ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2019, том 55, № 8, с. 1045–1050

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

БИФУРКАЦИЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СКОРОСТИ

© 2019 г. Ю. Н. Бибиков, В. Р. Букаты

Изучается бифуркация при периодических возмущениях осциллятора, восстанавливающая сила которого зависит от скорости движения. Методом разделения переменных выводится бифуркационное уравнение, каждому положительному корню которого соответствует инвариантный двумерный тор (замкнутая траектория в автономном случае), стягивающийся в положение равновесия, когда малый параметр стремится к нулю. Для доказательств используются методы теории Крылова–Боголюбова при исследовании периодических возмущений или теорема о неявной функции в автономном случае.

DOI: 10.1134/S0374064119080028

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{p/q} + ax^m\dot{x} = X(x, \dot{x}, t, \varepsilon),$$

которое будем рассматривать как периодическое по t возмущение уравнения

$$\ddot{x} + x^{p/q} + ax^m\dot{x} = 0$$

(условия, которым должны удовлетворять числа p, q, a, m, ε и функция X, приводятся ниже).

Переменной x целесообразно приписать измерение, равное q, тогда измерение $x^{p/q}$ станет равным p. Потребуем, чтобы измерения всех трёх слагаемых в невозмущённом уравнении были одинаковыми, т.е. равнялись p. Если переменной $y = \dot{x}$ приписать измерение k, то, поскольку измерение x равно q, это означает, что измерение производной функции получается прибавлением к измерению самой функции величины $k - q$. Поэтому измерение переменной $\dot{y} = \ddot{x}$ будет равно $2k - q$, а указанное выше условие примет вид равенств $p = 2k - q = mq + k$, откуда

$$k = (p + q)/2, \quad m = (p - q)/(2q).$$

При этом измерение функции $X(x, \dot{x}, t, \varepsilon)$ должно быть не ниже $p + 1$.

Таким образом, рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{p/q} + ax^{(p-q)/(2q)}\dot{x} = X(x, \dot{x}, t, \varepsilon) \tag{1}$$

при следующих предположениях 1–4.

1. Числа p и q – нечётные взаимно простые (в частности, p/q – несократимая дробь), $p > q > 1$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Разобьём множество чисел p на классы вычетов по модулю $4q$. Иначе говоря, положим $p = \widetilde{p} + 4q\ell$, где $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, а $\widetilde{p}$ нечётно и $\widetilde{p} \in \{q + 2, \ldots, 5q - 2\}$.

В работе рассматривается случай, когда

$$4q + 1 \leqslant \widetilde{p} \leqslant 5q - 2. \tag{2}$$

Остальные случаи могут быть исследованы аналогично (см. п. 4).

2. Функция $X(x,y,t,\varepsilon)$ является достаточно гладкой по x, y, ε в окрестности точки $(x,y,\varepsilon)=(0,0,0)$, непрерывной и периодической по t (в частности, от t не зависящая), $X(0,0,t,\varepsilon)=0$. Обозначим период через ω.

3. Разложение функции $X(x,y,t,\varepsilon)$ по степеням x, y, ε не содержит членов порядка ниже, чем $p+1$, если переменной x приписывать порядок q, переменной y – порядок $(p+q)/2$, а переменной ε – порядок $2(1+\ell)q$.

4. Выполняется неравенство $0<a^2<2(p+q)/q$.

Рассмотрим невозмущённое уравнение (1), т.е. уравнение

$$\ddot{x}+x^{p/q}+ax^{(p-q)/(2q)}\dot{x}=0. \tag{3}$$

При отсутствии малого параметра и $q=1$ устойчивость нулевого решения для стационарных возмущений исследовал А.М. Ляпунов [1].

Уравнение (3) эквивалентно системе

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x^{p/q}-ayx^{(p-q)/(2q)}, \tag{4}$$

траектории которой определяются дифференциальным уравнением

$$y\,dy+(x^{p/q}+ax^{(p-q)/(2q)}y)\,dx=0.$$

Интегрируя это уравнение при помощи подстановки $y=zx^{(p+q)/(2q)}$, находим

$$\frac{p+q}{2}y^2+aqx^{(p+q)/(2q)}y+qx^{(p+q)/q}=D\exp\left\{\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{q^{-1}(p+q)y+ax^{(p+q)/(2q)}}{x^{(p+q)/(2q)}\sqrt{\Delta}}\right\}, \tag{5}$$

где D – положительная постоянная, $\Delta=2(p+q)/q-a^2$. Согласно условию 4 имеем $\Delta>0$.

Так как $\Delta>0$, то функция в левой части является определённо положительной. Если при этом $(p+q)/2$ – чётное число, то кривые, определяемые уравнением (5), – замкнутые, охватывающие начало координат.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x^{p/q}-ayx^{(p-q)/(2q)}+X(x,y,t,\varepsilon). \tag{6}$$

Возможны только случаи: а) число $(p+q)/2$ чётно, или, равносильно, $(p-q)/2$ нечётно, б) число $(p+q)/2$ нечётно, или, равносильно, $(p-q)/2$ чётно.

Как отмечалось, в случае а) особая точка $(0,0)$ системы (4) является центром. В случае б) особая точка $(0,0)$ – фокус.

Заметим, что когда $\Delta\leqslant 0$, то особая точка $(0,0)$ системы (4) является узлом (устойчивым при $a>0$ и неустойчивым при $a<0$), если $(p+q)/2$ нечётно, и седлом, если $(p+q)/2$ чётно.

Таким образом, уравнение (3) является осциллятором, только если $\Delta>0$, а $(p+q)/2$ – чётное число. Именно этот случай мы рассматриваем в дальнейшем.

В работе приводятся условия, при выполнении которых уравнение (1) при каждом достаточно малом $\varepsilon>0$ имеет наряду с положением равновесия $x=0$ инвариантный двумерный тор (замкнутую траекторию при автономном возмущении). Случай $q=1$ исследован в работе [2], а случай $a=0$ – в работе [5].

2. Бифуркационное уравнение. Введём в рассмотрение функции $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$, удовлетворяющие системе (4), т.е.

$$C'(\varphi)=S(\varphi),\quad S'(\varphi)=-C^{p/q}(\varphi)-aSC^{(p-q)/(2q)}(\varphi). \tag{7}$$

В случае $q=1$, $a=0$ функции C, S рассматривались А.М. Ляпуновым [1].

Положим $D = (p+q)/2$, $C(0) = 0$. Тогда в силу (5) будем иметь

$$\frac{p+q}{2} S^2 + aqSC^{(p+q)/(2q)} + qC^{(p+q)/q} =$$

$$= \frac{p+q}{2} \exp\left\{ \frac{2a}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{q^{-1}(p+q)S + aC^{(p+q)/(2q)}}{C^{(p+q)/(2q)}\sqrt{\Delta}} \right\} = B(C,S) > 0.$$

Следовательно, $S(0) = e^{\pi a/\sqrt{\Delta}}$. Функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ – периодические. Обозначим их период через ω. Введём в системе (6) координаты (r,φ), $r > 0$, согласно формулам

$$x = r^q C(\varphi), \quad y = r^{(p+q)/2} S(\varphi). \tag{8}$$

Получим систему

$$\dot r = \frac{SX(r^qC, r^{(p+q)/2}S, t, \varepsilon)}{r^{-1+(p+q)/2}B(C,S)} = R(r,\varphi,t,\varepsilon),$$

$$\dot\varphi = r^{(p-q)/2} - \frac{qCX(r^qC, r^{(p+q)/2}S, t, \varepsilon)}{r^{(p+q)/2}B(C,S)} = r^{(p-q)/2} + \Phi(r,\varphi,t,\varepsilon). \tag{9}$$

Запишем функцию $X(x,\dot x,t,\varepsilon)$ в виде

$$X = a(t)x^n + b(t)x^m\dot x + a_1(t)\varepsilon x^r + b_1(t)\varepsilon\dot x + c(t)\dot x^2 + \ldots \tag{10}$$

В работе [5] показано, что если переменным x, $\dot x$ и ε в разложении (10) приписывать указанные выше измерения, то при выполнении условия (2) функция X представима в виде

$$X = b(t)x^{2(1+\ell)}\dot x + b_1(t)\varepsilon\dot x + X^*(x,\dot x,t,\varepsilon), \tag{11}$$

где $X^* = o(x^{2(1+\ell)q}\dot x + \varepsilon\dot x)$.

Из соотношений (11), (8) и (9) следует, что

$$R = d(\varphi)b(t)r^{2(1+\ell)q+1} + \varepsilon d_1(\varphi)b_1(t)r + R^*, \tag{12}$$

где порядок остатка R^* превышает порядок выписанных членов,

$$d(\varphi) = -B^{-1}C^{2(1+\ell)q}S^2, \quad d_1(\varphi) = -B^{-1}S^2$$

и порядок функции R на единицу больше порядка функции Φ. Здесь и в дальнейшем функции, зависящие от переменной φ или t, – периодические с периодами Ω и ω соответственно.

Лемма 1. *Существует замена*

$$r = \rho + f(\varphi)\rho^{2(1+\ell)q+1-(p-q)/2} + F(\varphi,t)\rho^{2(1+\ell)q+1} + \varepsilon f_1(\varphi)\rho^{1-(p-q)/2} + \varepsilon F_1(\varphi,t)\rho, \quad \rho > 0, \tag{13}$$

приводящая систему (9) к виду

$$\dot\rho = g\rho^{2(1+\ell)q+1} + \varepsilon g_1\rho + P(\rho,\varphi,t,\varepsilon), \quad \dot\varphi = \rho^{(p-q)/2} + \Psi(\rho,\varphi,t,\varepsilon), \tag{14}$$

где $g = \overline{db}$, $g_1 = \overline{d}_1\overline{b}_1$, функция P имеет тот же порядок, что и остаток R^* в (12), правая часть второго уравнения системы (14) получается из правой части второго уравнения системы (9) с помощью подстановки (8). (Здесь и далее черта обозначает среднее значение функции.)

Эта лемма доказывается точно так же, как лемма 1 из работы [5].

Уравнение
$$g\rho^{2(1+\ell)q}+\varepsilon g_1=0 \tag{15}$$
называется *бифуркационным уравнением.* Далее мы показываем, что каждому положительному корню этого уравнения соответствует, если ε достаточно мало, инвариантный двумерный тор (замкнутая траектория, если возмущение автономно).

3. Бифуркация положения равновесия. Пусть
$$gg_1<0. \tag{16}$$

Тогда $\rho=\varepsilon^{1/(2\gamma)}\alpha>0$, где $\gamma=(1+\ell)q$, а $\alpha=(-g_1/g)^{1/(2\gamma)}$ – положительный корень бифуркационного уравнения.

Выполним замену
$$\rho=\varepsilon^{1/(2\gamma)}(\alpha+z),\quad |z|<\alpha.$$

В результате получим систему
$$\dot z=\varepsilon Mz+\varepsilon Z(z,\varphi,t,\varepsilon),\quad \dot\varphi=\varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}\alpha^{(p-q)/2}+\Gamma(z,\varphi,t,\varepsilon), \tag{17}$$
где $M=-2\gamma g_1\neq 0$, $Z=O(\varepsilon^{1/(2\gamma)}+z^2)$, $\Gamma=O(\varepsilon+\varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}z)$ при $z\to 0$, $\varepsilon\to 0$.

Проблема существования интегрального многообразия системы (17) (в нашем случае инвариантного тора) укладывается в рамки теории Крылова–Боголюбова.

Удобно использовать работу [4]. Система (17) удовлетворяет всем условиям леммы 2.1 этой работы, устанавливающей существование инвариантного многообразия, периодического по t и φ, за исключением условия, что $\Gamma=o(\varepsilon)$ при $z=0$.

Чтобы добиться выполнения этого условия, выделим из функции Γ линейный по ε член $T(\varphi,t)\varepsilon$. Тогда
$$\Gamma(z,\varphi,t,\varepsilon)=T(\varphi,t)\varepsilon+\Theta(z,\varphi,t,\varepsilon),$$
где $\Theta=O(\varepsilon^{1+1/(2\gamma)}+\varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}z)$. Осталось осреднить множитель $T(\varphi,t)$.

Лемма 2. *Существует замена*
$$\varphi=\theta+\varepsilon^{1-(p-q)/(4\gamma)}\sigma(\theta)+\varepsilon\Sigma(\theta,t), \tag{18}$$
приводящая систему (17) к виду
$$\dot z=\varepsilon Mz+\varepsilon Z_1(z,\theta,t,\varepsilon),\quad \dot\theta=\varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}\alpha^{(p-q)/2}+\overline{T}\varepsilon+\Theta_1(z,\theta,t,\varepsilon), \tag{19}$$
где $\Theta_1(0,\theta,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1+1/(2\gamma)})$.

Доказательство. Продифференцируем замену (18) по t с учётом равенств (17) и (19). Приравнивая коэффициенты при ε, получаем уравнение
$$T(\theta,t)-\overline{T}=\frac{d\sigma}{d\theta}\alpha^{(p-q)/2}+\frac{\partial\Sigma}{\partial t}. \tag{20}$$

Представим функцию T в виде
$$T=\overline{T}+\widehat{T}(\theta)+\widetilde{T}(\theta,t),$$
где $\widehat{T}$ равно среднему значению функции $T(\theta,t)-\overline{T}$ по t. Полагая
$$\alpha^{(p-q)/2}\sigma=\int\widehat{T}(\vartheta)\,d\theta,\quad \Sigma=\int\widetilde{T}(\theta,t)\,dt,$$
построим решение уравнения (20), а значит, и требуемую замену (18). Лемма доказана.

Теперь система (19) удовлетворяет условиям леммы 2.1 работы [4]. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Если выполнено условие (16), то при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ уравнение (1) имеет инвариантное многообразие (двумерный тор), определяемое равенством*

$$\rho = \varepsilon^{1/(2(1+\ell)q)}(\alpha + z(\theta, t, \varepsilon))$$

с помощью подстановок (18), (13) и (8).

4. Бифуркационное уравнение в общем случае. Откажемся от условия (2). Используя лемму работы [3] и рассуждая аналогично доказательству леммы 1, несложно убедиться, что справедлива

Лемма 3. *Существует замена*

$$r = \rho + h(\rho, \varphi, t) + \varepsilon f_1(\varphi)\rho^{1-(p-q)/2} + \varepsilon F_1(\varphi, t),$$

приводящая систему (9) к виду

$$\dot\rho = g\rho^{2\mu+1} + \varepsilon g_1\rho + P(\rho, \varphi, t, \varepsilon), \quad \dot\varphi = \rho^{(p-q)/2} + \Psi(\rho, \varphi, t, \varepsilon),$$

где по-прежнему $g_1 = \overline{d}_1\overline{b}_1$, а $g \neq 0$ – некоторая постоянная. При этом если $\overline{b} \neq 0$, то, вообще говоря, $\mu \leqslant \gamma = (1+\ell)q$.

Отличие общего случая от рассмотренного выше состоит в том, что постоянная g подлежит вычислению, а не определяется непосредственно по функции X.

Бифуркационное уравнение (15) принимает вид

$$g\rho^{2\mu} + \varepsilon g_1 = 0.$$

Следовательно, при определении порядков малости мы должны малому параметру приписывать измерение 2μ, а не 2γ.

Остальные рассуждения сохраняют силу при замене γ на μ. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Если $gg_1 < 0$, то в уравнении (1) имеет место бифуркация рождения инвариантного тора при прохождении малого параметра через нулевое значение.*

Замечание. Бифуркационное уравнение можно построить, используя вместо угловых функций, определяемых системой (7), “обычные $\sin$ и $\cos$.” Выполняя в системе (4) замену

$$x = r^q\cos\varphi, \quad y = r^{(p+q)/2}\sin\varphi, \tag{21}$$

придём к системе

$$\dot r = A^{-1}\alpha r^{1+(p-q)/2} + R, \quad \dot\varphi = A^{-1}\beta r^{(p-q)/2} + \Phi, \tag{22}$$

где

$$A = q\cos^2\varphi + \frac{p+q}{2}\sin^2\varphi, \quad \alpha = -\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^{p/q}\varphi + a\sin^2\varphi\cos^{(p-q)/(2q)}\varphi,$$

$$\beta = \frac{p+q}{2}\sin^2\varphi + q\cos^{(p+q)/q}\varphi - aq\sin\varphi\cos^{(p+q)/(2q)}\varphi.$$

При этом $\beta(\varphi) > 0$ согласно условию 4, а функции R и Φ имеют тот же порядок малости, что и в системе (9).

Для вычисления постоянных g и g_1 нужно избавиться от первого слагаемого в первом уравнении системы (22) и сделать постоянным коэффициент при $r^{(p-q)/2}$ во втором уравнении. Первое достигается с помощью линейной замены

$$r = e^{\eta(\varphi)}r_1,$$

где

$$\eta = \int\frac{\alpha(\varphi)}{\beta(\varphi)}\,d\varphi,$$

а второе – заменой угловой переменной $\varphi = \psi + \xi(\psi)$, где ξ – периодическое решение дифференциального уравнения
$$\kappa\xi' = \Xi(\psi + \xi) - \kappa,$$
в котором $\Xi(\varphi) = \beta(\varphi)/A(\varphi)$, κ – некоторая постоянная.

Так как $\beta > 0$ и $A > 0$, то эта замена обратима.

В результате указанных замен получаем систему вида (9), применяя к которой лемму 3, завершаем доказательство теоремы 2.

С теоретической точки зрения замена (8) более удобна, чем замена (21), так как в результате этой замены система (9) получается непосредственно, без дополнительных преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л., 1956. С. 272–331.
2. *Бибиков Ю.Н., Савельева А.Г.* Периодические возмущения неконсервативного центра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 3. С. 302–306.
3. *Бибиков Ю.Н., Плисс В.А., Трушина Н.В.* Об устойчивости нулевого решения существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в случае центра // Вестн. СПбГУ. Сер. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. Вып. 3. С. 394–401.
4. *Hale J.K.* Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. of Math. 1961. V. 73. № 3. P. 496–531.
5. *Бибиков Ю.Н., Букаты В.Р.* Бифуркация рождения колебательного режима при периодическом возмущении осциллятора специального вида // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 769–773.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 05.10.2018 г.
После доработки 08.04.2019 г.
Принята к публикации 16.04.2019 г.