ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2019, том 55, № 6, с. 769–773

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО РЕЖИМА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. **Ю. Н. Бибиков, В. Р. Букаты**

Изучается бифуркация нулевого решения дифференциального уравнения $\ddot{x}+x^{p/q}=0$, где $p>q>1$ – нечётные взаимно простые числа, при периодических, в частности автономных, возмущениях, зависящих от малого положительного параметра ε. Методом разделения движений выводится бифуркационное уравнение, каждому положительному корню которого соответствует инвариантный двумерный тор (замкнутая траектория в автономном случае), стягивающийся в положение равновесия $x=0$ при $\varepsilon\to 0$. Для доказательств используются методы теории Крылова–Боголюбова при исследовании периодических по времени возмущений или теорема о неявной функции в автономном случае.

DOI: 10.1134/S0374064118060031

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+x^{p/q}=X(x,\dot{x},t,\varepsilon) \tag{1}$$

при следующих предположениях:

I) p/q – несократимая дробь, p и q – нечётные числа, $p>q>1$.

II) $X(x,y,t,\varepsilon)$ – вещественно аналитическая функция переменных x,y,ε в некоторой окрестности точки $(x,y,\varepsilon)=(0,0,0)$, непрерывная и ω-периодическая по t (в частности, от t не зависящая), $X(0,0,t,\varepsilon)=0$, $\varepsilon\geqslant 0$ – малый параметр. Считаем, что разложение X по степеням x,y,ε не содержит членов порядка ниже, чем $p+1$, если переменной x приписать измерение, равное q, а переменным $y=\dot{x}$ и ε – измерения, равные $(p+q)/2$ и $2(1+\ell)q$ соответственно.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как малое возмущение осциллятора

$$\ddot{x}+x^{p/q}=0.$$

Разобьём множество числителей p дроби p/q на классы вычетов по модулю $4q$. Иначе говоря, положим $p=\widetilde{p}+4q\ell$, где $\ell=0,1,2,\ldots$, $\widetilde{p}\in[q+2,\ldots,5q-2]$ – нечётные числа.

Мы рассматриваем случай, когда

$$4q+1\leqslant\widetilde{p}\leqslant 5q-2. \tag{2}$$

Остальные случаи могут быть исследованы аналогично (см. п. 4).

В работе приводятся достаточные условия, при выполнении которых уравнение (1) при каждом достаточно малом $\varepsilon>0$ имеет наряду с положением равновесия $x=0$ инвариантный двумерный тор (замкнутую траекторию при автономном возмущении). Случай $q=1$ исследован в работе [1].

2. Бифуркационное уравнение. Представим функцию $X(x,\dot{x},t,\varepsilon)$ в виде

$$X=a(t)x^n+b(t)x^m\dot{x}+a_1(t)\varepsilon x^r+b_1(t)\varepsilon\dot{x}+c(t)\dot{x}^2+\ldots, \tag{3}$$

где многоточием обозначены члены разложения, имеющие больший порядок, чем выписанные, в соответствии с приписанными переменным x, y и ε измерениями. Следовательно, n, m и r должны удовлетворять условиям

$$n\geqslant\frac{p+1}{q},\quad m\geqslant\frac{p-q+2}{2q},\quad r\geqslant\frac{p+1}{q}-2(1+\ell).$$

Из левого неравенства в (2) вытекает, что наименьшие из возможных значений n, m и r – это $n=5+4\ell$, $m=2(1+\ell)$, $r=3+2\ell$. Отметим, что порядок величины $\dot x^2$ равен $p+q>p+1$. Сравнивая порядки выписанных в разложении (3) членов, заключаем, что порядки величин x^n, εx^r, $\dot x^2$ превышают порядки величин $x^m\dot x$ и $\varepsilon\dot x$, равные $2(1+\ell)q+(p+q)/2$.

Таким образом, функцию X можно представить в виде

$$X=b(t)x^{2(1+\ell)}\dot x+b_1(t)\varepsilon\dot x+X^*(x,\dot x,t,\varepsilon), \tag{4}$$

где $X^*=o(x^{2(1+\ell)q}\dot x+\varepsilon\dot x)$.

Следуя [2], введём в уравнение (1) восходящие идейно к А.М. Ляпунову [3] "полярные координаты" r, φ по формулам

$$x=r^qC(\varphi),\quad \dot x=-r^{(p+q)/2}S(\varphi),\quad r>0, \tag{5}$$

где периодические функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ определяются как решение задачи Коши

$$C'=-S,\quad S'=C^{p/q},\quad C(0)=1,\quad S(0)=0.$$

Обозначим период функций C и S через Ω. Используя тождество $(p+q)S^2+2qC^{1+p/q}=2q$, получаем систему

$$\begin{gathered}\dot r=-q^{-1}r^{1-(p+q)/2}SX(r^qC(\varphi),-r^{(p+q)/2}S,t,\varepsilon)=R(r,\varphi,t,\varepsilon),\\ \dot\varphi=r^{(p-q)/2}-r^{-(p+q)/2}CX(r^qC(\varphi),-r^{(p+q)/2}S,t,\varepsilon)=r^{(p-q)/2}+\Phi(r,\varphi,t,\varepsilon).\end{gathered} \tag{6}$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что

$$R=d(\varphi)b(t)r^{2(1+\ell)q+1}+\varepsilon d_1(\varphi)b_1(t)r+R^*,$$

где порядок остатка R^* превышает порядок выписанных членов, порядок функции Φ на единицу меньше порядка функции R, $d(\varphi)=-q^{-1}C^{2(1+\ell)q}S^2$, $d_1(\varphi)=-q^{-1}S^2$. Здесь и в дальнейшем функции, зависящие от переменных φ, t, – периодические с периодами Ω и ω соответственно.

Лемма 1. *Существует замена*

$$r=\rho+f(\varphi)\rho^{2(1+\ell)q+1-(p-q)/2}+F(\varphi,t)\rho^{2(1+\ell)q+1}+\varepsilon f_1(\varphi)\rho^{1-(p-q)/2}+\varepsilon F_1(\varphi,t)\rho,\quad \rho>0, \tag{7}$$

приводящая систему (6) к виду

$$\dot\rho=g\rho^{2(1+\ell)q+1}+\varepsilon g_1\rho+P(\rho,\varphi,t,\varepsilon),\quad \dot\varphi=\rho^{(p-q)/2}+\Psi(\rho,\varphi,t,\varepsilon), \tag{8}$$

где $g=\overline{db}$, $g_1=\overline{d}_1\overline{b}_1$, *функция* P *имеет тот же порядок, что и остаток* R^*, *правая часть второго уравнения системы (8) получается из правой части второго уравнения системы (6) с помощью подстановки (7). (Здесь и далее черта обозначает среднее значение функции.)*

Доказательство. Дифференцируя замену (7) по t с учётом равенств (6) и (8) и приравнивая члены наинизшего измерения, получаем равенство

$$\begin{gathered}d(\varphi)b(t)\rho^{2(1+\ell)q+1}+\varepsilon d_1(\varphi)b_1(t)\rho=g\rho^{2(1+\ell)q+1}+g_1\varepsilon\rho+f'(\varphi)\rho^{2(1+\ell)q+1}+\\ +\varepsilon f_1'(\varphi)\rho+\dot F(\varphi,t)\rho^{2(1+\ell)q+1}+\dot F_1(\varphi,t)\varepsilon\rho.\end{gathered} \tag{9}$$

Положим $g=\overline{db}$, $g_1=\overline{d}_1\overline{b}_1$. Воспользуемся следующим равенством:

$$d(\varphi)b(t)=\overline{db}+\overline{b}(d-\overline{d})+d(b-\overline{b})$$

(аналогичное равенство справедливо и для функции d_1).

Рассмотрим уравнения

$$f' = \overline{b}(d-\overline{d}), \quad \dot{F} = d(b-\overline{b}), \quad f_1' = \overline{b}_1(d_1-\overline{d}_1), \quad \dot{F}_1 = d_1(b_1-\overline{b}_1),$$

которые определяют функции f, F, f_1, $\dot{F}_1$ следующим образом:

$$f = \overline{b}\int(d-\overline{d})\,d\varphi, \quad F = d(\varphi)\int(b-\overline{b})\,dt, \quad f_1 = \overline{b}_1\int(d_1-\overline{d}_1)\,d\varphi, \quad F_1 = d_1(\varphi)\int(b_1-\overline{b}_1)\,dt.$$

Эти функции обращают равенство (9) в тождество. Лемма доказана.

Уравнение

$$g\rho^{2(1+\ell)q} + \varepsilon g_1 = 0$$

называется *бифуркационным уравнением.* Далее покажем, что каждому положительному корню этого уравнения соответствует, если ε достаточно мало́, инвариантный двумерный тор (замкнутая траектория, если возмущение автономно).

3. Бифуркация положения равновесия. Пусть

$$gg_1 < 0. \tag{10}$$

Пусть $\rho = \varepsilon^{1/(2\gamma)}\alpha > 0$ – положительный корень бифуркационного уравнения, где $\gamma = (1+\ell)q$, $\alpha = (-g_1/g)^{1/(2\gamma)}$.

Выполним замену $\rho = \varepsilon^{1/(2\gamma)}(\alpha + z)$. В результате получим систему

$$\dot{z} = \varepsilon Mz + \varepsilon Z(z,\varphi,t,\varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}\alpha^{(p-q)/2} + \Gamma(z,\varphi,t,\varepsilon), \tag{11}$$

где $M = -2\gamma g_1 \neq 0$, $Z = O(\varepsilon^{1/(2\gamma)} + z^2)$, $\Gamma = O(\varepsilon + \varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}z)$ при $z \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Сначала рассмотрим автономный случай. Пусть $\beta = 1 - (p-q)/(4\gamma)$. В силу условия (2) справедливо неравенство $\beta \geqslant 1/(2\gamma) > 0$. Следовательно,

$$\dot{\varphi} = \varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}\alpha^{(p-q)/2}(1 + o(1))$$

при $z \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Исключив t в системе (11), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{d\varphi} = \varepsilon^\beta M_1 z + \varepsilon^\beta Z_1(z,\varphi,\varepsilon), \tag{12}$$

где $M_1 \neq 0$, $Z_1 = O(\varepsilon^{1/(2\gamma)} + z^2)$. Начальное значение z_0 при $\varphi = 0$ периодического решения $z(\varphi, z_0, \varepsilon)$ с периодом Ω определяется уравнением

$$z_0(1 - e^{\varepsilon^\beta M_1\Omega}) = \varepsilon^\beta\int\limits_0^\Omega e^{\varepsilon^\beta M_1(\Omega-\varphi)}Z_1(z(\varphi,z_0,\varepsilon),\varphi,\varepsilon)\,d\varphi.$$

Сокращая на ε^β, получаем уравнение, к которому применима теорема о неявной функции в окрестности точки $z_0 = 0$, $\varepsilon = 0$. Пусть $z_0(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^*$, – неявная функция, определяемая этим уравнением. Положим $z(\varphi,\varepsilon) = z(\varphi, z_0(\varepsilon), \varepsilon)$. Из сказанного вытекает

Теорема 1. *Если выполнено условие (10), то при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ автономное уравнение (1) имеет наряду с положением равновесия $x = 0$ замкнутую траекторию с амплитудой порядка $\varepsilon^{1/(2q+2\ell q)}$, определяемую равенством $\rho = \varepsilon^{1/(2q+2\ell q)}(\alpha + z(\varphi,\varepsilon))$ с помощью подстановок (7) и (5).*

Возвращаясь к случаю периодического по t возмущения, рассмотрим систему (11). Сведение к уравнению (12) в этом случае невозможно. Однако проблема существования интегрального многообразия (в нашем случае инвариантного тора) укладывается в рамки теории Крылова–Боголюбова.

Для исследования системы (11) удобно использовать результаты работы [4]. Система (11) удовлетворяет всем условиям леммы 2.1 из [4], устанавливающей существование инвариантного многообразия, периодического по t и φ, за исключением условия, что $\Gamma = o(\varepsilon)$ при $z = 0$.

Чтобы добиться выполнения этого условия, выделим из функции Γ линейный по ε член $T(\varphi, t)\varepsilon$. Тогда

$$\Gamma(z, \varphi, t, \varepsilon) = T(\varphi, t)\varepsilon + \Theta(z, \varphi, t, \varepsilon),$$

где $\Theta = O(\varepsilon^{1+1/(2\gamma)}, \varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}z)$. Осталось осреднить множитель $T(\varphi, t)$.

Лемма 2. *Существует замена*

$$\varphi = \theta + \varepsilon^{1-(p-q)/(4\gamma)}\sigma(\theta) + \varepsilon\Sigma(\theta, t), \tag{13}$$

приводящая систему (11) к виду

$$\dot{z} = \varepsilon M z + \varepsilon Z_1(z, \theta, t, \varepsilon), \quad \dot{\theta} = \varepsilon^{(p-q)/(4\gamma)}\alpha^{(p-q)/2} + \overline{T}\varepsilon + \Theta_1(z, \theta, t, \varepsilon), \tag{14}$$

где $\Theta_1(0, \theta, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1+1/(2\gamma)})$.

Доказательство. Продифференцируем замену (13) по t с учётом равенств (11) и (14). Приравнивая коэффициенты при ε, получаем уравнение

$$T(\theta, t) - \overline{T} = \frac{d\sigma}{d\theta}\alpha^{(p-q)/2} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}. \tag{15}$$

Представим функцию T в виде $T = \overline{T} + \widehat{T}(\theta) + \widetilde{T}(\theta, t)$, где $\widehat{T}$ равно среднему значению функции $T(\theta, t) - \overline{T}$ по t. Полагая

$$\alpha^{(p-q)/2}\sigma = \int \widehat{T}(\vartheta)\, d\theta, \quad \Sigma = \int \widetilde{T}(\theta, t)\, dt,$$

построим решение уравнения (15), а значит, и требуемую замену (13). Лемма доказана.

Теорема 2. *Если выполнено условие (10), то при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ уравнение (1) имеет инвариантное многообразие (двумерный тор), определяемое равенством $\rho = \varepsilon^{1/(2q+2\ell q)}(\alpha + z(\theta, t, \varepsilon))$ с помощью подстановок (13), (7) и (5).*

4. Бифуркационное уравнение в общем случае. Откажемся от условия (2). Используя лемму из работы [2] и рассуждая аналогично доказательству леммы 1 настоящей работы, докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Существует замена*

$$r = \rho + h(\rho, \varphi, t) + \varepsilon f_1(\varphi)\rho^{1-(p-q)/2} + \varepsilon F_1(\varphi, t),$$

приводящая систему (6) к виду

$$\dot{\rho} = g\rho^{2\mu+1} + \varepsilon g_1 \rho + P(\rho, \varphi, t, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \rho^{(p-q)/2} + \Psi(\rho, \varphi, t, \varepsilon),$$

где по-прежнему $g_1 = \overline{d}_1\overline{b}_1$, а $g \neq 0$ – некоторая постоянная. При этом, если $\overline{b} \neq 0$, то $\mu \leqslant \gamma = (1+\ell)q$.

Например, если $p = 5$, $q = 3$, то можно показать, что $\mu = 2$, $\gamma = 3$ [2].

Отличие общего случая от рассмотренного выше состоит в том, что постоянная g подлежит вычислению, а не определяется непосредственно по функции X.

Бифуркационное уравнение принимает вид

$$g\rho^{2\mu} + \varepsilon g_1 = 0.$$

Следовательно, при определении порядков малости мы должны малому параметру приписывать измерение 2μ, а не 2γ. Остальные рассуждения сохраняют силу при замене γ на μ. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Если выполняется неравенство $gg_1 < 0$, то в уравнении (1) имеет место бифуркация рождения инвариантного тора при прохождении малого параметра через нулевое значение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бибиков Ю.Н., Савельева А.Г.* Периодические возмущения нелинейного осциллятора // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 411–418.
2. *Бибиков Ю.Н., Букаты В.Р., Трушина Н.В.* Об устойчивости положения равновесия при периодических возмущениях осциллятора со степенной восстанавливающей силой с рациональным показателем // Прикл. математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 6. С. 629–636.
3. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.; Л., 1956. С. 272–331.
4. *Hale J.K.* Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. of Math. 1961. V. 73. № 3. P. 496–531.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 21.07.2018 г.