^{-2}\partial_j\mu\partial_k\mu - \mu^{-1}\partial_j\partial_k\mu,$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3(\varepsilon\mu)^{1/2} & \partial_2(\varepsilon\mu)^{1/2} \\ \partial_3(\varepsilon\mu)^{1/2} & 0 & -\partial_1(\varepsilon\mu)^{1/2} \\ -\partial_2(\varepsilon\mu)^{1/2} & \partial_1(\varepsilon\mu)^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \big(\kappa(x) + (2\varepsilon)^{-1}\partial_\nu\varepsilon\big)\, I_3 & 0 \\ 0 & \kappa(x)P_{e_3^\perp} - (2\mu)^{-1}\partial_\nu\mu I_3 \end{pmatrix},$$

$\kappa(x_1, x_2, x_3)$ — кривизна кривой ∂U в точке (x_1, x_2), $P_{e_3^\perp}$ — проектор на плоскость, ортогональную оси цилиндра. Если ε и μ зависят только от x_3, то $\partial_\nu\varepsilon = 0$, $\partial_\nu\mu = 0$ и коэффициент в краевом условии $\Sigma(x)$, наоборот, не зависит от x_3. Тем самым этот оператор попадает под действие теоремы 8.2 (в теореме 8.2 утверждается отсутствие собственных значений скалярного оператора Шрёдингера; доказательство переносится на случай матричного оператора Шрёдингер дословно). Мы снова получаем, что при выполнении условия (1.2) спектр оператора Максвелла абсолютно непрерывен. Теорема 1.5 более общая, так как требует от сечения U только липшицевость границы.

Замечание 8.6. Пусть коэффициенты ε и μ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям (0.1), (0.2), (0.3) и, кроме того, четные,

$$\varepsilon(-x_3) = \varepsilon(x_3), \quad \mu(-x_3) = \mu(x_3).$$

Тогда уравнения (8.1) и (8.2) имеют только тривиальные решения уже при $\varepsilon, \mu \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ в силу [8, теорема 2.4 и замечание 2.3]. В этой ситуации и теорема 1.5 выполняется при более слабых, чем (1.2), условиях гладкости на коэффициенты: $\varepsilon, \mu \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

Список литературы

[1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и анализ **1** (1989), №1, 96–110.

[2] Дунаев К. О., *Оператор Максвелла с периодическими характеристиками среды*, дипломная работа, Физ. фак. ЛГУ, Л., 1989.

[3] Филонов Н., *Об одном неравенстве на собственные числа задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа*, Алгебра и анализ **16** (2004), №2, 172–176.

[4] Филонов Н., *Оператор Максвелла в цилиндре с коэффициентами, не зависящими от продольной переменной*, Алгебра и анализ **30** (2018), №3, 210–249.

[5] Качковский И., Филонов Н., *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 133–152.

[6] Filonov N., Sobolev A. V., *Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals*, Зап. науч. семин. ПОМИ **318** (2004), 298–307.

[7] Прохоров А., Филонов Н., *Оператор Максвелла с периодическими коэффициентами в цилиндре*, Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 182–196.

[8] Тихомиров М., Филонов Н., *Абсолютная непрерывность “четного” периодического оператора Шрёдингера с негладкими коэффициентами*, Алгебра и анализ **16** (2004), №3, 201–210.

[9] Friedlander L., *Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. **116** (1991), no. 2, 153–160.

[10] Gérard G., Nier F., *The Mourre theory for analytically fibered operators*, J. Funct. Anal. **152** (1998), no. 1, 202–219.

[11] Kuchment P., *An overview of periodic elliptic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (2016), no. 3, 343–414.

[12] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика.*VIII. *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. Стеклова РАН,
Фонтанка, д. 27, 191023, С.-Петербург;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: filonov@pdmi.ras.ru

Поступило 31 августа 2019 г.