



КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

2019 Том 11 № 5

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКЦИИ

От редакции773

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Холодов Я. А. Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах777

Антипова С. А., Воробьев А. А. Целенаправленная трансформация математических моделей на основе стратегической рефлексии815

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле833

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

Долгов Е. В., Колосов Н. С., Фирсов А. А. Исследование влияния искрового разряда на смещение струи газообразного топлива со сверхзвуковым воздушным потоком849

Андрущенко В. А., Моисеева Д. С., Моторин А. А., Ступицкий Е. Л. Моделирование физических процессов воздействия мощного ядерного взрыва на астероид861

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Ильичев В. Г., Дашкевич Л. В. Оптимальный промысел и эволюция путей миграции рыбных популяций879

Малыгина Н. В., Сурков П. Г. О моделировании преодоления водной преграды *Rangifer tarandus* L.895

Тиньков О. В., Полищук П. Г., Хачатрян Д. С., Колотаев А. В., Балаев А. Н., Осипов В. Н., Григорьев В. Ю. Количественный анализ «структура – противоопухолевая активность» и рациональный молекулярный дизайн бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов911

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

<i>Малков С. Ю.</i> Режимы с обострением в истории человечества или воспоминания о будущем	931
<i>Варшавский Л. Е.</i> Техника проведения расчетов динамики показателей олигополистических рынков на основе операционного исчисления	949
<i>Пехтерев А. А., Домащенко Д. В., Гусева И. А.</i> Моделирование трендов динамики объема и структуры накопленной кредитной задолженности в банковской системе	965
<i>Светлов К. В., Иванов С. А.</i> Стохастическая модель числа сторонников политического лидера в цифровом публичном пространстве	979
<i>Цибулин В. Г., Хосаева З. Х.</i> Математическая модель дифференциации общества с социальной напряженностью	999

COMPUTER RESEARCH AND MODELING

2019 Volume 11 Number 5

CONTENTS

FROM THE EDITOR

Editor's note.....773

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

Kholodov Ya. A. Development of network computational models for the study of nonlinear wave processes on graphs.....777

Antipova S. A., Vorobiev A. A. The purposeful transformation of mathematical models based on strategic reflection.....815

NUMERICAL METHODS AND THE BASIS FOR THEIR APPLICATION

Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Protsenko E. A. Difference scheme for solving problems of hydrodynamics for large grid Peclet numbers833

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

Dolgov E. V., Kolosov N. S., Firsov A. A. The study of the discharge influence on mixing of gaseous fuel jet with the supersonic air flow849

Andrushchenko V. A., Moiseeva D. S., Motorin A. A., Stupitsky E. L. Modeling the physical processes of a powerful nuclear explosion on an asteroid861

ANALYSIS AND MODELING OF COMPLEX LIVING SYSTEMS

Il'ichev V. G., Dashkevich L. V. Optimal fishing and evolution of fish migration routes.....879

Malygina N. V., Surkov P. G. On the modeling of water obstacles overcoming by *Rangifer tarandus* L.895

Tinkov O. V., Polishchuk P. G., Khachatryan D. S., Kolotaev A. V., Balaev A. N., Osipov V. N., Grigorev V. Yu. Quantitative analysis of “structure – anticancer activity” and rational molecular design of bi-functional VEGFR-2/HDAC-inhibitors911

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

<i>Malkov S. Yu.</i> Regimes with exacerbation in the history of mankind or memories of the future	931
<i>Varshavsky L. E.</i> Studying indicators of development of oligopolistic markets on the basis of operational calculus	949
<i>Pekhterev A. A., Domaschenko D. V., Guseva I. A.</i> Modelling of trends in the volume and structure of accumulated credit indebtedness in the banking system.....	965
<i>Svetlov K. V., Ivanov S. A.</i> Stochastic model of voter dynamics in online media	979
<i>Tsybulin V. G., Khosaeva Z. H.</i> Mathematical model of political differentiation under social tension	999

УДК: 519.633.6

Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах

Я. А. Холодов^{1,2}

¹ Университет Иннополис,
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

² Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

E-mail: kholodov@cres.mipt.ru

Получено 02.08.2019, после доработки — 10.09.2019.

Принято к публикации 10.09.2019.

В различных приложениях возникают задачи, моделируемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для исследования данных проблем и возникающих различных экстремальных ситуаций, для задач проектирования и оптимизации сетей различных типов в данной работе построена вычислительная модель, основанная на решении соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях). В качестве приложений были выбраны три различные задачи, решаемые в рамках общего подхода сетевых вычислительных моделей. Первая — это моделирование движения транспортных потоков. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках транспортной сети г. Москвы на значительных временных интервалах, а также может быть использована для выбора наиболее оптимальной стратегии организации дорожного движения в городе. Вторая — моделирование потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. Предложены концептуальная и математическая модели сети. Проведено численное моделирование в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2 разработанная нами потоковая модель демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия, и позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP-сетей передачи данных. Третья — моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Была разработана вычислительная математическая модель распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях с использованием уравнений газовой динамики путем численного сопряжения областей разной размерности. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение газодинамических параметров в трубопроводной сети и решать задачи динамического управления вентиляцией.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, графы, вычислительные модели, уравнения гиперболического типа, численное моделирование, граничные условия

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 14-11-00877.

© 2019 Ярослав Александрович Холодов

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.633.6

Development of network computational models for the study of nonlinear wave processes on graphs

Ya. A. Kholodov^{1,2}

¹ Innopolis University,

1 Universitetskaya st., Innopolis, 420500, Russia

² Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS),
19/18 2-nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: kholodov@crec.mipt.ru

Received 02.08.2019, after completion — 10.09.2019.

Accepted for publication 10.09.2019.

In various applications arise problems modeled by nonlinear partial differential equations on graphs (networks, trees). In order to study such problems and various extreme situations arose in the problems of designing and optimizing networks developed the computational model based on solving the corresponding boundary problems for partial differential equations of hyperbolic type on graphs (networks, trees). As applications, three different problems were chosen solved in the framework of the general approach of network computational models. The first was modeling of traffic flow. In solving this problem, a macroscopic approach was used in which the transport flow is described by a nonlinear system of second-order hyperbolic equations. The results of numerical simulations showed that the model developed as part of the proposed approach well reproduces the real situation various sections of the Moscow transport network on significant time intervals and can also be used to select the most optimal traffic management strategy in the city. The second was modeling of data flows in computer networks. In this problem data flows of various connections in packet data network were simulated as some continuous medium flows. Conceptual and mathematical network models are proposed. The numerical simulation was carried out in comparison with the NS-2 network simulation system. The results showed that in comparison with the NS-2 packet model the developed streaming model demonstrates significant savings in computing resources while ensuring a good level of similarity and allows us to simulate the behavior of complex globally distributed IP networks. The third was simulation of the distribution of gas impurities in ventilation networks. It was developed the computational mathematical model for the propagation of finely dispersed or gas impurities in ventilation networks using the gas dynamics equations by numerical linking of regions of different sizes. The calculations shown that the model with good accuracy allows to determine the distribution of gas-dynamic parameters in the pipeline network and solve the problems of dynamic ventilation management.

Keywords: partial differential equations, graphs, computational models, hyperbolic type equations, numerical simulation, boundary conditions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 777–814 (Russian).

The work was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 14-11-00877.

Введение

В различных приложениях возникают задачи, моделируемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). В качестве примера можно указать глобальные модели дыхательной и кровеносной систем человека [Kholodov et al., 2005; Simakov et al., 2005, 2006a, 2006b; Simakov, 2018; Carson, 2018; Gognieva et al., 2018, 2019], интенсивного уличного движения в мегаполисе [Kholodov, Kholodov, 2004; Kholodov et al., 2006; Холодов и др., 2010; Morozov et al., 2011; Kholodov et al., 2014; Alekseenko et al., 2015; Kholodov et al., 2015; Alekseenko et al., 2017; Prokoptsev et al., 2018], динамики стержневых конструкций и каркасных сооружений [Kholodov et al., 2006], переходных процессов в электроэнергетических системах [Морозов, Холодов, 2008; Bordonos et al., 2009; Морозов и др., 2010], интенсивных информационных потоков в компьютерных и телекоммуникационных сетях [Северов и др., 2008; Трифонов и др., 2008; Severov et al., 2012; Trifonov, Kholodov, 2012], распространения мелкодисперсных примесей в вентиляционных сетях [Geller et al., 2010; Kholodov et al., 2017] и др.

Сетевые вычислительные модели (уравнения в частных производных) на графах используют различные численные методы и оригинальные математические алгоритмы, в том числе алгоритм построения систем уравнений в узлах графа. Особенность этих алгоритмов заключается в том, что они должны обеспечивать непрерывную связь моделируемых величин вдоль всего графа путем задания корректных граничных условий для всех его ветвей, входящих и выходящих в каждый из его узлов. Проблема задания корректных граничных условий при численном моделировании гиперболических систем уравнений возникла довольно давно, практически одновременно с появлением первых ЭВМ и численных методов. С тех пор много что изменилось, на порядки выросло быстродействие вычислительных систем, появились весьма сложные и высокоточные методы численного расчета и вычислительные пакеты, их использующие, но эта проблема никуда не ушла. И дело здесь не в том, что ее в принципе невозможно решить, а в том, что каждый раз ее приходится решать снова, как только возникает новая постановка задачи или усложняется сделанная ранее.

Именно эта проблема является первостепенной в данной работе. Принципиальная новизна заключается в том, что нам приходится ее решать в узле графа. В типичный узел входит и выходит несколько ветвей, вдоль каждой из которых используется своя одномерная система уравнений, при этом сам узел, как правило, имеет сложную геометрию, со своей собственной двух- или трехмерной системой уравнений, заданной внутри него. Поэтому задача корректного сопряжения граничных условий для одномерных и многомерных систем уравнений внутри и снаружи узла выходит на первый план.

Задача корректного сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности весьма интересна и перспективна для вычислительной науки. В первую очередь потому, что понижение размерности моделируемой задачи приводит к уменьшению вычислительных операций и упрощению численных алгоритмов, используемых при ее решении, что в свою очередь повышает их надежность. И не стоит надеяться, что повышение производительности ЭВМ автоматически решит эти проблемы, поскольку вместе с ростом количества операций, производимых в единицу времени, возрастает и сложность решаемых задач.

Хорошей аналогией для сравнения здесь может быть использование адаптивных иерархических сеток в численном моделировании. Это научное направление давно и плодотворно развивается, и рост производительности ЭВМ не уменьшает его актуальности.

С этой точки зрения использование разной размерности задачи в различных частях одной области интегрирования по своей сути близко к идее использования адаптивных сеток и является в некотором смысле дальнейшим ее развитием. Но для ее реализации необходимо научиться корректно решать задачу сопряжения граничных условий для систем уравнений различной размерности.

1. Сетевые вычислительные модели для нелинейных систем уравнений гиперболического типа

Пусть на каждом ребре k направленного графа (сети, дерева, рис. 1.1) необходимо найти решение одномерной системы уравнений гиперболического типа:

$$v_l + Av_{x_k} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x_k \leq X_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.1)$$

Здесь $v = \{v_1, \dots, v_l\}$ — вектор искомых параметров, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, I$, — матрица, которая может быть разной на каждой из ветвей, I — размерность системы уравнений (1.1), K — число ветвей (ребер) графа. Эта система может быть линейной или нелинейной, дивергентной или нет, иметь ненулевую правую часть и т. д., что не принципиально для последующего изложения.

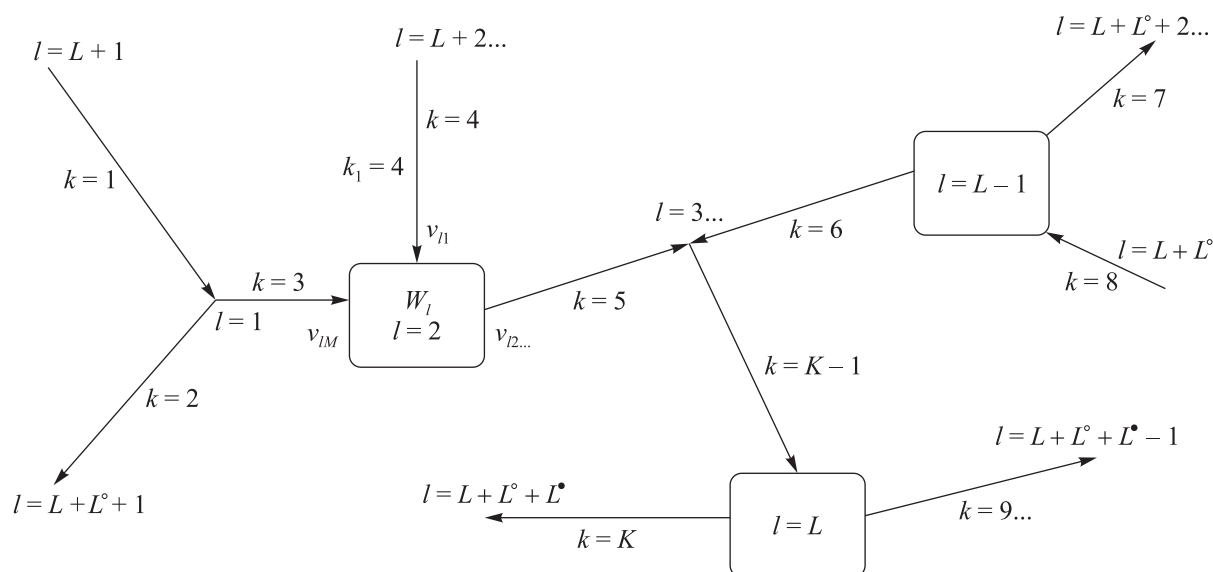


Рис. 1.1. Пример направленного графа, k — номера направленных (по стрелке) ребер. Чтобы подчеркнуть тот факт, что для определения искомых параметров W_l во внутренних узлах графа $l = 1, \dots, L$ могут привлекаться самые разные математические модели, часть узлов обозначена точками (например, $l = 1, 3$), а остальные — прямоугольниками ($l = 2, L - 1, L$)

Из предположения о гиперболичности (1.1) следует, что матрица A имеет только действительные собственные значения (возможно и кратные) $\Lambda = \{\lambda_i\}$, $i = 1, \dots, I$, определяемые как корни уравнения

$$P_l(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda E) = 0 \quad (1.2)$$

(E — единичная матрица) и базис

$$\Omega = \{\omega_i\}, \quad \text{Det } \Omega \neq 0 \quad (1.3)$$

из левых собственных векторов ω_i , $i = 1, \dots, I$ (являющихся строками матрицы Ω), для каждого λ_i с точностью до длины определяемых из однородных линейных систем уравнений

$$\omega_i(A - \lambda_i E) = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.4)$$

Тогда $A \equiv \Omega^{-1} \Lambda \Omega$ (где Ω^{-1} — обратная к Ω матрица) и систему (1.1) можно привести к эквивалентному виду:

$$\Omega v_t + \Omega A v_{x_k} = \Omega v_t + \Lambda \Omega v_{x_k} = 0 \quad (1.5)$$

(взяв I соответствующих линейных комбинаций исходных уравнений (1.1)).

Каждое из условий совместности (1.5):

$$\omega_i \frac{dv}{dt_i} = 0, \quad \frac{d}{dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (1.6)$$

является по сути обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль i -й характеристики системы (1.1).

$$dx = \lambda_i dt, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.7)$$

Такая характеристическая форма уравнений (1.1) (или ее модификации с использованием инвариантов Римана, если удастся найти соответствующее точное решение (1.6)) часто используется для построения эффективных разностных схем для решения (1.1), а в граничных точках она необходима для замыкания граничных условий.

По крайней мере, в линейном случае с $a_{ij} = \text{const}$ (тогда $\lambda_i = \text{const}$, $\omega_i = \{\omega_{i1}, \dots, \omega_{iI}\}$, $\omega_{ij} = \text{const}$) каждое из условий совместности (1.6) после введения новых искомым параметров

(инвариантов Римана) $q_i = \omega_i v = \sum_{j=1}^I \omega_{ij} v_j$, $i = 1, \dots, I$, содержит только $dq_i / dt_i = 0$, и его реше-

нием является $q_i = \text{const}$ вдоль соответствующей характеристики (1.7).

Как известно, корректная постановка краевых условий для (1.1) заключается в задании начальных условий

$$v(0, x_k) = v^0(x_k), \quad k = 1, \dots, K, \quad (1.8)$$

и граничных условий при $x_k = 0$ и $x_k = X_k$ в узлах графа $l = 1, \dots, L, L+1, \dots, L+L^\circ, L+L^\circ+1, \dots, L+L^\circ+L^\bullet$. Здесь L — число внутренних узлов графа (с которыми связано более одной ветви), L° — число узлов — входов графа (из которых исходит только одна ветвь графа), L^\bullet — число узлов — выходов графа (в которые входит только одна ветвь графа). На рис. 1.1 приведены примеры нумерации ветвей ($k = 1, \dots, K$) и узлов ($l = 1, \dots, L, L+1, \dots, L+L^\circ, L+L^\circ+1, \dots, L+L^\circ+L^\bullet$) направленного графа. Эта нумерация может быть и любой другой.

Чтобы подчеркнуть, что для определения искомым параметров w_l во внутренних узлах графа $l = 1, \dots, L$ могут привлекаться самые разные математические модели (алгебраические или обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и т. д.), часть таких узлов обозначена точками (например, на рис. 1.1 $l = 1, 3$), а остальные — прямоугольниками ($l = 2, L-1, L$ на рис. 1.1).

На свободных концах ветвей (ребер) графа (в узлах $l = L+1, \dots, L+L^\circ$ — входах графа, для которых $x_k = 0$, и в узлах $l = L+L^\circ+1, \dots, L+L^\circ+L^\bullet$ — выходах графа, для которых $x_k = X_k$) постановка краевых условий ничем не отличается от обычной постановки краевых условий одномерной гиперболической системы, а именно: в каждый момент времени число граничных условий (r_k° — для входов, r_k^\bullet — для выходов) должно быть равно числу уходящих за область интегрирования характеристик (1.7), и вместе с условиями совместности (1.6) вдоль идущих

внутри области интегрирования характеристик они должны составлять линейно-независимую дифференциально-алгебраическую систему. Например, для входов:

$$\varphi_{ki}^{\circ}(t, v(t, 0)) = 0, \quad i = 1, \dots, r_k^{\circ}; \quad (1.9)$$

для выходов:

$$\varphi_{ki}^{\bullet}(t, v(t, X_k)) = 0, \quad i = I - r_k^{\bullet} + 1, \dots, I. \quad (1.10)$$

Тогда при расчете таких граничных точек можно использовать r_k° граничных условий (1.9) или r_k^{\bullet} условий (1.10) вместе с $I - r^{\circ}$ (для $i = r_k^{\circ} + 1, \dots, I$) или $I - r_k^{\bullet}$ (для $i = 1, \dots, I - r_k^{\bullet}$) условий совместности (1.6), причем матрицы

$$\Omega^{\circ} = \begin{pmatrix} \omega_1^{\circ} \\ \vdots \\ \omega_{r_k^{\circ}}^{\circ} \\ \omega_{r_k^{\circ}+1}^{\circ} \\ \vdots \\ \omega_I^{\circ} \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\bullet} = \begin{pmatrix} \omega_1^{\bullet} \\ \vdots \\ \omega_{I-r_k^{\bullet}}^{\bullet} \\ \omega_{I-r_k^{\bullet}+1}^{\bullet} \\ \vdots \\ \omega_I^{\bullet} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

(соответственно для входов и выходов) должны быть неособенными: $\text{Det } \Omega^{\circ} \neq 0$, $\text{Det } \Omega^{\bullet} \neq 0$. Здесь ω_i — левые собственные векторы матрицы A из (1.4), векторы ω_i° , ω_i^{\bullet} получаем, дифференцируя (1.9) и (1.10):

$$\frac{d\varphi_{ki}^{\circ}}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^{\circ}}{\partial t} + \sum_{j=1}^I \frac{\partial \varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_j} \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^{\circ}}{\partial t} + \omega_i^{\circ} \frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^{\circ} = \left\{ \frac{\partial \varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{ki}^{\circ}}{\partial v_I} \right\}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi_{ki}^{\bullet}}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial t} + \sum_{j=1}^I \frac{\partial \varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_j} \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial t} + \omega_i^{\bullet} \frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^{\bullet} = \left\{ \frac{\partial \varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{ki}^{\bullet}}{\partial v_I} \right\}. \quad (1.13)$$

В точках ветвления графа $l = 1, \dots, L$, обозначая через M число входящих в узел l и выходящих из него ветвей, а через $m = k_1, \dots, k_M$ — их номера (рис. 1.2), будем считать искомыми величинами (помимо значений векторов v_{l1}, \dots, v_{lM} в окончаниях входящих в узел l и выходящих из него ветвей) также вектор $w_l(t) = \{w_{l1}, \dots, w_{lJ_l}\}$ с размерностью J_l , для определения которых пусть имеется некоторое количество дифференциальных или алгебраических уравнений, например:

$$\psi_{lr}(t, w_l, v_{l1}, \dots, v_{lM}) = 0, \quad r = 1, \dots, r_l. \quad (1.14)$$

Для расчета таких узлов графа помимо граничных условий (1.14) необходимо использовать условия совместности (1.6), выбирая их аналогично (1.9)–(1.13).

Если в некоторый момент времени t число положительных собственных чисел $\lambda_i(t, 0)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке выходящей из этого узла ветви m° равно $r_{lm^{\circ}}^{\circ}$, а число отрицательных собственных чисел $\lambda_i(t, X_m)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке входящей в этот узел ветви m^{\bullet} равно $r_{lm^{\bullet}}^{\bullet}$, то необходимо выполнение условия

$$r_l = IM + J_l - \sum_{m^{\circ}} r_{lm^{\circ}}^{\circ} - \sum_{m^{\bullet}} r_{lm^{\bullet}}^{\bullet}. \quad (1.15)$$

Кроме того, для обеспечения линейной независимости используемых уравнений (1.14), (1.6) необходимо, чтобы

$$\text{Det } \tilde{\Omega} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \omega_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{am} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{bm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{aM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{bM} & 0 \\ \tilde{\omega}_{l11} & \cdots & \tilde{\omega}_{l1m} & \cdots & \tilde{\omega}_{l1M} & \tilde{\omega}_{l1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\omega}_{lr1} & \cdots & \tilde{\omega}_{lr_m} & \cdots & \tilde{\omega}_{lr_M} & \tilde{\omega}_{lr_l} \end{array} \right\} \neq 0, \tag{1.16}$$

$$\tilde{\omega}_{lr} = \left\{ \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial w_{l1}}, \dots, \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial w_{lJ_l}} \right\}, \quad \tilde{\omega}_{lrm} = \left\{ \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial v_{lm1}}, \dots, \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial v_{lmI}} \right\}. \tag{1.17}$$

$\omega_{am}, \dots, \omega_{bm}$ — собственные векторы матрицы A для каждой из ветвей $m = 1, \dots, M$, соответствующие привлекаемым для расчета узла l условиям совместности (1.6). Для выходящей из узла ветви с номером m° : $a = 1, b = r_{lm^\circ}^\circ$; для входящей в узел ветви с номером m^\bullet : $a = I - r_{lm^\bullet}^\bullet + 1, b = I$. В соответствии с (1.15) размерность матрицы $\tilde{\Omega}$ должна быть равна $IM + J_l = r_l + \sum_{m^\circ} r_{lm^\circ}^\circ + \sum_{m^\bullet} r_{lm^\bullet}^\bullet$.

2. Алгоритм численного решения

Составляющая основу вычислительной модели система уравнений в частных производных (1.1) имеет гиперболический тип, и для численного решения таких уравнений существует достаточно много разнообразных по своим качествам разностных методов (см., например, [Kulikovskii et al., 2000]).

Для системы уравнений (1.1), все возможное семейство разностных схем с использованием диагонального разложения матрицы $A \equiv \Omega^{-1} \Lambda \Omega$ и равномерной разностной сетки: $t^n = n \Delta t, n = 0, 1, 2, \dots, x_m = m \Delta x, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, с пространственным шагом Δx и временным шагом Δt , можно представить в следующем общем виде:

$$v_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \Omega^{-1} A_\mu^\nu \Omega v_{m+\mu}^{n+\nu}, \tag{2.1}$$

где $A_\mu^\nu = \text{diag} \{ \alpha_{i,\mu}^\nu(\sigma_i) \}$ — диагональные матрицы $\left(\sum_{\mu, \nu} A_\mu^\nu = E \right)$, на главной диагонали которых находятся схемные коэффициенты: $\alpha_{i,\mu}^\nu(\sigma_i), \sigma_i = \lambda_i \Delta t / \Delta x, i = 1, 2, \dots, I$.

Вид разностной схемы (2.1) определяется заданием схемных коэффициентов, выбор которых является определяющим для получения требуемых свойств схемы (2.1); более подробно алгоритм выбора схемных коэффициентов $\alpha_{i,\mu}^v(\sigma_i)$ изложен в статье [Kholodov et al., 2018].

Для замыкания разностной системы уравнений (2.1) в граничных точках необходимо численно интегрировать условия совместности $\left\{ \omega_i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}$, $i=1,2,\dots,I$, вдоль идущих из области интегрирования на границу характеристик.

В случае наличия вектора правой части в системе уравнений (1.1):

$$v_t + Av_x = f(v, t, x) \quad (2.2)$$

учет его влияния на решение (2.2) может быть реализован посредством численного интегрирования: $\int_0^{\Delta t} f(v_m, x_m, t^n) dt$ в (2.2), при этом выбор точности метода можно соотнести с точностью разностной схемы (2.1):

$$\begin{cases} \tilde{v}_m = \sum_{\mu,v} \Omega^{-1} A_{\mu}^v \Omega v_{m+\mu}^{n+v}, \\ v_m^{n+1} = \tilde{v}_m + \int_0^{\Delta t} f(\tilde{v}_m, x_m, t^n) dt. \end{cases} \quad (2.3)$$

В точках ветвления графа для вектора искомым величин $w(t) = \{w_1, \dots, w_J\}$ с размерностью J , для определения которых, например, может использоваться трехмерная система гиперболических уравнений в частных производных:

$$w_t + A_1 w_{x_1} + A_2 w_{x_2} + A_3 w_{x_3} = f(w, t, x_k), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x_k \leq X_k, \quad k=1,2,3. \quad (2.4)$$

Расщепление по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 можно выполнить в соответствии с построениями, предложенными в работе [Kholodov, 1990]. Для этого многомерная нелинейная система уравнений гиперболического типа в левой части (2.4) представляется в виде суммы трех одномерных операторов (заключены в скобки):

$$\begin{cases} \gamma_1 \left(w_t + \frac{A_1}{\gamma_1} w_{x_1} \right) + \gamma_2 \left(w_t + \frac{A_2}{\gamma_2} w_{x_2} \right) + \gamma_3 \left(w_t + \frac{A_3}{\gamma_3} w_{x_3} \right) = \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k \right) f(w, t, x_k), \\ 0 < \gamma_k < 1, \quad \sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Каждое из слагаемых в скобках системы (2.5):

$$w_t + \frac{A_k}{\gamma_k} w_{x_k} = f(w, t, x_k), \quad k=1,2,3, \quad (2.6)$$

является одномерной системой уравнений в векторной форме вида (2.2), поэтому при численном решении любой из систем уравнений в (2.6) мы можем использовать любую из разностных схем (2.3).

Стандартный алгоритм расчета многомерных систем типа (2.5) на каждом временном шаге состоит либо в последовательном решении одномерных уравнений при $\gamma_k \equiv 1$, при этом общий шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия $\max_{j,k} \left| \Delta t \lambda_j^k / \Delta x_k \right| < 1$, $j=1,\dots,J$,

$k = 1, 2, 3$, либо в их параллельном решении с нахождением свободных параметров γ_k , $k = 1, 2, 3$, и временного шага Δt из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1, \quad \lambda^k = \max_j \{ |\lambda_j^k| \}, \quad j = 1, \dots, J, \\ \frac{\Delta t \lambda^1}{\gamma_1 \Delta x_1} = \frac{\Delta t \lambda^2}{\gamma_2 \Delta x_2} = \frac{\Delta t \lambda^3}{\gamma_3 \Delta x_3} = \sigma. \end{cases} \quad (2.7)$$

Решая (2.7), получаем, что

$$\begin{cases} \Delta t = \frac{\sigma \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{(\lambda^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \lambda^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + \lambda^3 \Delta x_1 \Delta x_2)}, & \gamma_1 = \frac{\lambda^1 \Delta x_2 \Delta x_3}{(\lambda^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \lambda^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + \lambda^3 \Delta x_1 \Delta x_2)}, \\ \gamma_2 = \frac{\lambda^2 \Delta x_1 \Delta x_3}{(\lambda^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \lambda^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + \lambda^3 \Delta x_1 \Delta x_2)}, & \gamma_3 = \frac{\lambda^3 \Delta x_1 \Delta x_2}{(\lambda^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \lambda^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + \lambda^3 \Delta x_1 \Delta x_2)}. \end{cases}$$

Окончательные значения вектора w_m^{n+1} на следующем временном слое $n+1$ в каждой рассматриваемой точке получаем следующим образом:

$$w_m^{n+1} = \sum_{k=1}^3 \gamma_k w_{m,k}^{n+1}.$$

Стоит также обратить внимание, что, когда мы используем выражения (2.7) при выборе свободных параметров γ_k и Δt , это приводит к тому, что при численном интегрировании каждого из уравнений (11) у нас уменьшается общий шаг по времени, но при этом выполняются соотношения $\frac{\lambda^1}{\gamma_1 \Delta x_1} = \frac{\lambda^2}{\gamma_2 \Delta x_2} = \frac{\lambda^3}{\gamma_3 \Delta x_3}$, $\lambda^k = \max_j \{ |\lambda_j^k| \}$, $k = 1, 2, 3$. Это особенно важно при расчете возмущений, распространяющихся под различными углами к осям координат: x_1, x_2, x_3 .

Как правило, элементы узлов графа имеют прямоугольные формы, что позволяет использовать декартову систему координат и ортогональные сетки; если же при численном интегрировании в узле графа возникает область с неправильной геометрией, то внутри нее можно использовать разностную аппроксимацию системы уравнений (2.4) с многомерной реконструкцией значений вектора $w(t, x_k)$ на гранях ячеек Дирихле, имеющих центры в узлах w_m^n (см. [Kulikovskii et al., 2001]).

3. Моделирование трафика в городской транспортной сети

В современных макроскопических моделях второго порядка транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006], в которых по-разному учитывается зависимость интенсивности или скорости потока от его плотности. В статье [Aleksenko et al., 2015] нами была получена новая макроскопическая модель второго порядка для плотности и скорости транспортного потока:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = f_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $\rho(t, x)$ обозначает число АТС (*автотранспортных средств*) на единицу длины дороги в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Аналогично: $v(t, x)$ — скорость АТС в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x ; $Q = \rho v$ — интенсивность потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Если у нас есть въезжающие или съезжающие с дороги или полосы машины, то правая часть f_0 первого уравнения в (3.1) будет представлять собой количество машин, прибывающих (знак плюс) или убывающих (знак минус) в единицу времени. И глядя на правую часть второго уравнения в (3.1), мы видим, как учитывается этот вклад в изменение скорости транспортного потока.

Было показано, что в соответствии с теоремой, доказанной в работе [Zhang, 2003], полученная математическая модель обеспечивает анизотропию транспортного потока на решениях системы уравнений (3.1), поскольку для ее собственных значений $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ на всем диапазоне значений плотности транспортного потока выполняется условие $\lambda_{1,2} \leq v(\rho)$.

Число граничных условий на въездах-выездах автодороги зависит от знака собственных чисел системы (3.1): $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Поскольку $\lambda_1 = v$ всегда ≥ 0 , нам необходимо учитывать знак второго собственного значения $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Поэтому на въезде их количество равно либо двум при положительном $\lambda_2 > 0$, либо одному при $\lambda_2 \leq 0$. На выездах — наоборот: ноль при $\lambda_2 > 0$ или также одно при $\lambda_2 \leq 0$. В соответствии с этим на въездах-выездах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени — значения интенсивности потока автомобилей $Q(t)$ и величина скорости потока $v(t)$. Помимо граничных условий, для системы (3.1) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \quad (3.2)$$

Принципиальное отличие предложенной нами модели (3.1) от известных ранее макроскопических моделей второго порядка [Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006a; Siebel, Mauser, 2006b] заключается в том, что в нашей модели не обязательно требуется построение и использование фундаментальной диаграммы в виде зависимости $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ или желаемой (равновесной) скорости $V(\rho) = Q(\rho)/\rho$, которая в других моделях обычно входит в выражение относительной скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ в уравнение изменения импульса. Для получения эмпирической зависимости $V(\rho)$ необходимы статистические данные наблюдений значений плотности и скорости трафика за длительный момент времени с детекторов транспорта, которые не всегда доступны. Вместо производной эмпирической функции $V(\rho)$ мы аппроксимируем значение относительной скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$, используя данные наблюдений для плотности и скорости трафика в текущий момент времени с детекторов транспорта, установленных на заданном участке дороги:

$$c(\rho) = \frac{\rho_{\text{in}} + \rho_{\text{out}}}{2} \left(\frac{v_{\text{out}} - v_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}} - \rho_{\text{in}}} \right). \quad (3.3)$$

В (3.3) $\rho_{\text{in}}, v_{\text{in}}$ и $\rho_{\text{out}}, v_{\text{out}}$ — измеренные значения плотностей и скоростей транспортного потока в текущий момент времени на въезде и выезде заданного участка дороги. Если в один из мо-

ментов времени окажется, что $\rho_{out} = \rho_{in}$, мы можем использовать значение относительной скорости распространения возмущений в предыдущий момент времени, чтобы избежать деления на ноль в (3.3).

Автомобильное движение на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации, в отличие от системы уравнений (3.1), в силу использования двух направлений движения, следует рассматривать в двумерной постановке:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \left(v_y + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

В этой системе v_x и v_y теперь уже компоненты скорости транспортного потока в рассматриваемой точке на перекрестке по координатам x и y , правые части в системе (3.4) берем нулевыми, поскольку считаем, что все АТС, въезжающие на перекресток, должны с него выехать в силу выполнения закона сохранения потока. Систему уравнений (3.4) можно переписать в упрощенном виде с учетом того, что $Q_x = \rho v_x$, $Q_y = \rho v_y$ есть компоненты интенсивности

транспортного потока и $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$, поскольку водители, как правило, не меняют полосу движения при пересечении перекрестка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_y + \rho \frac{\partial v_y}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Прежде чем перейти к построению модели расчета движения транспорта для перекрестка произвольной конфигурации, рассмотрим в качестве примера сектор перекрестка, представленный на рис. 3.1.

Вначале для наглядности ограничимся двумя светофорными фазами, а именно, когда для одной дороги, например идущей вдоль оси x на рис. 3.1, горит зеленый свет, а для другой, идущей вдоль оси y , горит красный, и наоборот. Считаем, что значения скоростей и интенсивностей транспортных потоков на въездах и выездах сектора в точках (1, 2, 3, 4) в любой момент времени нам известны из показаний датчиков, обозначенных на рис. 3.1 треугольниками. Пропорции АТС, поворачивающих внутри сектора, легко определяются из показаний датчиков: направо — $\alpha_{1,4} = Q_4 / Q_1$, налево — $\alpha_{2,3} = Q_3 / Q_2$.

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (3.5), решаемой в секторе перекрестка, с учетом разрешенных направлений движения транспорта в секторе. Будем использовать следующие обозначения: Δt — шаг численного интегрирования по времени, Δx и Δy — пространственные размеры сектора. Учтем также перераспределение транспортных потоков внутри сектора, вызванное поворотами водителей при движении на перекрестке. Сделаем это при помощи известных нам коэффициентов $\alpha_{1,4}$ и $\alpha_{2,3}$, при этом надо не забывать, что

потоки сохраняют свой знак, и закон сохранения потока должен по-прежнему выполняться внутри заданного сектора. В соответствии с этими правилами на ребро 5, 4 переносим часть потока $\alpha_{1,4}Q_{1,5}$, повернувшего с ребра 1, 5 направо, и забираем часть потока $\alpha_{2,3}Q_{2,5}$, повернувшего с ребра 2, 5 налево, в результате получаем значение потока: $Q_{5,4} + \alpha_{1,4}Q_{1,5} - \alpha_{2,3}Q_{2,5}$. То же самое делаем на ребре 5, 3 — переносим часть потока $\alpha_{2,3}Q_{2,5}$, повернувшего с ребра 2, 5 налево, и забираем часть потока $\alpha_{1,4}Q_{1,5}$, повернувшего с ребра 1, 5 направо, в результате получаем новое значение потока: $Q_{5,3} + \alpha_{2,3}Q_{2,5} - \alpha_{1,4}Q_{1,5}$. Значения скоростей $v_{5,4}$ и $v_{5,3}$ на границах сектора оставляем прежними. Полученные значения потоков подставляем в разностную аппроксимацию (3.5):

$$\begin{cases} \frac{\rho_5^{n+1} - \rho_5^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{5,3} + \alpha_{2,3}Q_{2,5} - \alpha_{1,4}Q_{1,5}) - Q_{1,5}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{5,4} + \alpha_{1,4}Q_{1,5} - \alpha_{2,3}Q_{2,5}) - Q_{2,5}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{v_{x,5}^{n+1} - v_{x,5}^n}{\Delta t} + \left(v_{x,5}^n + \rho_5^n \frac{v_3^v - v_1^v}{\rho_3^n - \rho_1^n} \right) \frac{v_{5,3}^n - v_{1,5}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{y,5}^{n+1} - v_{y,5}^n}{\Delta t} + \left(v_{y,5}^n + \rho_5^n \frac{v_4^v - v_2^v}{\rho_4^n - \rho_2^n} \right) \frac{v_{5,4}^n - v_{2,5}^n}{\Delta y} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Осталось теперь только определить, как будут вычисляться промежуточные значения переменных $v_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$, которые находятся на границах сектора между точками: 1, 5; 2, 5; 5, 3 и 5, 4. Начнем их вычисление с очевидных оценок, а именно: если у нас горит красный сигнал светофора для дороги, идущей вдоль оси y , то значения $v_{2,5}^n, Q_{2,5}^n$ будут равны нулю. Если светофор красный для дороги, идущей вдоль оси x , то равны нулю будут значения $v_{1,5}^n, Q_{1,5}^n$.

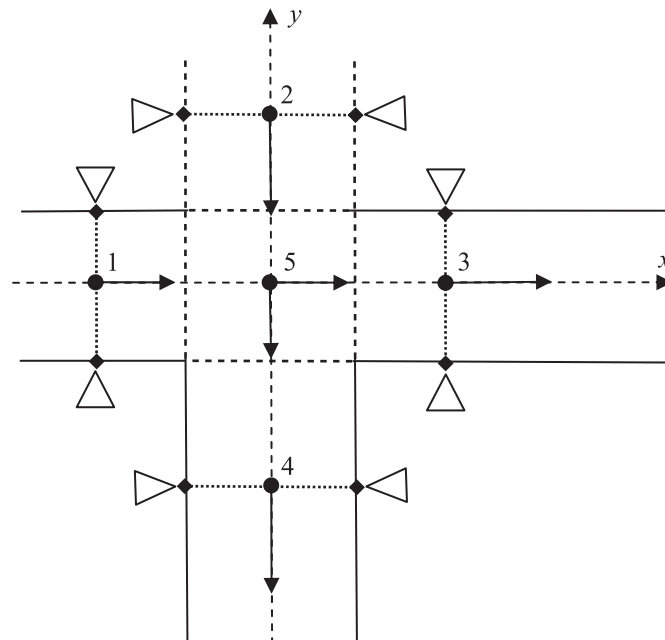


Рис. 3.1. Пример одного из составных элементов регулируемого перекрестка-сектора. Разрешенные направления движения показаны стрелками, 1–5 — номера узлов расчетной сетки, треугольниками показано возможное расположение детекторов транспорта

Для того чтобы вычислить значения $v_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$ на границах сектора, не перекрытых красным сигналом светофора, мы воспользуемся интерполяционными выражениями для $v_{m+1/2}^n$ и $Q_{m+1/2}^n = \rho_{m+1/2}^n v_{m+1/2}^n$ сеточно-характеристического метода первого порядка аппроксимации [Magomedov, Kholodov, 1969]:

$$\begin{cases} \rho_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(\rho_m^n + \rho_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{Q_m^n - Q_{m+1}^n}{\rho_m^n - \rho_{m+1}^n}\right)(\rho_m^n - \rho_{m+1}^n), \\ v_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(v_m^n + v_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{v_m^n + v_{m+1}^n}{2} + \frac{\rho_m^n + \rho_{m+1}^n}{2} \frac{v_m^n - v_{m+1}^n}{\rho_m^n - \rho_{m+1}^n}\right)(v_m^n - v_{m+1}^n). \end{cases} \quad (3.7)$$

Эту же разностную аппроксимацию уравнений (3.5) можно одновременно применить ко всем секторам перекрестка с учетом разрешенных направлений движения транспорта в секторе. Стоит отдельно отметить, что значения переменных на границах между сектором перекрестка и примыкающими к нему дорогами следует использовать в разностной аппроксимации системы уравнений (3.1) в точках (1, 2, 3, 4), примыкающих к перекрестку дорог. Эти точки являются граничными, и значения переменных в них, найденные нами, представляют собой граничные условия для системы уравнений (3.1), которые обеспечивают нам связь моделируемых величин на всем графе транспортной сети.

Определяющими для функционирования описанной выше модели движения транспорта являются схема организация движения и выбор временных интервалов работы фаз светофорной сигнализации на перекрестке. Для оценки их влияния (по имеющимся экспериментальным данным) были проведены тестовые расчеты автомобильного движения с использованием описанных выше макроскопических моделей гидродинамического типа (3.1), (3.5).

Тестируемым объектом стало пересечение Ленинского проспекта с улицами Лобачевского и 26 Бакинских комиссаров (рис. 3.2). Эта часть транспортной сети г. Москвы была выбрана исходя из того, что между этими перекрестками практически нет прилегающих съездов и выездов на Ленинский проспект, а также все их въезды и выезды оборудованы детекторами, измеряющими интенсивность и скорость транспортных потоков по дорожным полосам. Данные с детекторов транспорта по всем полосам, прилегающим к перекресткам, были получены из системы сбора данных Navigator центра организации дорожного движения Правительства Москвы за период в 264 дня.



Рис. 3.2. Перекрестки на пересечении Ленинского проспекта с улицами Лобачевского и 26 Бакинских комиссаров г. Москвы. Расположение датчиков, измеряющих интенсивность и скорость транспортных потоков по дорожным полосам, показано цифровыми маркерами № 1–8

Усредненные по всем полосам движения расчетные значения транспортных потоков на Ленинском проспекте в зависимости от времени суток, за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня, в сравнении с данными экспериментальных наблюдений, полученными с датчиков, представлены на рис. 3.3.

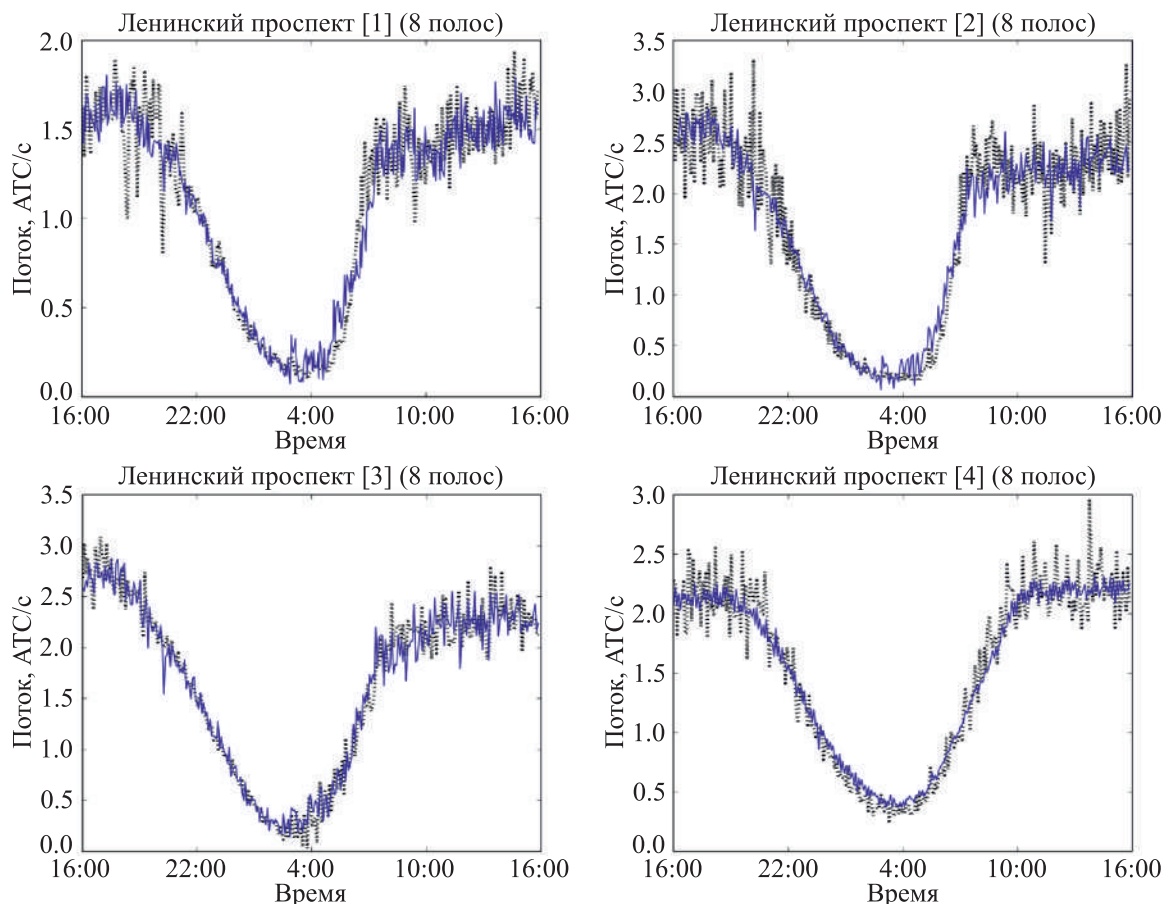


Рис. 3.3. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Ленинском проспекте (синий цвет) в зависимости от времени суток, за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня, в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (№ 1–4 на рис. 3.2) с 5-минутным временным интервалом

Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на всех моделируемых участках транспортной сети г. Москвы на значительных временных интервалах.

Рассмотрим теперь, как работает в самом простом случае алгоритм управления дорожным движением. Для этого достаточно посмотреть на модельную фундаментальную диаграмму, представленную на рис. 3.4. На ней хорошо видно, что одному значению интенсивности $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика, № 1 и № 2, с разными скоростями и плотностями транспортного потока, $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является более предпочтительным в силу того, что его скорость выше ($v_1 > v_2$), а плотность ниже второго ($\rho_1 < \rho_2$). В простейшем случае задача адаптивного управления свидится к тому, чтобы удерживать транспортный поток в докритическом состоянии с плотностью меньше критической, $\rho < \rho_{\text{ст}}$ (точка перегиба на фундаментальной диаграмме), и не позволять ему уйти в заторное состояние. Для отдельной дороги эта задача решается аналитически, для всей городской транспортной сети она может вовсе не иметь решения или оно не будет единственным.

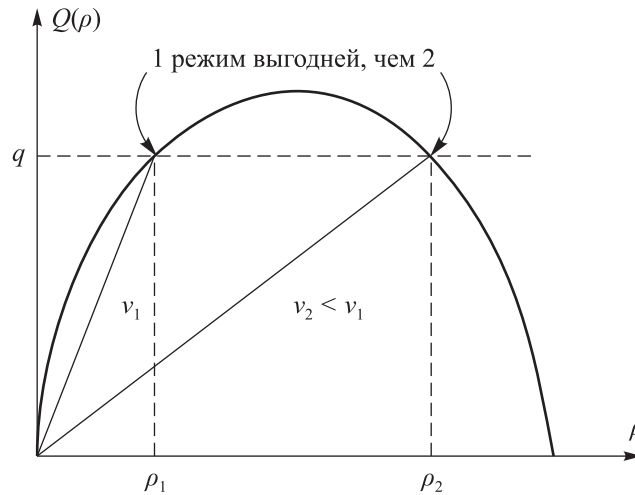


Рис. 3.4. Модельная фундаментальная диаграмма, в которой одному значению интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика, № 1 и № 2, с разными скоростями и плотностями: $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является более предпочтительным в силу того, что его скорость выше ($v_1 > v_2$), а плотность ниже второго ($\rho_1 < \rho_2$)

Начнем с алгоритма решения для отдельной дороги. Посмотрим еще раз на используемую нами макроскопическую модель транспортного потока:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = f_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Нам нужно контролировать значение плотности транспортного потока так, чтобы оно не превышало критическое, $\rho < \rho_{crit}$. Соответственно, нам нужно использовать первое уравнение в системе (3.8) для решения этой задачи.

Сформулируем задачу Коши для этого уравнения, считая дорогу бесконечной (что справедливо в случае использования прозрачных граничных условий или кольцевой формы дороги) и задавая в правой части изменение плотности в местах въезда и выезда с дороги с координатами $x = x_k$ в виде локальных источников или стоков транспортного потока $f_0(x_k, t)$:

$$\begin{cases} \rho_t + Q_\rho \rho_x = f_0(x, t) = \sum_k f_0(x_k, t), \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

Аналитическое решение уравнения (3.9) известно и имеет следующий вид:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau.$$

Его вид означает, что плотность транспортного потока сохраняется вдоль характеристики $\xi = x - Q_\rho t$ и меняется только в точках въезда или выезда с дороги на величину $\int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau$, которая берется с положительным знаком в случае въезда и с отрицательным в случае выезда.

Таким образом, зная решение (3.9), мы можем контролировать плотность транспортного потока на дороге, перекрывая его в точках въезда x_k на заданные интервалы времени τ_k так, чтобы в любой момент времени в каждой точке дороги его плотность не превышала критическое значение: $\rho(x, t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \tau_k f_k(x_k) < \rho_{\text{crit}}$ (см. рис. 3.5).

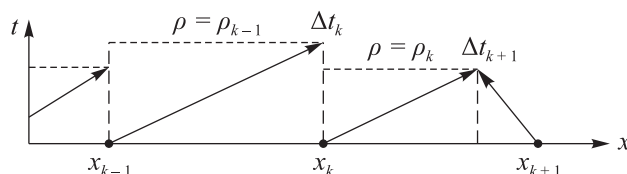


Рис. 3.5. Схематическое представление характеристик, используемых для адаптивного управления на участке дороги с номерами въездов $k - 1, k, k + 1$. Считается, что значения плотностей транспортных потоков $\rho_{k-1}, \rho_k, \rho_{k+1}$ сохраняются вдоль характеристик до момента пересечения характеристик либо следующего узла, либо встречной характеристики

В итоге алгоритм адаптивного управления въездами работает следующим образом.

Делается текущий краткосрочный прогноз на время $\Delta t = \min \frac{x_{k+1} - x_k}{2|Q_\rho(\rho_{k+1/2})|}$, поскольку

в течение этого времени мы можем исключить взаимное влияние транспортных потоков, поступающих с соседних въездов.

Если прогноз показывает, что в какой-либо из точек дороги плотность транспортного потока начинает превышать критическую: $\rho_{\text{crit}} < \rho_k(t + \Delta t)$, то мы, опуская характеристику из этой точки дороги на текущий временной слой, определяем ближайший въезд, вызвавший затор, и с помощью светофорного регулирования ограничиваем количество въезжающих АТС на нем до значения $f_{0,k}^{\text{control}} = f_{0,k} + \frac{\rho_{\text{crit}} - \rho_k(t + \Delta t)}{\Delta t}$.

На практике невозможно непрерывным образом регулировать количество въезжающих АТС, поэтому для ограничения въезда используется изменение соотношения t_{on} разрешающей (зеленой) и t_{off} запрещающей (красной) фаз светофора, установленного на данном въезде, с учетом заданной минимальной длительности разрешающей фазы t_{min} :

$$\frac{t_{\text{min}}}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} \leq \frac{t_{\text{on}}}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} = \frac{f_{0,k}^{\text{control}}}{f_{0,k}} \leq 1. \quad (3.10)$$

Для проверки работы алгоритма адаптивного светофорного регулирования АТС на автомобильной многополосной дороге был поставлен вычислительный эксперимент на суточных данных внешнего кольца МКАД за сутки, 3 февраля 2012 года. Всего при моделировании учитывалось 36 крупных развязок на МКАД. Информация об интенсивности въездных и выездных потоков АТС на развязках была получена из системы Navigator центра организации дорожного движения Москвы. В силу того, что для большинства развязок отсутствовала информация о потоках АТС по каждому из въездов и выездов, было решено пренебречь точной топологией каждой развязки и использовать агрегированную информацию о входящих и выходящих потоках, представляя каждую развязку одним въездом и одним выездом.

Для оценки эффекта от применения адаптивного светофорного регулирования на въездах МКАД мы провели моделирование дорожной ситуации без регулирования, а также с тремя различными режимами адаптивного управления с максимальной длительностью красной фазы t_{off} :

10, 20 и 30 секунд для 60-секундного полного цикла ($t_{\text{on}} + t_{\text{off}}$). При запрещающем сигнале светофора прибывающие АТС образовывали очередь, которая разгружалась в зеленой фазе.

На рис. 3.6 представлены полученные в результате численного моделирования пространственно-временные диаграммы для плотности и скорости транспортного потока как при отсутствии ограничений на въезд автомобилей на МКАД (ситуация с отсутствующей или нефункционирующей системой адаптивного управления (вверху слева)), так и для ситуации, когда система адаптивного управления работала на всех 36 въездах с длительностью запрещающей (красной) фазы регулирования, не превышающей 10 (вверху справа), 20 (внизу слева) и 30 (внизу справа) секунд. По оси абсцисс отмечены километры в соответствии с их нумерацией на внешнем кольце МКАД.

В отсутствие светофорного регулирования въездов на МКАД образуются достаточно существенные пробки в районе 80–105 километров. Использование слабого регулирования (красная фаза до 10 секунд) не позволяет избежать возникновения пробок, но ускоряет их рассасывание, при этом незначительно увеличивая очереди на въездах до не более 19 АТС. Увеличение длительности запрещающего сигнала до 20 секунд практически убирает заторы на МКАД при увеличении длин очередей до 37 АТС максимум. Дальнейшее увеличение длительности запрещающей фазы приводит к полному исчезновению пробок на МКАД, однако ценой этого является заметное увеличение очередей на въездах — до 50 АТС.

Таким образом, численное моделирование с использованием разработанной нами модели не только демонстрирует эффективность предлагаемого алгоритма адаптивного управления, но и позволяет количественно оценить эффект от его применения для выбора наиболее оптимальной стратегии организации дорожного движения в городе.

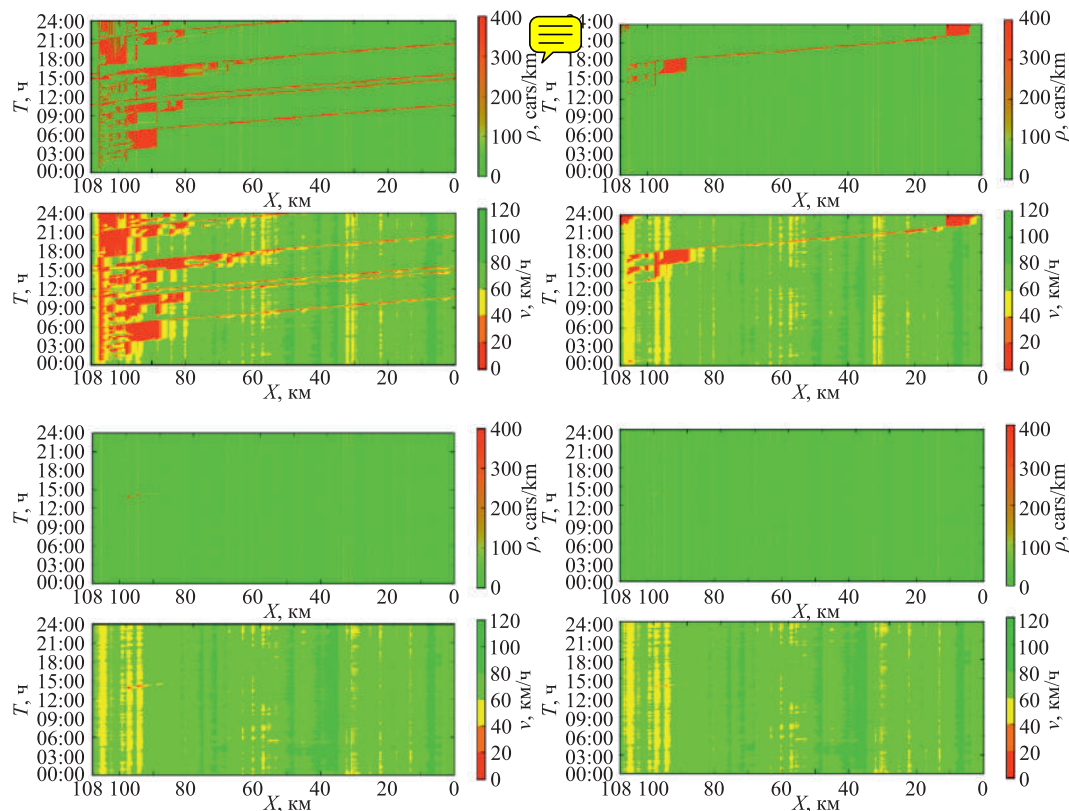


Рис. 3.6. Пространственно-временные диаграммы плотности АТС/км и средней скорости км/ч транспортного потока на МКАД за суточный период по результатам моделирования. Вверху слева: без светофорного регулирования. Вверху справа: с использованием адаптивного светофорного управления, при ограничении длительности красной фазы до 10 секунд на цикл. Внизу слева: при ограничении длительности красной фазы до 20 секунд на цикл. Внизу справа: до 30 секунд на цикл

4. Моделирование потоков данных в пакетных сетях

Сеть передачи данных (см. рис. 4.1) рассматривается как набор узлов, соединенных каналами связи. Функциональная специализация позволяет выделить два типа узлов. Узлы типа A перенаправляют потоки данных, создаваемые и/или терминируемые узлами другого типа B . Топология сети позволяет предложить представление сети в виде направленного графа. Каждая вершина типа Pa , соотнесенная с узлом типа A , реализует правила маршрутизации. Каждая вершина типа Pb , соотнесенная с узлом типа B , реализует оконечные сетевые протоколы. Каждое ребро графа соотносится с очередью и следующим за ней однонаправленным сетевым каналом.

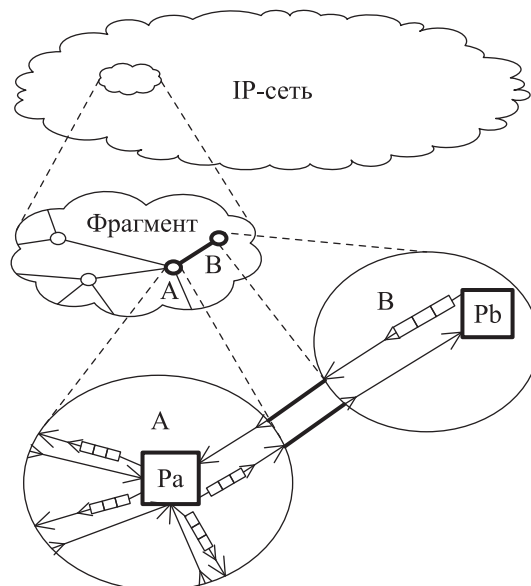


Рис. 4.1. Концептуальная модель IP-сети: A, B — узлы IP-сети, соединенные двунаправленным каналом; A — узел-маршрутизатор с вершиной типа Pa и выходными очередями \square ; B — оконечный узел с вершиной типа Pb

Необходимость передать через сеть данные от одной вершины типа Pb к другой вершине такого же типа создает один или более потоков данных. Каждый такой поток данных назовем сессией и будем рассматривать как перенос некоторого модельного «вещества» или «жидкости», специфичной для данной сессии.

В своем движении модельная жидкость последовательно минует все очереди на пути своей сессии. Часть ее может быть утрачена при сбросе части данных в результате активного управления очередями в IP-сетях. Размер пакетов моделируемой IP-сети соотносится с плотностью вещества ρ (количеством бит в пакете), а темп продвижения этих пакетов в очереди — со скоростью вещества u (количеством пакетов, проходящих в единицу времени; см. рис. 4.2).

Факты потери данных некоторой сессии и особенно моменты этих потерь в значительной мере могут определять последующее поведение протоколов данной сессии. Поскольку потоковая модель не отслеживает движение каждого пакета в отдельности, то, чтобы обеспечить модель, например, протокола TCP необходимой информацией, предлагается сопровождать движение по сети модельной жидкости сопутствующим сохранением информации о потерях этой жидкости. Последняя характеризуется своей плотностью распределения вдоль очереди — d . Утрата модельного вещества в результате управления определенной очередью отражается плотностью распределения этой утраты вдоль очереди — ψ (см. рис. 4.2).

Введенные переменные могут быть соотнесены с дискретным наполнением очереди q пакетами различных сессий следующим образом. Предположим, что единичный интервал $[x^q, x^q + 1]$

очереди взаимно однозначно соответствует пакету сессии s . Тогда $\int_{x^q}^{x^q+1} \rho_s^q dx = \rho_s$ — есть количество бит в этом пакете, $\int_{x^q}^{x^q+1} d_s^q dx$ — количество пакетов сессии s , потеря которых должна быть учтена после приема данного пакета, а $\int_{x^q}^{x^q+1} \psi_s^q dx$ — вероятность сброса данного пакета.

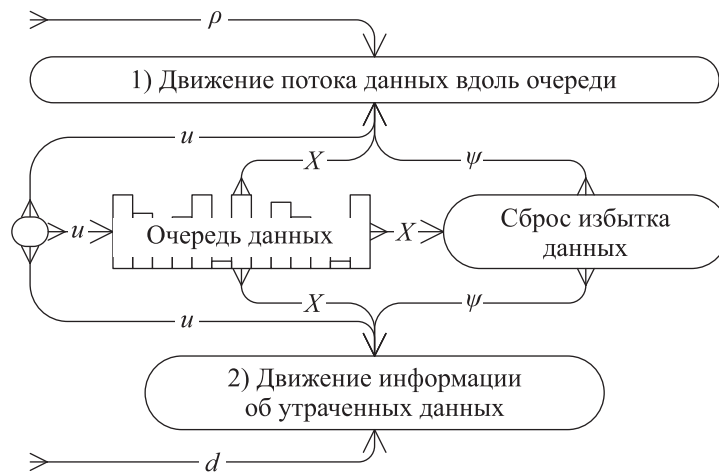


Рис. 4.2. Поточковая модель очереди: ρ — плотность «вещества» данных, d — плотность информации об утраченных данных, ψ — плотность сброса данных, u — скорость продвижения данных в очереди, X — длина очереди, x — координата вдоль очереди

В данной работе потоковая модель для ребер графа сети предусматривает набор соотношений, описывающих перенос и утрату модельных веществ. В вершинах типа Pa моделируются порождение и преобразование модельного вещества в соответствии с протоколом TCP. В вершинах типа Pb несмешивающиеся потоки модельных веществ подвергаются единственной операции — перенаправлению. Не рассматриваются такие действия с потоками данных, как тиражирование, расщепление и слияние.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы собрать и построить полную вычислительную модель, состоящую из вышеописанных модельных элементов. Модель протокола TCP также предполагает определенные соотношения для размера TCP окна и скоростей входящего и исходящего потоков для различных режимов работы протокола.

Основу потоковой модели составляют уравнения переноса условных веществ и информации о потере этого вещества:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s^q + \frac{\partial}{\partial x^q} (\rho_s^q u^q) = -\rho_s^q u^q \psi_s^q, \\ \frac{\partial}{\partial t} d_s^q + \frac{\partial}{\partial x^q} (d_s^q u^q) = u^q \psi_s^q. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $q \in \{q=1, \dots, Q\}$ — индекс очереди в совокупности всех очередей модели, а $s \in \{s=1, \dots, S\}$ — индекс сессии в совокупности всех сессий модели. Пространственная координата x^q имеет смысл положения пакета в очереди, измеренного в единицах пакетов от голо-

вы очереди, примыкающей к исходящему. Скорость движения вещества u^q считается одинаковой для всех сессий, проходящих через очередь q .

$$u^q = \frac{C^q}{\rho^q} + \sum_s \int_{x^q}^{X^q} \psi_s^q dx^q, \quad u^q \geq 0, \quad (4.2)$$

где C^q — номинальная пропускная способность интерфейса на выходе очереди q , $\rho^q = \sum_s \rho_s^q \Big|_{x^q=X^q}$, X^q — длина очереди q , измеренная в единицах пакетов. В предлагаемой модели скорость изменения длины очереди представляется в виде производной:

$$\frac{dX^q}{dt} = \sum_s u_s^q - u_0^q, \quad X^q \geq 0, \quad (4.3)$$

где $u_0^q = u^q \Big|_{x^q=0}$, а u_s^q — скорость продвижения данных сессии s , поступающей на вход очереди q .

Сходным образом определяются граничные условия для уравнений (4.1) на входной границе $x^q = 0$:

$$\rho_s^q \Big|_{x^q=0} = \rho_{s,0}^q, \quad d_s^q \Big|_{x^q=0} = d_{s,0}^q. \quad (4.4)$$

Здесь $\rho_{s,0}^q$ и $d_{s,0}^q$ относятся к сессии s , поступающей на вход очереди q . На выходной границе $x^q = X^q$, граничные условия не требуются, а значения $\rho_s^q(t, X^q)$, $d_s^q(t, X^q)$ однозначно определяются из уравнений (4.1) благодаря условию (4.2).

В данной работе в качестве политики активного управления очередью (AQM — active queue management) был выбран алгоритм случайного раннего обнаружения (RED — Random Early Detection) [Floyd, Jacobson, 1993], при этом сброс происходит из хвоста очереди.

$$\sum_s \int_{X^{q-1}}^{X^q} \psi_s^q dx^q = \begin{cases} 0, & \xi \geq P^q(t), \\ 1, & \xi < P^q(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

Здесь ξ — случайная величина с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$, а $P^q(t)$ — вероятность сброса пакета, которая в терминах RED AQM определяется следующим образом:

$$P^q(t) = \begin{cases} 0, & D^q(t)\tilde{P}^q(t) < 1, \\ \min \left[1, \frac{\tilde{P}^q(t)}{2 - D^q(t)\tilde{P}^q(t)} \right], & 1 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t) \leq 2, \\ 1, & 2 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t), \end{cases} \quad D^q(t) = \int_{t_{\text{drop}}^q}^t \tilde{u}^q(\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Здесь t_{drop}^q — момент последнего сброса данных в очереди q .

$$\tilde{P}^q(t) = \begin{cases} 0, & \tilde{X}^q < X_{\min}^q, \\ \frac{\tilde{X}^q - X_{\min}^q}{X_{\max}^q - X_{\min}^q} P_{\max}^q, & X_{\min}^q \leq \tilde{X}^q \leq X_{\max}^q, \\ 1, & \tilde{X}^q > X_{\max}^q. \end{cases} \quad (4.7)$$

Здесь $\tilde{X}^q(t)$ — переменная ожидаемая (прогнозируемая) длина очереди, а X_{\min}^q , X_{\max}^q , P_{\max}^q постоянные параметры RED AQM.

$$\frac{d\tilde{X}^q}{dt} = \frac{\ln \alpha^q}{\delta^q} (\tilde{X}^q(t) - X^q(t)). \tag{4.8}$$

Последнее уравнение интерпретирует дискретное выражение скользящего среднего $\tilde{X}^q(t + \delta^q) = (1 - \alpha^q)\tilde{X}^q(t) + \alpha^q X^q(t)$. Безразмерный постоянный параметр $\alpha^q \in [1, 10]$ определяет степень зависимости ожидаемой длины очереди от кратковременных колебаний длины реальной очереди. Параметр δ^q равен интервалу времени между замерами реальной длины очереди.

В данной работе мы пренебрегаем задержками и потерями в каналах связи в сравнении с задержками и потерями в очередях, предшествующих этим каналам. Также считаем несущественным время перенаправления данных при маршрутизации. В таком приближении модель маршрутизации сводится к присвоению необходимых значений с выходов очередей и оконечных протоколов на входы каналов и, наоборот, с выходов каналов на входы очередей и оконечных протоколов. Напомним, что рассматриваемые модели каналов и сессий являются однонаправленными. Поэтому для представления двунаправленного канала моделируемой сети, с парой очередей на его входах, потребуются два ребра сетевого графа.

Аналогично: для представления одной сессии в терминах протокола TCP потребуются две моделирующие сессии: одна — прямая, передающая данные от источника к получателю, и другая — возвратная, возвращающая квитанции от получателя к источнику (см. рис. 4.3). Отметим также зависимости потока данных на выходе TCP-источника от потока квитанций на его входе, а также потока квитанций на выходе TCP-получателя от потока данных на его входе.

Для исследования протокола TCP ограничимся случаем, когда друг другу попарно взаимно однозначно соответствуют источник, получатель, прямая и возвратная сессии. Постулируется, что каждой сессии соответствует один и только один вход графа, а также один и только один выход графа.

В данной работе моделируется поведение компьютерной сети при использовании версии NewReno протокола TCP, использующего понятие окна — последовательности пакетов, которые могут быть отправлены без получения квитанции. В данной версии TCP размер окна увеличивается до тех пор, пока не произойдет потеря пакетов в сессии. Соответственно, протокол TCP-Reno имеет несколько режимов изменения размера окна: избегания перегрузки, быстрого восстановления и медленного старта

$$u_s = \begin{cases} u_s (1 + 1/W_s), & \text{Congestion avoidance,} \\ \tilde{W}_s / \tau_s, & \text{Fast Recovery,} \\ W_s / \tau_s, & \text{Slow Start.} \end{cases} \tag{4.9}$$

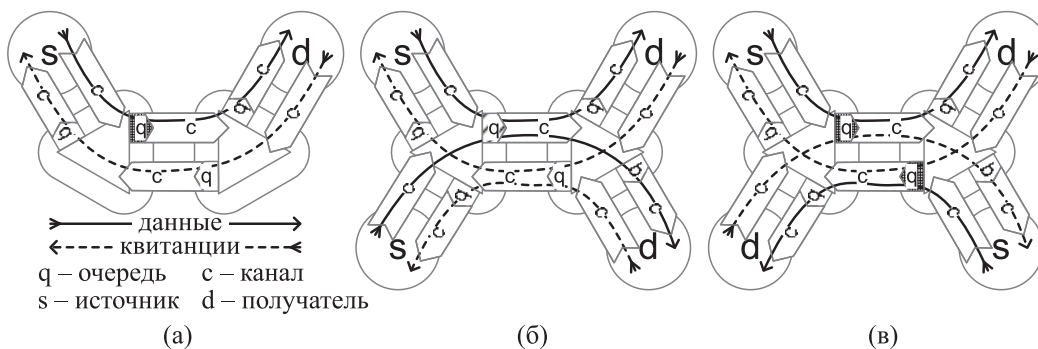


Рис. 4.3. Различные конфигурации простейших сетей: (а) одиночная с плотностью 4 Кбит/пакет; (б) сонаправленные с плотностью 8 Кбит/пакет; (в) противонаправленные с плотностью 8 Кбит/пакет

В (4.9) W_s — текущий размер окна данной сессии, \tilde{W}_s — пороговый размер окна данной сессии, τ_s — задержка распространения данных и квитанций в данной сессии. Увеличение размера окна данной сессии W_s определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dW_s}{dt} = \begin{cases} u_s/W_s, & \text{Congestion avoidance,} \\ u_s/\tilde{W}_s, & \text{Fast Recovery,} \\ u_s, & \text{Slow Start.} \end{cases} \quad (4.10)$$

После инициализации данных выполняется численное моделирование сети во времени с определенным шагом. На каждом временном шаге в моделях очередей выполняются следующие действия:

- учет притока данных в хвост очереди,
- вычисление действительной и ожидаемой длин очередей,
- определение вероятности сброса очереди,
- учет сброса очереди,
- сохранение значений переменных состояния очереди,
- определение значений выходного потока очереди.

В данной работе в моделях каналов выполняется только перенос информации с входа на выход. В моделях TCP приемников информация передается с входа на выход с учетом преобразования плотности.

В моделях TCP передатчиков выполняются следующие действия:

- изменение переменных состояния протокола TCP в зависимости от режима и количества поступивших квитанций,
- накопление оцениваемого времени задержки сессии (туда и обратно),
- изменение режима в зависимости от поступившей информации о потерях, текущего режима и оценки времени задержки,
- определение значений выходного потока.

Для сравнительной оценки разработанной потоковой модели проводилось моделирование, работы, как простейших сетей передачи данных (см. рис. 4.3), так и более сложных конфигураций (см. рис. 4.4) в сравнении с пакетной моделью, реализованной в NS-2 — средством пакетного моделирования с открытыми исходным кодом [<http://www.isi.edu/nsnam/ns/>].

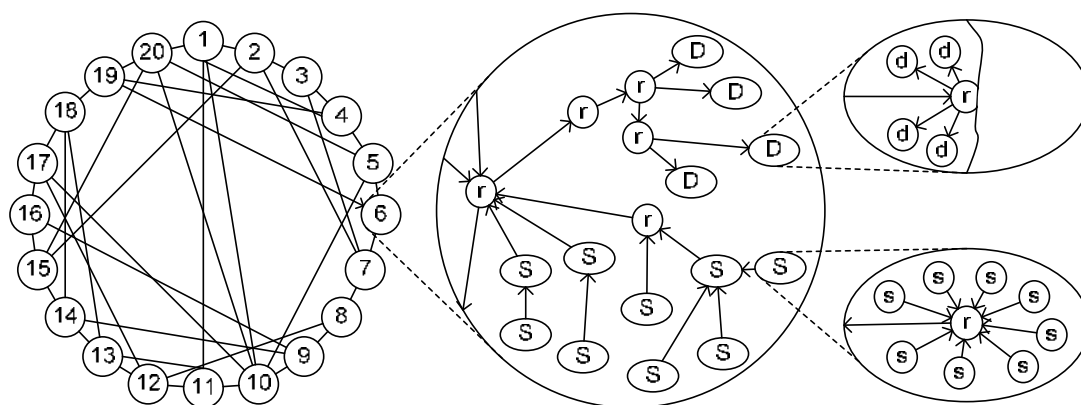


Рис. 4.4. Сложная кольцевая конфигурация сети, моделировалось 1280 сессий, при этом имела место одна загруженная очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистрали — 20 Мбит/с, хорды подсети — 5 Мбит/с, размер пакетов — 8 Кбит/пакет. Трафик организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистрали в соседнюю подсеть, а вторая половина — по хорде подсети. Обозначения: r — узел-маршрутизатор, s — узел-отправитель, d — узел-получатель

Простейшие сети представлялись одиночной ТСР-сессией (рис. 4.3, *a*), а также парой сонаправленных (рис. 4.3, *b*) и парой противоположных сессий (рис. 4.3, *в*). Эволюция интересующих нас характеристик — размеров очередей и ТСР-окон — в течение первых секунд представлена на графиках, позволяющих оценить степень подобия полученных результатов (см. рис. 4.5–4.7). Видно, что модели сходным образом демонстрируют основные явления, характерные для динамики протокола ТСР. Однако распределение моментов времени, в которые происходит переключение режимов протокола, существенно различается. Динамика пары противоположных сессий в пакетной модели обнаруживает относительно высокочастотные колебания длины очереди, при этом в потоковой модели таких колебаний нет (рис. 4.7). Последнее наблюдение позволяет судить об ожидаемой разнице в разрешающей способности пакетной и потоковой модели. Важно, что указанные различия в деталях поведения оставляют наиболее значимые средние уровни наблюдаемых характеристик близкими друг к другу.

Для сравнения интегрального поведения модельной компьютерной сети в целом, по гистограммам усредненной производительности и усредненного времени оборота соединений, рассмотрен случай относительно сложной кольцевой конфигурации сети (рис. 4.4). Данная конфигурация аналогична топологии, использованной в работе [Yong Liu et al., 2003]. Всего в рассматриваемом случае моделировалось 1280 сессий, при этом имела место одна загруженная

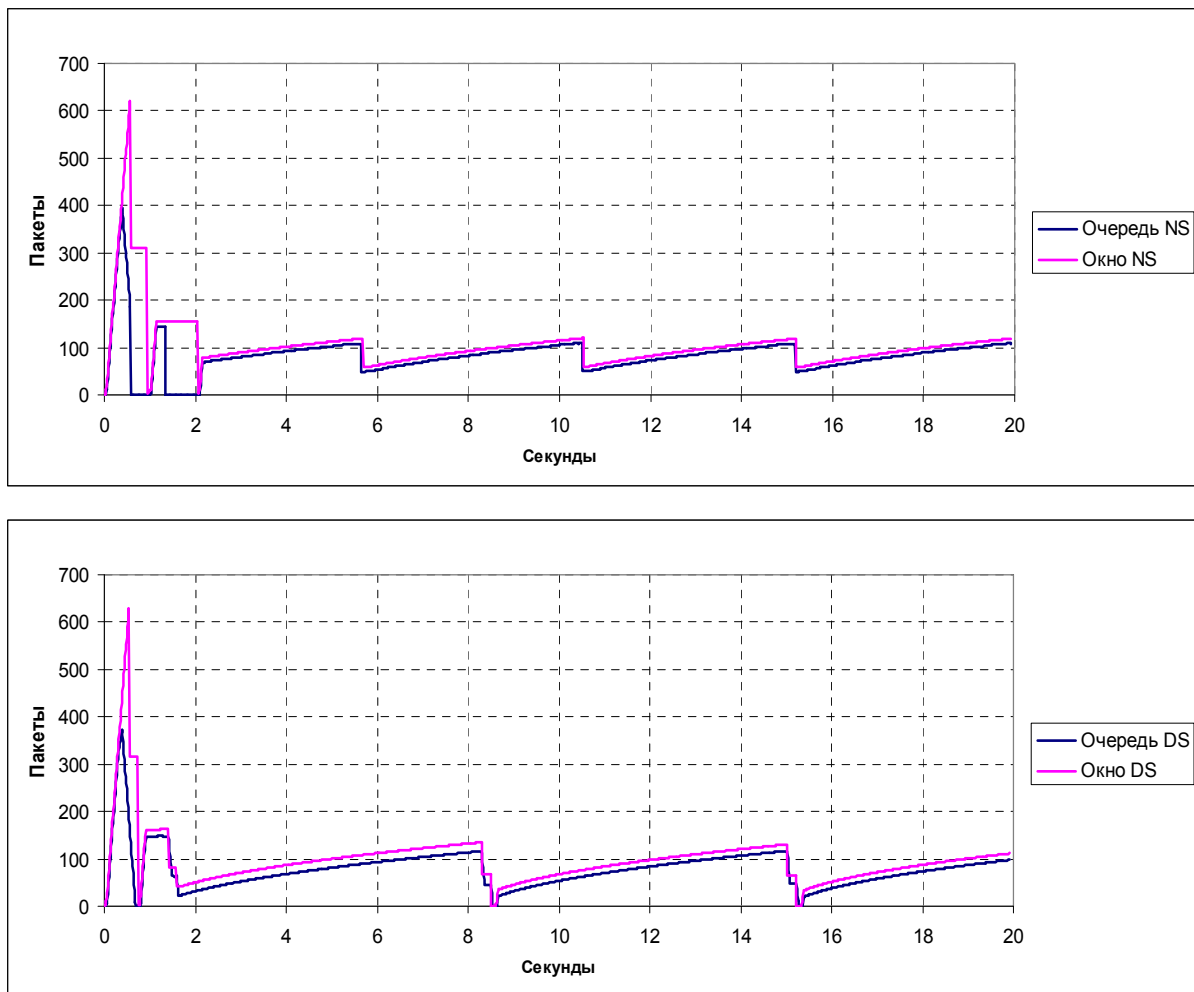


Рис. 4.5. Временная динамика одиночной сессии (рис. 4.3, *a*): сверху — пакетная модель NS-2, внизу — потоковая модель DS; синяя линия — размер общей очереди, красная — размеры ТСР-окна

очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистрали — 20 Мбит/с, хорды подсети — 5 Мбит/с, размер пакетов — 8 Кбит/пакет. Трафик намеренно был организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистрали в соседнюю подсеть, а вторая половина — по хорде подсети. Соответствующие усредненные результаты производительности сети и задержки в зависимости от сессии показаны на рис. 4.8 и 4.9. Усреднение результатов выполнялось за период времени в 200 с.

Заметно, что большинство соединений демонстрируют сходные величины. Вместе с этим присутствует большой разброс значений производительности отдельных соединений от значений, характерных для соответствующей группы соединений. Необходимо также отметить группы соединений, у которых заметно отличаются значения задержки (см. рис. 4.9). В части использования вычислительных ресурсов потоковая модель обнаруживает значительную их экономию. В наибольшей степени экономится занимаемая вычислительная память и в меньшей степени — время численного моделирования (см. рис. 4.10).

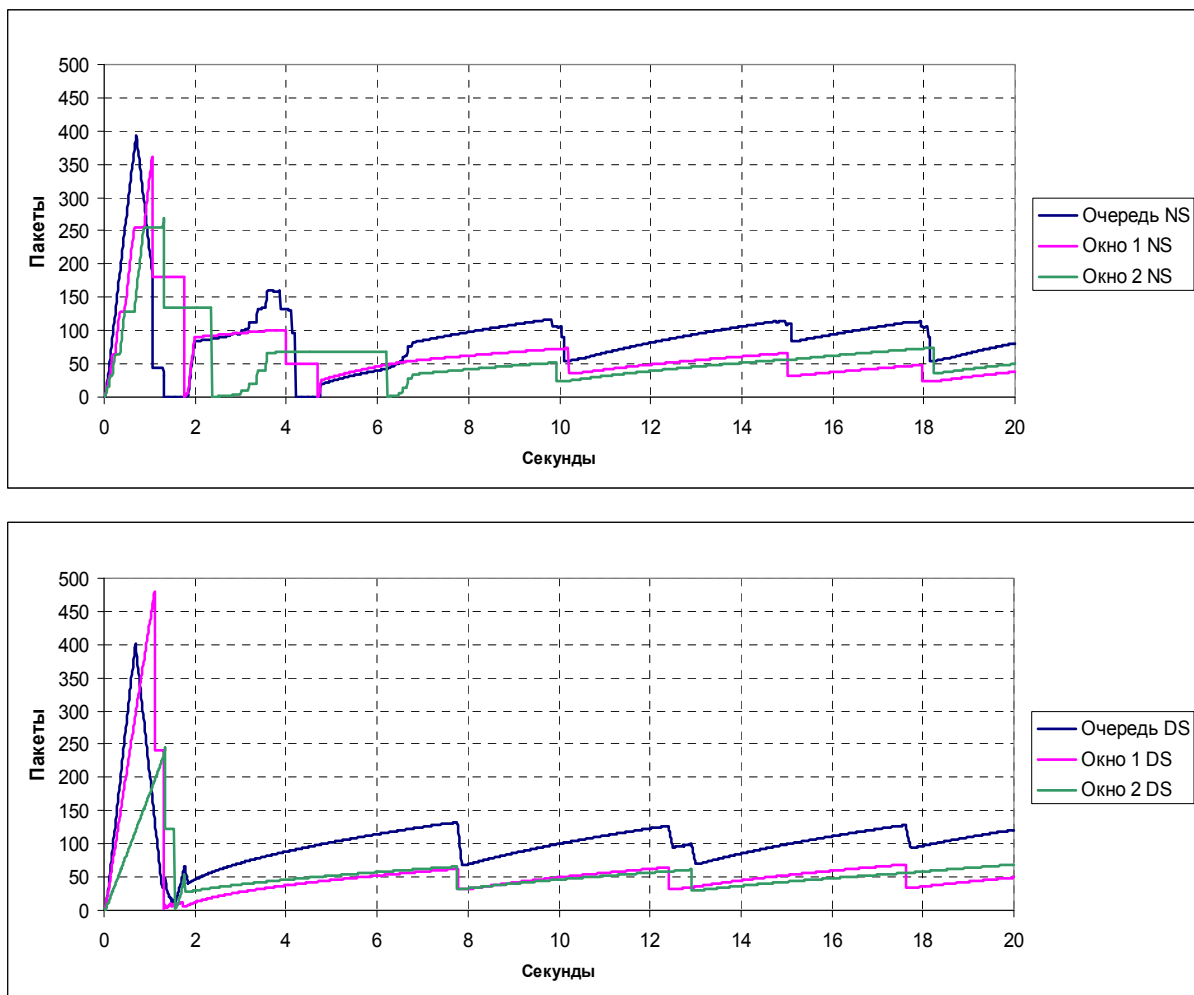


Рис. 4.6. Временная динамика двух сонаправленных сессий (рис. 4.3, б): вверху — пакетная модель NS-2, внизу — потоковая модель DS; синяя линия — размер общей очереди, красная и зеленая линии — размеры TCP-окон

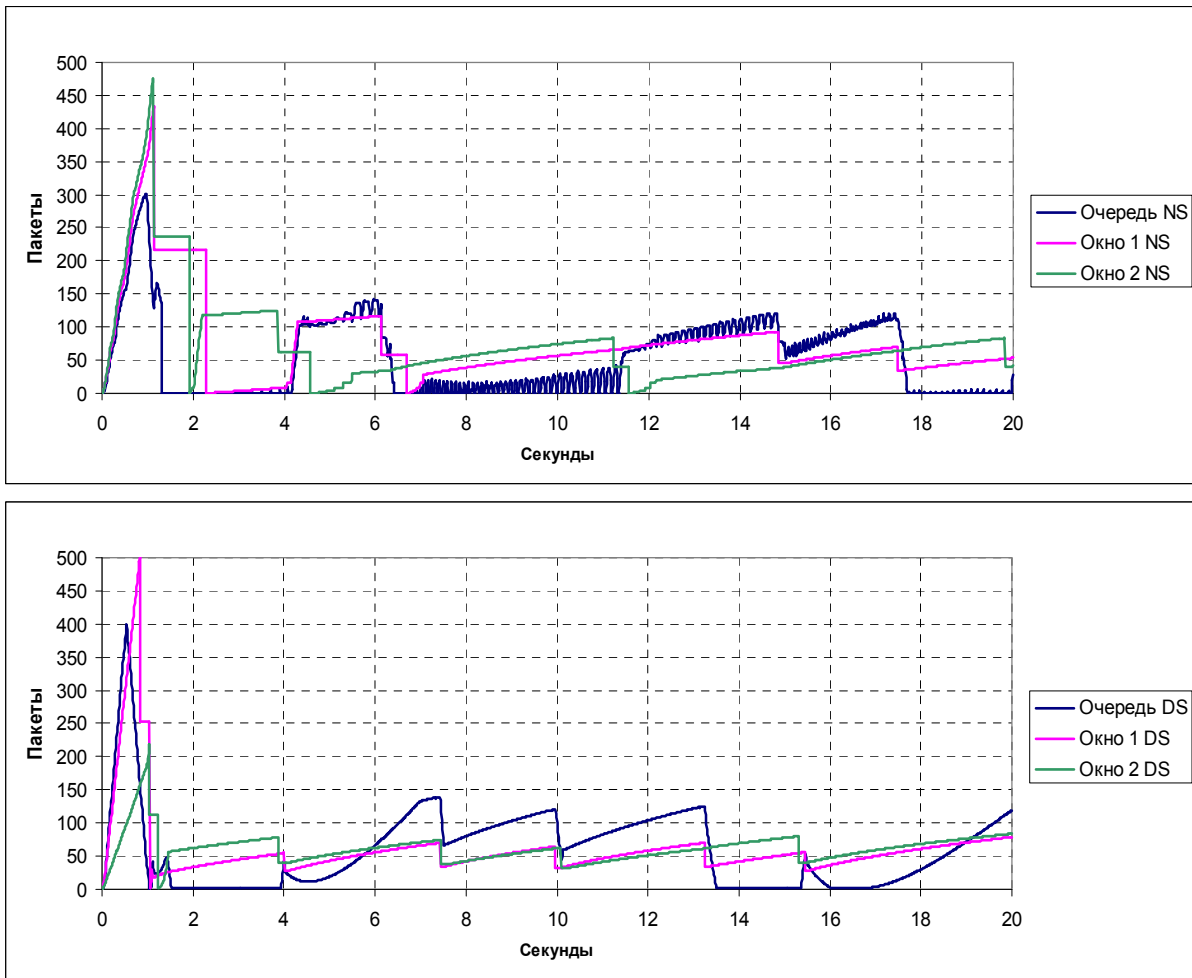


Рис. 4.7. Временная динамика двух противонаправленных сессий (рис. 4.3, в): вверху — пакетная модель NS-2, внизу — потоковая модель DS; синяя линия — размер очереди, красная и зеленая линии — размеры TCP-окон

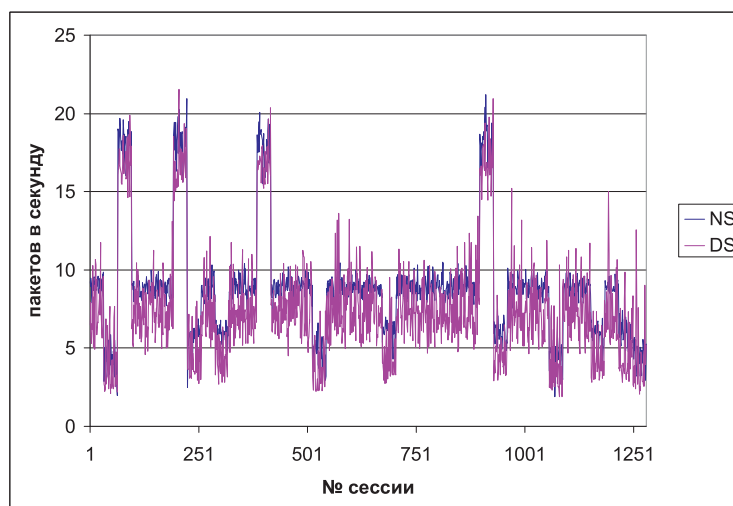


Рис. 4.8. Усредненные результаты производительности сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурации сети (рис. 4.4): синяя линия — пакетная модель NS-2, красная линия — потоковая модель DS

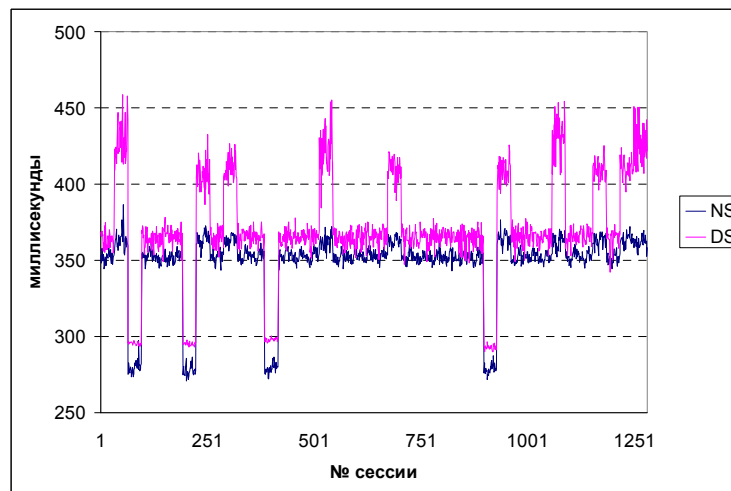


Рис. 4.9. Усредненные результаты временных задержек сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурации сети (рис. 4.4): синяя линия — пакетная модель NS-2, красная линия — потоковая модель DS

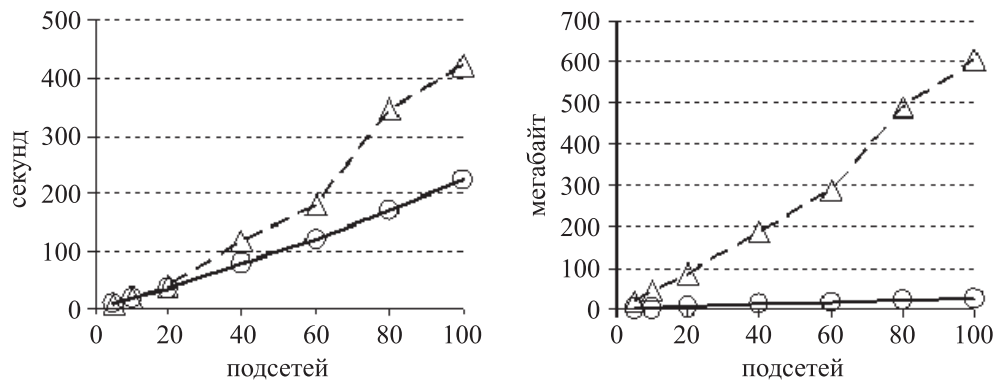


Рис. 4.10. Потребление вычислительных ресурсов в зависимости от количества моделируемых подсетей (5–100, 64 сессии на подсеть, размер пакета — 1 КБ): слева — вычислительное время, справа — количество используемой памяти; треугольники — пакетная модель NS-2; окружности — потоковая модель DS

5. Моделирование распространения примесей в вентиляционных сетях

В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной, однотемпературной постановке с правой частью, учитывающей пристеночное трение и силу тяжести:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = f^0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial x} = f^1 - \rho g \sin \beta, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = f^0 H - v \rho g \sin \beta. \end{cases} \quad (5.1)$$

Использовалось следующее замыкание для гиперболической части уравнений (1):

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{s=1}^S \rho_s, \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad f^0 = \sum_{s=1}^S f_s^0, \\ e_1 &= c_{V_1} T, \quad e = T \sum_{s=1}^S \frac{\rho_s}{\rho} c_{V_s}, \quad f^0 H = \sum_{s=1}^S f_s^0 H_s. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В этих уравнениях x — координата, t — время, ρ — плотность газа, ρ_s — плотность s -й компоненты примеси газа (парциальная плотность), $s = 1$ для несущей газовой компоненты, v — скорость газа, p — давление идеального газа, γ — показатель адиабаты газа, T — температура газа, e — внутренняя энергия газа, f_s^0 — возможное изменение массы воздуха или его примесей, $H_s = \gamma_s e_s$ — энтальпия этой массы воздуха или его примесей, $f^1 \approx 4 \times 10^{-4} \rho v^2$ — сила трения о стенки вентиляционной трубы, g — ускорение силы тяжести, β — горизонтальный угол наклона вентиляционной трубы.

Вводя в рассмотрение векторы: $\mathbf{V} = \{\rho, v, e\}^T$, $U(\mathbf{V}) = \{\rho, \rho v, \rho v^2/2 + \rho e\}^T$, $F(\mathbf{V}) = \{\rho v, p + \rho v^2, \rho v(v^2/2 + e + p/\rho)\}^T$, $f = \{f^0, f^1 - \rho g \sin \beta, f^0 H - \rho g \sin \beta v\}^T$, систему уравнений (5.1) можно записать в векторно-дивергентной форме:

$$\frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial x} = \frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial t} + \left(\frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial U(\mathbf{V})} \right) \frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial x} = f(\mathbf{V}, x, t) \quad (5.3)$$

с матрицей Якоби $A = \frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial U(\mathbf{V})} = \frac{\partial F}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)^{-1} = (\Omega^{-1} \Lambda \Omega)$.

Собственные числа матрицы Якоби: $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + c$, $\lambda_3 = v - c$ ($c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука) всегда действительны и различны, поэтому система (5.3)

строго гиперболического типа и ее левые собственные векторы: $\omega_1 = \left\{ \frac{v^2}{2} - \frac{c^2}{\gamma - 1}, -v, 1 \right\}$,

$\omega_2 = \left\{ \frac{1}{2} \left(v^2 - \frac{2cv}{\gamma - 1} \right), \frac{c}{\gamma - 1} - v, 1 \right\}$, $\omega_3 = \left\{ \frac{1}{2} \left(v^2 + \frac{2cv}{\gamma - 1} \right), \frac{c}{1 - \gamma} - v, 1 \right\}$ линейно независимы.

Число граничных условий, задаваемых на входах-выходах в вентиляционные трубы, зависит от знаков собственных чисел матрицы Якоби $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$. Их число определяется в зависимости от количества характеристик, идущих из области интегрирования (трубы) на ее границы. В соответствии с этим на входах-выходах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени значения давления, температуры или скорости газа. Для замыкания системы уравнений на границе в качестве дополнительных уравнений могут использоваться условия совместности: $\left\{ \omega_i \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\}$, $i = 1-3$, вдоль идущих внутрь области интегрирования (трубы) характеристик.

Помимо граничных условий, для системы (5.1), (5.2) необходимо задавать также начальные условия:

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \rho_s(x, 0) = \rho_{s_0}(x). \quad (5.4)$$

В уравнения газовой динамики (5.1) с нулевой правой частью вентилятор можно добавить с помощью локализованного на расстоянии Δx источника импульса и энергии, который создает перепад давления Δp_{fan} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial x} = \frac{\Delta p_{\text{fan}}}{\Delta x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = \frac{\Delta p_{\text{fan}} v}{\Delta x}. \end{cases} \quad (5.5)$$

В областях сочленения труб и примыкающих комнатах используется трехмерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной и однотемпературной постановке с турбулентной вязкостью в правой части. Учет турбулентной вязкости производится согласно k - ε -модели [Chien, 1982]. При этом нетурбулентной вязкостью мы пренебрегаем. В трехмерных областях уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = f^0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_{ij} p + \rho v_i v_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_i + f_i^1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\rho v_i^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\rho v_i^2}{2} + \rho e + p \right) \right) = \frac{\partial(\tau_{ij} v_i)}{\partial x_i} + f^0 H, \\ \tau_{ij} = \mu_t \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2\rho k}{3} \delta_{ij}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

Система уравнений (5.5) аналогична (5.1) за исключением того, что здесь дополнительно учитывается турбулентная вязкость вместе с пристеночным трением, действующим на газ, что более корректно в трехмерной постановке. Скорость с силой тяжести имеют три компоненты вдоль трех координатных осей: x_1 , x_2 , x_3 . В системе уравнений (5.5) появляются две новые переменные: k — удельная турбулентная энергия и ε — скорость диссипации турбулентной энергии и используются следующие обозначения: $\mu_t = 0.09 \frac{\rho k^2}{\varepsilon}$ — коэффициент турбулентной вязкости, τ_{ij} — тензор вязких напряжений. Для величин k и ε записываются два дополнительных уравнения, которые дополняют систему (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \rho \varepsilon, \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{\varepsilon}{k} \left(c_{\varepsilon 1} \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right), \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92.$

Граничные условия для этих величин на отражающих границах заданы как $k = 0$ и $\varepsilon = 0$. Начальные условия для величин k , ε задаются в виде $k = \frac{0.038}{\text{Re}^{0.25}} u^2$, $\varepsilon = \frac{c_\mu^{0.75} k^{1.5}}{\ell}$, $\ell = 0.07L$, где L — длина прямого участка моделируемой вентиляционной трубы.

Вводя в рассмотрение векторы

$$\mathbf{V} = \{\rho, v_1, v_2, v_3, e, k, \varepsilon\}^T,$$

$$U(\mathbf{V}) = \left\{ \rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \frac{1}{2}(\rho v_1^2 + \rho v_2^2 + \rho v_3^2) + \rho e, \rho k, \rho \varepsilon \right\}^T,$$

$$F_1(\mathbf{V}) = \left\{ \rho v_1, p + \rho v_1^2 + 2\rho k/3, \rho v_1 v_2, \rho v_1 v_3, \rho v_1 \left((v_1^2 + v_3^2 + v_2^2) / 2 + e + p / \rho + 2k/3 \right), \rho k v_1, \rho \varepsilon v_1 \right\}^T,$$

$$F_2(\mathbf{V}) = \left\{ \rho v_2, \rho v_1 v_2, p + \rho v_2^2 + 2\rho k/3, \rho v_2 v_3, \rho v_2 \left((v_1^2 + v_3^2 + v_2^2) / 2 + e + p / \rho + 2k/3 \right), \rho k v_2, \rho \varepsilon v_2 \right\}^T,$$

$$F_3(\mathbf{V}) = \left\{ \rho v_3, \rho v_1 v_3, \rho v_2 v_3, p + \rho v_3^2 + 2\rho k/3, \rho v_3 \left((v_1^2 + v_3^2 + v_2^2) / 2 + e + p / \rho + 2k/3 \right), \rho k v_3, \rho \varepsilon v_3 \right\}^T,$$

$$\tilde{f} = \left\{ f^0, \rho g_1 + f_1^1, \rho g_2 + f_2^1, \rho g_3 + f_3^1, f^0 H, -\rho \varepsilon, -c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon^2 / k \right\}^T,$$

$$\hat{f} = \left\{ 0, \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\tau_{1j} + \frac{2\rho k}{3} \right), \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\tau_{2j} + \frac{2\rho k}{3} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\tau_{3j} + \frac{2\rho k}{3} \right), \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tau_{ij} + \frac{2\rho k}{3} \delta_{ij} \right) v_i \right), \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} \frac{\mu_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon \tau_{ij}}{2k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\}^T,$$

систему уравнений (5.5)–(5.6) также можно записать в векторно-дивергентной форме:

$$\frac{\partial U(\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial F_1(\mathbf{V})}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(\mathbf{V})}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(\mathbf{V})}{\partial x_3} = \tilde{f}(\mathbf{V}, x_1, x_2, x_3, t) + \hat{f}(\mathbf{V}, x_1, x_2, x_3, t). \quad (5.8)$$

Решение задачи Римана для многокомпонентного газа в одномерной постановке строится с помощью решения задачи Римана о распаде между однокомпонентными газами с различными показателями адиабаты. Примеси в нашей постановке переносятся со скоростью течения газа, поэтому разрыв между ними фактически эволюционирует как контактный разрыв. Таким образом, на границе ячеек задача сводится к решению задачи Римана вдоль нормального направления скорости в трубе.

Рассмотрим вентиляционную трубу в трехмерной постановке. Пусть на стенках трубы стоят отражающие граничные условия. Потoki на границе получаются из решения задачи Римана для одного и того же газа вдоль нормали к стенке трубы, но нормальная скорость газа снаружи стенки берется противоположной нормальной скорости газа внутри:

$\{\tilde{\rho}, \tilde{u}_n, \tilde{p}\} = \mathcal{R}_{1D}(\{\rho, u_n, p\}_{in}, \{\rho, -u_n, p\}_{in})$. При этом очевидно, что $\tilde{u}_n = 0$, а $\tilde{\rho}$ и \tilde{p} зависят от параметров газа внутри трубы. Оценим значение \tilde{p} из размерных соображений: $\tilde{p} \approx p \pm \rho u_n^2$, где «+» соответствует $u_n > 0$, а «-» — случаю $u_n < 0$. Если пренебречь изменением импульса вдоль трубы, то изменение нормальной компоненты импульса будет пропорционально давлению: $\frac{\Delta(\rho u_n)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x} \approx \frac{\Delta(\rho u_n^2)}{\Delta x}$. Отсюда мы можем оценить время релаксации нормальной компоненты импульса: $t_{relax} \approx \frac{d}{|u_n|}$, где d — характерный диаметр трубы. Таким образом, идея

перехода к одномерной области состоит в устремлении $t_{\text{relax}} \rightarrow 0$. То есть газ, попадая в одномерную трубу, теряет свой поперечный импульс практически мгновенно. Этого же эффекта можно добиться, не добавляя поперечный импульс в одномерные ячейки, то есть обнуляя соответствующие компоненты импульса поперек трубы. Поскольку поперечная скорость газа в трубе теперь всегда будет равна нулю, граничные условия на стенках трубы более не требуются.

Практически это означает, что между одномерными и трехмерными областями считается тот же самый нормальный поток, что и между трехмерными областями, но поток поперечного импульса из трехмерной ячейки просто не добавляется к поперечному импульсу одномерной ячейки. Таким образом, газ, попадая в одномерную трубу, теряет свой поперечный импульс. Также на границе между трехмерными и одномерными вычислительными узлами со стороны одномерной области поперечные компоненты скорости вместе с удельной турбулентной энергией полагаются равными нулю:

$$\begin{cases} F_n^{1D} = \left\{ \rho v_n, p + \rho v_n^2, 0, 0, \rho v_n \left(\frac{v_n^2}{2} + e + p/\rho \right), 0, 0 \right\}^T, \\ F_n^{3D} = \left\{ \rho v_n, p + \rho v_n^2 + \frac{2\rho k}{3}, \rho v_n v_{\tau_1}, \rho v_n v_{\tau_2}, \rho v_n \left(\frac{v_n^2 + v_{\tau_1}^2 + v_{\tau_2}^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \frac{2k}{3} \right), \rho k v_n, \rho \epsilon v_n \right\}^T. \end{cases}$$

Для проверки корректности работы алгоритма численного сопряжения одномерных и трехмерных областей был поставлен модельный вычислительный эксперимент по расчету распространения примеси в Г-образной вентиляционной трубе, имеющей на одном конце вентилятор, на другом — выход в атмосферу. Длина каждой из двух частей трубы бралась равной 10 м, труба имеет при этом квадратное сечение шириной 1 м. Рассматривалось численное сопряжение двух участков вентиляционной трубы и ее поворотной части и сравнивалось с результатами расчетов, полученными в трехмерной постановке. Моделировалось распространение примеси метана CH_4 в трубе с начальной концентрацией в 0.3 кг/м^3 , который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину. В начальный момент времени внутри трубы задавались температура 293 К и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равна 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление.

Результаты расчетов истечения газа из трубы вместе с примесью метана представлены на рис. 5.1 на момент времени 2 с. Показаны значения распределения плотности метана для 4-х различных сеточных конфигураций расчетной области. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов вдоль по длине. Горизонтальная часть трубы считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов; за 20 узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10×10 узлов по сечению. Это делалось для того, чтобы обеспечить ламинарность течения газа на входе в поворот. На рисунке представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) — через пятьдесят; в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке. Распределения скорости газа в трубе для этих же сеточных конфигураций показаны на рис. 5.2.

Из результатов, представленных на рисунках, хорошо видно, что увеличение трехмерной области в расчете позволяет более детально передать картину течения газа и примесей в трубе. В полностью трехмерном расчете второй части трубы газ убегает вперед примерно на 2.2 м, этот эффект неизбежен, так как в одномерном расчете у нас невозможно формирование профиля Пуазейля, который образуется в трехмерном расчете. Тем не менее мы можем убедиться, что даже при использовании полностью одномерной сетки в трубе после поворота все качественные характеристики течения газов сохраняются. Метан почти полностью перетекает во вторую

часть трубы, за исключением небольшого его количества (~ 0.1 кг), которое остается в углу поворотной части, где скорость газа практически нулевая. Также если мы оценим массу газа, поступившего во вторую часть трубы для всех 4-х вариантов расчета, то увидим, что она практически не меняется в зависимости от варианта сеточной конфигурации расчета, как это показано в таблице 1. При этом, как видно из таблицы, вычислительные затраты в одномерном расчете почти в пять раз меньше, чем в трехмерном, и это только для половины трубы. Если бы мы считали всю трубу в трехмерной постановке и сравнивали с этим вариантом, то получили бы как минимум десятикратное ускорение, и это в простейшем модельном расчете.

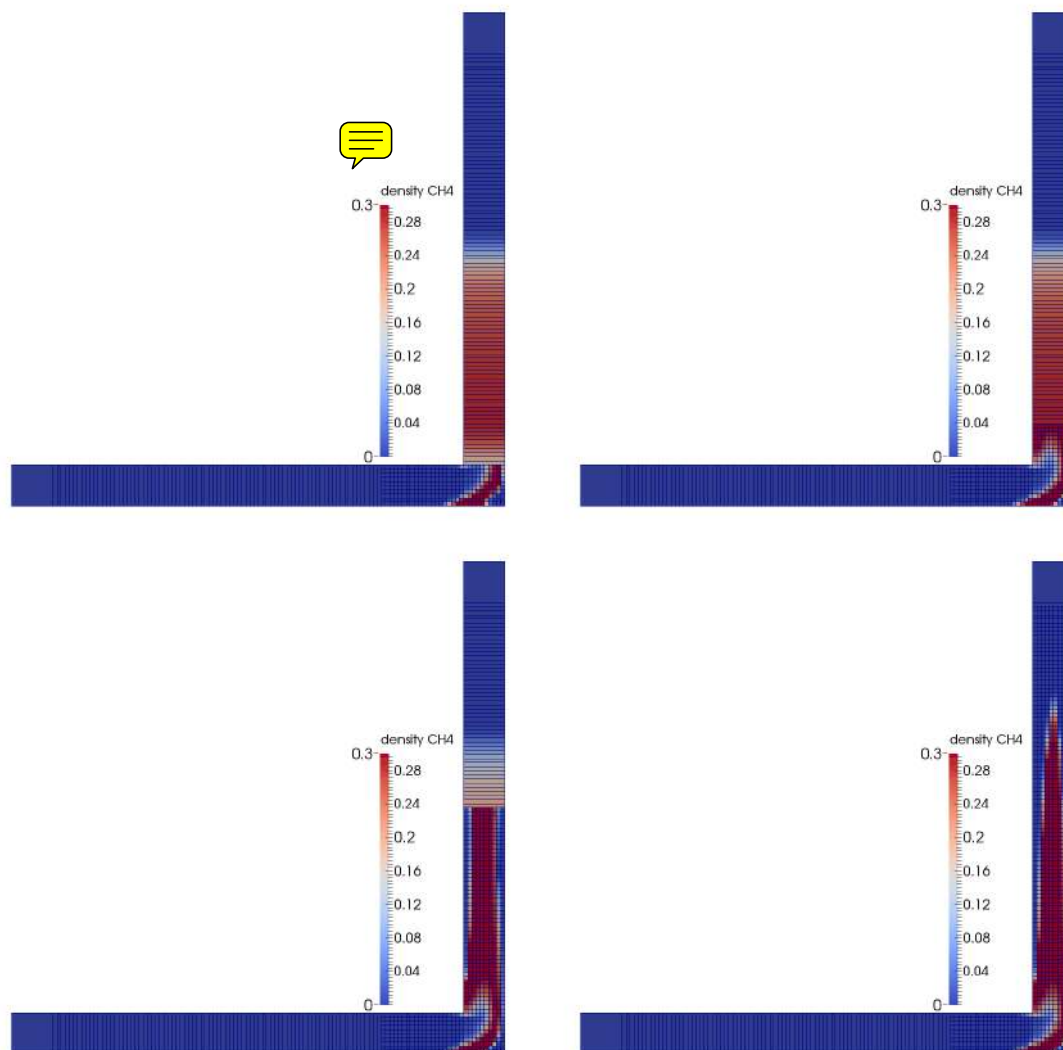


Рис. 5.1. Результаты расчетов распределения плотности примеси метана CH_4 ($\text{кг}/\text{м}^3$) с начальной концентрацией в $0.3 \text{ кг}/\text{м}^3$, который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину в Г-образной вентиляционной трубе на момент времени 2 с. В начальный момент времени внутри трубы задавались температура 293 К и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равна 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов по длине. Горизонтальная труба считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов; за 20 узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10×10 узлов по сечению. Представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) — через пятьдесят, в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке

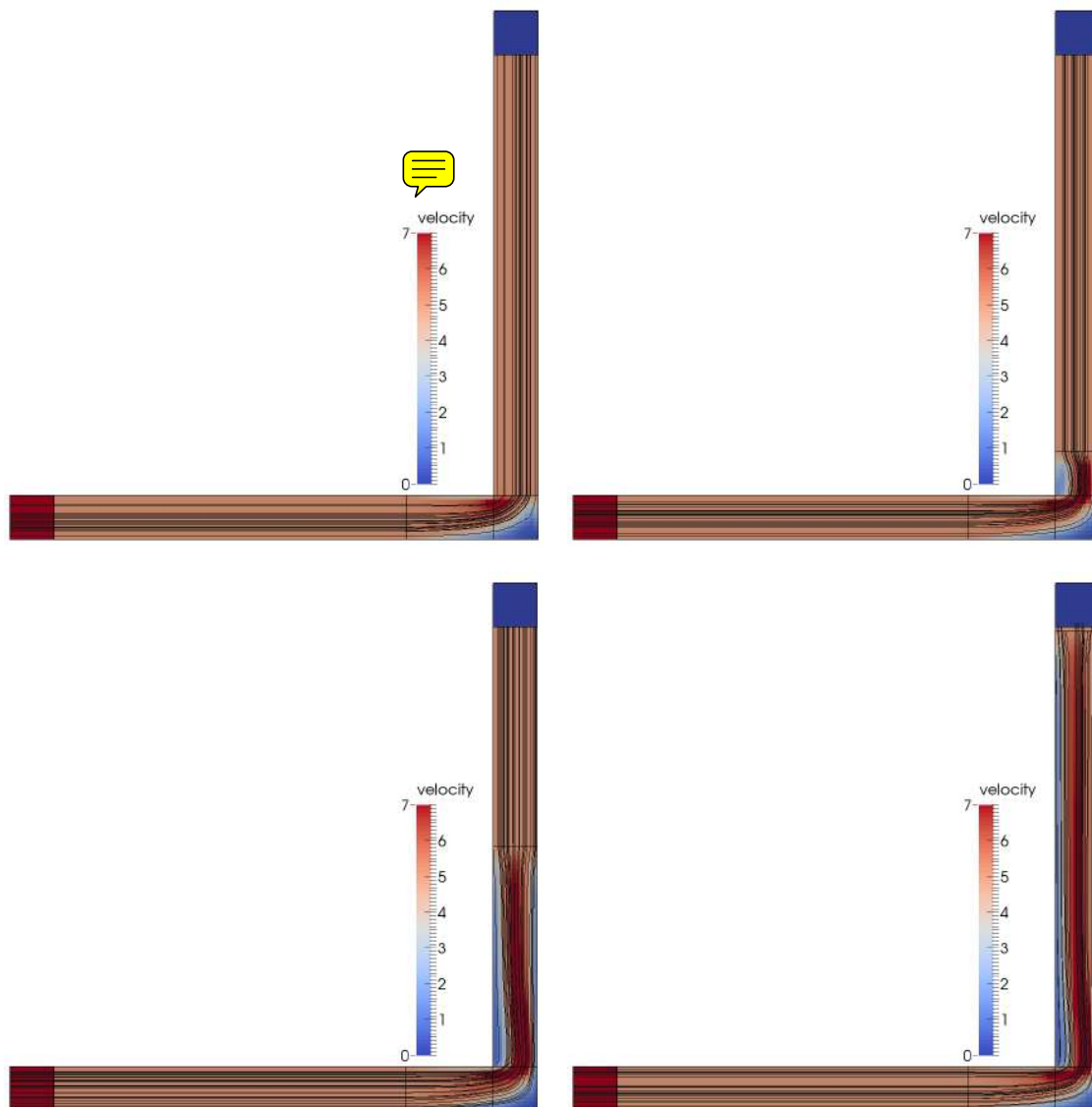


Рис. 5.2. Результаты расчетов распределения скорости (м/с) примеси метана CH_4 с начальной концентрацией в 0.3 кг/м^3 , который находился в середине первой части трубы и занимал 5 м в длину в Г-образной вентиляционной трубе на момент времени 2 с. В начальный момент времени внутри трубы задавались температура 293 К и давление в одну атмосферу, скорость на входе в трубу через вентилятор была равна 5 м/с, на выходе из вертикального участка трубы задавалось атмосферное давление. Каждый из участков трубы поделен на 100 сеточных узлов по длине. Горизонтальная труба считалась в одномерной постановке первые 80 сеточных узлов; за 20 узлов до поворотной части задавалась трехмерная сетка с шагом 10×10 узлов по сечению. Представлены результаты четырех вариантов расчета. В первом варианте (левый сверху) после поворота сразу задавалась одномерная сетка, во втором (правый сверху) одномерная постановка задавалась через десять узлов, в третьем (левый снизу) — через пятьдесят, в последнем (правый снизу) вся область после поворота считалась в трехмерной постановке

Таблица 1. Вычислительные затраты в зависимости от варианта сеточной конфигурации расчета

Количество одномерных узлов во второй части трубы (0–100)	100	90	50	0
Масса метана в выходной трубе, кг	1.40446	1.40944	1.40694	1.40365
Затраченное вычислительное время, с	120	220	400	560

Также были выполнены расчеты нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты, рассмотренные ранее в работе [Vasenin et al., 2011]. В частности, был проведен расчет проветривания тупиковой выработки вентилятором местного проветривания. Расчеты проветривания тупика проводились для модельного участка сети, представленного на рис. 5.3 и имеющего следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 — 100 м, длины горизонтальных выработок 2–3, 5–6 — 400 м, длина тупиковой выработки 4–5 — 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м^2 . В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана $\rho_{\text{CH}_4} = 0.3 \text{ кг/м}^3$. Квадратными сечениями на модельной сети выработок показаны границы расчетной зоны с трехмерной сеткой с размером ячейки $0.33 \times 0.33 \times 0.33 \text{ м}$, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом 0.66 м .

В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания сети **задаваемым** основным вентилятором (№ 1 на рис. 5.3, скорость на выходе — 2.1 м/с), в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный в выработке на расстоянии 10 м от сопряжения с тупиковой выработкой 4–5 и подающий по специальному вентиляционному трубопроводу 3–4 с сечением 1 м^2 поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с (см. рис. 5.3). После включения вентилятора местного проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6. В зоне сопряжения выработок происходит перемешивание струи газа из тупика с газом,двигающимся к выходу из выработки 5–6, в результате чего метан выдувается из выработки в атмосферу. Результаты расчетов распределения примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа) представлены на рис. 5.4.

Использование трехмерных сеток в областях сочленения выработок позволяет детально контролировать динамику течения газа и примесей. В своей работе [Vasenin et al., 2011] авторы указывали на возможный эффект обратного перетока метана из тупиковой выработки 4–5 в вентиляционную трубу 3–4 в случае задания высокой скорости потока на вентиляторе местного проветривания. На рис. 7 мы можем частично наблюдать этот эффект, который хорошо заметен в момент времени 130 с . Тем не менее мы видим, что метан в итоге не доходит до вентиляционной трубы и со временем выдувается в атмосферу. Таким образом, разработанная математическая модель позволяет определять распределение газодинамических параметров течения в трубопроводной сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией сети.

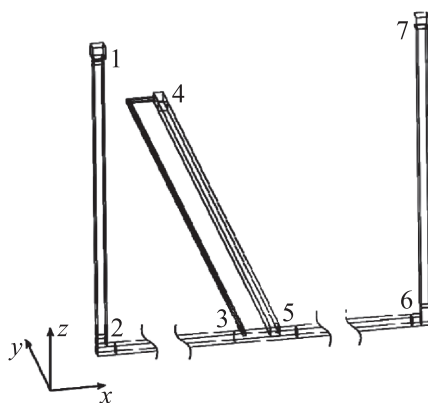


Рис. 5.3. Модельный участок сети, имеющий следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 — 100 м , длина горизонтальных выработок 2–3, 5–6 — 400 м , длина тупиковой выработки 4–5 — 200 м ; площадь сечений выработок была принята 10 м^2 , вентиляционной трубы 3–4 — 1 м^2 . В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана — 0.3 кг/м^3 . Квадратными сечениями показаны границы расчетных зон с трехмерной сеткой с размером ячейки $0.33 \times 0.33 \times 0.33 \text{ м}$, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом 0.66 м

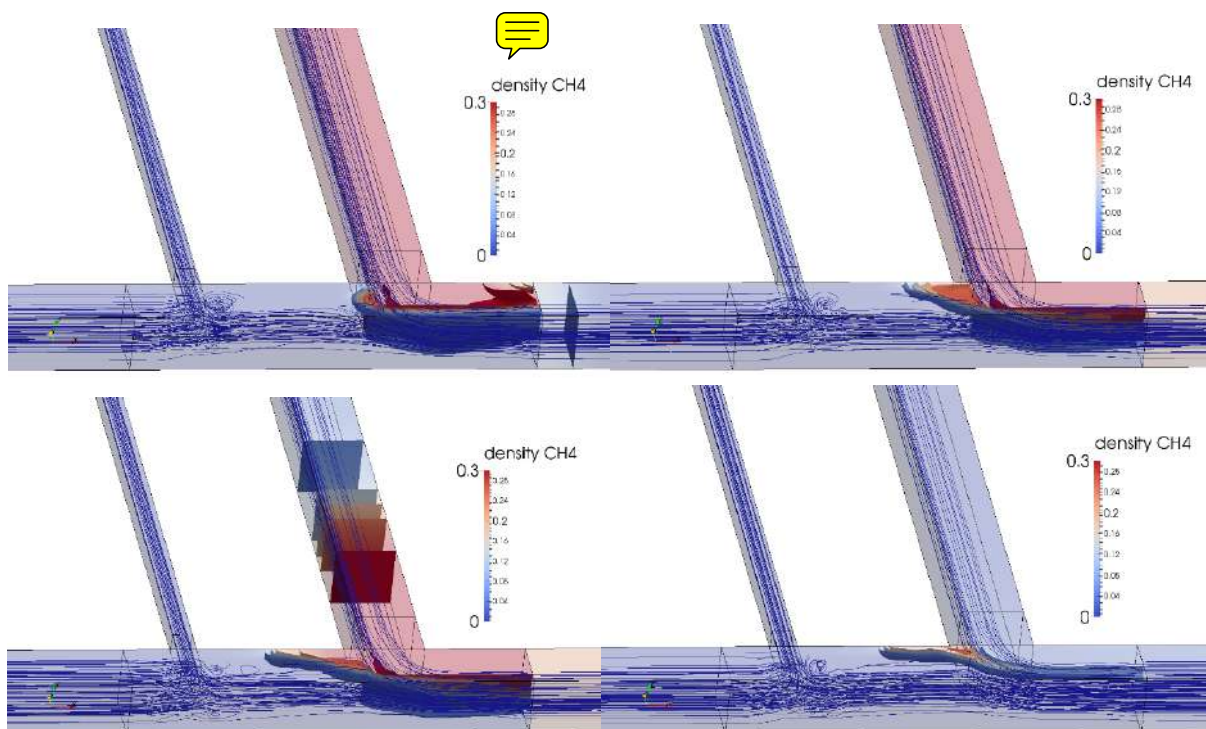


Рис. 5.4. В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания основным вентилятором (№ 1 на рис. 5.3) со скоростью 2.1 м/с в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный на расстоянии 10 м от сопряжения с выработкой 4–5 и подающий по трубопроводу 3–4 поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с. После включения вентилятора проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6 и затем в атмосферу. Результаты расчетов распределения плотности примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа). Сплошные линии на рисунках показывают изолинии течения газа

Заключение

В данной работе исследовались задачи, моделируемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для исследования данных проблем была построена вычислительная модель, основанная на решении соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Практически исследовались три различные задачи, решаемые в рамках разработанного подхода сетевых вычислительных моделей.

Первой задачей было моделирование движения транспортных потоков. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка для плотности и скорости потока. Система уравнений замыкалась уравнением состояния в виде зависимости относительной скорости распространения возмущений в потоке от плотности, **полученном** эмпирически для заданного участка транспортной сети. В рамках предлагаемого подхода была разработана новая макроскопическая гидродинамическая модель, описывающая автомобильное движение в городской транспортной сети и учитывающая как распределение светофорных фаз, так и существующую дорожную разметку на перекрестках. Модель реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты с использованием реальных дорожных данных. Работоспособность комплекса программ проверена с использованием системы сбора **реальных дорожных**. Проведенные расчеты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию в городской транспортной сети на значительных временных интервалах.

Второй задачей было моделирование потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. Предложены концептуальная и математическая модели сети. Важнейшей особенностью разработанной модели сети является представление наиболее вероятного, статистически достоверного поведения потоков данных в целом, без учета поведения каждого отдельного потока данных в какой-либо паре «отправитель–получатель», как это обычно делается в других сетевых моделях. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2 разработанная нами потоковая модель за счет использования в качестве базовых элементов потоков данных вместо пакетов демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия как пиковых, так и усредненных характеристик, и позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP-сетей передачи данных.

Третьей задачей было моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Целью этой задачи являлось построение вычислительной математической модели распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях на основе газодинамического подхода. В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики. В областях сочленения труб и примыкающих комнатах использовалась эта же система уравнений, но уже в трехмерной постановке. Сопряжение граничных условий на границе областей разной размерности обеспечивалось через решение соответствующей задачи Римана вдоль нормальной компоненты скорости по отношению к этой границе. Предложенная модель была реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты нестационарных режимов проветривания вентиляционных сетей. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо учитывает реальную топологию сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией, в том числе в сети выработок угольной шахты.

Полученный опыт использования сетевых вычислительных моделей показывает, что разработанный подход при современном уровне развития вычислительной техники и вычислительной математики позволяет эффективно численно решать достаточно сложные, «глобальные» задачи данного класса.

Список литературы (References)

- Морозов И. И., Холодов Я. А.* Моделирование режимов глобальных электрических сетей // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 47. — С. 170–178.
Morozov I. I., Kholodov Ya. A. Modelirovaniye rezhimov global'nykh elektricheskikh setey [Modeling modes of global electrical networks] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 47. — P. 170–178 (in Russian).
- Морозов И. И., Холодов Я. А., Крылов Д. А., Геллер О. В.* Моделирование режимов глобальных электроэнергетических систем // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 3 (7). — С. 46–52.
Morozov I. I., Kholodov Ya. A., Krulov D. A., Geller O. V. Modelirovaniye rezhimov global'nykh elektroenergeticheskikh sistem [Modeling modes of global electrical networks] // Trudy MIPT. — 2010. — Vol. 2, No. 3 (7). — P. 46–52 (in Russian).
- Северов Д. С., Трифонов С. В., Миненко М. И., Холодов Я. А.* Численное моделирование IP-сетей передачи данных в рамках уравнений сплошной среды // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 46. — С. 218–227.
Severov D. S., Trifonov S. V., Minenko M. I., Kholodov Ya. A. Chislennoye modelirovaniye IP-setey peredachi dannykh v ramkakh uravneniy sploshnoy sredy [Numerical modeling of IP-based data networks in the framework of continuum equations] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 46. — P. 218–227 (in Russian).
- Трифонов С. В., Холодов Я. А., Миненко М. И., Истомин Т. Е., Чечендаев А. В.* Алгоритмы оптимизации работы беспроводной сенсорной сети на базе протокола ZigBee // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 56 — С. 86–95.
Trifonov S. V., Kholodov Ya. A., Minenko M. I., Istomin T. E., Chechendaev A. V. Algoritmy optimizatsii raboty besprovodnoy sensornoy seti na baze protokola ZigBee [Algorithms for optimizing the wireless sensor network based on the ZigBee protocol] // Nauchno-tehnicheskii vestnik ITMO. — 2008. — Vol. 56. — P. 86–95 (in Russian).

- Холодов А. С.* Разностные схемы с положительной аппроксимацией для многомерных систем уравнений гиперболического типа на нерегулярных сетках // Рациональное численное моделирование в нелинейной механике. М.: Наука, 1990. — С. 49–62.
- Kholodov A. S.* Raznostnyye skhemy s polozhitel'noy approksimatsiyey dlya mnogomernykh sistem uravneniy giperbolicheskogo tipa na neregulyarnykh setkakh [Difference schemes with positive approximation for multidimensional systems of hyperbolic equations on irregular grids] // Ratsional'noe chislennoe modelirovanie v nelinejnoj mehanike [..]. Moscow: Nauka, 1990. — P. 49–62 (in Russian).
- Холодов Я. А., Холодов А. С., Гасников А. В., Морозов И. И., Тарасов В. Н.* Моделирование транспортных потоков — актуальные проблемы и перспективы их решения // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 4 (8). — С. 152–162.
- Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Gasnikov A. V., Morozov I. I., Tarasov V. N.* Modelirovaniye transportnykh potokov — aktual'nyye problemy i perspektivy ikh resheniya [Numerical study of traffic flows — actual problems and prospects of their solution] // Trudy MIPT. — 2010. — Vol. 2, No. 4 (8). — P. 152–162 (in Russian).
- Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Goreva A. I., Vasilev M. O., Chekhovich Y. V., Mishin V. D., Starozhilets V. M.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7 (6). — P. 1185–1203.
- Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Chekhovich Y. V., Starozhilets V. M.* Adaptive traffic light control on highway entrances // 2017 IEEE 20th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC). — 2017. — P. 1–6. — DOI: 10.1109/ITSC.2017.8317729
- Alekseenko A. E., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Boundary control problems for quasilinear systems of hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56 (6). — P. 916–931. — DOI: 10.1134/S0965542516060166
- Aw A., Rascole M.* Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 60. — P. 916–938. — DOI: 10.1137/S0036139997332099
- Bordonos A. K., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Morozov I. I.* Modeling of the global high-voltage grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2009. — Vol. 21 (6). — P. 3–16.
- Carson J. M., Pant S., Roobottom C., Alcock R., Blanco P. J., Carlos Bulant C. A., Vassilevski Y., Simakov S., Gamilov T., Pryamonosov R., Liang F., Ge X., Liu Y., Nithiarasu P.* Non-invasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: A benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies // International journal for numerical methods in biomedical engineering. — 2018. — e3235. — <https://doi.org/10.1002/cnm.3235>
- Chien K. Y.* Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model // AIAA Journal. — 1982. — Vol. 20 (1). — P. 33–38.
- Daganzo C. F.* Requiem for second-order approximations of traffic flow // Transportation Research B. — 1995. — Vol. 29 (4). — P. 277–286. — [https://doi.org/10.1016/0191-2615\(95\)00007-Z](https://doi.org/10.1016/0191-2615(95)00007-Z)
- Floyd S., Jacobson V.* Random Early Detection gateways for congestion avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Vol. 1 (4). — P. 397–413.
- Geller O. V., Vasilev M. O., Kholodov Ya. A.* Building a high-performance computing system for simulation of gas dynamics // Computer Research and Modeling. — 2010. — Vol. 2 (3). — P. 309–317.
- Gognieva D. G., Gamilov T. M., Pryamonosov R. A., Vasilevsky Y. V., Simakov S. S., Liang F., Ternovoy S. K., Serova N. S., Tebenkova E. S., Sinitsyn E. A., Pershina E. S., Abugov S. A., Mardanyan G. V., Zakryan N. V., Kirakosyan V. R., Betelin V. B., Mitina Y. O., Gubina A. Y., Shchekochikhin D. Y., Syrkin A. L., Kopylov F. Y.* Noninvasive assessment of the fractional reserve of coronary blood flow with a one-dimensional mathematical model. Preliminary results of the pilot study // Russian Journal of Cardiology. — 2019. — Vol. 3. — P. 60–68. — <https://doi.org/10.15829/1560-4071-2019-3-60-68>
- Gognieva D. G., Syrkin A. L., Vassilevski Y. V., Simakov S. S., Melerzanov A. V., Fuyou L., Lomonosova A. A., Bykova A. A., El Manaa H. E., Kopylov P. Y.* Noninvasive Assessment of Fractional Flow Reserve Using Mathematical Modeling of Coronary Flow // Kardiologiya. — 2018. — Vol. 58 (12). — P. 85–92. — <https://doi.org/10.18087/cardio.2018.12.10164>

- Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Computational Models on Graphs for the Nonlinear Hyperbolic System of Equations // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2004. — Vol. 476. — P. 161–167. — DOI: 10.1115/PVP2004-2580
- Kholodov A. S., Simakov S. S., Kholodov Ya. A.* Global matter transport simulation using dynamical models of cardiovascular and respiratory systems // Proceedings of the 2005 Summer Bioengineering Conference. — 2005. — Vol. 2005. — P. 51–52.
- Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2006a. — Vol. 46 (9). — P. 1560–1588. — <https://doi.org/10.1134/S0965542506090089>
- Kholodov Ya. A., Kholodov A. S. et al.* Computational Models on Graphs for Nonlinear Hyperbolic and Parabolic System of Equations // Motosoares C. A. et al. (eds.) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006b. — Springer, Dordrecht. — https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_43
- Kholodov Ya., Evseev E., Morozov E., Bapayev A.* Simulation Model for the Rod System Graphs Dynamics // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2006c. — Vol. 2. — P. 485–496. — DOI: 10.1115/PVP2006-ICPVT-11-93708
- Kholodov Ya. A., Alekseenko A. E., Vasilev M. O., Kholodov A. S.* Developing the mathematical model of road junction by the hydrodynamic approach // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6 (4). — P. 503–522.
- Kholodov Ya. A., Alekseenko A. E., Kholodov A. S., Vasilev M. O., Mishin V. D.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part II // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7 (6). — P. 1205–1219.
- Kholodov Ya. A., Vasiliev M. O., Kholodov A. S., Tsybulin I. V.* Developing the mathematical model for fine impurities spreading in ventilation networks // Math. Models Comput. Simul. — 2017. — Vol. 9 (2). — P. 142–154. — <https://doi.org/10.1134/S2070048217020077>
- Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Tsybulin I. V.* Construction of Monotone Difference Schemes for Systems of Hyperbolic Equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2018. — Vol. 58 (8). — P. 1226–1246. — <https://doi.org/10.1134/S0965542518080110>
- Kulikovskii A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu.* Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. — 1st Edition. — Chapman and Hall/CRC, 2000. — 560 p.
- Liu Y., Lo Presti F., Misra V., Towsley D., Gu Y.* Fluid Models and Solutions for Large-Scale IP Networks // Proceedings of ACM International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems. — San Diego, CA, USA, 2003.
- Magomedov K. M., Kholodov A. S.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9 (2). — P. 158–176.
- Morozov I. I., Gasnikov A. V., Tarasov V. N., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S.* Numerical study of traffic flows by the hydrodynamic models // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3 (4). — P. 389–412.
- Papageorgiou M.* Some remarks on macroscopic flow modeling // Transportation Research A. — 1998. — Vol. 32 (5). — P. 323–329.
- Payne H. J.* Models of freeway traffic and control, in: Simulation Council Proc // Mathematical Models of Public Systems. Edited by G. A. Bekey. — 1971. — Vol. 1. — P. 51–61.
- Prokoptsev N. G., Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A.* Traffic flow speed prediction on transportation graph with convolutional neural networks // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10 (3). — P. 359–367. — DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-359-367
- Severov D. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Comparison of packet-level and fluid models of IP networks // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4 (4). — P. 385–393. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048212040072>

- Siebel F., Mauser W.* On the fundamental diagram of traffic flow // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. — 2006a. — Vol. 66 (4). — P. 1150–1162.
- Siebel F., Mauser W.* Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // *Phys. Rev. E*. — 2006b. — Vol. 73. — P. 066108.
- Simakov S. S., Kholodov A. S., Yevdokimov A. V., Kholodov Ya. A.* Numerical Simulations of Cardiovascular Diseases and Global Matter Transport // *Advanced Information and Telemedicine Technologies for Health*. — 2005. — Vol. 2. — P. 188–192.
- Simakov S. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A., Nadolskiy A. A., Shushlebin A. N.* Global Dynamical Model of the Cardiovascular System // *Motasoares C. A. et al. (eds.) III European Conference on Computational Mechanics*. — 2006a. — Springer, Dordrecht. — https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_204
- Simakov S. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A., Nadolskiy A. A., Shushlebin A. N.* Computational Study of the Vibrating Disturbances to the Lung Function // *Motasoares C. A. et al. (eds.) III European Conference on Computational Mechanics*. — 2006b. — Springer, Dordrecht. — https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_205
- Simakov S. S.* Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods // *Computer Research and Modeling*. — 2018. — Vol. 10 (5). — P. 581–604. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-5-581-604>
- Trifonov S. V., Kholodov Ya. A.* Study and optimization of wireless sensor network based on ZigBee protocol // *Computer Research and Modeling*. — 2012. — Vol. 4 (4). — P. 855–869.
- Vasenin I. M., Shrager E. R., Krainov A. Y., Paleev D. Y., Lukashev O. Y., Kosterenko V. N.* Mathematical simulation of non-stationary ventilation processes of coal mining // *Computer Research and Modeling*. — 2011. — Vol. 3 (2). — P. 155–163.
- Zhang H. M.* A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // *Transportation Research B*. — 2002. — Vol. 36. — P. 275–290. — [https://doi.org/10.1016/S0191-2615\(00\)00050-3](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(00)00050-3)
- Zhang H. M.* Anisotropic property revisited — does it hold in multi-lane traffic? // *Transportation Research B*. — 2003. — Vol. 37 (6). — P. 561–577.

УДК: 519.711.3

Целенаправленная трансформация математических моделей на основе стратегической рефлексии

С. А. Антипова¹, А. А. Воробьев²

¹ Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, наб. Макарова, д. 8

² Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, 14-я линия, д. 39

E-mail: maestro265@yandex.ru

Получено 31.05.2019, после доработки — 05.08.2019.

Принято к публикации 30.08.2019.

Исследование сложных процессов в различных сферах человеческой деятельности традиционно основывается на использовании математических моделей. В современных условиях разработка и применение подобных моделей существенно упрощаются наличием быстродействующих средств вычислительной техники и специализированных инструментальных средств, позволяющих, по существу, конструировать модели из заранее подготовленных модулей. Несмотря на это, известные проблемы, связанные с обеспечением адекватности модели, достоверности исходных данных, реализацией на практике результатов моделирования, чрезмерно большой размерностью исходных данных, совместным применением достаточно разнородных математических моделей в условиях усложнения и интеграции моделируемых процессов, приобретают растущую актуальность. Еще более критичными могут являться внешние ограничения, накладываемые на значение оптимизируемого функционала и нередко не достижимые в рамках построенной модели. Логично предположить, что для выполнения этих ограничений необходима целенаправленная трансформация исходной модели, то есть переход к математической модели с заведомо «улучшенным» решением. Новая модель, очевидно, будет иметь иную внутреннюю структуру (совокупность параметров и их взаимосвязи), а также иные форматы (области определения) исходных данных. Исследованные авторами возможности целенаправленного изменения первоначальной модели основаны на реализации идеи стратегической рефлексии.

В математическом плане практическая реализация авторского замысла оказывается наиболее сложной при использовании имитационных моделей, для которых алгоритмы поиска оптимальных решений имеют известные ограничения, а исследование на чувствительность в большинстве случаев весьма затруднительно. На примере рассмотрения достаточно стандартной дискретно-событийной имитационной модели в статье приводятся типовые методические приемы, позволяющие осуществить ранжирование переменных параметров по чувствительности и в дальнейшем расширить область определения переменного параметра, к которому имитационная модель наиболее чувствительна. При переходе к «улучшенной» модели возможно также одновременное исключение из нее параметров, влияние которых на оптимизируемый функционал несущественно, и, наоборот, введение в модель новых параметров, соответствующих реальным процессам.

Ключевые слова: переменные параметры, математическая модель, оптимизируемый функционал, стратегическая рефлексия, чувствительность модели

Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 0073-2019-0004.

© 2019 С. А. Антипова, А. А. Воробьев

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License. Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/> или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.711.3

The purposeful transformation of mathematical models based on strategic reflection

S. A. Antipova¹, A. A. Vorobiev²

¹ Military Educational Institution of Logistics named after General of the Army A. V. Khrulyov,
8 Embankment, St. Petersburg, 199034, Russia

² St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences,
39 14th Line, St. Petersburg, 199178, Russia

E-mail: maestro265@yandex.ru

Received 31.05.2019, after completion — 05.08.2019.

Accepted for publication 30.08.2019.

The study of complex processes in various spheres of human activity is traditionally based on the use of mathematical models. In modern conditions, the development and application of such models is greatly simplified by the presence of high-speed computer equipment and specialized tools that allow, in fact, designing models from pre-prepared modules. Despite this, the known problems associated with ensuring the adequacy of the model, the reliability of the original data, the implementation in practice of the simulation results, the excessively large dimension of the original data, the joint application of sufficiency heterogeneous mathematical models in terms of complexity and integration of the simulated processes are becoming increasingly important. The more critical may be the external constraints imposed on the value of the optimized functional, and often unattainable within the framework of the constructed model. It is logical to assume that in order to fulfill these restrictions, a purposeful transformation of the original model is necessary, that is, the transition to a mathematical model with a deliberately improved solution. The new model will obviously have a different internal structure (a set of parameters and their interrelations), as well as other formats (areas of definition) of the source data. The possibilities of purposeful change of the initial model investigated by the authors are based on the realization of the idea of strategic reflection. The most difficult in mathematical terms practical implementation of the author's idea is the use of simulation models, for which the algorithms for finding optimal solutions have known limitations, and the study of sensitivity in most cases is very difficult. On the example of consideration of rather standard discrete-event simulation model the article presents typical methodological techniques that allow ranking variable parameters by sensitivity and, in the future, to expand the scope of definition of variable parameter to which the simulation model is most sensitive. In the transition to the “improved” model, it is also possible to simultaneously exclude parameters from it, the influence of which on the optimized functional is insignificant, and vice versa — the introduction of new parameters corresponding to real processes into the model.

Keywords: variable parameters, mathematical model, optimized functionality, strategic reflection, sensibility of model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 815–831 (Russian).

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, research project No. 0073-2019-0004.

© 2019 S. A. Antipova, A. A. Vorobiev

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

С давних времен человечество успешно применяет модели в различных сферах своей жизнедеятельности. С середины XVII века, с изобретением Ньютоном и Лейбницем методов дифференциального исчисления, растущую популярность постепенно стало приобретать математическое моделирование. Стремительный скачок в развитии математического моделирования как теоретического раздела математики произошел в годы Второй мировой войны и в последующий период, в эпоху появления и развития теории исследования операций. Однако вплоть до 30–40-х годов XX века применение математических моделей существенно сдерживалось возможностями средств производства вычислений. Созданные вычислительные бюро, оборудованные сотнями арифмометров и использующие вспомогательные таблицы, имели весьма ограниченные возможности. «Кораблестроительные расчеты или расчеты, связанные с постройкой плотин больших электростанций, занимают месяцы и даже годы работы специальных вычислительных бюро...», — вспоминал академик АН СССР А. Н. Колмогоров. Возникновение математической теории вычислений также не позволяло кардинально решить проблему [Колмогоров, 1988].

Развитие средств вычислительной техники весьма значительно расширило практические возможности математического моделирования. Появились и бурно развиваются специализированные инструментальные средства, предназначенные для создания и применения математических моделей в народном хозяйстве, в экономике и в военном деле. Широко известны многочисленные примеры успешного применения математических моделей в самых различных приложениях. В современных условиях усложнение объектов исследования, стремительная интеграция технологических, социальных, экономических, политических и других процессов по-прежнему определяют актуальность дальнейшего развития математических методов и моделей, преимущественно в прикладных аспектах [Новиков, 2016].

Существенная зависимость приложений математического моделирования от возможностей средств вычислительной техники привела, на основе поверхностного понимания методологии современного математического моделирования [Самарский, 1979, 2005], к ошибочному толкованию исторических аспектов теории, возникшей будто бы только в 1970-х годах [Ковеня, 2002]. Корректно говорить о новом поколении математических моделей, использующих методы и инструментальные средства формирования моделей в автоматизированном режиме, на основе применения языков моделирования, существенно отличающихся от обычных языков программирования своей декларативной природой [Ильин, 2010; Никольский и др., 2005; Рыжаков, Щербина, 2006; Самарский, 1979, 2005; Geoffrion, 2006; Kallrath, 2003].

Менее известны «провальные» факты (число которых также значительно) неудачного применения математических моделей, а также причины возникновения этих фактов. Многократно повторяющиеся с возрастающей динамикой в процессе развития теории математического моделирования периоды «завышенных ожиданий» и «разочарования» (см. [Новиков, 2016]) также не всегда связывались с ограниченными возможностями математических моделей в удовлетворении вновь возникающих практических потребностей.

Далее проводится комплексный анализ факторов, непосредственно влияющих на границы практического применения математических моделей, и предлагаются новые подходы к существенному расширению этих границ.

2. Виды и отличительные признаки математических моделей

В известной литературе предлагается множество различных классификаций математических моделей, зачастую противоречивых и не имеющих практической значимости. Целесообразно руководствоваться достаточно известным разделением математических моделей по принципу построения (внутреннему содержанию) на:

- аналитические,
- имитационные,
- комбинированные (аналитико-имитационные или имитационно-аналитические).

Аналитические модели успешно применяются в различных сферах человеческой деятельности уже много сотен лет. Суть этого вида моделирования заключается в отображении реального процесса посредством конечного (как правило, сравнительно небольшого) множества параметров, между которыми существуют достаточно явные зависимости, заданные аналитически. Целями аналитического моделирования являются исследование динамики процесса и получение прогнозных оценок, или поиск рационального (оптимального) решения. Эти две цели взаимосвязаны, а соответствующие им задачи аналитического моделирования называются прямой и обратной, или задачами анализа и синтеза.

Постоянное усложнение и взаимная интеграция современных организационных, технологических, экономических, социальных и других процессов приводят к тому, что множество характеризующих процесс параметров многократно возрастает, в то время как зависимости между этими параметрами отсутствуют или могут задаваться лишь в неявном виде. Для исследования подобных процессов уже более 60 лет (а особенно активно — в последнее десятилетие) широко применяется имитационное моделирование¹ [Борщев, 2004].

Основным отличием имитационной модели является *одновременное применение* как детерминированных, так и переменных параметров. В [Максимей, 1988] с целью однозначного толкования они условно названы переменными (x_1, x_2, \dots, x_i) и параметрами (y_1, y_2, \dots, y_j) соответственно. В связи с этим под имитационной моделью следует понимать отдельную программу (совокупность программ, программный комплекс), позволяющую с помощью последовательности вычислений по определенным операционным правилам воспроизводить (имитировать) процессы функционирования отдельного объекта или системы в целом при условии воздействия различных, как правило, случайных факторов [Девятков, 2013].

Необходимо отметить, что нередко под имитационным моделированием понимают программную реализацию аналитической модели. Здесь подмена понятий основана на условном тождестве в ряде известных определений имитационного и компьютерного моделирования. Кроме того, имитационным моделированием также неверно называют визуализацию (например, на карте или в 3D-формате) результатов расчетов с использованием аналитической модели.

Несмотря на активное развитие теории и соответствующих программных средств, имитационное моделирование на практике по-прежнему применяется весьма ограниченно. Во многом это обусловлено известными пробелами в самой методологии моделирования, например сложностями обеспечения адекватности модели, достоверности исходных данных, оперативной подготовки больших объемов исходных данных и поиска оптимального (условно) решения.

Практические потребности применения аналитических и имитационных моделей определили наличие множества соответствующих инструментальных средств, существенно облегчающих разработку моделей. Например, широко известны средства аналитического моделирования (*MatLab, Statistica*) и имитационного (*AnyLogic, Arena, GPSS, IWebSim* и другие). Намечается тенденция к дальнейшему развитию инструментальных средств в части сочетания возможностей как аналитического, так и имитационного моделирования (*MatLab*).

В последние годы активно развивается достаточно новое направление математического моделирования, связанное с совместным (комбинированным) применением аналитических и имитационных моделей. Показательным в плане реализации комбинированных моделей является инструментальное средство *AnyLogistix*, реализующее, по существу, аналитико-имитационное моделирование [Ivanov, 2017]. Типовой задачей, решаемой с использованием этого средства, является поиск рациональных (пригодных) вариантов размещения поставщиков и потребителей (при заданных стационарных параметрах ряда из них). Задача легко трансформируется в актуальную и в военной сфере. Например — поиск рационального плана обеспечения войск боеприпасами при активном перемещении одного или двух соединений в ходе операции (рис. 1).

¹ В такой хронологии не учитывается так называемое статистическое имитационное моделирование, зародившееся во второй половине XIX века.

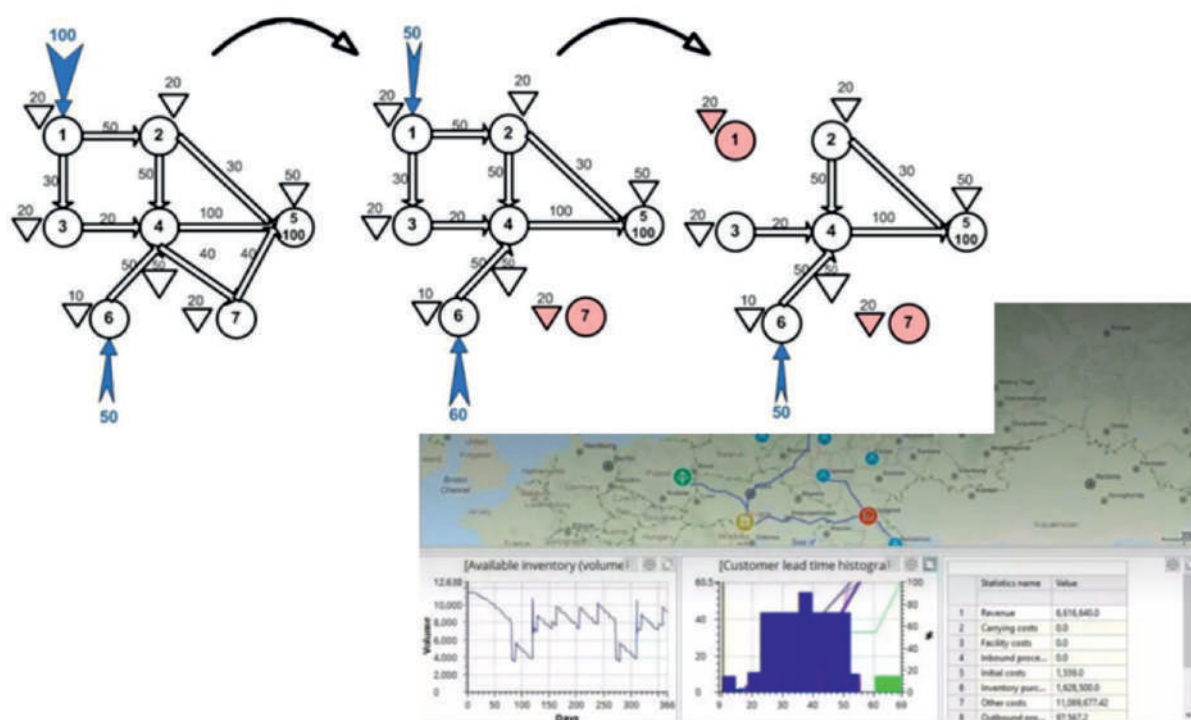


Рис. 1. Визуализация выбора вариантов размещения объектов складской сети (потребителей) при фиксированном расположении объектов производства

3. Особенности разработки и практического применения математических моделей

Теория создания и применения математических моделей, несмотря на достаточно высокую сложность этого циклического процесса, хорошо известна (рис. 2). Как и при создании любого нового изделия, наибольшие трудности возникают в процессе так называемой «доводки» модели, заключающейся в многократной ее доработке по результатам испытаний (апробации) и эксплуатации (применения).

Применение специализированных инструментальных средств позволяет в несколько раз сократить трудоемкость разработки математических моделей. Однако, с учетом постоянного усложнения моделируемых процессов, временные затраты на создание моделей по-прежнему остаются огромными. Несмотря на это, в большинстве случаев с должным сожалением приходится констатировать, что практическое применение математических моделей не приносит ожидаемого результата, а сами модели оказываются невостребованными. Неудачный опыт в области математического моделирования, как правило, является следствием одного из шести факторов (таблица 1). Чрезвычайная важность этих обстоятельств требует их подробного рассмотрения.

Чтобы понять проблемы практической реализации математических моделей, целесообразно сравнить саму модель с мельницей. Тогда можно наглядно представить, что модель является, по существу, переходным звеном между исходными данными (зерном) и конечным результатом (испеченным хлебом). Становится ясно, что проблемы могут возникнуть как собственно с моделью (жернова износились, низкая производительность), так и с зерном (мелкое, подмокшее) и/или с пекарней (пекарем).

Низкая адекватность модели — несоответствие ее реальным (моделируемым) процессам. Результат моделирования в этом случае будет отличаться от результатов реальных физических процессов. Недостаточная адекватность модели является весьма частым явлением и обусловлена «разрывом» между специалистами, обладающими знаниями о всех специфических особен-

ностях конкретных физических процессов и способными составить развернутое концептуальное и/или формализованное описание этих процессов, и непосредственными разработчиками математических моделей.

Следствием *недостаточной степени детализации* процесса является высокая погрешность результата моделирования. Вместе с тем стремление к учету большого количества параметров, определяющих современные процессы в различных сферах человеческой деятельности (см. [Новиков, 2016]), неизбежно приводит к созданию чрезмерно громоздких моделей, для которых на практике затруднительно подготовить необходимые исходные данные. Таким образом, создание математической модели является в определенной мере творческим занятием, так как требуется найти известный компромисс между декомпозицией и агрегированием моделируемого объекта. Усложнение (интеграция) исследуемых процессов обуславливает также необходимость отображения в модели достаточно большого числа разнородных факторов, нередко не связанных между собой явными (аналитическими) зависимостями. Современные инструментальные средства имитационного (аналитико-имитационного) моделирования предоставляют достаточно широкие возможности для формализованного описания и таких процессов.

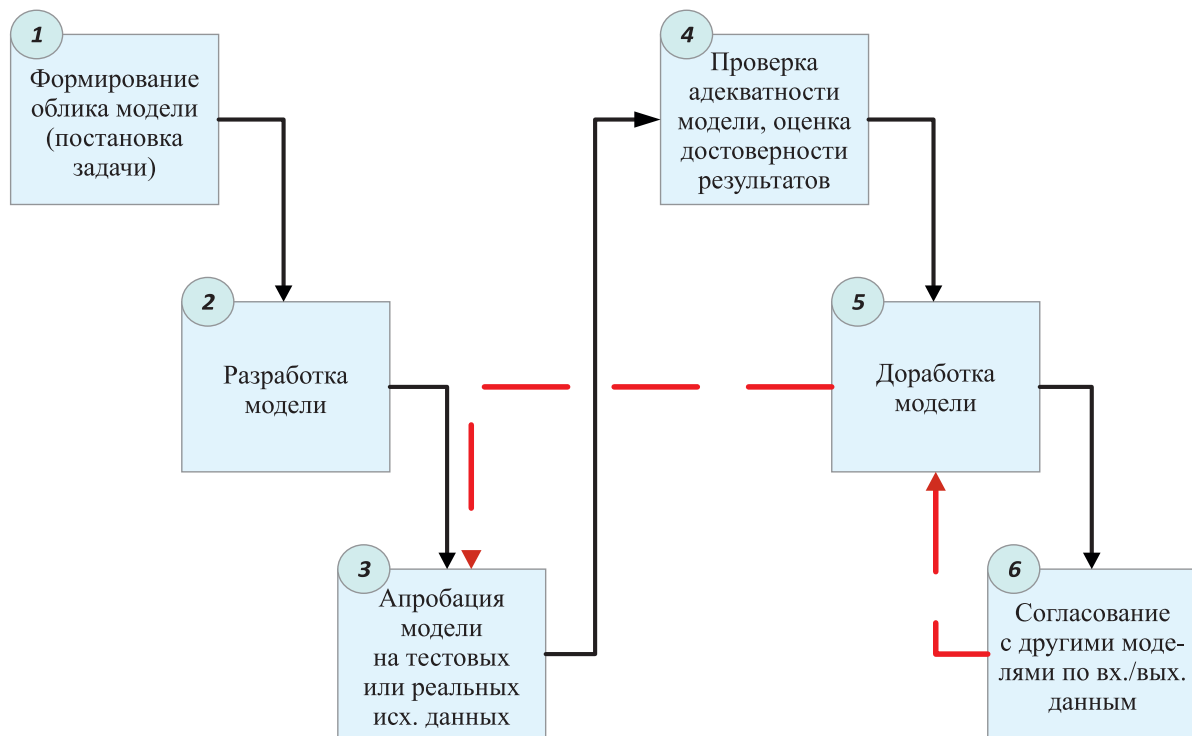


Рис. 2. Упрощенная схема разработки математических моделей

Таблица 1. Основные причины «провалов» в области математического моделирования

№ п/п	Что?	Что случилось?	Последствия
1	Математическая модель	недостаточная адекватность	недоверный результат моделирования
2		недостаточная степень детализации процесса	
3	Исходные данные	низкая достоверность исходных данных	невозможность применения модели
4		чрезмерный объем требуемых исходных данных	
5	Результаты моделирования	невозможность практической реализации результатов	чрезмерно высокие требования к квалификации пользователя
6		сложность применения модели	

Низкая достоверность исходных данных нередко имеет место при исследовании конфликтных ситуаций, когда информация об одной или нескольких сторонах конфликта является неполной (неопределенной), а также при применении различных прогнозных моделей в условиях отсутствия необходимых статистических данных. Если исключить достаточно высокую погрешность исходных данных не удастся, то при разработке математической модели проводят ее исследование на чувствительность. В дальнейшем стараются построение модели осуществлять таким образом, чтобы к исходным данным с недостаточной достоверностью она была наименее чувствительна.

Чрезмерный объем исходных данных является следствием излишней детализации модели, обусловленной желанием учета максимального числа параметров формализуемого процесса. Подготовка значительного объема требуемых исходных данных исключает оперативное применение модели и существенно ограничивает возможности ее практического использования. Таким образом, построение математической модели является в некоторой степени искусством, требующим нестандартного выбора между максимально возможным и достаточным множеством параметров процесса, учитываемых при его формализации. Успешным решением в плане снижения объема исходных данных, необходимых для моделирования, является подход к исключению параметров, к которым модель наименее чувствительна [Глаголев, 2012].

Невозможность практической реализации результатов характерна для ряда моделей, построенных с использованием, например, статистических или теоретико-игровых методов. В этом случае решение может иметь характер вида «с вероятностью 0.5 наступать тремя полками, с вероятностью 0.5 наступать пятью полками». Несмотря на то что в известной литературе этой проблеме уделяется много внимания (см., например, [Вентцель, 1972]), универсальных способов ее решения так и не найдено.

Модель также может быть достаточно *сложной*. В этом случае овладение особенностями ее практического применения может потребовать много времени. Иногда использование модели требует определенной квалификации пользователей, например знания достаточно специфических математических методов.

Решение названных шести известных проблем математического моделирования уже представляется непростым делом. Вместе с тем в современных условиях приходится сталкиваться еще и с новыми задачами. В работе [Новиков, 2016] названа новая проблема математического моделирования — *проклятие сложности*. Необходимость моделирования усложняющихся процессов, все чаще приобретающих междисциплинарный характер, неизбежно приводит к «громоздким» математическим моделям. Возникающие трудности существенно различны для аналитических и имитационных моделей. Для аналитических моделей актуальна интеграция нескольких частных моделей (в современной литературе такие комплексные модели называются суррогатными), использующих различные математические методы. Основные проблемы возникают в согласовании моделей, в том числе по входным и выходным данным, и в поиске оптимального решения существенно нелинейных моделей [Pi'in, 2016].

Для имитационных моделей их усложнение связано прежде всего с существенным увеличением количества переменных параметров, **достигающим** десятков и сотен тысяч. Возникающие трудности связаны с поиском глобального оптимума, при наличии **локальных**.

Очевидным образом усложнение математических моделей снова, как и почти столетие назад, приводит к чрезмерному увлечению вычислительных алгоритмов [Агошков, Лёзина, 2017; Ильин, 2010; Ковеня, 2002; Рыжаков, Щербина, 2006; Boyd et al., 2011; Nisan et al., 2009; Rzevski, Skobelev, 2014].

Существует, однако, еще одно обстоятельство, влияние которого на границы применения математического моделирования, вероятно, не менее значимо. Для понимания этого обстоятельства рассмотрим задачу, в общей постановке актуальную во многих отраслях народного хозяйства и в военной сфере.

Пусть из пункта A в B следует перевезти железнодорожным транспортом на производственную практику a групп студентов, численность которых составляет от b_1^* до b_2^* ($b_1^* < b_2^*$) человек. В сутки между городами проходит c поездов, время в пути составляет в среднем d ча-

сов. В каждом поезде можно разместить до e ($e \geq b_2^*$) студентов. В сутки из пункта A можно отправить не более f ($f \geq e$) студентов. Размещение одной и той же группы студентов в разных поездах невозможно. Требуется определить минимальное время перевозки T .

Решение задачи современными методами математического моделирования не представляет видимых сложностей. Примем для определенности, что минимальное время перевозки составит 15 суток. Но что делать, если допустимым решением является значение, не превышающее, скажем, 9 суток?!

Формулировка этой проблемной ситуации, имеющей, в общем-то, глобальное значение для всей теории математического моделирования, приведена для частного случая еще полвека назад в [Герчук, 1965], однако до настоящего времени почти не исследовалась. Основные трудности получения допустимого решения связаны с необходимостью построения по какому-то определенному алгоритму новой математической модели, имеющей как иную внутреннюю структуру, так и, в большинстве случаев, иные форматы (граничные значения) исходных данных. Формирование и реализация процедуры целенаправленного перехода от одной математической модели к другой, имеющей заведомо лучшее решение, находятся за рамками теории математического моделирования [Герчук, 1965].

Современный уровень развития кибернетики, являющейся сегодня, без сомнения, междисциплинарной наукой, позволяет найти решение проблемы и, следовательно, существенно расширить перспективы практического применения методов математического моделирования.

4. Расширение границ применения математических моделей

Для целенаправленного перехода к новым математическим моделям, позволяющим получить существенно лучшие решения, продуктивной оказалась идея стратегической рефлексии. Рефлексия (от позднелат. reflexio «обращение назад») означает «обращение внимания субъекта на самого себя и на свое сознание, в частности на продукты собственной активности, а также какое-либо их переосмысление». Применение идеи рефлексии для исследования ситуаций конфликтной природы впервые предложено, по всей видимости, в работах Д. А. Новикова [Новиков, 2012; Новиков, Чхартишвили, 2013]. В области математического моделирования на основе использования теоретико-игровых методов под рефлексией автор предлагает понимать процесс и результат размышлений одной стороны (игрока, агента) о том, какие принципы принятия решений использует другая сторона (другой игрок, или агент) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии. При этом существенно различается информационная и стратегическая рефлексия.

Информационная рефлексия — процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). Стратегическая рефлексия — процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии. Следовательно, информационная рефлексия обычно связана с недостаточной взаимной информированностью сторон (прежде всего — о тех или иных параметрах игровой ситуации), в то время как стратегическая рефлексия имеет место и при полной информированности.

Применение стратегической рефлексии на практике состоит в поиске путей целенаправленного изменения, прежде всего наиболее чувствительных (наибольшим образом влияющих на решение) параметров математической модели, с последующим переходом к новой модели. Чувствительность параметров определяется в ходе исследования модели, с помощью которой уже получено решение (неудовлетворительное).

Успешное применение подхода приведено в [Воробьев, Данеев, 2017; Vorobiev, Daneev, 2018] для моделей на основе матричных (биматричных) игр. Без особых трудностей идея может быть распространена на математические модели, построенные с применением методов линейного программирования, так как альтернативной формой задания матричной игры является ее представление в виде двойственной задачи линейного программирования.

По всей видимости, такой подход может распространяться на аналитические модели, построенные на основе различных математических теорий, а также и на имитационные модели. При этом целенаправленная трансформация имитационных моделей будет отличаться рядом особенностей, обусловленных не явным заданием взаимосвязей между различными параметрами. Вследствие этого анализ параметров на чувствительность нередко приводит к достаточно уникальным результатам.

Следует отметить, что в области исследования имитационных моделей на чувствительность (*sensitivity analysis*) в современной отечественной литературе обнаруживается ряд серьезных заблуждений. Изначально в [Максимей, 1988, с. 140] было справедливо указано, что «универсальной процедуры такой проверки не существует». Вместе с тем для статистических имитационных моделей (основанных на применении генераторов псевдослучайных чисел), как для частного случая, там же указано: «...устойчивость результатов моделирования можно оценивать дисперсией значений отклика (по выбранной компоненте)», и приведен пример такой оценки. На основании неправильного трактования этого примера как общей закономерности в [Лычкина, 2005] приведена эта же формула расчета дисперсии, но теперь в качестве универсального подхода для исследования чувствительности имитационных моделей. И далее необоснованно указано, что «простота проведения анализа чувствительности в имитационном моделировании — одно из преимуществ этого метода». Это заявление многократно повторяется в ряде современных учебников по имитационному моделированию.

Вместе с тем очевидно, что указанный подход не срабатывает для дискретно-событийных имитационных моделей, моделей системной динамики и тем более для агентных имитационных моделей. В известных работах (например, [Манукян, 1993; Подгорный, Леонов, 2015; Сусов, Багатурия, 2011; Чевелев, 1991; Chen, Lee, 2011; Fu, 2002] и многих других), как правило, предлагаются новые методы исследования чувствительности статистических имитационных моделей, применяемых в различных прикладных областях. При этом работа [Седунов, 1998] (научный руководитель которой, д. ф.-м. н. Калашников В. В., одновременно и рецензент монографии [Максимей, 1988]) является одной из немногих отечественных работ, в которых изучаются методы оценивания чувствительности дискретно-событийных имитационных моделей. В диссертации обосновываются существенно ограниченные возможности практического применения известного метода инфинитезимального анализа возмущений (авторы — Хо, Сари) для исследования чувствительности параметров дискретно-событийных имитационных моделей и развиваются в прикладных аспектах подходы, основанные на применении метода отношения правдоподобия (авторы — Рейман и Вейс, Глин и Рубинштейн). В зарубежных исследованиях также уделяется большое внимание исследованию чувствительности дискретно-событийных имитационных моделей. Однако полученные результаты по-прежнему носят частный прикладной характер [Kleijnen, 2010; Montevechi et al., 2009; Zenon, 1999].

Таким образом, сделанный в работе [Лычкина, 2005] вывод правомерен лишь для статистического имитационного моделирования, или для частного случая моделирования, когда при вариации одного параметра имитационной модели остальные (вариабельные) параметры принимают фиксированные значения. Такая ситуация противоречит самой сути имитационного моделирования. Исследование чувствительности одного параметра при одновременной вариабельности множества других приводит прямо к противоположным результатам.

Кроме того, на практике нередко имеет место ситуация бифуркации, когда достаточно стационарная зависимость выходной переменной модели от входного (вариабельного) параметра, характерная для большей части области определения последнего, в пределах достаточно малой области изменения параметра кардинальным образом изменяется. Наглядные примеры таких ситуаций приведены в [Глаголев, 2012] и могут иметь место и для ряда статистических имитационных моделей. Вместе с тем в [Глаголев, 2012] также показаны возможности исключения из моделей параметров, изменение которых не оказывает существенного влияния на выходную переменную. Подобное упрощение позволяет выйти за рамки первоначальной модели путем расширения диапазонов изменения чувствительных параметров или добавления новых

параметров. Очевидно, что в ряде случаев новые модели станут более пригодными для исследователя и позволят получить лучшие решения.

Каким же образом следует исследовать чувствительность имитационных моделей? Для ответа на этот вопрос обратимся к процедуре поиска оптимального решения при использовании имитационных моделей.

Для рассмотренного ранее достаточно простого примера заданными переменными являются:

- количество групп студентов a ;
- максимальное количество студентов e , размещаемых на одном поезде;
- количество поездов c , проходящих в сутки между городами;
- максимальное количество студентов f , отправляемых из пункта A в сутки;
- среднее время d движения поезда из пункта A в пункт B .

Вариабельных параметров всего три:

- численность групп студентов $b_k \in [b_1^*; b_2^*]$, где $k = \overline{1, \dots, a}$;
- количество студентов, отправляемых в каждые сутки: $x_i \in [b_1^*; f]$, где $i = \overline{1, \dots, N}$ — номер суток;
- количество студентов, отправляемых на каждом поезде: $y_{ij} \in [b_1^*; e]$, где $j = \overline{1, \dots, c}$ — номер поезда.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{k=1}^a b_k,$$

$$\sum_{j=1}^c y_{ij} = x_i$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^c y_{ij} = \sum_{k=1}^a b_k.$$

В общем случае при использовании, например, Z вариабельных параметров (задаваемых так называемыми «движками» y_1, y_2, \dots, y_z) оптимальное решение следует искать в $(Z + 1)$ -мерном пространстве. Параметр $(Z + 1)$ задается оптимизируемым функционалом. В нашем примере это время перевозки T . По данному целевому параметру и происходит синхронизация всех вариабельных параметров (рис. 3), см. [Воробьев и др., 2018].

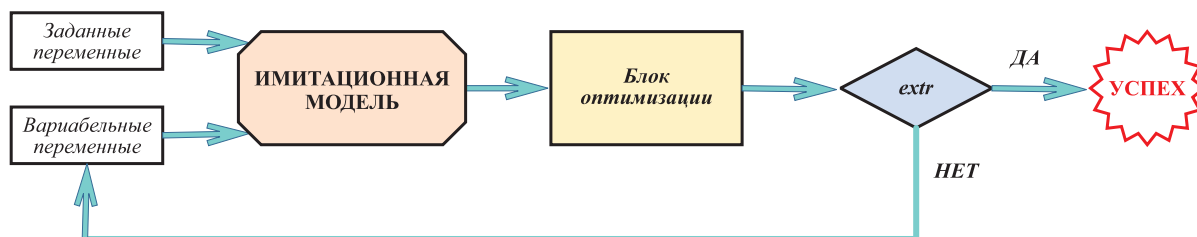


Рис. 3. Общая схема поиска оптимального решения при использовании имитационной модели

Без слов ясно, что универсальных численных методов решения подобных задач, для достаточно большого количества вариабельных параметров различных процессов, не существует. Практически применимой альтернативой является «ручной» поиск решения на основе прямого перебора. При этом необходимо задать дискретность (шаг) изменения каждого вариабельного параметра. И для каждого набора значений вариабельных данных осуществлять «прогон» мо-

дели. Например, если три переменных параметра могут принимать по 20 значений, то для поиска оптимального решения понадобится $20^3 = 8000$ прогонов модели. Для пяти параметров количество прогонов составит уже $20^5 = 3\,200\,000$.

Возможности современных вычислительных средств допускают самостоятельное создание специалистами-исследователями сопрягаемых с известными средами имитационного моделирования «оптимизаторов» на основе прямого перебора возможных вариантов, при задании диапазонов изменения переменных параметров. Такие решения, вероятно, будут достаточно эффективными при использовании имитационных моделей в исследовательских или учебных целях. Однако на практике подобный подход, как правило, неприемлем, так как накладывает слишком жесткие ограничения на объем переменных исходных данных, учитываемых должностными лицами, принимающими решения. Это объясняет актуальность поиска оптимального решения при имитационном моделировании процессов (см, например, [Афонин, 2016; Бабина, 2015; Воробьев и др., 2018; Девятков и др., 2018; Емельянов и др., 2015]) и появление достаточно уникальных средств поиска квазиоптимальных решений имитационных моделей (*OptQuest*, *IOSO* и др.), с неявными алгоритмами работы и весьма высокой стоимостью.

Принципиальные теоретические трудности и большие практические потребности в разработке достаточно универсальных алгоритмов поиска оптимального решения имитационных моделей (независимо от вида моделей: как дискретно-событийных, так и, например, вызвали стимулировали огромное количество исследований и публикаций в этой области [Aksarayli, Yildiz, 2011; Kang et al., 2018; Raska, Zdenek, 2013; Yang et al., 2018]. Для имитационных моделей, содержащих сравнительно небольшое число параметров (от нескольких десятков до нескольких сотен), показали удовлетворительные результаты известные оптимизационные алгоритмы имитации отжига (*simulated annealing*), генетические (*genetic algorithm*), поиска с запретами (*tabu search*). При наличии в модели нескольких тысяч параметров большое распространение получили методы статистического ранжирования и выбора (*ranking and selection*) [Chen et al., 2014; Choi, Kim, 2018; Fu et al., 2008], а также различные регрессионные алгоритмы [Ankenman et al., 2010; Kleijnen, 2009]:

- регрессии на основе системы поддерживающих векторов (*SVR*),
- крикинг (*kriging*),
- многомерная непараметрическая регрессия (*MNR*).

Между тем дальнейшее усложнение имитационных моделей (см. упоминавшееся ранее «проклятие сложности») потребовало разработки алгоритмов поиска оптимальных решений для моделей, содержащих десятки и сотни тысяч параметров. В последнее десятилетие научные исследования в этой области приобретают растущую популярность и на сегодняшний день увенчались созданием серии алгоритмов так называемого роевого интеллекта (*swarm intelligence*), в качестве основных преимуществ которых декларируются простота, гибкость и эргоичность [Talbi, 2009; Yang, Gandomi, 2012]. Среди известных метаэвристических алгоритмов большую популярность для практических приложений приобрели:

- метод роя частиц (*particle swarm optimization*) [Kennedy, 2001; Poli, 2007, 2008];
- алгоритм кукушки (*cuckoo search*) [Cuevas, Reyna-Orta, 2014; Nguyen et al., 2016; Yang, Deb, 2009];
- алгоритм светлячков (*firefly algorithm*) [Частикова, Воля, 2016; Yang, 2010; Zhang et al., 2016].

Несмотря на достигнутые впечатляющие результаты в области поиска оптимальных решений имитационных моделей, проблема достижения жестких граничных значений оптимизируемого функционала (в тех случаях, когда найденное решение не удовлетворяет заданным ограничениям) по-прежнему обходится стороной. В ситуациях, когда полученное (оптимальное) решение является неудовлетворительным, целенаправленный переход к «улучшенной» имитационной модели может осуществляться на основе первоначального исследования ее чувствительности. Подобный прием, в общем-то, не является революционным и успешно применяется, например, в практике реализации решений двойственных задач линейного программирования.

Очевидно, что при значительном количестве параметров имитационной модели, не связанных между собой явными аналитическими зависимостями, такое ранжирование параметров по «вкладу» в изменение целевого функционала и дальнейший поиск возможностей целенаправленного изменения их области определения оказываются достаточно результативными. Указанный алгоритм лежит в основе идеи стратегической рефлексии применительно к имитационным моделям.

Очевидно, что при достаточно большой размерности модели исследование на чувствительность уже само по себе будет весьма трудной задачей. Вместе с тем огромные возможности такого исследования можно показать на рассматриваемом ранее несложном примере.

В указанном примере малая размерность имитационной модели допускает поиск оптимального решения на основе прямого перебора вариантов. Современные средства вычислительной техники позволяют применение такого простого приема (кроме прочего, с легкостью реализуемого на практике для многих современных инструментальных средств имитационного моделирования) для ряда практических приложений. Несомненным достоинством такого подхода является возможность ранжирования переменных параметров имитационной модели по чувствительности (рис. 4).

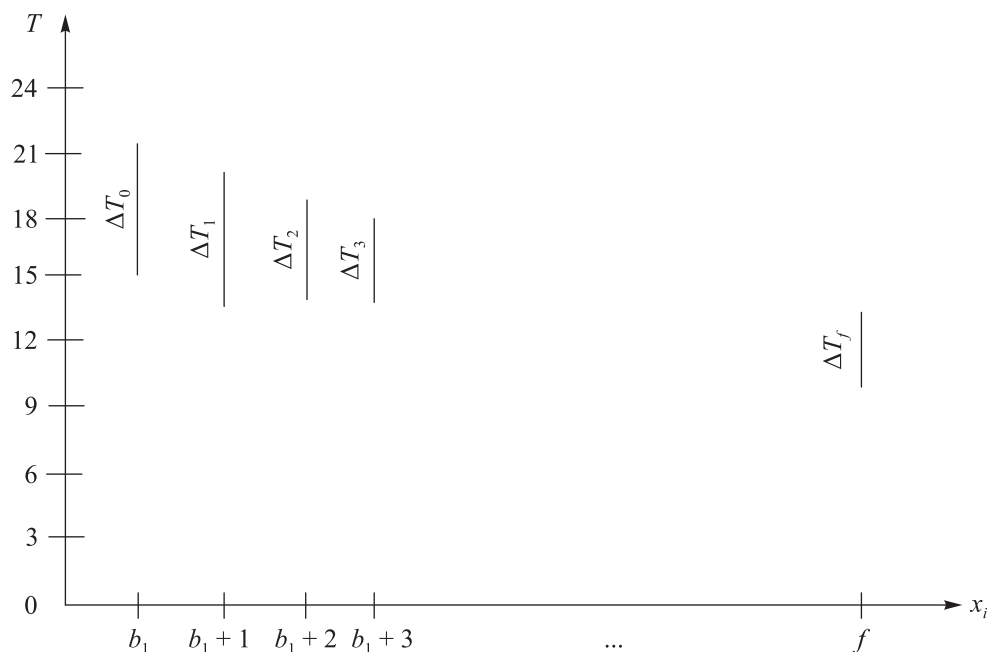


Рис. 4. Исследование чувствительности имитационной модели при поиске оптимального решения путем прямого перебора вариантов (изменение выходного параметра ΔT при фиксированных значениях x_i и изменяемых параметрах b_k, y_{ij})

По аналогии с [Максимей, 1988, с. 142] определяются значения $\max \Delta T$ при фиксации одного из параметров b_k, x_i, y_{ij} (последовательно принимающего возможные значения с заданной дискретностью) и вариации остальных. Как правило, при создании новой модели учитываются возможности расширения граничных значений для наиболее чувствительных параметров, в то время как основная масса остальных переменных параметров остается неизменной. Таким образом, происходит целенаправленный переход к построению новой имитационной модели, с заведомо улучшенным решением, по следующему алгоритму:

- 1) ранжирование переменных параметров по чувствительности (x_i, y_{ij}, b_k);
- 2) расширение области определения переменного параметра, к которому имитационная модель наиболее чувствительна ($f \rightarrow f': f' > f, x_i \in [b_1^*; f']$);
- 3) исследование имитационной модели с измененным переменным параметром.

Наряду с этим возможно самостоятельное или совместное с рассмотренным применение подхода, приведенного в [Глаголев, 2012]:

- 1) исключение из модели переменных параметров, к которым модель наименее чувствительна;
- 2) добавление в имитационную модель новых переменных параметров;
- 3) исследование новой имитационной модели.

Целенаправленный переход к новой имитационной модели позволяет выйти за рамки заложенных в первоначальной модели ограничений (см. [Герчук, 1965]) и получить лучшее решение. По всей видимости, в ближнесрочной перспективе исследования в этой области будут связаны с поиском подобных подходов (основанных на реализации идеи стратегической рефлексии) для имитационных моделей большой размерности, поиск решения при использовании которых основан на применении алгоритмов роевого интеллекта.

5. Заключение

В современных условиях продолжаются усложнение и интеграция процессов, происходящих в различных сферах человеческой деятельности. Нередко единственным способом исследования этих процессов с целью получения прогнозных оценок или нахождения рациональных решений становится применение методов и средств математического моделирования. Однако полученные на моделях решения в ряде случаев не удовлетворяют исходным ограничениям, накладываемым на оптимизируемый функционал. Улучшение решения в этом случае возможно только за рамками моделирования, путем построения новой модели. В статье предложены некоторые оригинальные методические приемы, развивающие идею стратегической рефлексии в математическом моделировании и позволяющие осуществить целенаправленный переход к «улучшенной» модели.

Список литературы (References)

- Агошков В. И., Лёзина Н. Р.* Новые подходы к формулировке метода разделения области и алгоритм крупноблочного распараллеливания для задач математического моделирования // Труды Международной научной конференции «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений 2017». — Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2017. — Т. 1. — С. 6–13.
- Agoshkov V. I., Lozina N. R.* Novyye podkhody k formulirovke metoda razdeleniya oblasti i algoritm krupnoblochnogo rasparallelvaniya dlya zadach matematicheskogo modelirovaniya [New approaches to the formulation of the domain separation method and the algorithm of large-block paralleling for problems of mathematical modeling] // Proceedings of the International Scientific Conference “Modern problems of mathematical modeling, image processing and parallel computing 2017”. — Rostov-na-Donu: DGTU, 2017. — Vol. 1. — P. 6–13 (in Russian).
- Афонин П. В.* Оптимизация моделей сложных систем на основе метаэвристических алгоритмов и нейронных сетей // Инженерный вестник: электронный научно-технический журнал. — 2016. — № 11. — С. 508–516.
- Afonin P. V.* Optimizatsiya modeley slozhnykh sistem na osnove metaevristicheskikh algoritmov i neyronnykh setey [Optimization of models of complex systems based on metaheuristic algorithms and neural networks] // Engineering Bulletin: electronic scientific and technical journal. — 2016. — Vol. 11. — P. 508–516 (in Russian).
- Бабина О. И.* Имитационная модель склада промышленного предприятия по производству бетона // Бизнес-информатика. — 2015. — № 1 (31). — С. 41–50.
- Babina O. I.* Imitatsionnaya model' sklada promyshlennogo predpriyatiya po proizvodstvu betona [Simulation model of a warehouse of an industrial enterprise for the production of concrete] // Business Informatics. — 2015. — No. 1 (31). — P. 41–50 (in Russian).
- Борщев А. В.* Практическое агентное моделирование и его место в арсенале аналитика // Экспонента PRO. — 2004. — № 3–4 (7–8). — С. 38–47.
- Borshchev A. V.* Prakticheskoye agentnoye modelirovaniye i yego mesto v arsenale analitika [Practical agent modeling and its place in the analyst's arsenal] // Exponenta PRO. — 2004. — No. 3–4 (7–8). — P. 38–47 (in Russian).

- Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972. — 552 с.
Ventsel' E. S. Issledovaniye operatsiy [Operations research]. — Moscow: Sovetskoe radio, 1972. — 552 p. (in Russian).
- Воробьев А. А., Данеев А. В.* Стратегическая рефлексия в матричных играх // Известия Самарского научного центра РАН. — 2017. — № 6. — С. 146–155.
Vorobiev A. A., Daneev A. V. Strategicheskaya refleksiya v matrichnykh igrakh [Strategic reflection in matrix games] // Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. — 2017. — No. 6. — P. 146–155 (in Russian).
- Воробьев А. А., Загодарчук И. В., Филяев М. П.* Имитационное моделирование в военном деле // Научные проблемы материально-технического обеспечения Вооруженных Сил Российской Федерации: сборник научных трудов. — СПб.: Изд-во Политехнического университета. — 2018. — Вып. 3 (9). — С. 42–49.
Vorobiev A. A., Zagodarchuk I. V., Filyaev M. P. Imitatsionnoye modelirovaniye v voyennom dele [Simulation in military] // Nauchnyye problemy material'no-tekhnicheskogo obespecheniya Vooruzhennykh Sil Rossiyskoy Federatsii: sbornik nauchnykh trudov. — St. Petersburg: Izd-vo Politekhnicheskogo universiteta. — 2018. — Vol. 3 (9). — P. 42–49 (in Russian).
- Герчук Я. П.* Границы применения линейного программирования. — М.: Экономика, 1965. — 72 с.
Gerchuk Ya. P. Granitsy primeneniya lineynogo programmirovaniya [The boundaries of linear programming]. — Moscow: Ekonomika, 1965. — 72 p. (in Russian).
- Глаголев М. В.* Анализ чувствительности модели // Динамика окружающей среды и глобальные изменения климата. — 2012. — Т. 3, № 3. — С. 31–53.
Glagolev M. V. Analiz chuvstvitel'nosti modeli [Model sensitivity analysis] // Environmental dynamics and global climate change. — 2012. — Vol. 3, No. 3. — P. 31–53 (in Russian).
- Девятков В. В.* Методология и технология имитационных исследований сложных систем: современное состояние и перспективы развития: монография. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2013. — 448 с.
Devyatkov V. V. Metodologiya i tekhnologiya imitatsionnykh issledovaniy slozhnykh sistem: sovremennoye sostoyanie i perspektivy razvitiya: monografiya [Methodology and technology of simulation studies of complex systems: current state and development prospects: monography]. — Moscow: Vuzovskiy uchebnik: INFRA-M, 2013. — 448 p. (in Russian).
- Девятков В. В., Девятков Т. В., Федотов М. В.* Имитационные исследования в среде моделирования GPSS STUDIO: учебное пособие. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2018. — 283 с.
Devyatkov V. V., Devyatkov T. V., Fedotov M. V. Imitatsionnyye issledovaniya v srede modelirovaniya GPSS STUDIO: uchebnoye posobiye [Simulation Studies in the GPSS STUDIO Simulation Environment: Tutorial]. — Moscow: Vuzovskiy uchebnik: INFRA-M, 2018. — 283 p. (in Russian).
- Емельянов А. А., Шильникова О. В., Емельянова Н. З.* Оптимизация производственных программ на основе результатов имитационного моделирования // Прикладная информатика / Journal of Applied Informatics. — 2015. — Т. 10, № 3 (57). — С. 109–121.
Yemel'yanov A. A., Shil'nikova O. V., Yemel'yanova N. Z. Optimizatsiya proizvodstvennykh programm na osnove rezultatov imitatsionnogo modelirovaniya [Optimization of production programs based on simulation results] // Journal of Applied Informatics. — 2015. — Vol. 10, No. 3 (57). — P. 109–121 (in Russian).
- Ильин В. П.* Экзапроблемы математического моделирования // Вестник ЮУрГУ (серия «Математическое моделирование и программирование», вып. 6). — 2010. — № 35 (211). — С. 29–40.
Ilin V. P. Ekzaprobemy matematicheskogo modelirovaniya [Mathematical modeling problems] // Vestnik YUrGU (seriya "Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye", vyp. 6). — 2010. — No. 35 (211). — P. 29–40 (in Russian).
- Ковеня В. М.* Некоторые проблемы и тенденции развития математического моделирования // Прикладная механика и техническая физика. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 3–14.
Kovenya V. M. Nekotoryye problemy i tendentsii razvitiya matematicheskogo modelirovaniya [Some problems and trends in the development of mathematical modeling] // Applied mechanics and technical physics. — 2002. — Vol. 43, No. 3. — P. 3–14 (in Russian).
- Колмогоров А. Н.* Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
Kolmogorov A. N. Matematika — nauka i professiya [Mathematics — science and profession]. — Moscow: Nauka, 1988. — 288 p. (in Russian).

- Лычкина Н. Н.* Имитационное моделирование экономических процессов. — М.: Академия АйТи, 2005. — 164 с.
Lychkina N. N. Imitatsionnoye modelirovaniye ekonomicheskikh protsessov [Simulation of economic processes]. — Moscow: Akademiya AyTi, 2005. — 164 p. (in Russian).
- Максимей И. В.* Имитационное моделирование на ЭВМ. — М.: Радио и связь, 1988. — 232 с.
Maksimey I. V. Imitatsionnoye modelirovaniye na EVM [Computer Simulation]. — Moscow: Radio i svyaz', 1988. — 232 p. (in Russian).
- Манукян К. П.* Методы построения моделей чувствительности и их применение в САПР средств контроля: автореферат дис. ... канд. техн. наук. — Ереван, 1993. — 19 с.
Manukyan K. P. Metody postroyeniya modeley chuvstvitel'nosti i ikh primeneniye v SAPR sredstv kontrolya [Methods for constructing sensitivity models and their application in CAD tools]: avtoreferat dis. ... kand. tekhn. nauk. — Yerevan, 1993. — 19 p. (in Russian).
- Никольский В. Н., Рыжаков А. Н., Щербина О. А.* Принципы создания компьютерной системы исследования рекреационных систем на базе математических моделей // Динамические системы. — 2005. — Вып. 19. — С. 152–160.
Nikol'skiy V. N., Ryzhakov A. N., Shcherbina O. A. Printsipy sozdaniya komp'yuternoy sistemy issledovaniya rekreatsi-onnykh sistem na baze matematicheskikh modeley [Principles of creating a computer system for the study of recreational systems based on mathematical models] // Dynamic systems. — 2005. — Vol. 19. — P. 152–160 (in Russian).
- Новиков Д. А.* Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 160 с.
Novikov D. A. Kibernetika: Navigator. Istoriya kibernetiki, sovremennoye sostoyaniye, perspektivy razvitiya [Cybernetics: Navigator. The history of cybernetics, current state, development prospects]. — Moscow: LENAND, 2016. — 160 p. (in Russian).
- Новиков Д. А.* Модели стратегической рефлексии // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 3–18.
Novikov D. A. Modeli strategicheskoy refleksii [Models of Strategic Reflection] // Automation and Remote Control. — 2012. — No. 1. — P. 3–18 (in Russian).
- Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Рефлексия и управление: математические модели. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2013. — 412 с.
Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Refleksiya i upravleniye: matematicheskiye modeli [Reflection and management: mathematical models]. — Moscow: Publishing house of physical and mathematical literature, 2013. — 412 p. (in Russian).
- Подгорный К. А., Леонов А. В.* Обзор современных методов оценки значений коэффициентов, чувствительности и адекватности имитационных моделей водных экосистем // Водные ресурсы. — 2015. — Т. 42, № 4. — С. 406–432.
Podgorny K. A., Leonov A. V. Obzor sovremennykh metodov otsenki znacheniy koeffitsiyentov, chuvstvitel'nosti i adekvatnosti imitatsionnykh modeley vodnykh ekosistem [A review of modern methods for assessing the values of coefficients, sensitivity and adequacy of simulation models of aquatic ecosystems] // Water resources. — 2015. — Vol. 42, No. 4. — P. 406–432 (in Russian).
- Рыжаков А. Н., Щербина О. А.* Современные проблемы математического моделирования в исследовании операций // Динамические системы. — 2006. — Вып. 21. — С. 115–129.
Ryzhakov A. N., Shcherbina O. A. Sovremennyye problemy matematicheskogo modelirovaniya v issledovanii operatsiy [Modern problems of mathematical modeling in the study of operations] // Dynamical systems. — 2006. — Vol. 21. — P. 115–129 (in Russian).
- Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР. — 1979. — № 5. — С. 38–49.
Samarskiy A. A. Matematicheskoye modelirovaniye i vychislitel'nyy eksperiment [Mathematical modeling and computational experiment] // Vestnik AN USSR. — 1979. — No. 5. — P. 38–49 (in Russian).
- Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P. Matematicheskoye modelirovaniye. Idei. Metody. Primery [Mathematical modeling. Ideas. Methods Examples]. — Moscow: FIZMATLIT, 2005. — 320 p. (in Russian).
- Седунов В. М.* Организация имитационных экспериментов над событийными моделями и анализ чувствительности: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 1998. — 19 с.

- Sedunov V. M.* Organizatsiya imitatsionnykh eksperimentov nad sobyitiynymi modelyami i analiz chuvstvitel'nosti [Organization of simulation experiments on event models and sensitivity analysis]: avtoreferat dis. ... cand. tech. sciences. — Moscow, 1998. — 19 p. (in Russian).
- Сусов Р. В., Багатурия В. В.* Метод оценки чувствительности имитационной модели бизнес-процесса к закону распределения вероятностей длительности интервалов между поступлением заявок // Лесной вестник. — 2011. — № 5. — С. 198–202.
- Susov R. V., Bagaturiya V. V.* Metod otsenki chuvstvitel'nosti imitatsionnoy modeli biznes-protsessa k zakonu raspredeleniya veroyatnostey dlitel'nosti intervalov mezhdru postupleniyem zayavok [Method of Assessing the Sensitivity of a Simulation Model of a Business Process to the Law of Distribution of Probabilities of the Duration of Intervals between the Entries of Applications] // Forest Journal. — 2011. — No. 5. — P. 198–202 (in Russian).
- Частикова В. А., Воля Я. И.* Анализ эффективности работы алгоритма светлячков в задачах глобальной оптимизации // Научные труды КубГТУ. — 2016. — № 15. — С. 105–111.
- Chastikova V. A., Volya Ya. I.* Analiz effektivnosti raboty algoritma svetlyachkov v zadachakh global'noy optimizatsii [Analysis of the efficiency of the firefly algorithm in the tasks of global optimization] // Scientific works of KubGTU, — 2016. — No. 15. — P. 105–111 (in Russian).
- Чевелев К. В.* Анализ чувствительности и идентификация имитационных моделей: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1991. — 16 с.
- Chevelev K. V.* Analiz chuvstvitel'nosti i identifikatsiya imitatsionnykh modeley [Sensitivity analysis and identification of simulation models]: avtoreferat dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. — Moscow, 1991. — 16 p. (in Russian).
- Aksarayli M., Yildiz A.* Process Optimization with Simulation Modeling in a Manufacturing System // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. — 2011. — Vol. 3 (4). — P. 318–328.
- Algorithmic Game Theory / eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. — NY: Cambridge University Press, 2009. — 776 p.
- Ankenman B., Nelson B. L., Staum J.* Stochastic Kriging for Simulation Metamodeling // Oper. Res. — 2010. — Vol. 58 (2). — P. 371–382.
- Boyd S., Parikh N., Chu E. et al.* Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers // Foundations and Trends in Machine Learning. — 2011. — No. 3 (1). — P. 1–122.
- Chen C. H., Lee L. H.* Stochastic simulation optimization: an optimal computing budget allocation // World Scientific. — 2011. — Vol. 1.
- Chen W., Gao S., Chen C. H., Shi L.* An Optimal Sample Allocation Strategy for Partition-based Random Search // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2014. — Vol. 11 (1). — P. 177–186.
- Choi S. H., Kim T. G.* Efficient ranking and selection for stochastic simulation model based on hypothesis test // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. — 2018. — Vol. 48, No. 9. — P. 1555–1565.
- Cuevas E., Reyna-Orta A.* A Cuckoo Search Algorithm for Multimodal Optimization // The Scientific World Journal. — Vol. 2014, Article ID 497514. — 20 p. — <http://dx.doi.org/10.1155/2014/497514>
- Fu M. C.* Feature article: optimization for simulation: theory vs. practice // Informs Journal on Computing. — 2002. — Vol. 14, No. 3. — P. 192–215.
- Fu M., Chen C. H., Shi L.* Some Topics for Simulation Optimization // Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. — December 2008. — Miami, FL. — P. 27–38.
- Geoffrion A. M.* Integrated modeling system // Comp. Sci. Econ. Manag. — 1989. — Vol. 2. — P. 3–15.
- Ильин В. П.* Fundamental Issues of Mathematical Modeling // Herald of the Russian Academy of Sciences. — 2016. — Vol. 86, No. 2. — P. 118–126.
- Ivanov D.* Supply Chain Simulation and Optimization with AnyLogistix. — 2017. — 176 p. — <https://www.anylogistix.com/upload/alx-book.pdf>
- Kang B. G., Choi S. H., Kwon S. J., Lee J. H., Kim T. G.* Simulation-Based Optimization on the System-of-Systems Model via Model Transformation and Genetic Algorithm: A Case Study of Net-

- work-Centric Warfare, Hindawi Complexity. — Vol. 2018, Article ID 4521672. — 15 p. — <https://doi.org/10.1155/2018/4521672>
- Kennedy J.* Swarm Intelligence / J. Kennedy, R. C. Eberhart. — Morgan Kaufmann, 2001.
- Kleijnen J. P. C.* Kriging metamodeling in simulation: A review // *Eur. J. Oper. Res.* — 2009. — Vol. 192 (3). — P. 707–716.
- Kleijnen J. P. C.* Sensitivity analysis of simulation models: an overview, Sixth International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output // *Procedia — Social and Behavioral Sciences*, December 2010.
- Modeling Languages in Mathematical Optimization / Ed. J. Kallrath. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 407 p.
- Montevecchi J. A. B., Filho R. G. de Almeida, Paiva A. P., Costa R. F. S., Medeiros A. L.* Sensitivity analysis in discrete-event simulation using fractional factorial designs // *Journal of Simulation*, advance online publication. — 13 November 2009. — DOI: 10.1057/jos.2009.23
- Nguyen K. P., Fujita G., Dieu V. N.* Cuckoo search algorithm for optimal placement and sizing of static var compensator in large-scale power systems // *JAISCR*. — 2016. — Vol. 6, No. 2. — P. 59–68.
- Poli R.* An analysis of publications on particle swarm optimisation applications // Technical Report CSM-469. Department of Computer Science, University of Essex, UK, 2007.
- Poli R.* Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimization // *Journal of Artificial Evolution and Applications*. — 2008. — 10 p. — DOI: 10.1155/2008/685175
- Raska P., Zdenek U.* Comparison of Selected Optimization Methods Used for Discrete Event Simulation Models and Testing Functions // *Advanced Materials Research*. — 2013. — Vols. 816–817. — P. 629–633.
- Rzevski G., Skobelev P.* Managing Complexity. — London: WIT Press, 2014. — 216 p.
- Talbi E. G.* Metaheuristics: From Design to Implementation. — John Wiley & Sons, 2009.
- Vorobiev A. A., Daneev A. V.* Modern practice of application of matrix games // *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. — 2018. — Vol. 19, No. 2. — P. 93–116. — <http://dx.doi.org/10.17654/DM019020093>
- Yang X. S., Deb S.* Cuckoo search via Lévy flights // *World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC 2009)*. IEEE Publications. — December 2009. — P. 210–214.
- Yang X. S.* Firefly Algorithm. Nature-inspired metaheuristic algorithms. — Luniver Press, 2010. — P. 79–90.
- Yang X. S., Gandomi A. H.* Bat algorithm: a novel approach for global engineering optimization // *Engineering Computations*. — 2012. — Vol. 29, No. 5. — P. 464–483.
- Yang X. S., Koziel S., Leifsson L.* Computational Optimization, Modelling and Simulation // *Recent Trends and Challenges, Procedia Computer Science*. — 2013. — Vol. 18. — P. 855–860.
- Zenon I.* Simulation model sensitivity to quality of material properties // *Solidification of Metals and Alloys*. — 1999. — Vol. 1, No. 40.
- Zhang L., Liu L., Yang X. S., Dai Y.* A Novel Hybrid Firefly Algorithm for Global Optimization // *PLoS ONE*. — 2016. — Vol. 11 (9). — P. e0163230. — <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0163230>

УДК: 519.8

Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле

А. И. Сухинов^{1,a}, А. Е. Чистяков^{1,b}, Е. А. Проценко^{2,c}

¹Донской государственной технической университет,
344000, ЮФО, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

²Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ),
347936, Ростовская область, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48

E-mail: ^a sukhinov@gmail.com, ^b cheese_05@mail.ru, ^c eapros@rambler.ru

Получено 14.07.2019, после доработки — 11.08.2019.

Принято к публикации 26.08.2019.

В работе рассматриваются развитие и применение метода учета заполненности прямоугольных ячеек материальной средой, в частности жидкостью для повышения гладкости и точности конечно-разностного решения задач гидродинамики со сложной формой граничной поверхности. Для исследования возможностей предлагаемых разностных схем рассмотрены две задачи вычислительной гидродинамики — пространственно-двумерного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами и переноса веществ между соосными полуцилиндрами. Аппроксимация задач по времени выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам. Дискретизация операторов диффузии и конвекции выполнена на основе интегроинтерполяционного метода с учетом заполненности ячеек и без ее учета. Для решения задачи диффузии – конвекции при больших сеточных числах Пекле предложено использовать разностную схему, учитывающую функцию заполненности ячеек, и схему, построенную на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации при малых числах Куранта. Для оценки точности численного решения в качестве эталона используется аналитическое решение, описывающее течение Куэтта – Тейлора. В случае непосредственного использования прямоугольных сеток (ступенчатой аппроксимации границ) относительная погрешность расчетов достигает 70 %, при тех же условиях использование предлагаемого метода позволяет уменьшить погрешность до 6 %. Показано, что дробление прямоугольной сетки в 2–8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к такому же повышению точности, которой обладают численные решения, полученные с учетом заполненности ячеек. Предложенные разностные схемы, построенные на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$ соответственно, полученные в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации, для задачи диффузии – конвекции обладают меньшей сеточной вязкостью и, как следствие, точнее описывают поведение решения в случае больших сеточных чисел Пекле.

Ключевые слова: учет заполненности ячеек, схема «кабаре», сеточные числа Пекле

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00623).

UDC: 519.8

Difference scheme for solving problems of hydrodynamics for large grid Peclet numbers

A. I. Sukhinov^{1,a}, A. E. Chistyakov^{1,b}, E. A. Protsenko^{2,c}

¹Don State Technical University,
1 Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, Russia

²Taganrog Institute, named after A. P. Chekhov — branch of Rostov State University of Economics,
48 Initiative st., Taganrog, 347936, Russia

E-mail: ^a sukhinov@gmail.com, ^b cheese_05@mail.ru, ^c eapros@rambler.ru

Received 14.07.2019, after completion — 11.08.2019.

Accepted for publication 26.08.2019.

The paper discusses the development and application of the accounting rectangular cell fullness method with material substance, in particular, a liquid, to increase the smoothness and accuracy of a finite-difference solution of hydrodynamic problems with a complex shape of the boundary surface. Two problems of computational hydrodynamics are considered to study the possibilities of the proposed difference schemes: the spatial-two-dimensional flow of a viscous fluid between two coaxial semi-cylinders and the transfer of substances between coaxial semi-cylinders. Discretization of diffusion and convection operators was performed on the basis of the integro-interpolation method, taking into account taking into account the fullness of cells and without it. It is proposed to use a difference scheme, for solving the problem of diffusion–convection at large grid Peclet numbers, that takes into account the cell population function, and a scheme on the basis of linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients obtained by minimizing the approximation error at small Courant numbers. As a reference, an analytical solution describing the Couette–Taylor flow is used to estimate the accuracy of the numerical solution. The relative error of calculations reaches 70% in the case of the direct use of rectangular grids (stepwise approximation of the boundaries), under the same conditions using the proposed method allows to reduce the error to 6%. It is shown that the fragmentation of a rectangular grid by 2–8 times in each of the spatial directions does not lead to the same increase in the accuracy that numerical solutions have, obtained taking into account the fullness of the cells. The proposed difference schemes on the basis of linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weighting factors of 2/3 and 1/3, respectively, obtained by minimizing the order of approximation error, for the diffusion–convection problem have a lower grid viscosity and, as a corollary, more precisely, describe the behavior of the solution in the case of large grid Peclet numbers.

Keywords: accounting of cell fullness, Upwind Leapfrog difference scheme, grid Peclet numbers

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 833–848 (Russian).

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-07-00623).

1. Введение

В работе [Sukhinov et al., 2013] предложены разностные схемы, учитывающие функцию заполненности ячеек, для решения двумерных задач волновой гидродинамики с динамически перестраиваемой геометрией расчетной области. Показано, что решения, полученные на основе данных схем, лишены дефектов, связанных со ступенчатой аппроксимацией границы. Позже на основе данных схем разработана трехмерная математическая модель движения водной среды в Азовском море [Никитина и др., 2015; Сухинов и др., 2018]. При максимальной глубине водоема 14.2 метра ветровые нагоны могут достигать 4 метров и более. В качестве механизма перестроения геометрии водного объекта использован динамический пересчет заполненности ячеек. Данная модель показала достаточно высокую точность и большой запас устойчивости. Так, при расчете штормового нагона, который произошел в сентябре 2014 года (скорость ветра достигала 40 м/с и более), ошибка моделирования функции возвышения уровня составила 20 см при подъеме уровня более чем на 4 метра. Результаты моделирования отставали по времени на 15 минут на временном интервале штормовых явлений порядка 1000 минут. Традиционно при моделировании гидродинамики мелководных водоемов используют σ -координатную систему [Монин, 1973; Шокин и др., 1989; Ezer, Mellor, 2000]. Решения, полученные на данных сетках, обладают большой погрешностью и плохо описывают влияние рельефа дна на структуру течений. В качестве альтернативы прямоугольным сеткам, которые обладают низкой точностью в случае ступенчатой аппроксимации границы, сейчас используют неструктурированные адаптивные сетки, которые достаточно точно аппроксимируют границу [Четверушкин, Якобовский, 2018]. Методы построения трехмерных неструктурированных сеток для решения задач с разрывными коэффициентами подробно описаны в работах [Милюкова, Тишкин, 2015; Гасилов и др., 2015; Краснов и др., 2017]. В работах [Петров и др., 2016; Петров и др., 2017; Голубев и др., 2018] для решения подобного класса задач предложено использовать сеточно-характеристический метод.

При численном решении задач транспорта примеси в мелководных водоемах [Сухинов и др., 2011; Alekseenko et al., 2013; Никитина и др., 2016] на основе центрально-разностных схем возникает проблема, связанная с падением точности для больших значений сеточного числа Пекле. Одним из вариантов решения данной проблемы является измельчение шага по пространственной сетке, что влечет за собой увеличение трудоемкости. Например, при решении трехмерной задачи диффузии – конвекции для уменьшения числа Пекле в два раза необходимо уменьшить шаги по пространству в два раза, а по времени – в четыре раза. Таким образом, трудоемкость возрастает в 32 раза. Другим подходом к решению данного класса задач является применение других разностных схем, например схемы «кабаре». Схемы «кабаре» были разработаны для решения задач аэроакустики [Thomas, Roe, 1993; Chang et al., 1994]. В работе [Глотов и др., 2014] для решения задачи переноса предложено использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами. В работе [Сухинов и др., 2019] предложено использовать весовые коэффициенты, полученные в результате минимизации погрешности аппроксимации. Целью данной работы является исследование возможностей предлагаемой разностной схемы, построенной на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации, и учитывающей функцию заполненности ячеек для решения задач вычислительной гидродинамики при больших сеточных числах Пекле.

2. Постановка задачи

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами. Введем систему координат xOy перпендикулярно оси цилиндров. Начало системы координат совпадает с осью цилиндров.

В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости. Требуется определить движение жидкости. Для математического описания задачи динамики жидкости исходными уравнениями являются:

– уравнение Навье–Стокса:

$$u'_t + uu'_x + vv'_y = -P'_x/\rho + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y = -P'_y/\rho + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + v'_y = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) рассматриваются при следующих граничных условиях:

– на входной и выходной границе задается поток:

$$u = U, v = V, P'_n = 0, \quad (4)$$

– на боковых поверхностях задаются условие непроницаемости и скольжения (в случае $|\tau| = 0$, то есть без трения):

$$P'_n = 0, \quad \vec{V}_n = 0, \quad \rho\mu(\vec{V}_\tau)'_n = -\vec{\tau} \quad (5)$$

или условие прилипания:

$$P'_n = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (6)$$

где $\vec{V} = \{u, v\}$ – вектор скорости движения водной среды, \vec{V}_n, \vec{V}_τ – нормальная и тангенциальная составляющая вектора скорости, x, y – пространственные переменные, t – время, P – давление, μ – коэффициент турбулентного обмена, ρ – плотность жидкости, n – вектор нормали, $\vec{\tau} = \{\tau_x, \tau_y\}$ – составляющие тангенциального напряжения на дне жидкости.

Тангенциальное напряжение, вызванное донным трением, согласно закону Ван-Дорна, рассчитывается по формулам

$$\vec{\tau} \equiv \{\tau_x, \tau_y\} = \rho C_p \vec{V} |\vec{V}|, \quad (7)$$

где C_p – безразмерный коэффициент.

3. Метод поправки к давлению для решения задач гидродинамики

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики вводится равномерная сетка по временной переменной: $w_h = \{t^n = n\tau, n = 0, \dots, N_t, N_t\tau = T\}$, где τ – шаг по времени, n – индекс, N_t – количество шагов по времени.

Воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам. При этом решение исходной задачи (1)–(3) сводится к решению следующих уравнений [Белоцерковский и др., 1975; Sukhinov et al., 2013]:

– системы уравнений для расчета поля вектора скорости без учета давления:

$$\frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + uu'_x + vv'_y = (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (8)$$

$$\frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + uv'_x + vv'_y = (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (9)$$

– уравнения Пуассона для расчета давления:

$$P''_{xx} + P''_{yy} = \frac{\rho}{\tau} \left((u^{n+\sigma})'_x + (v^{n+\sigma})'_y \right), \quad (10)$$

– системы уравнений для пересчета поля вектора скорости с учетом давления:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_x}{\rho}, \quad \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_y}{\rho}. \quad (11)$$

Здесь $u^{n+\sigma}$, $v^{n+\sigma}$ – компоненты вектора скорости на промежуточном временном слое.

4. Модифицированная схема «кабаре»

Рассмотрим уравнение переноса

$$c'_t + uc'_x = 0, \quad (12)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $c(0, x) = c^0(x)$, $c(t, 0) = 0$, $u = \text{const}$.

Введем равномерную расчетную сетку $\omega = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$, где $\bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = L\}$, $\omega_\tau = \{t^n | n = 0, 1, \dots, T\}$, $\tau = t^{n+1} - t^n = \text{const}$.

Для численного решения поставленной задачи можно использовать следующие конечно-разностные схемы:

– схема «кабаре» [Головизнин, Самарский, 1998]:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{2\tau} + \frac{c_{i-1}^n - c_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{2\tau} + \frac{c_{i+1}^n - c_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} &= 0, \quad u < 0; \end{aligned} \quad (13)$$

– схема «крест» («чехарда»):

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2h} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим линейную комбинацию разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно, полученными в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации [Сухинов и др., 2019]:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i-1}^n - c_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i+1}^n - c_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Модельная задача I. Требуется найти решение уравнения

$$c'_t + uc'_x = 0, \quad u = 0.5 \text{ м/с}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad c(t, 0) = 0,$$

с начальными условиями $q^0(x) = h(20 - x) - h(10 - x)$, где $h(x)$ – функция Хэвисайда.

На рис. 1 представлены решения модельной задачи I (1 – точное решение, 2 – численное) на основе схемы (15). Расчетные интервалы по времени T составили 100 с и 900 с.

Рассмотрим уравнение конвекции – диффузии:

$$c'_t + uc'_x = (\mu c'_x)'_x, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (16)$$

с граничными и начальными условиями

$$c(0, x) = c^0(x), \quad c(t, 0) = c(t, L) = 0, \quad u = \text{const}.$$

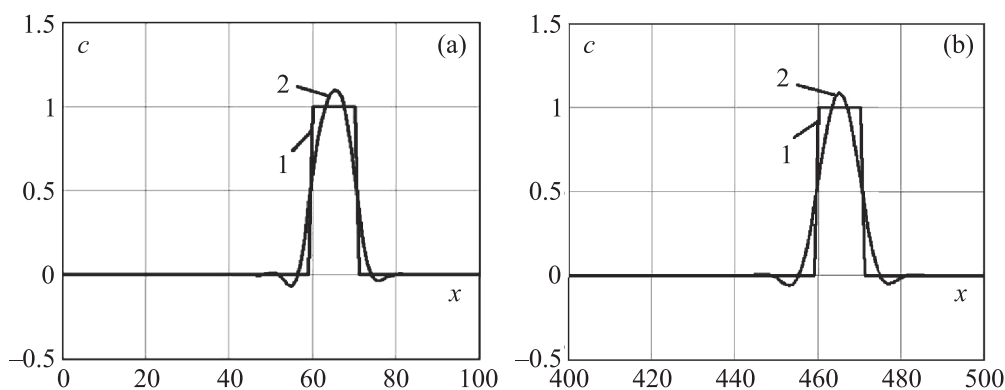


Рис. 1. Решения модельной задачи I: (а) расчетный интервал 100 с; (б) 900 с

Для аппроксимации оператора конвекции будем использовать разностный оператор схемы, полученной как результат линейной комбинации схем «кабаре» и «крест»:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i-1}^n - c_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} = \\ = 2\mu \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{h^2}, \quad u \geq 0; \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i+1}^n - c_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} = \\ = 2\mu \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{h^2}, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Модельная задача II. Требуется найти решение уравнения

$$c'_t + uc'_x = (\mu c'_x)'_x, \quad u = 0.5 \text{ м/с}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad c(t, 0) = c(t, L) = 0,$$

с начальными условиями $c^0(x) = h(20 - x) - h(10 - x)$.

Решение модельной задачи II может быть представлено в виде

$$c(t, x) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^0 e^{-\mu\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x), \quad C_m^0 = \frac{2}{L} \int_0^L c^0(x + ut) \sin(\omega m x) dx, \quad \omega = \frac{\pi}{L}.$$

На рис. 2 представлены решения модельной задачи II (1 – аналитическое решение, 2 – численное на основе схемы (17)). Параметр μ равен $0.025 \text{ м}^2/\text{с}$ (а) и $0.0025 \text{ м}^2/\text{с}$ (б). При этом сеточные числа Пекле ($Pe = uh/\mu$) равны 20 и 200 соответственно.

Рис. 2 иллюстрирует, что разностная схема (17) для решения задачи (16) имеет незначительную погрешность в широком диапазоне сеточных чисел Пекле.

5. Аппроксимация операторов диффузионного и конвективного переноса

Рассмотрим двумерное уравнение конвекции – диффузии:

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + f \quad (18)$$

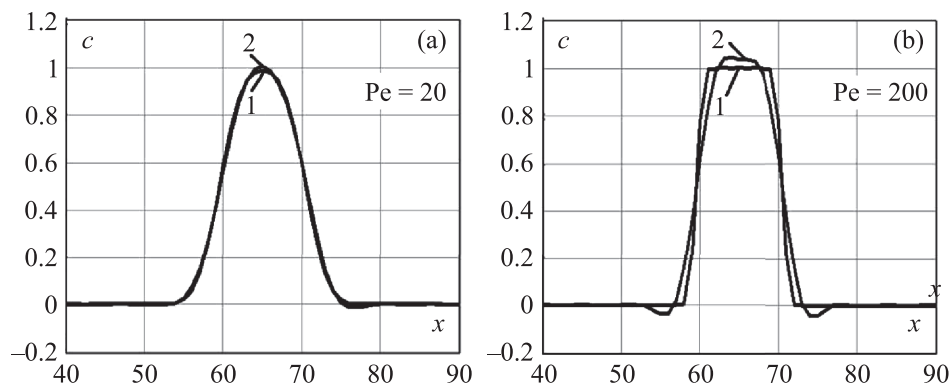


Рис. 2. Решения модельной задачи II: (а) сеточное число Пекле равно 20; (б) 200

с граничными условиями

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{19}$$

где u, v — компоненты вектора скорости, μ — коэффициент турбулентного обмена, f — функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится равномерная сетка:

$$w_h = \left\{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = 0, \dots, N_t, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y; N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y \right\},$$

где τ — шаг по времени, h_x, h_y — шаги по пространству, N_t — верхняя граница по времени, N_x, N_y — границы по пространству.

Для аппроксимации уравнения (18) по временной координате используем схемы с весами:

$$\frac{c^{n+1} - c^n}{\tau} + u(c^{n+\sigma})'_x + v(c^{n+\sigma})'_y = \left(\mu(c^{n+\sigma})'_x \right)'_x + \left(\mu(c^{n+\sigma})'_y \right)'_y + f, \tag{20}$$

здесь $c^{n+\sigma} = \sigma c^{n+1} + (1 - \sigma)c^n$, $\sigma \in [0, 1]$ — вес схемы.

Ячейки представляют собой прямоугольники, они могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми. Центры ячеек и узлы разнесены на $h_x/2$ и $h_y/2$ по координатам x и y соответственно. Обозначим через $o_{i,j}$ заполненность ячейки (i, j) . В окрестности узла (i, j) лежат ячейки $(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)$.

Вводятся коэффициенты q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 , описывающие заполненность контрольных областей, находящихся в окрестности ячейки. Значение q_0 характеризует заполненность области $D_0: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$; $q_1 - D_1: x \in (x_i, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$; $q_2 - D_2: x \in (x_{i-1/2}, x_i), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$; $q_3 - D_3: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_j, y_{j+1/2})$; $q_4 - D_4: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_j)$. Заполненные части областей D_m будем называть Ω_m , где $m = 0, \dots, 4$. В соответствии с этим коэффициенты q_m можно вычислить по формулам

$$(q_m)_{i,j} = \frac{S_{\Omega_m}}{S_{D_m}}, \quad (q_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4}, \quad (q_1)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2},$$

$$(q_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_3)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2}.$$

Дискретный аналог уравнения диффузии – конвекции – реакции (19) с граничными условиями третьего рода (20) запишется в виде [Sukhinov et al., 2013]

$$\begin{aligned}
 & (q_0)_{i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\tau} + (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i-1,j}^{n+\sigma}}{2h_x} + \\
 & + (q_3)_{i,j} v_{i,j+1/2} \frac{c_{i,j+1}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{2h_y} + (q_4)_{i,j} v_{i,j-1/2} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i,j-1}^{n+\sigma}}{2h_y} = (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - \\
 & - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i-1,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^{n+\sigma} + \beta_x}{h_x} + \\
 & + (q_3)_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{c_{i,j+1}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i,j-1}^{n+\sigma}}{h_y^2} - \\
 & - |(q_3)_{i,j} - (q_4)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+\sigma} + \beta_y}{h_y} + (q_0)_{i,j} f_{i,j}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, получили дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса в случае учета частичной заполненности ячеек. Дискретные аналоги операторов конвективного uc'_x и диффузионного $(\mu c'_x)_x$ переноса в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (q_0)_{i,j} uc'_x \simeq (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \\
 & (q_0)_{i,j} (\mu c'_x)_x \simeq (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.
 \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации для данной схемы есть величина $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ во внутренних узлах сетки и $O(\tau + h_x + h_y)$ – в граничных узлах. Достаточное условие устойчивости схемы для метода поправки к давлению определяется на основе принципа максимума при ограничениях на шаг по пространству [Самарский, 1967; Вабищевич, Самарский, 2000]: $h_x < |2\mu/u|$, $h_y < |2\mu/v|$ или $Re \leq 2N$, где $Re = u \cdot l/\mu$ – число Рейнольдса [Ландау, Лифшиц, 1986], u – скорость движения водной среды, l – характерный размер области, μ – коэффициент турбулентного обмена.

В случае невыполнения условия устойчивости разностной схемы можно поступить следующим образом: или увеличить размеры расчетной сетки, что влечет за собой рост вычислительных затрат, или поменять разностную схему. Переход к схемам «против потока» [Четверушкин, 2012] не рекомендуется, так как они обладают сеточной вязкостью. В тестовых расчетах при решении системы уравнений (8), (9) на основе разностной схемы (21) в случае невыполнения условия устойчивости $h_x < |2\mu/u|$ коэффициент турбулентного обмена по направлению Ox будем брать равным $uh_x/2$, по направлению Oy – равным $vh_y/2$. Также следует отметить, что в случае применения схем «против потока» коэффициент турбулентного обмена по направлению Ox становится равным $\mu + uh_x/2$, по направлению Oy – равным $\mu + vh_y/2$, что вносит больший вклад в погрешность решения по сравнению с описанным выше подходом.

Для аппроксимации однородного уравнения (18) при больших сеточных числах Пекле будем использовать схемы расщепления по пространству:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u(c^n)'_x = (\mu(c^n)'_x)'_x, \tag{22}$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + v(c^{n+1/2})'_y = (\mu(c^{n+1/2})'_y)'_y. \tag{23}$$

Для аппроксимации системы уравнений (22), (23) будем использовать схему (17), полученную как результат линейной комбинации схем «кабаре» и «крест», при этом будем учитывать функцию заполненности ячеек:

– разностная схема для уравнения (22), описывающего перенос вдоль направления Ox , запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} + u_{i+1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + \\ & + \frac{2\Delta_x c_{i-1,j}^n q_{2,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} - \\ & - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^n + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} \geq 0; \\ & \frac{2q_{1,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + u_{i-1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} + \\ & + \frac{2\Delta_x c_{i+1,j}^n q_{1,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} - \\ & - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^n + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} < 0, \quad \text{где } \Delta_x c_{i,j}^n = \frac{c_{i,j}^{n-1/2} - c_{i,j}^{n-1}}{\tau}; \end{aligned} \quad (24)$$

– разностная схема для уравнения (23), описывающего перенос вдоль направления Oy , запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2q_{4,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + 5v_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y} + v_{i,j+1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y} + \\ & + \frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n+1/2} q_{4,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2} - \\ & - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+1/2} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} \geq 0; \\ & \frac{2q_{3,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + 5v_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y} + v_{i,j-1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y} + \\ & + \frac{2\Delta_y c_{i,j+1}^{n+1/2} q_{3,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2} - \\ & - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+1/2} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} < 0, \quad \text{где } \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} = \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j}^{n-1/2}}{\tau}. \end{aligned} \quad (25)$$

6. Решение тестовых задач гидродинамики

Рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами [Валландер, 1978]:

$$u'x + v'y = -\rho^{-1} P'_x + \mu \Delta u, \quad u'x + v'y = -\rho^{-1} P'_y + \mu \Delta v, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (26)$$

Модельная задача III. Рассматривается задача нахождения численного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами ($x \geq 0$). Радиус внутреннего цилиндра $r_1 = 5$ м.

Радиус внешнего цилиндра $r_2 = 10$ м. Расчетная область вписана в прямоугольник размером 10×20 м ($0 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$). В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости $u(0, y) = -5/y$ м/с, $v(0, y) = 0$ м/с. Во всех остальных узлах сетки поле скорости рассчитывается. На внутренней и внешней стенках цилиндра задаются условия скольжения и непротекания.

Аналитическое решение задачи III в декартовой системе координат примет вид

$$u(x, y) = -\frac{5y}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{5x}{x^2 + y^2}, \quad P(x, y) = P(r_1) - \frac{12.5\rho}{x^2 + y^2} + \rho/2. \quad (27)$$

Погрешности численных решений наиболее отчетливо видны на грубых сетках. Опишем параметры грубой сетки. Шаги по пространственным направлениям равны 1 м, шаг по времени — 0.1 с, размеры сетки — 21×11 узлов, длина расчетного интервала — 10 с, плотность среды $\rho = 1000$ кг/м³, коэффициент турбулентного обмена $\mu = 1$ м²/с.

В таблице 1 представлено содержимое массива, описывающего функцию заполненности ячеек в случае использования расчетной сетки 21×11 .

Таблица 1. Функция заполненности ячеек для сетки 21×11 узлов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.983	0.882	0.677	0.362	0.030	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0.894	0.344	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	0.589	0.010	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	0.589	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	0.344	0
5	0.033	0.239	0.682	1	1	1	1	1	0.894	0.030
6	0	0	0	0.452	1	1	1	1	1	0.362
7	0	0	0	0	0.682	1	1	1	1	0.677
8	0	0	0	0	0.239	1	1	1	1	0.882
9	0	0	0	0	0.033	1	1	1	1	0.983
10	0	0	0	0	0.033	1	1	1	1	0.983
11	0	0	0	0	0.239	1	1	1	1	0.882
12	0	0	0	0	0.682	1	1	1	1	0.677
13	0	0	0	0.452	1	1	1	1	1	0.362
14	0.033	0.239	0.682	1	1	1	1	1	0.894	0.030
15	1	1	1	1	1	1	1	1	0.344	0
16	1	1	1	1	1	1	1	0.589	0	0
17	1	1	1	1	1	1	0.589	0.010	0	0
18	1	1	1	1	0.894	0.344	0	0	0	0
19	0.983	0.882	0.677	0.362	0.030	0	0	0	0	0

Численное решение задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами представлено на рис. 3. Цветом показаны потоки движения жидкости $|k_0 u|$.

Рис. 3, *a* демонстрирует, что решение задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами, полученное на сетках, учитывающих заполненность ячеек, является достаточно гладким. Решение, представленное на рис. 3, *b*, имеет существенные неточности в определении направления векторов скорости, связанные со ступенчатой аппроксимацией границы раздела двух сред.

Рис. 4 иллюстрирует погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами на сетках, учитывающих заполненность ячеек (случай гладкой границы), и на сетках со ступенчатой аппроксимацией границы.

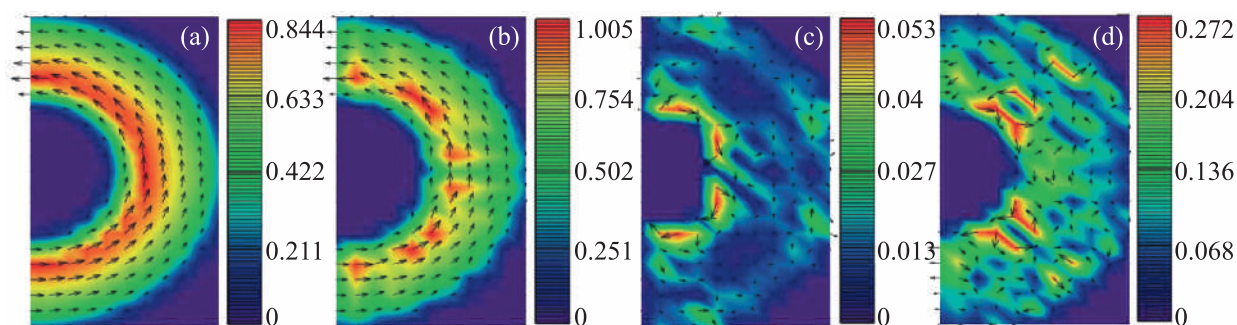


Рис. 3. Численное решение задачи: (а) случай использования частичной заполненности ячеек; (б) случай ступенчатой границы раздела двух сред; (с) поле, полученное как разность между численным и аналитическим решениями задачи в случае гладкой границы; (д) в случае ступенчатой границы

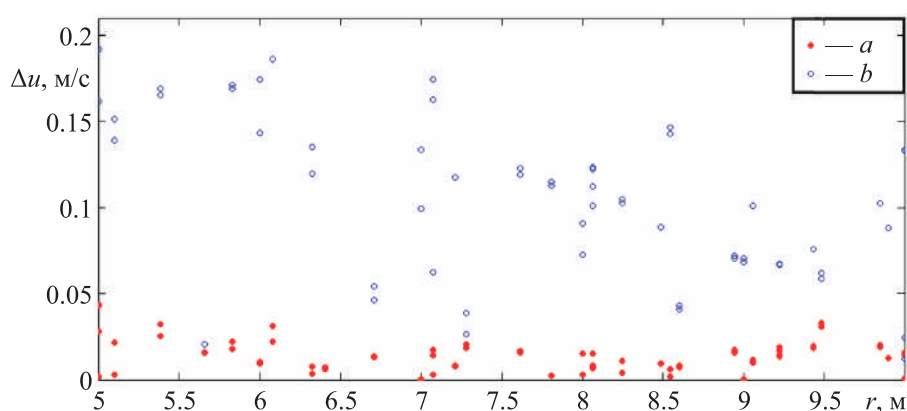


Рис. 4. Зависимости погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами от радиуса: a — с использованием метода учета заполненности ячеек, b — без учета заполненности ячеек

Таблица 2. Погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами

Размеры сетки	11 × 21	21 × 41	41 × 81	81 × 161
Максимальное значение погрешности в случае гладкой границы, м/с	0.053	0.052	0.058	0.056
Среднее значение погрешности в случае гладкой границы, м/с	0.023	0.012	0.006	0.003
Максимальное значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с	0.272	0.731	0.717	0.75
Среднее значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с	0.165	0.132	0.069	0.056

Для численного исследования точности предложенных схем найдено решение на последовательности сгущающихся сеток. В таблице 2 представлены значения погрешностей численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными полуцилиндрами, полученные на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами 11×21 , 21×41 , 41×81 и 81×161 узлов в случаях гладкой и ступенчатой границы.

Анализ результатов расчетов погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами на последовательности сгущающихся сеток, представленных в таблице 2, позволяет сделать вывод об эффективности использования разностных схем, учитывающих

заполненность ячеек. При решении модельной задачи дробление сетки в 8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к повышению точности, которой обладают решения, полученные на сетках, учитывающих заполненность ячеек.

На рис. 5 представлено численное решение задачи (26): в случае (а) система уравнений диффузии – конвекции (8), (9) решалась на основе разностной схемы (21); в случае (б) система уравнений (8), (9) решалась на основе разностных схем (24), (25). На рис. 5, с приведена разность полей вектора скорости, рассчитанных на основе разностной схемы (21) и разностных схем (24), (25).

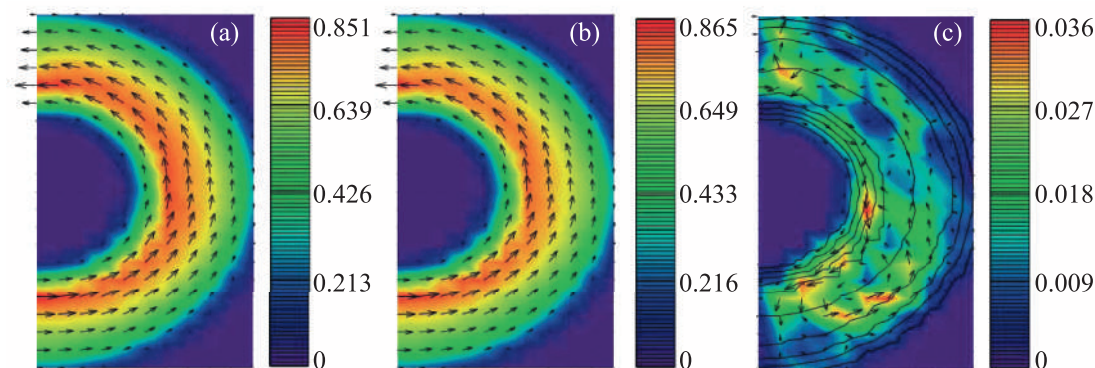


Рис. 5. Численное решение задачи (26) на основе разностной схемы (21) и разностных схем (24), (25)

Модельная задача IV. Требуется найти решение задачи транспорта веществ (18) между двумя соосными цилиндрами на основе разностной схемы (21) и схем (24), (25), при этом поле течения задавалось функцией (27) с начальным распределением:

$$c^0(x, y) = (\theta(1 - x) - \theta(0.5 - x)) (\theta(-8.5 - y) - \theta(-9 - y)).$$

На рис. 6 приведено численное решение задачи переноса веществ IV при малых сеточных числах Пекле. Рассмотрен случай выполнения условия устойчивости разностной схемы (21). Коэффициент турбулентного обмена взят равным $0.5 \text{ м}^2/\text{с}$. Расчетный интервал равен 20 с. На рис. 7 приведен расчет задачи переноса веществ IV при больших сеточных числах Пекле. Коэффициент турбулентного обмена взят равным $0.01 \text{ м}^2/\text{с}$. В этом случае диффузионный обмен практически отсутствует. На рис. 6, 7 обозначено: (а) начальное распределение поля концентрации; (б) результат расчета поля концентрации на основе разностной схемы (21); (с) результат расчета поля концентрации на основе разностных схем (24), (25).

Рис. 6, 7 демонстрируют, что предложенные разностные схемы, построенные на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$ соответственно, полученными в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации, для задачи диффузии – конвекции обладают меньшей сеточной вязкостью и, как следствие, точнее описывают поведение решения в случае больших сеточных чисел Пекле.

Заключение

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами. Для решения поставленной задачи использован метод поправки к давлению. Согласно данному методу задача решается в три этапа. На первом этапе решается система уравнений вида диффузии – конвекции для расчета поля

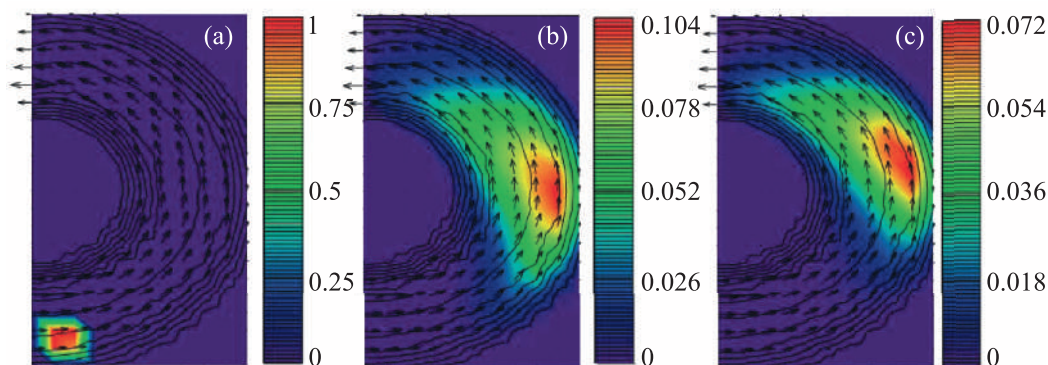


Рис. 6. Численное решение задачи переноса веществ между двумя соосными цилиндрами при малых сеточных числах Пекле

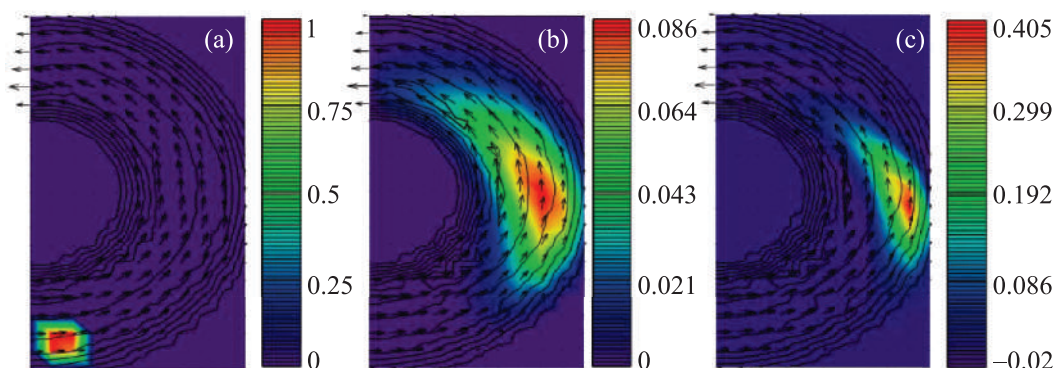


Рис. 7. Численное решение задачи переноса веществ между двумя соосными цилиндрами при больших сеточных числах Пекле

скорости без учета давления. На втором этапе решается уравнение Пуассона для расчета давления. На третьем этапе пересчитывается скорость с учетом давления. Данный метод гарантирует выполнение условия неразрывности (сохранение потока) на дискретном уровне. При решении уравнений диффузии – конвекции возникает ограничение на шаг по пространству. Для того чтобы центральная-разностная схема была устойчива, необходимо уменьшать шаг по пространству, что ведет к большим вычислительным трудозатратам, либо повышать вязкость, что влечет за собой падение точности. В работе для решения данной задачи предложено использовать схему, построенную в результате линейной комбинации схем «кабаре» и «крест» с оптимальными весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации. Другой актуальной задачей вычислительной гидродинамики является аппроксимация границы расчетной области. В работе для дискретизации операторов первой и второй производной использован метод учета функции заполненности ячеек. Предложена разностная схема, полученная в результате линейной комбинации схем «кабаре» и «крест» с оптимальными весовыми коэффициентами и учитывающая функцию заполненности ячеек. Для тестовых расчетов на основе предложенной схемы использовано течение Куэтта–Тейлора, для которого известно аналитическое решение. Показано, что предложенная схема сохраняет гладкость решения на границе расчетной области и применима в большом диапазоне сеточных чисел Пекле.

Список литературы (References)

- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Шенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 197–207.
Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Shchennikov V. V. Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid USSR // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 15, Iss. 1. — P. 190–200.
- Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Разностные схемы для задач конвекции – диффузии на нерегулярных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — Т. 40, № 5. — С. 726–739.
Vabishevich P. N., Samarskii A. A. Numerical methods for solving convection – diffusion problems // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 2000. — Vol. 40, No. 5. — P. 726–739.
- Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике: учеб. пособие. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. — 296 с.
Vallander S. V. Lektsii po gidroaeromekhanike: ucheb. posobiye. — L.: Izd-vo LGU, 1978. — 296 p.
- Гасилов В. А., Гасилова И. В., Ключкова Л. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф. Разностные схемы на основе метода опорных операторов для задач динамики флюидов в коллекторе, содержащем газогидраты // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55, № 8. — С. 1341–1355.
Gasilov V. A., Gasilova I. V., Klochkova L. V., Poveshchenko Yu. A., Tishkin V. F. Difference schemes based on the support operator method for fluids dynamics problems in a collector containing gas hydrates // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, Iss. 8. — P. 1310–1323.
- Глотов В. Ю., Головизнин В. М., Карабасов С. А., Маркештейн А. П. Новая схема «двухслойный крест» для моделирования стохастических уравнений Ландау – Лифшица // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 2. — С. 298–317.
Glotov V. Yu., Goloviznin V. M., Karabasov S. A., Markeshtejn A. P. New two-level leapfrog scheme for modeling the stochastic Landau – Lifshitz equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, Iss. 2. — P. 298–317.
- Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.
Goloviznin V. M., Samarskii A. A. Finite difference approximation of convective transport equation with space splitting time derivative // Матем. моделирование. — 1998. — Vol. 10, No. 1. — P. 86–100.
- Голубев В. И., Войнов О. Я., Петров И. Б. Сейсмическая миграция в трещиноватых упругих средах на основе сеточно-характеристического метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 8. — С. 113–119.
Golubev V. I., Voinov O. Ya., Petrov I. B. Seismic imaging of fractured elastic media on the basis of the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 58, Iss. 8. — P. 1309–1315.
- Краснов М. М., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Разрывный метод Галёркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 3–22.
Krasnov M. M., Kuchugov P. A., Ladonkina M. E., Tishkin V. F. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9, Iss. 5. — P. 529–543.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит. — 1986. — 736 с.
Landau L. D., Lifshits Ye. M. Hidrodinamika. — Moscow: Nauka, Gl. red. fiz-mat. lit. — 1986. — 736 p.
- Мильюкова О. Ю., Тишкин В. Ф. Многосеточный метод для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом со специальным выбором сеток // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 9. — С. 17–32.
Milyukova O. Yu., Tishkin V. F. A multigrid method for a heat equation with discontinuous coefficients with a special choice of grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2016. — Vol. 8, Iss. 2. — P. 118–128.
- Монин А. С. Турбулентность и микроструктура в океане // Успехи физических наук. — 1973. — Т. 109, № 2. — С. 333–354.
Monin A. S. Turbulentnost' i mikrostruktura v okeane // Uspekhi fizicheskikh nauk. — 1973. — Vol. 109, No. 2. — P. 333–354.
- Никитина А. В., Пучкин М. В. и др. Дифференциально-игровая модель предотвращения замороз в мелководных водоемах // Управление большими системами: сборник трудов. — 2015. — № 55. — С. 343–361.
Nikitina A. V., Puchkin M. V. et al. A differential-game model of preventing fish suffocation in shallow reservoirs // Upravlenie bolshimi sistemami [Control of Large-Scale Systems]. — 2015. — No. 55. — P. 343–361.

- Никитина А. В., Сухинов А. И., Угольницкий Г. А., Усов А. Б., Чистяков А. Е., Пучкин М. В., Семенов И. С.* Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 7. — С. 96–106.
Nikitina A. V., Sukhinov A. I., Ugolnitsky G. A., Usov A. B., Chistyakov A. E., Puchkin M. V., Semenov I. S. Optimal control of sustainable development in biological rehabilitation of the Azov Sea // Math. Models Comput. Simul. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 101–107.
- Петров Д. И., Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И.* Численное решение задач сейсмо-разведки в условиях Арктики сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1149–1163.
Petrov D. I., Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Numerical solution of seismic exploration problems in the Arctic region by applying the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, Iss. 6. — P. 1128–1141.
- Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И.* Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 11 — С. 1804–1811.
Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, Iss. 11. — P. 1771–1777.
- Самарский А. А.* Классы устойчивых схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1967. — Т. 7, № 5. — С. 1096–1133.
Samarskii A. A. Classes of stable schemes // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1967. — Vol. 7, No. 5. — P. 1096–1133.
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 3–21.
Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Alekseenko E. V. Numerical Realization of the Three-Dimensional Model of Hydrodynamics for Shallow Water Basins on a High-Performance System // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2011. — Vol. 23, No. 3. — P. 3–21.
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.* О разностных схемах кабары и крест // Вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20. — С. 170–181.
Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Protsenko E. A. Upwind and standard leapfrog difference schemes // Vychislitelnye metody i programmirovaniye. — 2019. — Vol. 20, No. 2. — P. 170–181.
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Шишениа А. В., Тимофеева Е. Ф.* Предсказательное моделирование прибрежных гидрофизических процессов на многопроцессорной системе с использованием явных схем // Матем. моделирование. — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 83–100.
Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V., Timofeeva E. F. Predictive Modeling of Coastal Hydrophysical Processes in Multiple-Processor Systems Based on Explicit Schemes // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 648–658.
- Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 11. — С. 33–52.
Chetverushkin B. N. Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations // Math. Models Comput. Simul. — 2012. — Vol. 24, No. 11. — P. 33–52.
- Четверушкин Б. Н., Якововский М. В.* Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — 052. — 12 с.
Chetverushkin B. N., Yakobovskiy M. V. Vychislitel'nyye algoritmy i arkhitektura sistem vysokoy proizvoditel'nosti // Preprinty IPM im. M. V. Keldysha. — 2018. — 052. — 12 p.
- Шокин Ю. И., Чубаров Л. Б., Марчук Ан. Г., Симонов К. В.* Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — 164 с.
Shokin Yu. I., Chubarov L. B., Marchuk An. G., Simonov K. V. Vychislitel'nyy eksperiment v probleme tsunami. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-niye, 1989. — 164 p.
- Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D.* Coastal hydrodynamics in a windy lagoon // Computers and Fluids. — 2013. — Vol. 77. — P. 24–35.
- Chang S. C., Wang X. Y., Chow C. Y.* New developments in the method of space-time conservation element and solution element—applications to two-dimensional time-marching problems, NASA TM 106758 (NASA, December 1994).

- Ezer T., Mellor G.L.* Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton // *Ocean Model Dynamics of Atmospheres and Oceans*. — 2000. — Vol. 32, Iss. 3–4. — P. 185–208. — DOI: 10.1016/S0377-0265(00)00047-6
- Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Timofeeva E. F., Shishenya A. V.* Mathematical model for calculating coastal wave processes // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2013. — Vol. 5, No. 2. — P. 122–129. — DOI: 10.1134/S2070048213020087
- Thomas J. P., Roe P.L.* Development of Non-Dissipative Numerical Schemes for Computational Aeroacoustics // *AIAA paper 93-3382-CP*, presented at the 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6–9. — 1993.

УДК: 544.452.2

Исследование влияния искрового разряда на смешение струи газообразного топлива со сверхзвуковым воздушным потоком

Е. В. Долгов, Н. С. Колосов, А. А. Фирсов^а

Объединенный институт высоких температур (ОИВТ РАН),
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

E-mail: ^аaf@jiht.org

*Получено 25.06.2019, после доработки — 15.08.2019.
Принято к публикации 26.08.2019.*

В работе представлены результаты численного моделирования влияния протяженного искрового разряда на динамику перемешивания инжестируемой газовой струи со сверхзвуковым воздушным потоком. Расчеты проводились в программном комплексе FlowVision. Подача топлива осуществляется при помощи инжектора, расположенного на стенке канала, а разряд организован вблизи стенки ниже по потоку относительно инжектора. Моделирование электрического искрового разряда выполнено при помощи объемного источника тепла. С целью описания принципиального вида плазменного актуатора для ускорения перемешивания в сверхзвуковом потоке (число Маха $M = 2$) в ходе исследования выполнено варьирование энерговклада в разряд в диапазоне 100–500 мДж на один импульс, а также определено влияние формы и местоположения разряда относительно топливного инжектора. Проведено исследование режимов инжекции топлива в сверхзвуковой воздушный поток и найден оптимальный режим истечения струи газа для исследования влияния искрового разряда на смешение. Разработан метод анализа картины возмущений границы раздела «топливо–окислитель», вызванных работой импульсного искрового разряда. Подготовлена программа в среде LabView для получения количественной характеристики для дальнейшего сравнения полученных результатов с экспериментальными данными.

Результаты моделирования позволяют сделать вывод, что протяженный искровой разряд, расположенный ниже по потоку относительно инжектора и расположенный вдоль потока, обеспечивает максимальное увеличение границы раздела между струей топлива и основным потоком. Типичная частота повторения импульсов разряда в импульсно-периодическом режиме должна составлять более 6 кГц при длине разряда ~10 мм, чтобы обеспечить постоянное влияние на смешение в потоке со скоростью 500 м/с.

Ключевые слова: искровой разряд, смешение, сверхзвуковой поток, плазменный актуатор, компьютерное моделирование

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-79-10494.

UDC: 544.452.2

The study of the discharge influence on mixing of gaseous fuel jet with the supersonic air flow

E. V. Dolgov, N. S. Kolosov, A. A. Firsov^a

Joint Institute for High Temperatures (JIHT RAS),
13/2 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

E-mail: ^aaf@jiht.org

*Received 25.06.2019, after completion — 15.08.2019.
Accepted for publication 26.08.2019.*

The paper presents the results of numerical simulation of the effect of a long spark discharge on the mixing dynamics of an injected gas jet with supersonic air flow. The calculations were performed using the CFD software package FlowVision. The fuel was supplied using an injector located on the channel wall, and the discharge was organized near the wall downstream of the injector. Simulation of electrical spark discharge was performed using a volumetric heat source. In order to describe the principal specifications of a plasma actuator to accelerate mixing in a supersonic flow (Mach number $M = 2$), the research involved varying the energy impact to the discharge in the range of 100–500 mJ per pulse, determining the influence of the shape and location of the discharge. A study of the fuel injection modes in a supersonic air flow has been carried out and an optimal gas jet outflow regime has been found to study the effect of a spark discharge. A method has been developed for analyzing the disturbance pattern of the fuel-oxidant interface caused by the operation of a pulsed spark discharge. A program was prepared in the LabView software environment for obtaining quantitative characteristics for further comparison with the results obtained in the experiment.

The simulation results allow us to conclude that the long spark discharge located along the flow downstream of the injector provides the maximum increase in the interface between the jet of fuel and the main flow. A typical repetition frequency of discharge pulses in a pulse-periodic mode should be more than 6 kHz with a discharge length of ~10 mm to ensure a continuous effect on the mixing at a flow velocity of 500 m/s.

Keywords: spark discharge, mixing, supersonic flow, plasma actuator, numerical simulation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 849–860 (Russian).

The work was supported by Russian Science Foundation grant No. 17-79-10494.

1. Введение

Исследования в области сверхзвуковых авиационных и ракетных двигателей, а также гиперзвуковых технологий имеют повышенный приоритет как в России, так и за рубежом, например в США, Китае, Франции, Австралии. Одна из ключевых задач в этой области заключается в разработке прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ГПВРД) для гиперзвуковых летательных аппаратов. Перед исследователями и инженерами стоит несколько проблем: 1) быстрое смешивание топлива со сверхзвуковым потоком; 2) объемное зажигание; 3) контролируемое удержание пламени в камере сгорания. Последние две темы активно исследуются несколькими научными группами; в частности, рассматривается зажигание в сверхзвуковом потоке на основе самовоспламенения водорода [Berglund et al., 2010], применение разряда постоянного тока [Firsov et al., 2015; Vincent-Randonnier et al., 2017] или СВЧ-разряда [Kopyl et al., 2012], удержание пламени обычно основано на использовании механических элементов, создающих отрывные зоны, таких как пилоны, уступы и каверны [Ma et al., 2015], или на использовании мощных электрических разрядов [Firsov et al., 2017].

Интенсификация смешения в сверхзвуковых камерах сгорания имеет особое значение из-за ограниченной длины камеры сгорания и высокой скорости потока, а также из-за достаточно жестких требований к составу смеси, обеспечивающему стабильное воспламенение. Повлиять на смешение на молекулярном уровне затруднительно, поэтому основной подход к интенсификации перемешивания основан на увеличении границы раздела между топливом и окислителем, что в свою очередь ведет к увеличению количества вихревых структур на границе раздела. В расчетно-теоретической работе [Zheltovodov, Pimonov, 2013] показана возможность увеличения границы раздела за счет ускоренного возбуждения неустойчивости Рихтмайера–Мешкова на границе между струей и спутным потоком с помощью импульсно-периодического энерговклада. В качестве подобного энерговклада может выступать субмикросекундный электрический искровой разряд. Он имеет относительно небольшое энерговыделение ($E < 2$ Дж/импульс) из-за короткой длительности разряда ($t < 0.1\text{--}2$ мкс), может иметь длину от единиц до десятков миллиметров. Трансформация тепловой каверны, возникающей после разряда, проходит через две ключевые стадии: возникновение мелкомасштабной неустойчивости Рэлея–Тейлора на временах до 200 мкс после разряда и, позднее, образование крупномасштабных высокоскоростных струй вблизи криволинейных участков канала [Shugurov et al., 2014]. При этом протяженный разряд, при наличии границы раздела двух сред, локализуется преимущественно вдоль границы раздела [Leonov et al., 2011]. С использованием теневой визуализации экспериментально (качественно) было показано, что введение импульсного разряда в поток способствует интенсификации перемешивания компонентов: макроскопические и микроскопические вихревые структуры, а также газодинамические неустойчивости в зоне после разряда увеличивают границу раздела между двумя газами и увеличивают скорость смешивания топлива с воздухом в высокоскоростном потоке [Leonov et al., 2011]. Предыдущие эксперименты по влиянию искры на смешение были выполнены для разряда, пересекающего ядро потока. Но в случае инъекции топлива в сверхзвуковой поток со стенки канала (без пилонов) струя топлива располагается в основном около стенки, и подход, основанный на поверхностном искровом разряде, выглядит более разумным. Естественные ограничения диагностических методов и высокая стоимость экспериментов делают численное моделирование важным инструментом исследования течений в области плазменной аэродинамики. В работе представлены основные результаты моделирования различных режимов инъекции струи газа в воздушный поток в присутствии импульсного разряда с целью исследования влияния разряда на интенсификацию смешения струи газообразного топлива со сверхзвуковым воздушным потоком.

2. Постановка задачи

Численное моделирование смешения струи газа электрическим разрядом со сверхзвуковым воздушным потоком проведено с использованием программного обеспечения FlowVision

3.10.02 [Аксенов, 2017]. Моделирование течения осуществляется посредством решения трехмерной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу, с использованием модифицированной модели турбулентности $k-\varepsilon$ FlowVision (URANS-подход) [Жлуктов и др., 2016]. Трехмерная модель расчетной области воспроизводит экспериментальную секцию сверхзвуковой аэродинамической трубы ИАДТ-50 ОИВТ РАН. Геометрия расчетной области имеет размеры, соответствующие реальной тестовой секции — $340 \times 70 \times 70$ мм. Расстановка граничных условий на примере одной из расчетных конфигураций показана на рис. 1, а. На входе установлены условия течения, соответствующие параметрам потока в аэродинамической трубе ИАДТ-50: число Маха $M = 2$, статическое давление $P = 22\,000$ Па, температура $T = 170$ К. На стенках учитывается прилипание потока, используются пристенные функции для моделирования пограничного слоя. На выходе из расчетной области задается условие свободного сверхзвукового выхода. Инжекция топлива осуществляется через отверстие диаметром 4 мм, рассматривается массовый расход топлива в пределах $0.5\text{--}4$ г/с. В дальнейшем планируется выполнить сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными. Поэтому в качестве топлива был выбран модельный газ CO_2 для исключения возможного воспламенения топлива в эксперименте, а моделирование выполнено без учета химических реакций.

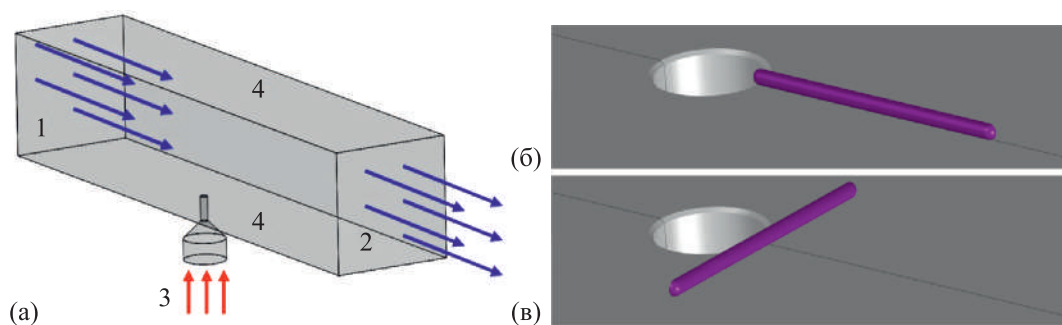


Рис. 1. а) Геометрия расчетной области сверхзвукового аэродинамического канала ИАДТ-50: 1 — сверхзвуковой вход, 2 — свободный выход, 3 — вход топлива, 4 — стенки; б) продольная и в) поперечная ориентация разряда относительно потока воздуха. Красными стрелками показан вход топлива, синими — направление потока воздуха

Электрический искровой разряд моделируется объемным источником тепла. Этот подход ранее продемонстрировал хорошее совпадение экспериментальных результатов и данных моделирования для искрового разряда в атмосферном воздухе [Dolgov, Firsov, 2018] и для плазменного управления структурой течения в сверхзвуковом воздухозаборнике с помощью разряда постоянного тока [Falempin et al., 2015]. В этом исследовании рассмотрены несколько геометрий разряда: поперечный потоку и продольный (см. рис. 1, б) разряды длиной 10 мм, а также продольный изогнутый разряд длиной 14 мм. Диаметр всех разрядов составляет 0.6 мм. Источник тепла работает в течение 100 нс, а энергия, выделяемая объемным источником тепла, находится в диапазоне $100\text{--}500$ мДж на один импульс. Расчет производится на прямоугольной декартовой сетке. Границы расчетной области обрезают крайние ячейки декартовой сетки таким образом, что приграничные ячейки представляют собой многогранники произвольной формы. Интегрируемые уравнения в частных производных аппроксимируются на этих многогранниках. Во время расчета используются разные уровни адаптации сетки, что обеспечивает до 8 ячеек на 1 мм в зоне разряда и ~ 4 ячеек на мм в зоне струи. Количество ячеек сетки при адаптации до 6-го уровня составляет примерно 1×10^6 . Расчет проводится с адаптацией сетки внутри области с заданной массовой долей CO_2 , таким образом, получено высокое пространственное разрешение только в области, где находились струя CO_2 и разряд. При адаптации на один уровень декартова ячейка делится на 8 равных параллелепипедов. Сетка автоматически перестраивается в процессе развития нестационарного решения. В процессе предварительных

расчетов критерии динамической адаптации были подобраны таким образом, чтобы возмущения, вносимые в поток и струю CO_2 , вызванные работой разряда, хорошо разрешались сеткой на каждом временном шаге. Такой подход позволяет экономить вычислительные ресурсы и ускорять расчеты. Типичная сетка представлена на рис. 2.

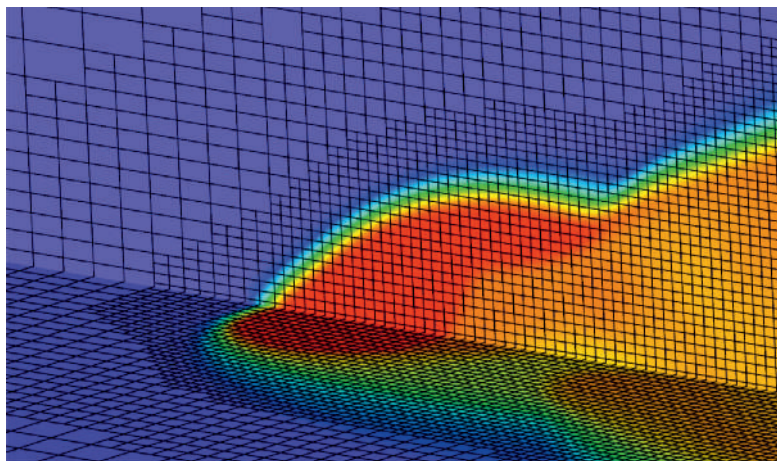


Рис. 2. Структура сетки, автоматически генерируемой ПК при задании динамической адаптации по условию «массовая доля CO_2 больше некоторой величины X »

3. Полученные результаты

Режимы инжекции топлива

Посредством численного моделирования проведено исследование режимов истечения струи газа в сверхзвуковой поток воздуха в условиях, близких к параметрам аэродинамической трубы ИАДТ-50. Выполнено варьирование массового расхода топлива с целью выбора режима, при котором будет проведено дальнейшее исследование влияния разряда на смешение. Распределение массовой доли CO_2 при различных массовых расходах инжекции топлива представлено на рис. 3. Обнаружено, что при массовом расходе 1 г/с струя является дозвуковой (число Маха в инжекторе составляет $M = 0.45$). В этом случае струя распространяется вдоль стенки на протяжении всего канала. При расходе 2 г/с струя является трансзвуковой — число Маха в инжекторе составляет $M = 0.9$, а когда струя попадает в основной поток, число Маха становится $M = 1.2$. При скорости потока 3 г/с поток в инжекторе является трансзвуковым ($M = 1$), и после входа в поток струя топлива становится по существу сверхзвуковой (M до 1.8). Важно отметить, что в этом случае реализуются колебания формы струи и колебания массового расхода от 2.46 до 3.56 г/с ниже по потоку от инжектора с частотой ~ 23 кГц. Поэтому в дальнейшей серии параметрических исследований решено отказаться от рассмотрения последнего режима подачи топлива, чтобы непосредственно выявить влияние электрического разряда на перемешивание, исключая добавку, вызванную неустойчивостью струи. Большой массовый расход приводит к отрыву струи от стенки канала. В таких условиях поверхностный разряд становится малоэффективен. Поэтому в качестве основного режима истечения струи выбран расход топлива 2 г/с.

Варьирование формы разряда

Проведено сравнение двух различных форм разряда: прямой и изогнутой в плоскости, параллельной нижней стенке (рис. 4). Последняя форма разряда выбрана исходя из предыдущих исследований: ранее экспериментально была реализована подобная форма разряда в условиях отсутствия потока при помощи двух дополнительных электродов с промежуточным потенциалом, что позволяло создавать разряд изогнутой формы. Известно, что изгибы разрядного канала приводят к возникновению высокоскоростных струйных течений, направленных от оси разряда к периферии [Shurupov et al., 2014].

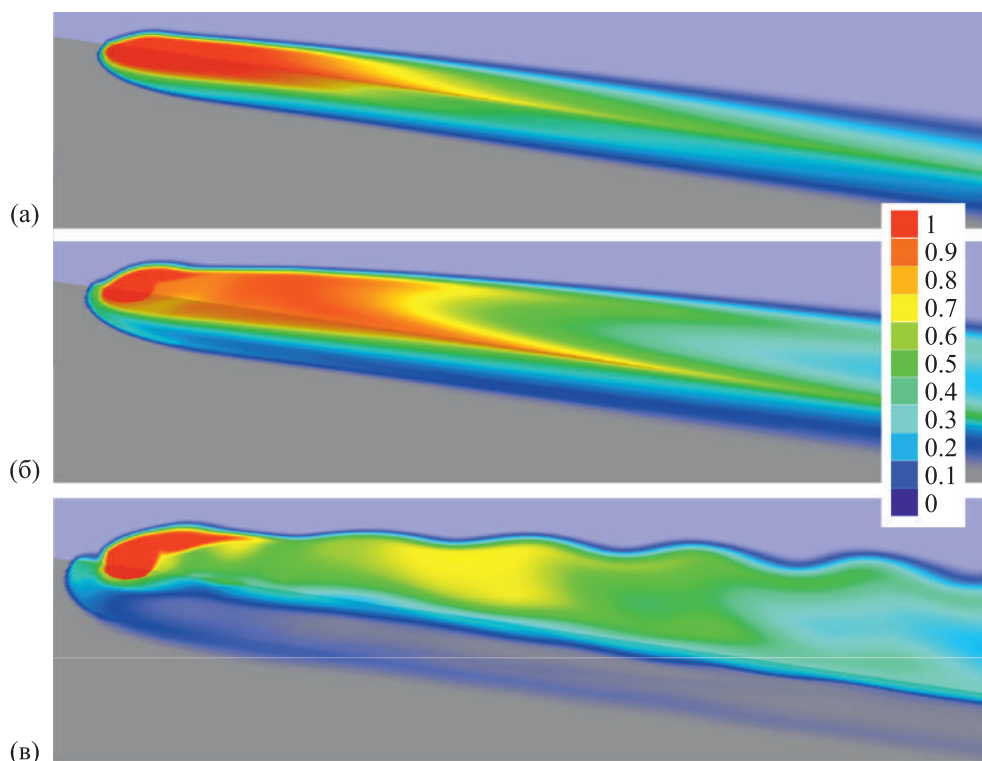


Рис. 3. Распределение массовой доли CO_2 при различных массовых расходах инъекции топлива: а) 1 г/с; б) 2 г/с; в) 3 г/с

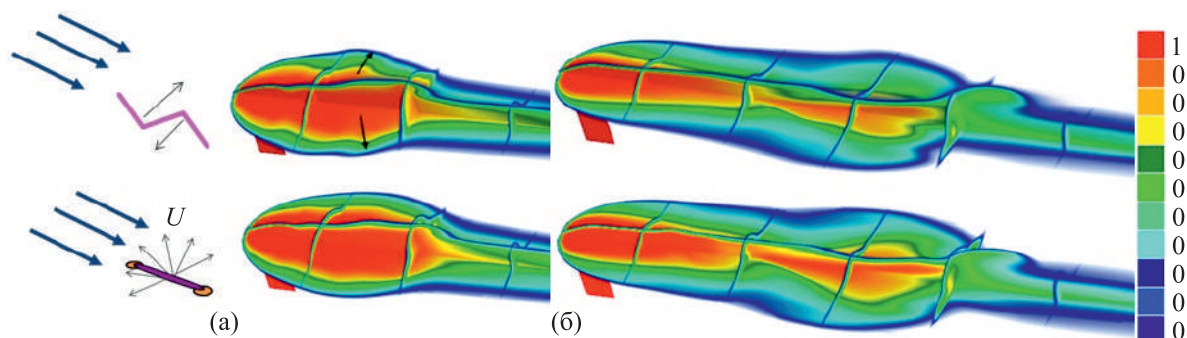


Рис. 4. Сравнение возмущений границы струи, вызванных влиянием прямого продольного (снизу) и изогнутого (сверху) разрядов на примере массовой доли топлива. Энерговклад — 150 мДж, расход топлива — 1 г/с: а) 30 мкс; б) 120 мкс

При выполнении моделирования для двух представленных случаев остальные параметры задачи были идентичными: длительность импульса и энерговклад на единицу длины разряда за один импульс, а также массовый расход струи. Однако принципиальных различий между двумя представленными случаями обнаружить не удалось, поэтому от более сложного способа было решено отказаться в пользу варианта, который проще реализовать в эксперименте. Отсутствие существенного эффекта от изгибов разряда, видимо, связано с характерным временем развития струйных течений: они начинают формироваться после 80 мкс и наиболее хорошо видны через 150–250 мкс после разряда. За это время тепловая каверна успевает преодолеть значительное расстояние в сверхзвуковом потоке, а в данной работе рассматривается эффект от разряда вблизи инжектора, на удалении не более 60–80 мм. Поэтому основное внимание при дальнейшем исследовании влияния искрового разряда на смешение уделено анализу первой стадии трансформации тепловой каверны искрового разряда, а именно ее быстрому расширению.

Варьирование местоположения разряда

Выполнено параметрическое исследование влияния местоположения разряда относительно инжектора, а также относительно потока: рассмотрены как продольный, так и поперечный потоку разряды. Моделирование выполнено при энергокладе 500 мДж на один импульс и расходе топлива 2 г/с. Подобный энергоклад выбран в качестве основного исходя из данных, представленных в работе [Dolgov, Firsov, 2018], так как от увеличения энергоклада сверх данной величины не ожидается значительного усиления рассматриваемого эффекта. Однако в целях сравнения также выполнено моделирование для продольной ориентации разряда при энергокладе 100 мДж.

Для сравнения выбраны три варианта расположения разряда относительно инжектора: непосредственно за инжектором и на расстоянии 15 мм и 40 мм ниже по потоку. Указанные варианты выбраны из следующих предположений: активация разряда в области непосредственно за инжектором может приводить к дополнительному отрыву струи от стенки, сильнее вовлекая ее в ядро основного потока. Второе местоположение — промежуточное, когда разряд расположен в однородной части струи. Третье расположение соответствует области течения, где струя претерпевает значительные изменения в форме, разрывается на две части, и большая часть топлива удалена от стенки.

Для всех обсуждаемых случаев обнаружено, что восстановление формы струи топлива происходит через ~150 мкс после пробоя разряда. Это означает, что типичная частота следования импульсов разряда для импульсно-периодического режима должна быть более 6000 Гц в потоке со скоростью ~500 м/с.

Сравнение структуры возмущенной границы струи для трех обсуждаемых случаев с поперечным расположением разряда относительно основного потока представлено на рис. 5. В первом случае центр разряда находится на расстоянии 0.3 мм от инжектора. Как видно из представленных рисунков, наибольшая граница раздела между основным потоком и потоком топлива наблюдается в первых двух случаях. Этот результат может быть объяснен следующим образом: при расположении разряда вдали от инжектора вызванные им возмущения взаимодействуют уже с «обедненной» струей, частично перемешанной с потоком, что снижает эффективность от применения разряда. В качестве критерия эффективности в данном исследовании используется увеличение границы раздела между топливом и окислителем, большая граница способствует более интенсивному перемешиванию за счет диффузии и мелкомасштабных вихрей на границе раздела. Выбрать оптимальный вариант расположения между двумя другими случаями, основываясь на качественном анализе изображений, затруднительно.

Аналогичное сравнение проведено для случаев с продольным положением разряда относительно основного потока. В случае расположения разряда около инжектора один край разряда совпадает с краем инжектора. Распределения массовой доли CO_2 при влиянии на струю продольного потока разряда представлены на рис. 6. Анализируя полученные результаты, можно видеть, что в этом случае также дальнейшее расположение разряда относительно инжектора показывает наименьшую эффективность. Однако сделать однозначные выводы по сравнению двух других местоположений, а также сравнить между собой продольный и поперечный разряды на основе качественного анализа изображений оказалось затруднительным.

Количественная оценка влияния разряда на смешение

Так как основное влияние разряда на смешение, рассматриваемое в данном исследовании, заключается в увеличении границы раздела «топливо–окислитель», необходима количественная характеристика, по которой можно судить об интенсификации смешения. В качестве идеального, однако достаточно трудоемкого варианта можно было бы рассматривать площадь трехмерной поверхности, являющейся изоповерхностью с фиксированной массовой долей топлива. Качественный анализ трехмерных распределений показал, что можно ограничиться оценкой влияния разряда на изменение периметра границы раздела в фиксированном поперечном сечении, находящемся ниже по течению относительно разряда. Такой выбор сделан, в частности, исходя из реалий сверхзвукового горения, когда элементарный объем топливной смеси набегаёт на фронт пламени, который расположен поперек потока [Firsov et al., 2017].

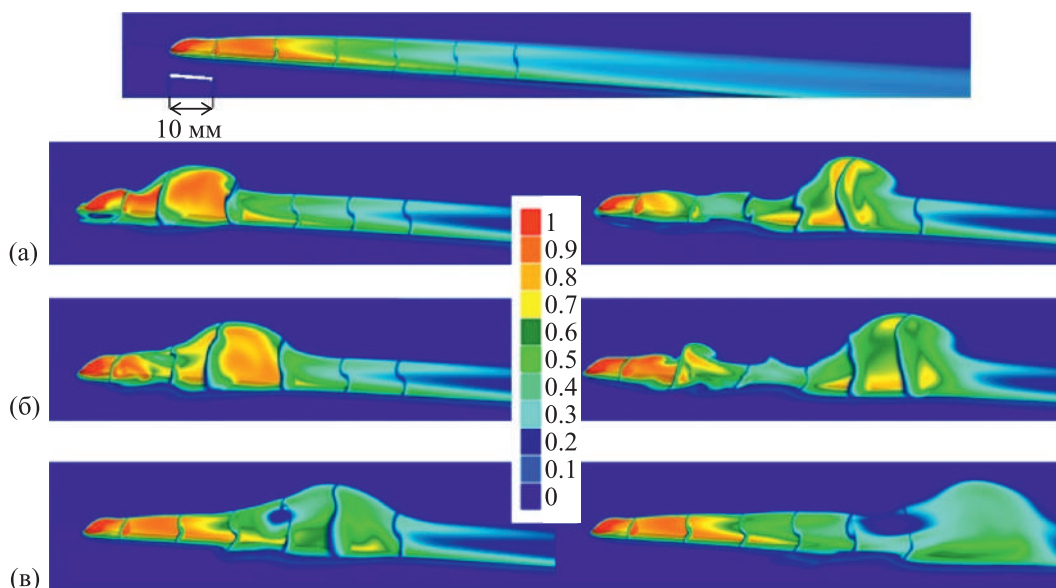


Рис. 5. Распределение массовой доли топлива при поперечном расположении разряда относительно основного потока. Разряд: а) непосредственно за инжектором; б) на расстоянии 15 мм; в) на расстоянии 40 мм. Левые картинки — 50 мкс, правые — 130 мкс

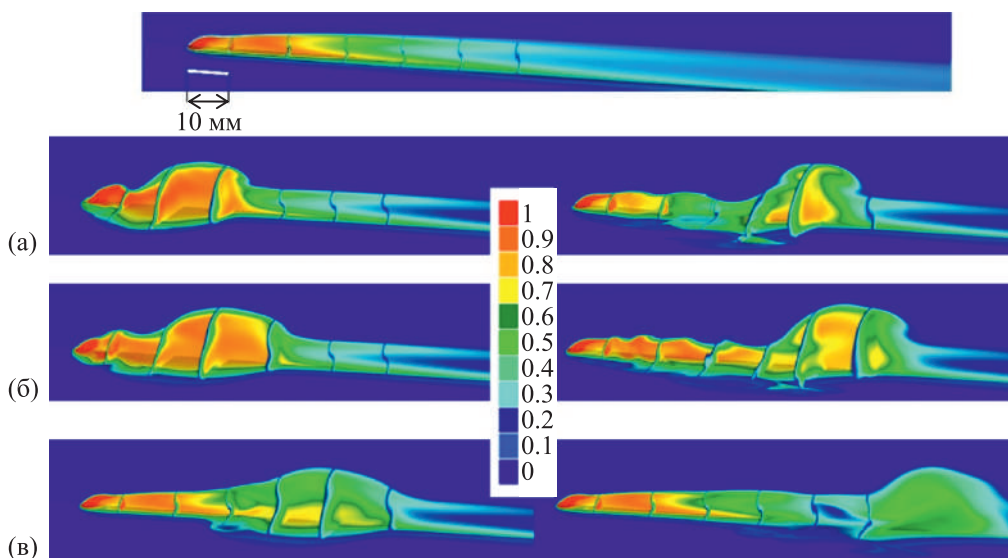


Рис. 6. Распределение массовой доли топлива при продольном расположении разряда относительно основного потока. Разряд: а) непосредственно за инжектором; б) на расстоянии 15 мм; в) на расстоянии 40 мм. Левые картинки — 50 мкс, правые — 130 мкс

Программный комплекс FlowVision, использованный для численного моделирования течения, позволяет выгружать изображения с распределением массовой доли топлива в выбранном поперечном сечении для последовательности моментов времени, прошедших после активации разряда. Ввиду того что используемый CFD-комплекс не дает количественных данных о периметре области с фиксированной массовой долей топлива, подготовлена программа в среде LabView.

При качественном визуальном анализе результатов использованы изображения с градиентной заливкой с диапазоном значений массовой доли от 0 до 1. Для работы программы сначала необходимо подготовить изображения таким образом, чтобы граница была четко различима. Поэтому из программного комплекса FlowVision дополнительно выгружены результаты

в монохромном исполнении, при этом черным цветом обозначена та часть инжектируемой в сверхзвуковой поток струи топлива, которая имеет значение массовой доли больше некоторого фиксированного значения. Первое изображение кадрируется вручную, формируется шаблон кадрирования, затем программа обрабатывает весь массив изображений: кадрирует по шаблону, определяет границу раздела двух сред (рис. 7) и записывает длину кривой на каждом шаге в одномерный массив. После нормировки и приведения в соответствие каждому значению длины кривой момента времени строится график зависимости периметра струи от времени. Данная программа достаточно хорошо обрабатывает изображения струи топлива любой, даже сложной формы, имеющей особенности, в частности когда струя разбивается на несколько несвязанных областей.

На рис. 8 приведены сравнения периметров границы раздела «топливо–воздух» для двух различных сечений (60 и 80 мм от центра инжектора) и трех различных массовых долей (м. д.) CO_2 (0.1, 0.3 и 0.5) для продольно (ПД) и поперечно (ПП) расположенного разряда. Видно, что для всех представленных случаев наблюдается одна и та же закономерность: продольный разряд при прочих равных условиях приводит к большему увеличению границы раздела, нежели поперечный разряд, это может быть вызвано тем, что зона влияния разряда охватывает большую часть области, в которой расположена струя. Наибольшее влияние разряда на границу раздела во всех случаях наблюдалось на временах 30–130 мкс. Для дальнейших сравнений выбрана массовая доля топлива, равная 0.3, так как при этом значении отчетливо видны отличия между случаями, а меньшая массовая доля (0.1) не актуальна для рассмотрения в вопросах смешения реальных топлив с окислителем. Для сравнения различных геометрических конфигураций положения разряда в тестовой секции выбрано сечение 80 мм от инжектора, так как будут рассмотрены случаи с различным удалением разряда от инжектора, в том числе на расстоянии

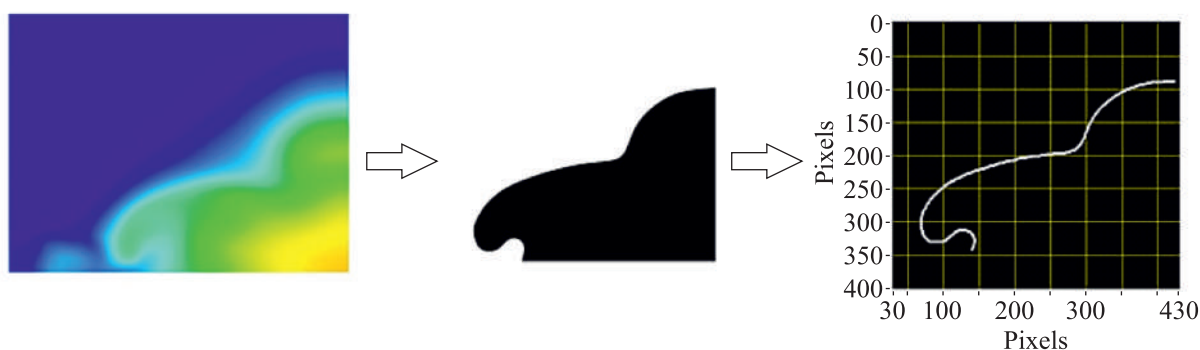


Рис. 7. Преобразование исходной картинки из FlowVision в границу с фиксированной массовой долей 0.3

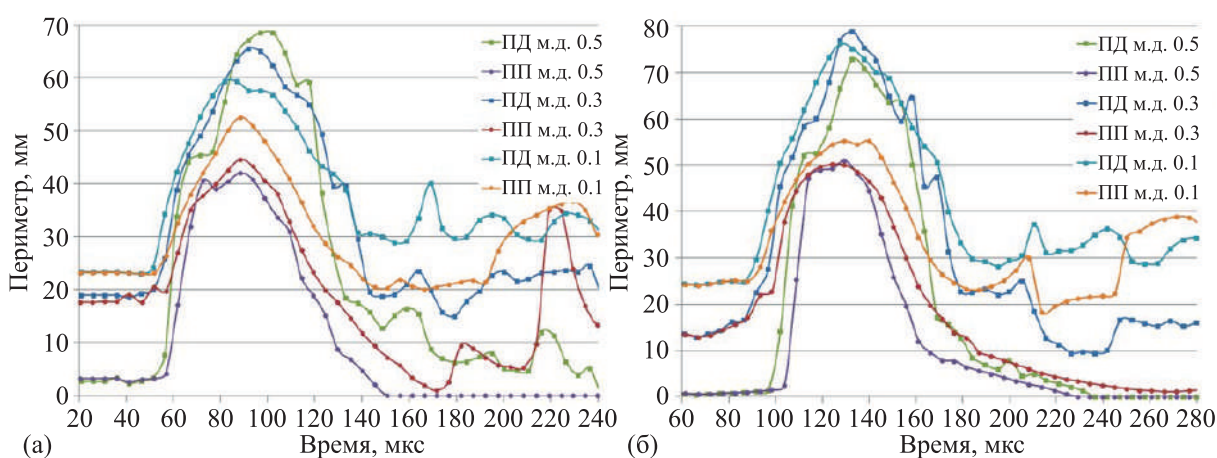


Рис. 8. Сравнение периметров раздела границы «топливо–воздух» в сечении: а) 60 мм; б) 80 мм. ПД — разряд, ориентированный продольно, ПП — поперечно

порядка 40 мм. В этом случае сечения на расстоянии 40–60 мм плохо подходят для анализа, так как разряд еще не успевает оказать существенного влияния на форму струи и в струе не успевают развиваться возмущения достаточной амплитуды.

На рис. 9 приведено сравнение периметров струи в случае продольно и поперечно ориентированных разрядов для трех случаев их расположения относительно инжектора: 1) непосредственно за инжектором, 2) на расстоянии 15 мм и 3) 40 мм. Дополнительно изображена зависимость периметра струи для разряда, расположенного продольно на расстоянии 15 мм от инжектора при энерговкладе 100 мДж (в 5 раз меньшем, чем в остальных случаях). Можно видеть, что зависимость изменения периметра от энерговклада сильно нелинейная, и пятикратное увеличение энерговклада дает менее чем двукратное увеличение периметра границы раздела между топливом и окислителем. По представленным данным хорошо видно, что оптимальным является продольное положение разряда на расстоянии 15 мм от инжектора. Предположительно это вызвано тем, что при расположении разряда у инжектора разряд не в полной мере влияет именно на границу раздела «топливо–окислитель», так как частично расположен в струе топлива, а частично — в окружающем потоке воздуха. При выходе из инжектора струя имеет сверхзвуковой режим истечения и отрывается от стенки (рис. 3, б), таким образом, разряд оказывается изначально в обедненной топливом области. А на удалении 40 мм от инжектора струя несколько удалена от стенки, поэтому повлиять в значительной степени на смешение разряд также не может.

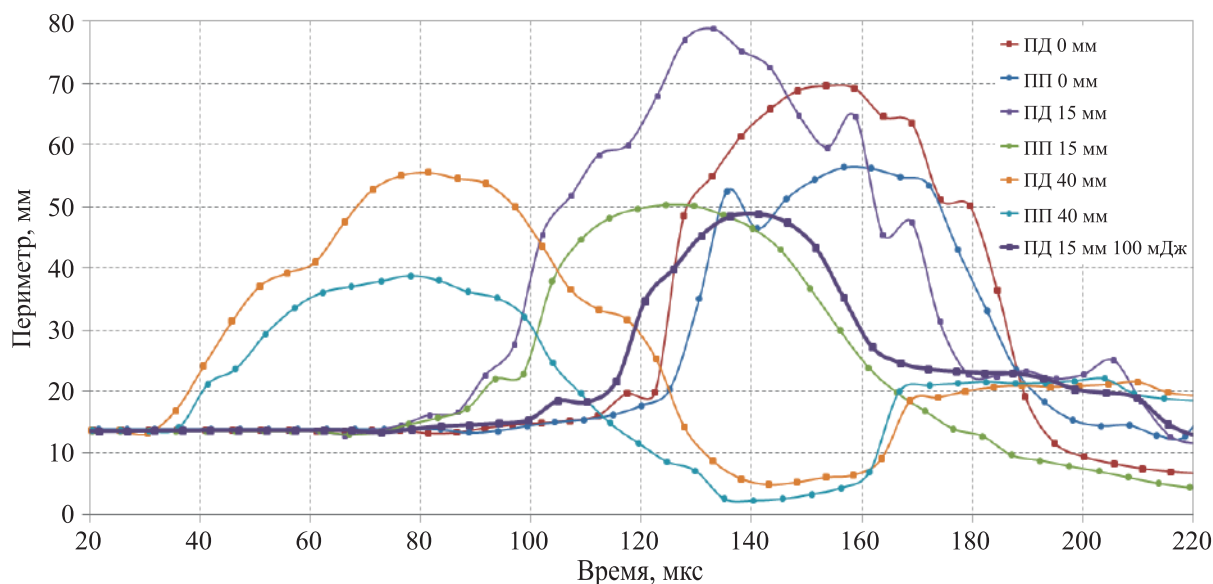


Рис. 9. Влияние разряда на периметр струи (для массовой доли топлива 0.3 в сечении 80 мм относительно инжектора) для различных ориентаций разряда и удаления от инжектора для энерговклада 500 мДж. ПД — разряд, ориентированный продольно, ПП — поперечно

4. Заключение

Исследования в области смешения топлива с высокоскоростным воздушным потоком вызывают значительный интерес у специалистов, занимающихся разработкой сверхзвуковых и гиперзвуковых авиационных и ракетных двигателей. Искровой разряд обладает значительным потенциалом для решения проблемы смешения топлива с окислителем в высокоскоростных камерах сгорания. В данной работе впервые выполнено численное моделирование влияния искрового разряда на перемешивание струи газообразного топлива с набегающим сверхзвуковым потоком воздуха. Показано, что импульсный электрический разряд можно эффективно моделировать при помощи объемного источника тепла в задачах разработки сверхзвуковых камер

сгорания. Обнаружено, что искровой разряд, расположенный вблизи стенки, улучшает смешивание инжектируемой со стенки струи газа со сверхзвуковым потоком воздуха за счет существенного увеличения границы раздела между топливом и окислителем. Показано, что периметр струи имеет большую поверхность в случае использования продольного разряда, чем при использовании поперечного плазменного канала. Положение разряда на 15 мм ниже инжектора является наиболее предпочтительным из-за расположения разряда в ядре струи. Типичная частота повторения импульсов разряда для импульсно-периодического режима должна составлять более 6000 Гц, чтобы обеспечить постоянное влияние на смешение. Отметим, что как рассмотренный подход к интенсификации смешения с помощью электрического разряда, так и используемые при исследовании методы, а именно применение программного CFD-комплекса FlowVision совместно со средством анализа данных LabView, могут быть успешно применены на предприятиях авиакосмической отрасли при разработке современных двигателей сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов.

Список литературы (References)

- Аксёнов А. А.* FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — Т. 9, № 1. — 2017. — С. 5–20.
Aksenov A. A. FlowVision: industrial'naja vychislitel'naja gidrodinamika [FlowVision: industrial computational fluid dynamics] // Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — Vol. 9, No. 1. — 2017. — P. 5–20 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Карасёв П. И.* Моделирование отрывного течения с использованием двухпараметрической модели турбулентности // Компьютерные исследования и моделирование. — Т. 8, № 1. — 2016. — С. 79–88.
Zhlukotov S. V., Aksenov A. A., Karasev P. I. Modelirovaniye otryvnogo techeniya s ispol'zovaniem dvuhparametricheskoj modeli turbulentsnosti [Simulation of separation flow using two-parametric turbulence model] // Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — Vol. 8, No. 1. — 2016. — P. 79–88 (in Russian).
- Berglund M., Fedina E., Fureby C., Tegnér J., Sabel'nikov V.* Finite rate chemistry large-eddy simulation of self-ignition in a supersonic combustion ramjet // AIAA Journal. — 2010. — Vol. 48, No. 3. — <https://doi.org/10.2514/1.43746>
- Dolgov E. V., Firsov A. A.* Numerical study of hydrodynamic perturbations caused by filiform spark discharge near wall // IOP Conf. Series. — 2018. — Vol. 1112. — <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1112/1/012026>
- Falempin F., Firsov A. A., Yarantsev D. A., Goldfeld M. A., Timofeev K., Leonov S. B.* Plasma control of shock wave configuration in off-design mode of $M = 2$ inlet // Experiments in Fluids. — 2015. — 56:54. — <https://doi.org/10.1007/s00348-015-1928-4>
- Firsov A. A., Savelkin K. V., Yarantsev D. A., Leonov S. B.* Plasma-enhanced mixing and flameholding in supersonic flow // Philosophical Transactions A. — 2015. — Vol. 373, Iss. 2048. — <https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0337>
- Firsov A. A., Yarantsev D. A., Leonov S. B., Ivanov V. V.* Numerical simulation of ethylene combustion in supersonic air flow // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, Iss. 1. — P. 75–86. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-75-86>
- Kopyl P. V., Surkont O. S., Shibkov V. M., Shibkova L. V.* Stabilization of liquid hydrocarbon fuel combustion by using a programmable microwave discharge in a subsonic airflow // Plasma Physics Reports. — 2012. — Vol. 38, Iss. 6. — P. 503–512. — <https://doi.org/10.1134/S1063780X12050054>
- Leonov S. B., Isaenkov Y. I., Firsov A. A., Shurupov M. A., Yarantsev D. A., Shneider M. N.* Plasma-Based Fast Mixing and Ignition in Supersonic Combustor // AIAA 2011-2327. — <https://doi.org/10.2514/6.2011-2327>

- Ma L., Lei Q., Wu Y., Xu W., Ombrello T. M., Carter C. D.* From ignition to stable combustion in a cavity flameholder studied via 3D tomographic chemiluminescence at 20 kHz // *Combustion and Flame*. — 2015. — Vol. 165. — P. 1–10. — <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2015.08.026>
- Shurupov M. A., Leonov S. B., Firsov A. A., Yarantsev D. A., Isaenkov Yu. I.* Gasdynamic instabilities during decay of the submicrosecond spark discharge channel // *High Temperature*. — 2014. — Vol. 52, Iss. 2. — P. 169–178. — <https://doi.org/10.1134/S0018151X10060179>
- Vincent-Randonnier A., Packan D., Sabelnikov V., Le Jouan F., Rouxel B., Roux P., Leonov S.* Experimental investigation of plasma-assisted supersonic combustion // *EUCASS 2017*. — <https://doi.org/10.13009/EUCASS2017-124>
- Zhel'tovodov A. A., Pimonov E. A.* Intensification of mixing of parallel compressible flows using a localized pulse-periodic energy supply // *Technical Physics Letters*. — 2013. — Vol. 39, Iss. 11. — P. 1016–1018. — <https://doi.org/10.1134/S1063785013110266>

УДК: 523.44; 623.454.838

Моделирование физических процессов воздействия мощного ядерного взрыва на астероид

В. А. Андрущенко^{1,a}, Д. С. Моисеева^{2,b},
А. А. Моторин^{1,c}, Е. Л. Ступицкий^{1,d}

¹ Институт автоматизации проектирования Российской академии наук,
Россия, 123056, г. Москва, 2-ая Брестская ул., д. 19/18

² Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^a andrusvictor@ya.ru, ^b moiseevads@rambler.ru, ^c vansp91@gmail.com, ^d stup@bk.ru

Получено 02.08.2019, после доработки — 18.08.2019.

Принято к публикации 02.09.2019.

В рамках проблемы предотвращения астероидно-кометной угрозы выполнен физический и теоретический анализ процессов воздействия различных факторов надповерхностного ядерного взрыва достаточной высокой энергии на астероид во внеатмосферных условиях космического пространства. Показано, что в соответствии с энергией и проникающей способностью плазмы продуктов взрыва, рентгеновского и гамма-нейтронного излучения на поверхности астероида, обращенной к взрыву, образуется слоистая структура с разной плотностью энергии, зависящей от угловых координат. Для каждого слоя выяснен временной характер трансформации энергии внутри него и определены роли различных фото- и столкновительных процессов. Воздействие высокоскоростного потока плазмы носит эрозионный характер, при этом импульс плазмы передается астероиду. Показано, что в тонком слое поглощения рентгеновского излучения вещество астероида разогревается до высоких температур, и в результате его расширения формируется импульс отдачи, который не является определяющим из-за малой массы расширяющейся высокотемпературной плазмы. Расчеты показали, что основной импульс, полученный астероидом, связан с уносом разогретого слоя вещества, образованного нейтронным потоком ($7.5 \cdot 10^{14}$ г · см/с). Показано, что астероид с радиусом ~100 м приобретает при этом скорость ≈ 100 см/с. Расчеты выполнены с учетом затрат энергии взрыва на разрушение аморфной структуры вещества астероида (~ 1 эВ/атом = $3.8 \cdot 10^{10}$ эрг/г) и на ионизацию в области высокотемпературного слоя. На основе аналогичного анализа получено приближенное выражение для оценки среднего размера осколков при возможном разрушении астероида ударными волнами, образующимися внутри него под действием импульсов давления. Выполнен физический эксперимент в лабораторных условиях, имитирующий фрагментацию каменного астероида и подтвердивший справедливость полученной зависимости от выбранных значений определенных параметров. В результате численных исследований воздействия взрыва, произведенных на различном расстоянии от поверхности астероида, показано, что учет реальной геометрии отколочного слоя дает оптимальную высоту для формирования максимального импульса астероида примерно в 1.5 раза большую, чем аналогичные оценки по упрощенной модели. Предложена двухэтапная концепция воздействия ядерных взрывов на астероид с использованием радиолокационных средств наведения. Проанализировано возможное влияние возникающих ионизационных помех на радиолокационное слежение за разлетом крупных осколков астероида в условиях пространственно-временной эволюции всех элементов исследуемой динамической системы.

Ключевые слова: астероидно-кометная опасность, ядерный взрыв, фрагментация, надповерхностный взрыв

© 2019 Виктор Анатольевич Андрущенко, Дарья Сергеевна Моисеева,
Андрей Анатольевич Моторин, Евгений Леонидович Ступицкий

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 523.44; 623.454.838

Modeling the physical processes of a powerful nuclear explosion on an asteroid

V. A. Andrushchenko^{1,a}, D. S. Moiseeva^{2,b},
A. A. Motorin^{1,c}, E. L. Stupitsky^{1,d}

¹ Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS),
19/18 2-nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

² Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

E-mail: ^a andrusvictor@ya.ru, ^b moiseevads@rambler.ru, ^c vansp91@gmail.com, ^d stup@bk.ru

Received 02.08.2019, after completion — 18.08.2019.

Accepted for publication 02.09.2019.

As part of the paper, a physical and theoretical analysis of the impact processes of various factors of a high-altitude and high-energy nuclear explosion on the asteroid in extra-atmospheric conditions of open space is done. It is shown that, in accordance with the energy and permeability of the plasma of explosion products, X-ray and gamma-neutron radiation, a layered structure with a different energy density depending on angular coordinates is formed on the surface of the asteroid. The temporal patterns of the energy transformation for each layer is clarified and the roles of various photo- and collision processes are determined. The effect of a high-speed plasma flow is erosive in nature, and the plasma pulse is transmitted to the asteroid. The paper presents that in a thin layer of x-ray absorption, the asteroid substance is heated to high temperatures and as a result of its expansion, a recoil impulse is formed, which is not decisive due to the small mass of the expanding high-temperature plasma. Calculations shows that the main impulse received by an asteroid is associated with the entrainment of a heated layer of a substance formed by a neutron flux ($7.5 \cdot 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$). It is shown that an asteroid with a radius of $\sim 100 \text{ m}$ acquires a velocity of $\approx 100 \text{ cm/s}$. The calculations were performed taking into account the explosion energy spent on the destruction of the amorphous structure of the asteroid material ($\sim 1 \text{ eV/atom} = 3.8 \cdot 10^{10} \text{ erg/g}$) and ionization in the region of the high-temperature layer. Based on a similar analysis, an approximation is obtained for estimating the average size of fragments in the event of the possible destruction of the asteroid by shock waves generated inside it under the influence of pressure impulses. A physical experiment was conducted in laboratory conditions, simulating the fragmentation of a stone asteroid and confirming the validity of the obtained dependence on the selected values of certain parameters. As a result of numerical studies of the effects of the explosion, carried out at different distances from the surface of the asteroid, it is shown that taking into account the real geometry of the spallation layer gives the optimal height for the formation of the maximum asteroid momentum by a factor of 1.5 greater than similar estimates according to the simplified model. A two-stage concept of the impact of nuclear explosions on an asteroid using radar guidance tools is proposed. The paper analyzes the possible impact of the emerging ionization interference on the radar tracking of the movement of large fragments of the asteroid in the space-time evolution of all elements of the studied dynamic system.

Keywords: asteroid-comet hazard, nuclear explosion, fragmentation, asteroids

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 861–877 (Russian).

1. Введение. Анализ состояния вопроса

В последние десятилетия значительное внимание научной общественности ведущих стран привлекает проблема предотвращения возможности столкновения с Землей крупных космических тел — астероидов и комет. Астрономические наблюдения, геологические данные, информация об эволюции биосферы и результаты космических исследований планет и их спутников убедительно показали, что катастрофические столкновения этих тел с планетами были не только в далеком прошлом, но и вполне вероятны в современную эпоху.

Земная атмосфера в целом полностью защищает нас от ударов тел размером до нескольких метров. Действительную опасность для Земли представляют столкновения с достаточно крупными телами — астероидами и кометами размером в несколько десятков метров. Именно такие столкновения и составляют смысл понятия астероидно-кометная опасность (АКО).

Книга [Астероидно-кометная..., 1996] является, по-видимому, одной из первых в отечественной научной литературе попыткой изложить в виде обзора работ, выполненных к тому времени, по проблеме АКО. Многие из работ по этой тематике были представлены на проведенной в России международной конференции «Проблемы защиты Земли от опасных космических объектов (SPE-94)».

В проблеме АКО можно выделить следующие основные направления исследований [Андрущенко и др., 2007].

1. Получение на основе совершенствования наблюдательной базы достаточно полных представлений о свойствах малых тел Солнечной системы, их эволюции и способах обнаружения и мониторинга. В работе [Астероидно-кометная..., 2010] даны классификация, основные кинематические характеристики метеоров, астероидов и комет, а также краткая качественная картина последствий столкновения с Землей и оценка модельных схем противодействия с помощью ядерного взрыва (ЯВ). В работе [Borovička et al., 2013] проанализированы параметры челябинского астероида.

2. Физические и численные исследования движения метеоров различного размера и состава в атмосфере Земли и их воздействия на ее материковую и океаническую поверхность. Всесторонний анализ этого круга вопросов проведен в монографии [Катастрофические воздействия..., 2005] и в работах [Cepelcha, Revelle, 2005; McInnes, 2004].

3. Анализ возможностей современных ракетно-ядерных средств наведения и воздействия для создания системы защиты Земли от опасных космических объектов (ОКО) дан в работах [Коблов и др., 1997; Родионов и др., 1997; Дегтярь, Волков, 2013]. Следует отметить, что взгляд на этот вопрос существенно изменился за последние двадцать лет исследований проблемы. В работе [Астероидно-кометная..., 1996] сделан вывод о том, что состояние наблюдательной базы не дает возможности осуществить защиту от астероидно-кометной опасности. Однако проанализированные в [Дегтярь, Волков, 2013] результаты выполненных за период с 1996 по 2013 гг. работ свидетельствуют о том, что создание системы защиты Земли на основе современных ракетно-ядерных средств практически исключает риск столкновения с планетой астероидов диаметром до 1 км.

4. Значительное количество работ посвящено важным и интересным физическим и численным исследованиям различных способов воздействия ядерного взрыва на астероид и возникающих при этом эффектов. Ясно, что результат действия ядерного взрыва определяет в итоге всю конкретную схему защиты от ОКО.

Как следует уже из приведенного краткого анализа, рассматриваемая проблема носит комплексный характер. Однако несомненным фактом является то, что единственным реальным средством защиты Земли от астероидно-кометной опасности в настоящее время может служить только ядерный взрыв, который сам по себе и по его воздействию на объект является достаточно сложным явлением [Физика ядерного взрыва, 2009] и требует всестороннего исследования. Но так как исходных данных по самим астероидам еще далеко недостаточно для строго количественного рассмотрения, то значительный интерес представляет качественный физико-

математический подход анализа процессов воздействия ядерного взрыва на астероид, необходимый при формулировке концептуального облика системы защиты Земли от крупных астероидов на большом расстоянии от нее. Данная работа посвящена именно такому исследованию обсуждаемой проблемы.

2. Физика воздействия ядерного взрыва

Очевидно, что возможны два физических механизма активного противодействия космической угрозе с помощью ядерного взрыва:

- уничтожение угрожающего объекта в результате его дробления на фрагменты размером не более нескольких метров, так как в этом случае возможно с большой степенью вероятности их дальнейшее полное разрушение в атмосфере планеты;
- увод тела с опасной орбиты в результате передачи ему импульса от плазменного потока взрыва, проникающих излучений, а также и в результате реактивного действия массы, испаряющейся с поверхности тела.

Характер и результаты воздействия ЯВ на астероид зависят прежде всего от положения центра взрыва по отношению к поверхности астероида. В зависимости от этого взрывы подразделяют на:

- надповерхностный (взрыв происходит на определенном расстоянии от космического тела),
- контактный (на поверхности астероида),
- заглобленный (при проникновении ядерного заряда (ЯЗ) на несколько метров в тело астероида).

В зависимости от физических свойств, структуры вещества астероида и от расположения относительно его поверхности центра взрыва следует, по-видимому, учитывать при анализе как возможность фрагментации и образования осколков, так и образование испаряющегося вещества и частично ионизированной плазмы [Физика ядерного взрыва, 2009]. В настоящее время существуют лишь гипотетические данные о характеристиках вещества астероида [Ghiorso, Nevins et al., 2009; Chopelas, 1990].

Как показывает анализ ряда работ, проведенный в [Дегтярь, Волков, 2013], для разрушения астероида размером более 500 м при одноразовом воздействии требуется взрыв мощностью не менее нескольких десятков Мт, что представляет значительные трудности в ракетно-ядерном обеспечении доставки и наведения ЯЗ на объект, а также из-за отсутствия контроля и страховочной гарантии решения проблемы.

В данной работе предлагается решить поставленную проблему в два этапа с использованием ракеты с двумя несущими ядерными модулями. На первом модуле помещается ЯЗ мощностью $\sim 1\div 5$ Мт, который и производит первое воздействие на астероид, сопровождающееся разрушением его на крупные фрагменты (10–100 м), и вместе с тем создает плазменно-пылевое облако. На втором, многоцелевом модуле размещаются заряды малой мощности (1–10 кт) и радиолокационная система их наведения на крупные фрагменты-осколки астероида, образованные от первого мощного взрыва, применимая в условиях плазменно-пылевых помех, с целью разрушения образовавшихся осколков.

Как следует из вышеописанной концепции, для ее анализа необходимо хотя бы приближенное рассмотрение следующих физических аспектов проблемы:

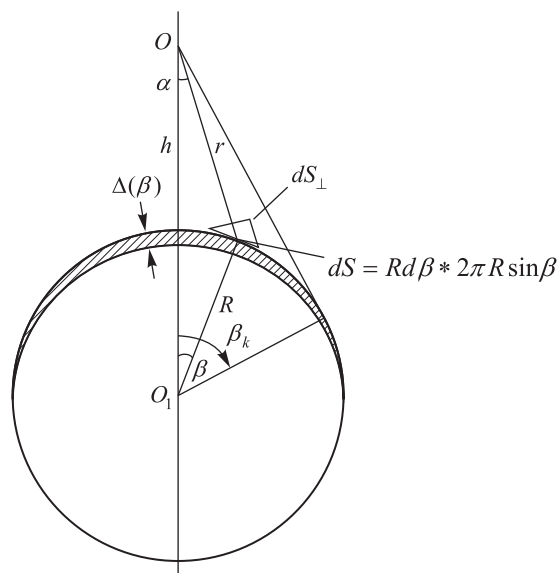
- оценка массы испаренного газоплазменного облака, образовавшегося после первого мощного ЯВ, для оценки его влияния на эффективность наведения ЯЗ малой мощности на осколочные фрагменты астероида;
- приближенная оценка количества и размеров образовавшихся фрагментов.

Расчет испаренной массы необходим также для определения полученного астероидом импульса, который определяет скорость смещения с начальных орбит астероида и его осколков в случае фрагментации.

Следует отметить, что для решения задачи о смещении или дроблении астероида каждый из трех видов мощных взрывов (надповерхностный, контактный или заглубленный) обладает как своими преимуществами, так и недостатками.

В данной работе рассматривается вопрос о воздействии мощного надповерхностного ядерного взрыва на астероид на значительном расстоянии от Земли. На астероид действуют рентгеновское излучение (РИ), γ -излучение, потоки нейтронов и плазмы продуктов взрыва. В результате воздействия этих факторов с возмущенного слоя поверхности астероида, обращенной к взрыву, уносится определенная масса разогретого вещества, и внутрь астероида распространяются ударные волны. В результате астероид получает импульс, смещающий его с траектории, и одновременно возможна его фрагментация.

Основными параметрами взрыва, определяющими импульс астероида, являются его энергия E , масса продуктов взрыва M_p и высота взрыва h над поверхностью астероида. На рис. 1 показаны пространственная схема воздействия поражающих факторов ЯВ на астероид и угловая характеристика. Легко получить известную приближенную оценку оптимальной высоты взрыва h , при которой получаемый астероидом импульс максимален.



$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta); \quad dS_{\perp} = dS \sin \gamma = dS \cos(\alpha + \beta); \quad \frac{\Delta}{\lambda} = \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta)$$

Рис. 1. Геометрия задачи по взрыву ядерного заряда над поверхностью астероида и ее обозначения: h — высота взрыва ядерного заряда, R — радиус астероида, r — расстояние от точки взрыва до элемента поверхности, dS — элемент площади поверхности астероида, $\Delta(\beta)$ — толщина слоя, в котором выделяется энергия, α, β — углы между осью симметрии OO_1 и элементом площади на поверхности астероида, α_k, β_k — соответственно их предельные углы

Пусть α_k и β_k — максимальные углы, а Ω_{α} и Ω_{β} — соответственно их телесные углы. Тогда в предположении независимости от угла **толщина** слоя Δ , **в которой** выделяется энергия, получим для массы слоя и выделенной в нем энергии выражения

$$M_c = \rho \Delta \Omega_{\beta} = 2\pi R^2 \rho \Delta (1 - \cos \beta_k),$$

$$E_c = \frac{E}{4\pi} \Omega_{\alpha} = \frac{1}{2} E (1 - \cos \alpha_k),$$

где ρ — плотность вещества астероида, M_c, E_c — масса и энергия, полученные слоем астероида толщиной Δ .

Тогда из общей связи интегральных величин массы M_c , импульса P_c и энергии E_c — $P_c^2 / 2M = E_c$ — получим

$$P_c = \sqrt{2\pi R^2 \rho \Delta E} \cdot \sqrt{(1 - \cos \beta_k)(1 - \cos \alpha_k)}.$$

Так как $\cos \alpha_k = \frac{r}{R+h} = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R+h}$, $\cos \beta_k = \frac{R}{R+h}$, то

$$P_c = \sqrt{2\pi R^2 \rho \Delta E} \cdot \sqrt{\frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{\sqrt{(1+x)^2 - 1}}{1+x} \right)}, \quad (1)$$

где $x = h/R$. Дифференцируя по x и приравнивая производную нулю, получим

$$x_m = (\sqrt{2} - 1) \text{ или } h_m = (\sqrt{2} - 1)R. \quad (2)$$

Эта зависимость получена в предположении $\Delta = \text{const}$ и имеет чисто геометрическую природу.

Так как физическое содержание процессов, определяющих воздействие указанных выше поражающих факторов ЯВ, различно, то следует более подробно рассмотреть процесс формирования импульса астероида, с учетом зависимости $\Delta(\beta)$. Это важно еще и потому, что возникающие при этом ударные волны имеют сферическую геометрию, а это может повлиять на процесс фрагментации.

Для конкретизации были приняты следующие параметры ЯВ: $E = 4.2 \cdot 10^{22}$ эрг, $M_p = 10^6$ г, молекулярный вес плазмы продуктов взрыва (ППВ) $A = 27(AI)$, соответственно, количество ионов ППВ $N_p = 2.2 \cdot 10^{28}$.

Для мгновенного излучения высокоэнергетических нейтронов и γ -квантов было принято среднее значение 4 мэВ, а их количество — $N_n = 1.5 \cdot 10^{26}$ 1/Мт, $N_\gamma = 6 \cdot 10^{25}$ 1/Мт [Физика ядерного взрыва, 2009]. Для принятого значения удельной энергии $E/M_p = 4.2 \cdot 10^{12}$ Дж/кг средняя начальная температура ППВ $T \approx 3.6$ кэВ [Физика ядерного взрыва, 2009]. Были приняты следующие доли энергии для указанных факторов:

- в нейтроны $\delta_n = 0.023$,
- в γ -кванты $\delta_\gamma = 0.09$,
- в рентгеновское излучение $\delta_\nu = 0.87$,
- в плазму продуктов взрыва $\delta_p = 0.1$.

Для принятых значений энергии скорость нейтронов $v_n = 2.7 \cdot 10^9$ см/с, скорость фронта ППВ $v_{\text{фр}} = 1.2 \cdot 10^8$ см/с и, соответственно, средняя скорость $\bar{v}_p = \sqrt{3/5} v_{\text{фр}} = 0.93 \cdot 10^8$ см/с.

За время высвета нейтронов, γ - и рентгеновского излучения можно принять 100 нс [Физика ядерного взрыва, 2009]. Действие плазмы взрыва затянато во времени в соответствии с расстоянием от центра взрыва.

Если считать рентгеновское излучение планковским, то максимум его спектра будет приходиться на энергию квантов $h\nu_{\text{max}} = 2.82T \cong 10$ кэВ (1.24 Å).

В соответствии с работой [Солнечная система, 2017] большинство астероидов каменные (~92%). Если иметь в виду, что плотность кирпича $\rho = 1.8$ г/см³, кремния $\rho = 2.3$ г/см³, гранита $\rho = 2.6$ г/см³, а достаточно обоснованные данные по физико-химическим свойствам и струк-

туре материала астероидов не известны, то для расчета были приняты следующие значения: $\rho = 2 \text{ г/см}^3$, $A = 25 \text{ г/моль}$. Радиус астероида полагался равным 100 м.

Исходя из перечисленных выше параметров ядерного взрыва и материала астероида, проанализируем характер их взаимодействия.

Быстрые нейтроны испытывают упругое и дифракционное рассеяние на ядрах атомов [Мухин, 1993].

Суммарное сечение рассеяния равно

$$\sigma_n = 2\pi R_y^2, \text{ где } R_y = 1.5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}.$$

Тогда пробег быстрого нейтрона будет

$$\lambda_n = \frac{1}{\sigma_n n} = \frac{A}{\sigma_n \rho N_A} = 11.8 \frac{A^{1/3}}{\rho} [\text{см}].$$

Для камня, при $A = 25 \text{ г/моль}$, $\rho = 2 \text{ г/см}^3$, получаем $\lambda_n = 17,3 \text{ см}$ (для железа, при $A = 56 \text{ г/моль}$, $\rho = 7.9 \text{ г/см}^3$, получаем $\lambda_n = 5,7 \text{ см}$).

Пробег γ -излучения $\lambda_\gamma \approx 16 \text{ см}$, пробег β -электронов $\lambda_\beta \approx 0.2 \text{ см}$. Так как максимум рентгеновского излучения приходится на кванты с энергией $\approx 10 \text{ кэВ}$, то поглощение таких квантов определяется главным образом ионизацией электронов с внутренних К-оболочек атомов. Используем водородоподобное приближение [Зельдович, Райзер, 2008]:

$$\sigma_\nu = \frac{7.9 \cdot 10^{-18}}{z^2} \left(\frac{h\nu_r}{h\nu} \right)^3.$$

Для $z = 13$, $h\nu_r = 2300 \text{ эВ}$ получаем $\sigma_\nu \approx 5 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2$ и, соответственно, пробег $\lambda_\nu = 4.2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$.

Как показано в работе [Смирнов, Ступицкий, 2010] на основе детальных расчетов в приближении молекулярной динамики, ионы ППВ проникают в вещество S_i на глубину $\cong 1 \text{ мкм}$, то есть это существенное поверхностное воздействие.

Оценим характерное время процессов энерговыделения и их временную последовательность применительно к условиям взрыва на высоте, близкой к оптимальной ($h \approx 40 \text{ м}$), и для эпицентральной области на поверхности астероида ($r \approx h$). Первыми, за время $\approx 10^{-7}$, с приходят импульсы рентгеновского и γ -излучения. Рентгеновское излучение за счет фотоэффекта с К-оболочки образует электроны с энергией $\sim 100\text{--}1000 \text{ эВ}$, γ -кванты в результате комптон-эффекта образуют МэВ-е электроны. В дальнейшем происходит ионизация вещества этими быстрыми электронами и одновременно передача энергии от электронов к ионам, т. е. осуществляется разогрев вещества. Так как рентгеновское излучение уносит основную долю энергии взрыва, а толщина слоя его поглощения мала, то в этом слое достигаются высокие температуры ($\approx 100 \text{ эВ}$).

При энергии электронов $\varepsilon_e \approx 100 \div 150 \text{ эВ}$ сечение электронной ионизации максимально и составляет $\sigma_i \approx 10^{-16} \text{ см}^2$. Тогда тепловая скорость электронов $\bar{v}_e \approx 7 \cdot 10^8 \text{ см/с}$ и характерное время ионизации $\tau_i \approx 1 / n\bar{v}_e \approx 4 \cdot 10^{-16} \text{ с}$, т. е. очень мало. Характерное время передачи энергии ионам равно

$$\tau_{ei} = \frac{3.15 \cdot 10^8 AT_{эл}^{3/2}}{n_z z^2 \Lambda}.$$

Полагая $n_z = n$, $\Lambda = 10$, получим $\tau_{ei} = \frac{1.6 \cdot 10^{-11}}{z^2} \text{ с}$ при $z = 1 \div 10$, $\tau_{ei} = 1.6 \cdot 10^{-11} \div 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ с}$.

Характерное время газодинамического расширения разогретого слоя Δ_v по порядку величины $\tau_g \approx \Delta_v / v \approx 10^{-8}$ с (при $\Delta_v = 0.04$ см и $v = 1.56 \cdot 10^6 \sqrt{T_{эл} / A} = 3.1 \cdot 10^6$ см/с).

Таким образом, в рентгеновском слое поглощения $\tau_g \gg \tau_i, \tau_{ei}$, и можно полагать, что трансформация энергии рентгеновского излучения в ионизацию и тепло произойдет задолго до того, как слой успеет заметно расшириться. Время распространения рентгеновского импульса $r / c \approx 1.3 \cdot 10^{-7}$ с, затем, по истечении времени порядка 10^{-8} с, начинается расширение разогретого РИ слоя вещества и формирование импульса отдачи астероиду.

Через время $\sim r / v_n \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ с приходит импульс нейтронов. Рассеяние энергии нейтронов происходит на атомах, т. е. сразу переходит в тепло. Общая энергия нейтронного потока значительно меньше энергии РИ, а глубина слоя их рассеяния энергии $\Delta_n \gg \Delta_v$, поэтому, как показывают аналогичные оценки и приведенные ниже результаты расчетов, температура в слое Δ_n значительно ниже, чем в слое Δ_v , и, тем более, можно предполагать, что за время выделения энергии нейтронами вещество в слое Δ_n не успеет заметно расшириться: $\tau_g = \Delta_n / v \gg \tau_n = \Delta_n / v_n$, так как $\bar{v} \sim 10^6$ см/с, $v_n = 2.7 \cdot 10^9$ см/с. Таким образом, второй импульс обусловлен импульсом, который дают сами нейтроны, и импульсом отдачи слоя Δ_n .

Поверхностная плотность потока импульса высокоэнергетичных нейтронов в направлении оси OO_1 равна

$$\sigma_{n\parallel} = \frac{dP_{n\parallel}}{dS} = \frac{P_n}{4\pi r^2} \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha. \quad (3)$$

Здесь $dS = 2\pi R^2 \sin \beta d\beta$, $r = [h + R(1 - \cos \beta)] / \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{1 + h/R - \cos \beta}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{h}{R}\right) \cos \beta}}$.

Полный импульс нейтронов $P_n = \sqrt{2m_n N_n E \delta_n}$ и его величина, направленная по OO_1 , таковы:

$$P_{n\parallel} = \frac{1}{2} P_n \int_0^{\beta_k} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha d\beta. \quad (4)$$

Аналогичными выражениями определяются плотность потока $\sigma_{p\parallel}$ и суммарный импульс $P_{p\parallel}$, создаваемый плазмой продуктов взрыва, для которой полный импульс $P_p = \sqrt{2m_p N_p E \delta_p}$ (рис. 2). Так как средняя длина пробега нейтронов и γ -излучения примерно одинакова $\lambda_n \approx \lambda_\gamma$, то толщина слоев, в которых происходит энерговыделение, зависит от угла β :

$$\Delta_{n\gamma} = \lambda_{n\gamma} \cos(\alpha + \beta), \quad \Delta_v = \lambda_v \cos(\alpha + \beta). \quad (5)$$

Плотность выделившейся энергии в этих слоях определяется выражениями

$$\rho_{En\gamma} = \frac{E(\delta_n + \delta_\gamma)}{4\pi r^2 \rho \lambda_{n\gamma}}, \quad \rho_{Ev} = \frac{E \delta_v}{4\pi r^2 \rho \lambda_v}. \quad (6)$$

На рис. 3 показаны плотности энергии в зависимости от угла в гамма-нейтронном и рентгеновском слоях поглощения.

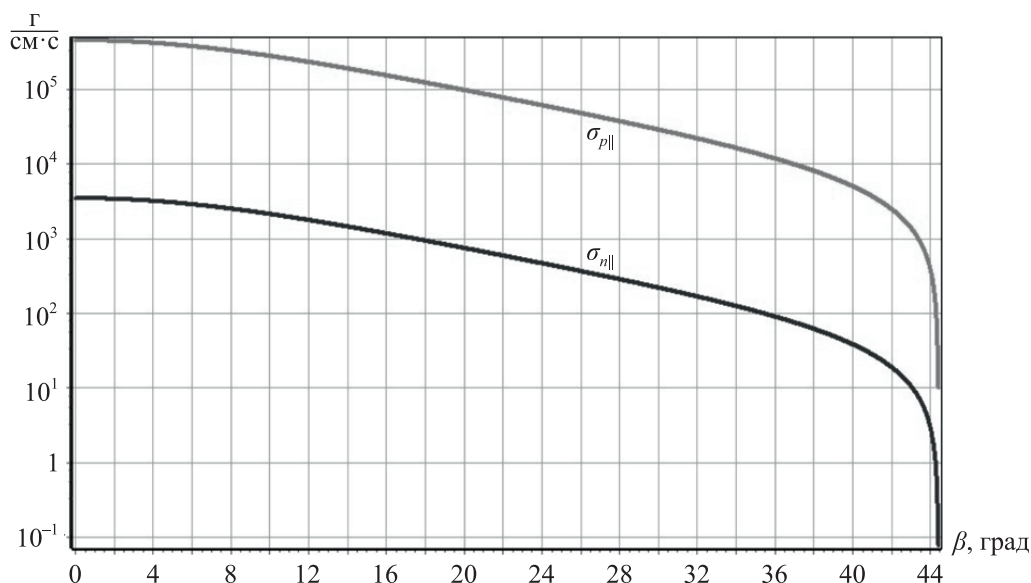


Рис. 2. Проекция плотности потока импульса плазмы $\sigma_{p||}$ и нейтронов $\sigma_{n||}$, созданных продуктами ядерного взрыва, на поверхность астероида в зависимости от угла β

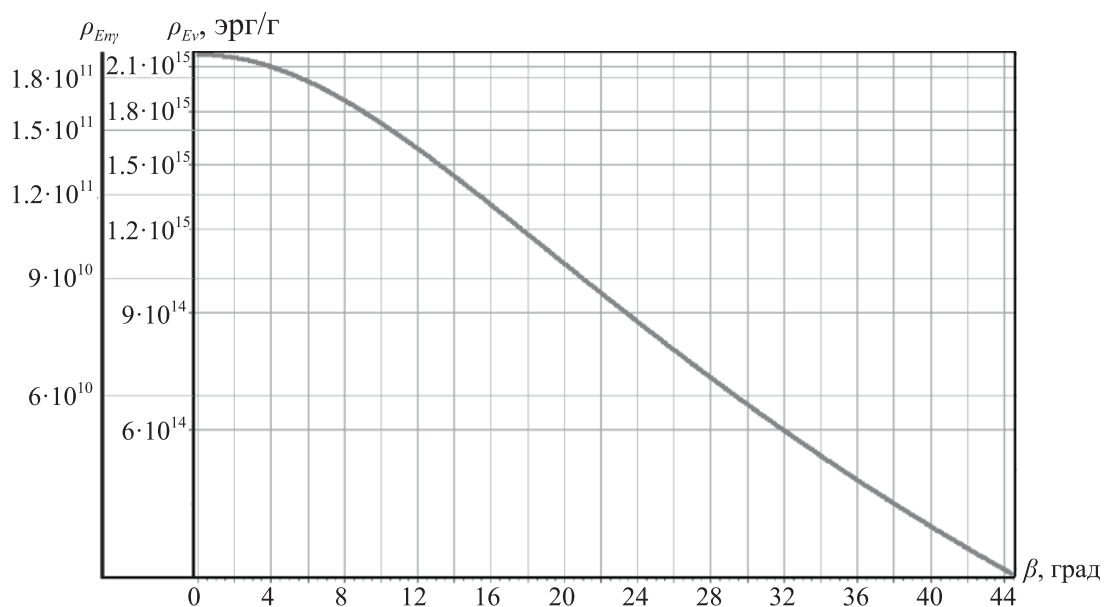


Рис. 3. Плотность выделившейся энергии в слое гамма-нейтронного поглощения $\rho_{E\gamma}$ и рентгеновского излучения $\rho_{E\nu}$ в зависимости от угла β

В рентгеновском слое она значительно выше, чем в гамма-нейтронном. Полная масса и энергия в этих слоях определялись из выражений

$$\begin{aligned}
 M_{0n\gamma} &= 2\pi R^2 \rho \lambda_n \int_0^{\beta_k} \sin \beta \cos(\alpha + \beta) d\beta, \\
 E_{n\gamma} &= \frac{1}{2} (\delta_n + \delta_\gamma) \int_0^{\beta_k} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Аналогичные выражения имеют место для $M_{0\nu}$, E_ν , E_p .

Следует отметить, что плазма продуктов взрыва приходит через время, равное $4 \cdot 10^{-5}$ с, когда нейтронный слой отлетел уже на расстояние порядка метра и на еще большее расстояние отлетел рентгеновский слой. Плазменный поток растянут во времени $\sim \frac{1}{t^3}$, и, передавая импульс астероиду, его воздействие на поверхность, по-видимому, носит эрозионный характер.

Через плотность энергии определяются повышение температуры в обоих слоях и, соответственно, их скорости теплового расширения и импульса отдачи:

$$\Delta T_v = (\rho_{Ev} - Q - Q_i) \frac{1}{C}, \quad (8)$$

где Q — удельная энергия разрушения структуры материала астероида. Теплота плавления алюминия — $3.8 \cdot 10^9$ эрг/г, железа — $2.7 \cdot 10^9$ эрг/г. В аморфных телах, которыми, по-видимому, в основном и являются астероиды, нет четкого значения энергии связи частиц в положении равновесия, но по приближенным представлениям ее среднее значение имеет порядок 1 эВ [Смирнов, Ступицкий, 2010]. Тогда удельная энергия разрушения для вещества с $A = 25$ г/моль составляет примерно $3 \cdot 10^{10}$ эрг/г. Теплота испарения близка к значению $9 \cdot 10^{10}$ эрг/г.

Для Q_i — удельной энергии ионизация вещества астероида — было получено аппроксимационное выражение в зависимости от степени ионизации $\alpha = n_e/n$ вещества на основе расчетов в работе [Замышляев и др., 1984]: для его удельной теплоемкости — $C = 5 \cdot 10^6 (1 + \alpha)$ эрг/г·град.

Средняя скорость определяется выражением

$$v_v = 3.2 \cdot 10^3 \sqrt{T_0 + \Delta T_v} \text{ см/с}. \quad (9)$$

Аналогичные выражения используются для расчета $\Delta T_{n\gamma}$, $v_{n\gamma}$. На рис. 4 показано угловое распределение температур и скоростей.

Эти значения используются для расчета проекции импульса отдачи от нейтронов и рентгена по направлению OO_1 :

$$P_{0v\parallel} = 2\pi R^2 \rho \lambda_v \int_0^{\beta_k} v_v(\beta) \sin \beta \cos(\alpha + \beta) \cos \beta d\beta, \quad (10)$$

$$P_{0n\parallel} = 2\pi R^2 \rho \lambda_n \int_0^{\beta_k} v_{n\gamma}(\beta) \sin \beta \cos(\alpha + \beta) \cos \beta d\beta.$$

Таким образом, рассчитывается суммарный импульс, который получает от взрыва астероид:

$$P_{0\Sigma} = P_{n\parallel} + P_{p\parallel} + P_{0n\parallel} + P_{0v\parallel}. \quad (11)$$

Приобретаемая от этого импульса скорость астероида такова:

$$u = P_{0\Sigma} / M. \quad (12)$$

В таблице 1 приведены основные интегральные величины, полученные в расчетах.

Таблица 1. Интегральные по углу величины массы, импульса и энергии

$P_{n\parallel}$ [г·см/с]	$P_{p\parallel}$ [г·см/с]	M_{0n} [г]	M_{0v} [г]	$P_{0n\parallel}$ [г·см/с]	$P_{0v\parallel}$ [г·см/с]
$8.873 \cdot 10^{10}$	$1.156 \cdot 10^{13}$	$2.053 \cdot 10^9$	$4.928 \cdot 10^6$	$7.462 \cdot 10^{14}$	$5.036 \cdot 10^{13}$
$E_{n\gamma}$ [эрг]	E_v [эрг]	E_p [эрг]	$P_{0\Sigma}$ [г·см/с]	u_0 [см/с]	E_Σ [эрг]
$2.030 \cdot 10^{20}$	$5.484 \cdot 10^{21}$	$6.164 \cdot 10^{20}$	$8.082 \cdot 10^{14}$	96	$6.303 \cdot 10^{21}$

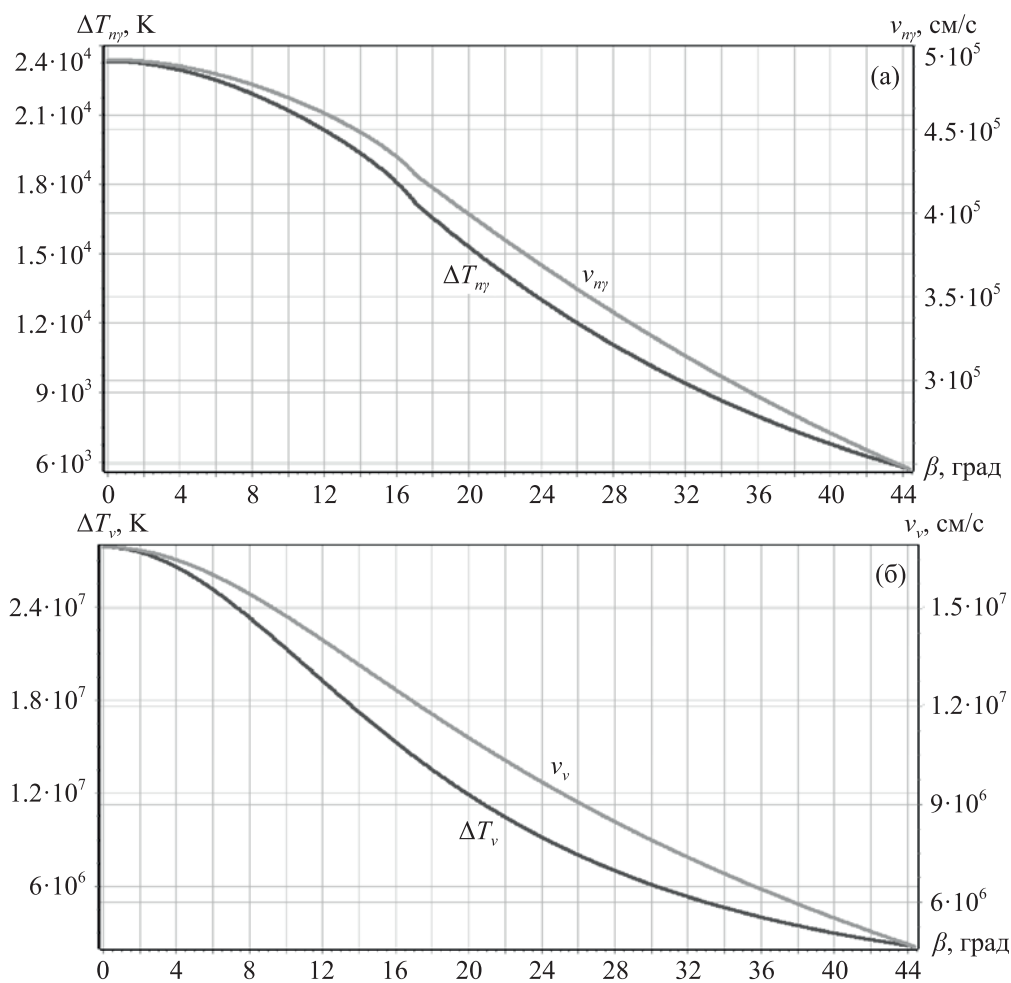


Рис. 4. Распределение температур T и скоростей v в слоях поглощения нейтронного (а) и рентгеновского (б) излучения в зависимости от угла β

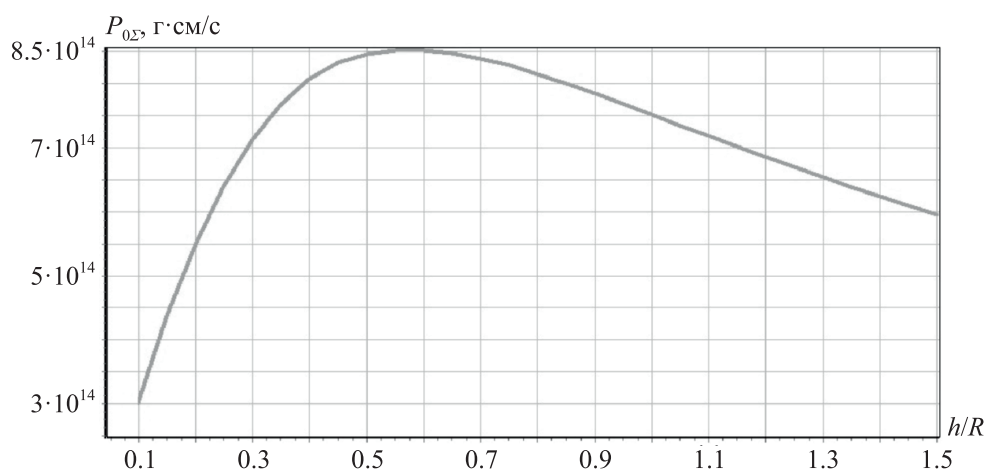


Рис. 5. Суммарный импульс, определяемый по формуле (11), который получает астероид, в зависимости от высоты взрыва ядерного заряда на расстоянии h

Проведены также расчеты для различных высот взрыва. Результаты расчета показывают, что корректный учет геометрии откольных слоев астероида приведет к существенному смещению оптимальной высоты взрыва (рис. 5).

3. Оценка процесса фрагментации астероида

На настоящее время отсутствуют насколько-нибудь обоснованные представления о структуре материала каменных астероидов [Ghiorso, Nevins et al., 2009; Chopelas, 1990]. По-видимому, можно предположить, что в результате длительного воздействия солнечного излучения их каменные структуры содержат большое количество трещин различного размера. Поэтому волны сжатия и разрежения, формируемые внутри астероида нейтронными, рентгеновскими и плазменными потоками, могут приводить к его дроблению [Solem, 1993].

Несмотря на то что существуют силовой и энергетический подходы к развитию трещин в материале [Партон, 1990; Николаева, 2010], сам процесс его разрушения обычно описывается сугубо эмпирически. Известный критерий Гриффитса [Николаева, 2010] основан на балансе энергии, однако трудность состоит в количественном определении соотношения между энергией и динамической фрагментацией, приводящей к определенному массовому спектру осколков дробления при заданных конкретных условиях эксперимента.

В работе [Орленко и др., 2012] выполнены расчеты энергии ядерного заряда, необходимого для разрушения опасных астероидов диаметром более 100 м, при взрывах на различных глубинах от поверхности до центра астероида. Под разрушением авторы, по-видимому, понимают дробление астероида на фрагменты размером не больше нескольких метров, которые определенно сгорят в атмосфере планеты. Однако, как показано в ряде работ [Григал и др., 1997], заглупление ЯЗ более чем на несколько метров практически невозможно, оценок размеров фрагментов нет даже для малоуглубленных взрывов. В работе [Пилюгин и др., 2001] моделируется разрушение космических тел при высокоскоростном ударе в лабораторных условиях с использованием оргстекла в качестве мишени. Показано, что распределение фрагментов ударного кратера по массам подчиняется степенному закону, и это согласуется с данными других авторов для других материалов, что свидетельствует о возможности оценки фрагментации на основе достаточно общих энергетических соображений.

В работе [Grady, 1982] энергетический подход основан на равновесном балансе поверхностной энергии фрагмента и локальной кинетической энергии. Используется модель расширения жидкой капли, что может быть неприменимо для каменного материала. Следует отметить, что задача об оптимизации воздействия взрыва на астероид связана с задачей о последствиях высокоскоростного соударения Земли с облаками, образующимися при взрыве осколков, т. е. с задачей о фрагментации, решения которой применительно к астероиду в достаточно удовлетворительном виде пока не существует [Кондауров и др., 1996; Фортов, 2005].

По данной проблеме ряд работ был выполнен учеными РФЯЦ-ВНИИЭФ. В работе [Заграфов и др., 1996] для контактного взрыва, на основе подхода, изложенного в [Grady, 1982], оценена энергия, необходимая для получения фрагментов различного радиуса: в частности, для $R = 10$ м $E_0 = 0.02$ кт и для $R = 100$ м $E_0 = 3$ Мт. По оценкам работы [Заграфов и др., 2009], для контактного взрыва сделан вывод о незначительности доли, по мнению авторов, энергии, идущей на фрагментацию, поэтому достаточное отклонение траектории астероида как целого объекта невозможно без его разрушения.

Значительное количество образовавшихся осколков размером в несколько десятков метров, которые не смогут сгореть в атмосфере, ставит дополнительную задачу о способах их ликвидации.

На основе численного моделирования, проведенного в работах [Шаненко и др., 2016, 2017], исследуется процесс формирования волн сжатия и разрежения в астероиде при поглощении нейтронов и рентгеновского излучения ЯВ, которые могут привести к фрагментации по крайней мере поверхностных слоев астероида.

Для оценки среднего размера осколка при фрагментации будем предполагать, что разрушение происходит при достаточной предельной упругой деформации внутри астероида, **соответствующий** предельному напряжению σ_m . Полагая $\sigma_m = E\Delta l_m / R$, $U = \frac{1}{2}F_m\Delta l_m$, $\sigma_m = \frac{F_m}{S}$,

получаем $U = \frac{1}{2} \frac{\sigma_m^2 SR}{E}$, где E — модуль Юнга, $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности осколка (полагая ее сферической), через которую происходит упругой взаимодействие с другими фрагментами вплоть до их отделения. Тогда

$$E_g = UN, \quad (13)$$

где E_g — энергия, выделившаяся на астероиде, которая переходит в предельную энергию упругой деформации.

В результате получаем для среднего размера фрагмента соотношение

$$r = \frac{2\pi R^4 \sigma_m^2}{EE_g}. \quad (14)$$

Поскольку материал астероида не известен достаточно определенно, чтобы использовать адекватное значение σ_m и E , а также можно говорить лишь о приближенном значении E_g , то структура полученного соотношения (14) была проверена на простом эксперименте, в определенной степени соответствующего логике его получения. С определенной высоты h , составляющей несколько метров, на абсолютно твердую поверхность падало тело (кирпич) и раскалывалось на фрагменты различного размера. Так как в справочных изданиях имеется значительный разброс в значениях σ_m и E , в соответствии с имеющимися данными в настоящей работе использовались их средние значения: $\bar{\sigma}_m = 1.87 \cdot 10^7$ Па и $\bar{E} = 2.75 \cdot 10^{10}$ Па. Полагая, что вся потенциальная энергия mgh переходит в E_g , получим, что при принятых в эксперименте значениях $m = 3.3$ кг и $h = 3$ м из (14) следует, что $r = 2.65$ см, значение достаточно хорошо соответствует среднему значению r , полученному в эксперименте. Этот факт, по-видимому, свидетельствует о том, что соотношение (14), хотя и очень приближенно, в целом правильно описывает зависимость среднего значения размера осколков от параметров задачи. Распределение по количеству осколков данного размера также примерно соответствует степенной зависимости, что характерно для процесса фрагментации [Астероидно-кометная..., 1996; Пилюгин и др., 2001].

Изложенные выше результаты расчетов показывают, что при принятых исходных параметрах суммарная энергия, переданная поглощенному слою астероида, составляет $\approx 15\%$ от E_0 , т. е. $\approx 6.3 \cdot 10^{21}$ эрг. В результате передачи импульса скорость астероида в направлении OO_1 (рис. 1) будет $u \approx 100$ см/с и, соответственно, кинетическая энергия его движения $Mu^2/2 \approx 4.2 \cdot 10^{16}$ эрг. Исходя из общефизических соображений (теорема вириала), можно предположить, что примерно такая же энергия уйдет на упругую деформацию, которая и приведет к фрагментации. Определяющий вклад в передачу энергии астероиду дают ударные волны, формируемые импульсами рентгеновского и нейтронного излучения, а также продуктам ядерного взрыва.

Однако из геометрии задачи ясно, что эти достаточно мощные возмущения выделяют свою энергию по сходящемуся направлению, примерно в конусе с телесным углом $2\pi(1 - \cos \beta_k)$. В случае оптимальной высоты взрыва $h = (\sqrt{2} - 1)R$ получаем $\beta_k = 45^\circ$, и этот телесный угол равен $\pi(2 - \sqrt{2})/2$ и составляет от общего объема астероида часть $(2 - \sqrt{2})/8$.

Оценим эквивалентный сферический радиус этого секторного объема: $r_3 = R \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})/8} = 0.42R = 42$ м. Если оценить r из (14), полагая в качестве размера тела его эффективный радиус $r_3 = 42$ м, энергию, которая в нем выделяется, $4.2 \cdot 10^{16}$ эрг = $4.2 \cdot 10^9$ Дж и те же значения $\bar{\sigma}_m$

и \bar{E} , что для кирпича, то получим $r = 58$ м, то есть по порядку величины этот радиус соответствует r_3 .

Таким образом, анализ геометрических и физических представлений показывает, что полученное выражение (14), по-видимому, дает физически правильное представление о размере фрагмента астероида. Так как мощность взрыва 1 Мт относительно размера астероида $D = 200$ м невелика, то можно ожидать развала астероида на достаточно крупные осколки, число которых порядка $N \cong (R/r)^3 \approx 8$. И тогда для их ликвидации можно использовать второй эшелон ядерных взрывов сравнительно малой мощности (~ 1 кт).

Определенная трудность существует в процессе наведения ядерных зарядов на эти осколки астероида, поскольку радиофизическая обстановка после первого мощного взрыва осложняется образовавшимся ионизированным облаком (ИО). Степень ионизации ИО определяется расширяющимися продуктами ядерного взрыва, к которым добавляется отлетевшее вещество астероида. Основная масса облака связана с добавлением нейтралов $M_{0n} = 2 \cdot 10^9$ г, однако его степень ионизации невелика. Существенно ионизован расширяющийся тонкий слой, образованный рентгеновским излучением. Его масса $M_{0v} = 5 \cdot 10^6$ г сравнима с массой ППВ $M_p = 10^6$ г. Как показывают расчеты [Ступицкий, Холодов, 2019], в результате быстрого расширения происходит закалка зарядового состава. При удельной энергии $\sim 4.2 \cdot 10^{12}$ Дж/кт средняя степень ионизации расширяющейся плазмы $\alpha \sim 1$.

Однако плазменное облако взрыва расширяется со скоростью $\sim 10^8$ см/с, и, соответственно, электронная концентрация падает в среднем как

$$n_e = \frac{N}{\frac{4}{5}\pi(vt)^3}.$$

После того как электронная концентрация удовлетворит неравенству $n_e < n_e^*$ (где n_e^* — критическая электронная концентрация, которая пропорциональна квадрату частоты электромагнитной волны $\sim f^2$), электромагнитные волны могут с определенным поглощением проходить через ионизированную область. На рис. 6 показаны изменение n_e^* и время t (с), через которое становится возможным прохождение волны через ИО.

Но за это время все фрагменты астероида успеют сместиться на расстояние S от места воздействия на него первого мощного взрыва. Для $f = 1$ ГГц это смещение составляет примерно 200 м при первоначальной скорости его движения ~ 30 км/с. Таким образом, возникает кинематическая задача о возможности наведения маломощных ядерных зарядов на крупные осколки астероида.

В данной работе обсуждаются лишь некоторые физические вопросы проблемы устранения астероидной опасности, и в цель работы не входило обсуждение кинематических вопросов пространственно-временной ориентации рассматриваемых объектов в процессе их динамики.

Заключение

Выполненное в настоящей работе достаточно подробное исследование трансформации энергии надповерхностного ядерного взрыва при его воздействии на астероид показало, что основной вклад в импульс дает разогретая разлетающаяся масса, образуемая потоком нейтронов $7.4 \cdot 10^{14}$ дин \cdot с. Приобретаемая от этого импульса скорость астероида $\sim 10^2$ см/с. На основе полученного приближенного соотношения для среднего размера фрагмента показано, что при принятой мощности взрыва ~ 1 Мт, по-видимому, возможно образование только нескольких крупных фрагментов. По предложенной двухмодульной ракетной системе оценена возможность их уничтожения воздействием дополнительного набора маломощных ядерных зарядов.

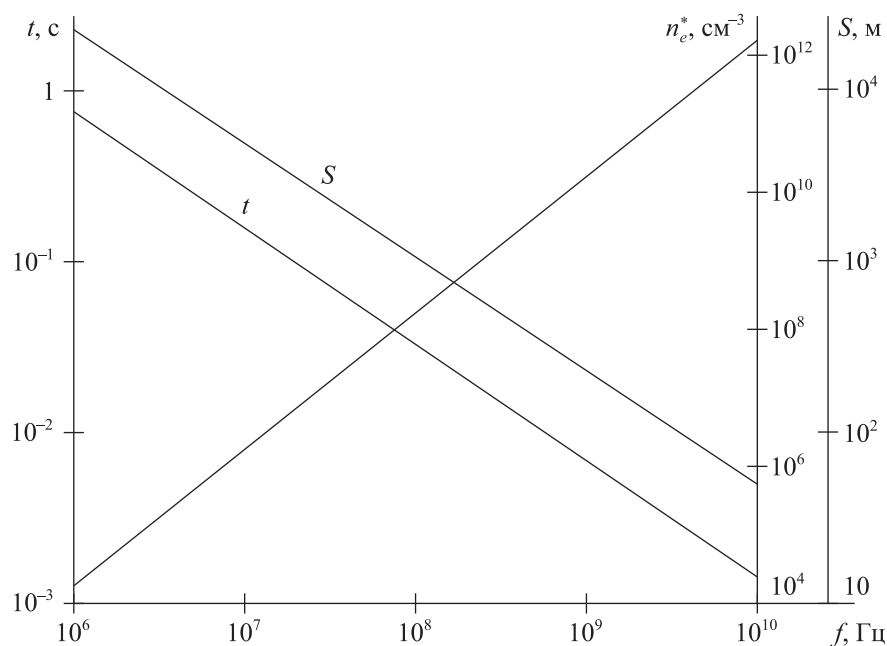


Рис. 6. Зависимость времени задержки t от возможности прохождения радиосигнала частоты f через ионизированную область, когда концентрация электронов в ней равна критической n_e^* для данной f , а удаление фрагмента астероида от его начального положения (при $t = 0$, момент взрыва) равно S

Список литературы (References)

- Андрущенко В. А., Головешкин В. А., Султанов И. А., Шевелев Ю. Д. Кометно-астероидная опасность и возможность ее предотвращения. Состояние вопроса: обзор // Проблемы вычислительной и прикладной механики. Автоматизация моделирования: сборник. — Вып. 1. — М.: МАКС Пресс, 2007. — С. 51–81.
- Andrushchenko V. A., Goloveshkin V. A., Sultanov I. A., Shevelev Yu. D. Kometno-asteroidnaya opasnost' i vozmozhnost' ee predotvrashcheniya. Sostoyanie voprosa: obzor [Comet-asteroid hazard and the possibility of its prevention. Issue Status: Review] // Problemy vychislitel'noj i prikladnoj mekhaniki. Avtomatizaciya modelirovaniya: sbornik. — Vyp. 1. — Moscow: MAKS Press, 2007. — P. 51–81 (in Russian).
- Астероидно-кометная опасность / под ред. А. Г. Сокольского. — СПб.: ИТА РАН, 1996.
- Asteroidno-kometnaya opasnost' [Asteroid-comet hazard] / pod red. A. G. Sokol'skogo. — St. Petersburg: ITA RAN, 1996 (in Russian).
- Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра / под ред. Б. М. Шустова, Л. В. Рыхловой. — М.: Физматлит, 2010.
- Asteroidno-kometnaya opasnost': vchera, segodnya, zavtra. [Asteroid-comet hazard: yesterday, today, tomorrow] / pod red. B. M. Shustova, L. V. Ryhlovoj. — Moscow: Fizmatlit, 2010 (in Russian).
- Григал П. В., Любимов А. Г., Пиджаков В. А., Таранов А. А., Чистов В. Г. Способ заглупления в астероид ядерного устройства // Труды международной научной конференции «Космическая защита Земли». Известия Челябинского научного центра. Спецвыпуск. Ч. 1. — Челябинск, 1997. — С. 201–204.
- Grigal P. V., Lyubimov A. G., Pidzhakov V. A., Taranov A. A., Chistov V. G. Sposob za-glublenniya v asteroid yadernogo ustrojstva [The method of penetration into an asteroid of a nuclear device] // Trudy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Kosmicheskaya zashchita Zemli". Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo centra. Specvypusk. Ch. 1 [Proc. Int. Symp. "Space Protection of the Earth"]. — Chelyabinsk, 1997. — P. 201–204 (in Russian).
- Дегтярь В. Г., Волков В. А. Ракетная концепция системы противоастероидной защиты Земли. — М.: Машиностроение, 2013.
- Degtyar' V. G., Volkov V. A. Raketnaya koncepciya sistemy protivooasteroidnoj zashchity Zemli [Rocket concept of the Earth's anti-steroid defense system]. — Moscow: Mashinostroenie, 2013 (in Russian).

- Заграфов В. Г., Шаненко А. К.* Использование ядерных взрывов для перехвата опасных космических объектов // Атомная энергия. — 1996. — Т. 80, № 4. — С. 21.
Zagrafov V. G., Shanenko A. K. Using nuclear explosions to intercept dangerous space objects // Atomic energy. — 1996. — Vol. 80, Issue. 4. — P. 293–300. (Original Russian paper: *Zagrafov V. G., Shanenko A. K.* Ispol'zovanie yadernyh vzryvov dlya perekhvata opasnyh kosmicheskikh ob'ektov // Atomnaya energiya. — 1996. — Vol. 80, No. 4. — P. 293–300.)
- Заграфов В. Г., Шаненко А. К., Рыжанский В. А., Иванов А. Г.* Применение ядерных взрывов для воздействия на малые космические тела в случае опасности столкновения с Землей // Вопросы атомной науки и техники. Сер. ТИПФ. — 2009. — № 2. — С. 45–53.
Zagrafov V. G., Shanenko A. K., Ryzhanskij V. A., Ivanov A. G. Primenenie yadernyh vzryvov dlya vozdejstviya na malye kosmicheskie tela v sluchae opasnosti stolknoveni-ya s Zemlej [The use of nuclear explosions to impact small space bodies in the event of a collision with the Earth] // Voprosy atomnoj nauki i tekhniki. Ser. TИPF. — 2009. — No. 2. — P. 45–53 (in Russian).
- Замышляев Б. В., Ступицкий Е. Л., Гузь А. Г., Жуков В. Н.* Состав и термодинамические функции плазмы: справочник. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
Zamyshlyayev B. V., Stupitsky E. L., Guz' A. G., Zhukov V. N. Sostav i termodinamicheskie funkicii plazmy: spravochnik [Composition and thermodynamic functions of plasma. Directory]. — Moscow: Energoatomizdat, 1984 (in Russian).
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 2008.
Zel'dovich Ya. B., Rajzer Yu. P. Fizika udarnyh voln i vysokotemperaturnyh gidrodi-namicheskikh yavlenij [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. — Moscow: Fizmatlit, 1988 (in Russian).
- Катастрофические воздействия космических тел / под ред. В. В. Адушкина, И. В. Немчинова. — М.: ИКЦ «Академкнига», 2005.
Katastroficheskie vozdejstviya kosmicheskikh tel [The catastrophic effects of space bodies] / pod red. V. V. Adushkina, I. V. Nemchinova. — Moscow: IKC “Akademkniga”, 2005 (in Russian).
- Коблов П. И., Симоненко В. А., Ивсеев Ю. А. и др.* // Известия ВНИИТФ, г. Снежинск. Ч. 1. — 1997. — С. 182–186.
Koblov P. I., Simonenko V. A., Ivseev Yu. A. et al. // Izvestiya VNIITF, g. Snezhinsk. Ch. 1. — 1997. — P. 182–186 (in Russian).
- Кондауров В. И., Ломов И. Н., Фортвов В. Е.* О действии мощного взрыва на астероид // ДАН РАН. — 1996. — Т. 348, № 2. — С. 184–187.
Kondaurov V. I., Lomov I. N., Fortov V. E. The effect of a powerful explosion on an asteroid // Physics — Doklady. — 1996. — Vol. 41, Iss. 5. — P. 199–202. (Original Russian paper: *Kondaurov V. I., Lomov I. N., Fortov V. E.* O deystvii moshchnogo vzryva na asteroid // DAN RAN. — 1996. — Vol. 348, No. 2. — P. 184–187.)
- Мухин К. Н.* Экспериментальная ядерная физика. — Т. 1. — М.: Энергоатомиздат, 1993.
Muhin K. N. Eksperimental'naya yadernaya fizika [Experimental nuclear physics]. — Vol. 1. — Moscow: Energoatomizdat, 1983 (in Russian).
- Николаева Е. А.* Основы механики разрушения. — Пермь: ПГТУ, 2010.
Nikolaeva E. A. Osnovy mekhaniki razrusheniya [Fundamentals of fracture mechanics]. — Perm': PGU, 2010 (in Russian).
- Орленко Л. П., Еськов Д. А., Симонов А. К.* Борьба с астероидами с помощью энергии взрыва // Вопросы оборонной техники. Сер. 16: Технические средства противодействия терроризму. — 2012. — № 9–10. — С. 7–12.
Orlenko L. P., Es'kov D. A., Simonov A. K. Bor'ba s asteroidami s pomoshch'yu energii vzryva [Fight against asteroids using explosion energy] // Voprosy oboronnoj tekhniki. Ser. 16: Tekhnicheskie sredstva protivodej-stviya terrorizmu. — 2012. — No. 9–10. — P. 7–12 (in Russian).
- Партон В. З.* Механика разрушения — от теории к практике. — М.: Наука, 1990.
Parton V. Z. Mekhanika razrusheniya — ot teorii k praktike [The mechanics of destruction — from theory to practice]. — Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
- Пилюгин Н. Н., Виноградов Ю. А., Ермолаев И. К.* О моделировании разрушения космических тел при высокоскоростном ударе // Астрономический вестник. — 2001. — Т. 35, № 2. — С. 156–166.
Pilyugin N. N., Vinogradov Yu. A., Ermolaev I. K. On the modeling of the disruption of cosmic bodies at high-speed impacts // Solar System Research. — 2001. — Vol. 35, Iss. 2. — P. 141–150. (Original Russian paper: *Pilyugin N. N., Vinogradov Yu. A., Ermolaev I. K.* O modelirovani razrusheniya kosmicheskikh tel pri vysokoskorostnom udare // Astronomicheskij vestnik. — 2001. — Vol. 35, No. 2. — P. 156–166.)

- Родионов В. В., Возовиков В. В., Задворнов Ю. А. и др. // Известия ВНИИТФ, г. Снежинск. Ч. 1. — 1997. — С. 187–193.*
Rodionov V. V., Vozovikov V. V., Zadvornov Yu. A. et al. // Izvestiya VNIITF, g. Snezhinsk. Ch. 1. — 1997. — P. 187–193 (in Russian).
- Смирнов Е. В., Ступицкий Е. Л. Численное моделирование воздействия разреженного плазменного потока на поверхность твердого тела // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2010. — № 11. — С. 102–112.*
Smirnov E. V., Stupitskii E. L. Numerical simulation of the effect of rarefied plasma flow on the solid surface // Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. — 2010. — Vol. 4, No. 4. — P. 965–975. (Original Russian paper: Smirnov E. V., Stupitskii E. L. Chislennoe modelirovanie vozdeystviya razrezhennogo plazmennogo potoka na poverhnost' tverdogo tela // Poverhnost'. Rentgenovskie, sin-hrotronnye i nejtronnye issledovaniya. — 2010. — No. 11. — P. 102–112.)
- Солнечная система / под ред. В. Г. Сурдина. — М.: Физматлит, 2017.*
Solnechnaya sistema [Solar system] / pod red. V. G. Surdina. — Moscow: Fizmatlit, 2017 (in Russian).
- Ступицкий Е. Л., Холодов А. С. Физические исследования и математическое моделирование крупномасштабных геофизических экспериментов. — Долгопрудный: Интеллект, 2019.*
Stupitskii E. L., Holodov A. S. Fizicheskie issledovaniya i matematicheskoe modelirovanie krupnomasshtabnyh geofizicheskikh eksperimentov [Physical research and mathematical modeling of large-scale geophysical experiments]. — Dolgoprudnyj: Intellekt, 2019 (in Russian).
- Физика ядерного взрыва. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2009.*
Fizika yadernogo vzryva [Physics of Nuclear Explosion]. — Vol. 1. — Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
- Фортвов В. Е. О действии мощного взрыва на астероид // Избранные статьи и доклады. Ред.-изд. Отдел ИПХФ РАН. — Черноголовка, 2005. — С. 501–503.*
Fortov V. E. O deystvii moshchnogo vzryva na asteroid [On the effect of a powerful explosion on an asteroid] // Izbrannye stat'i i doklady. Red.-izd. Otdel IPHF RAN. — Chernogolovka, 2005. — P. 501–503 (in Russian).
- Шаненко А. К., Соколов С. С., Мотлохов В. Н. и др. Изменение траектории опасного космического тела // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. — 2016. — № 1. — С. 53–59.*
Shanenko A. K., Sokolov S. S., Motlohov V. N. et al. Izmenenie traektorii opasnogo kosmicheskogo tela [Changing the trajectory of a dangerous space body] // VANT. Ser. Teoreticheskaya i prikladnaya fizika. — 2016. — No. 1. — P. 53–59 (in Russian).
- Шаненко А. К., Соколов С. С., Мотлохов В. Н. и др. Численное моделирование воздействия высокого ядерного заряда на астероид // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. — 2017. — № 1. — С. 8–14.*
Shanenko A. K., Sokolov S. S., Motlohov V. N. et al. Chislennoe modelirovanie vozdeystviya vysokogo yadernogo zaryada na asteroid [Numerical simulation of the effects of a high nuclear charge on an asteroid] // VANT. Ser. Teoreticheskaya i prikladnaya fizika. — 2017. — No. 1. — P. 8–14 (in Russian).
- Borovička J., Spurný P., Brown P., Wiegert P. et al. The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor // Nature. — 2013. — Vol. 503. — P. 235–237.*
- Ceplecha Z., Revelle D. O. Fragmentation model of meteoroid motion, mass loss and radiation in the atmosphere // Meteoritics and Planetary Science. — 2005. — Vol. 40, No. 1 — P. 35–54.*
- Chopelas A. Thermal properties of forsterite at mantle pressures derived from vibrational spectroscopy // Phys. Chem. Minerals. — 1990. — Vol. 17, No. 2 — P. 149–156.*
- Ghiorso M. S., Nevins D., Cutler I., Spera F. J. Molecular dynamics studies of CaAl₂Si₂O₈ liquid II. Equation of state and a thermodynamic model // Geochim Cosmochim Acta. — 2009. — Vol. 73, No. 22 — P. 6937–6951.*
- Grady D. E. Local inertial effects in dynamic fragmentation // J. Appl. Phys. — 1982. — Vol. 53, No. 1. — P. 322–325.*
- McInnes C. R. Deflection of near-Earth asteroids by kinetic energy impacts from retrograde objects // Planetary and Space Sci. — 2004. — Vol. 52, No. 7 — P. 587–590.*
- Solem J. C. Interception of comets and asteroids on collision course with Earth // Journal of Spacecraft and rockets. — 1993. — Vol. 30, No. 2 — P. 222–228.*

УДК: 577.38:574.62

Оптимальный промысел и эволюция путей миграции рыбных популяций

В. Г. Ильичев^а, Л. В. Дашкевич

Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук,
Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, д. 41

E-mail: ^а vitaly369@yandex.ru

Получено 13.08.2019, после доработки — 11.09.2019.

Принято к публикации 11.09.2019.

Представлена новая дискретная эколого-эволюционная математическая модель, в которой реализованы механизмы поиска эволюционно устойчивых маршрутов миграции рыбных популяций. Предложенные адаптивные конструкции имеют малую размерность и поэтому обладают высоким быстродействием, что позволяет проводить компьютерные расчеты на длительный срок за приемлемое машинное время. При исследовании устойчивости использованы как геометрические подходы нелинейного анализа, так и компьютерные асимптотические методы. Динамика миграции рыбной популяции описывается некоторой марковской матрицей, которая может изменяться в процессе эволюции. В семействе марковских матриц (фиксированной размерности) выделены базисные матрицы, которые используются для генерации маршрутов миграции мутантов. В результате конкуренции исходной популяции с мутантами выявляется перспективное направление эволюции пространственного поведения рыбы при заданном промысле и кормовой базе. Данная модель была применена к решению проблемы оптимального вылова на долгосрочную перспективу, при условии, что водоем разделен на две части, у каждой из которых свой собственник. При решении оптимизационных задач используется динамическое программирование, основанное на построении функции Беллмана. Обнаружена парадоксальная стратегия заманивания, когда один из участников промысла на своей акватории временно сокращает вылов. В этом случае мигрирующая рыба больше времени проводит в этом районе (при условии равной кормовой базы). Такой маршрут эволюционно закрепляется и не изменяется даже после возобновления промысла в этом районе. Второй участник промысла может восстановить статус-кво, применив заманивание на своей части акватории. Возникает бесконечная последовательность заманиваний — своеобразная игра в поддавки. Введено новое эффективное понятие — внутренняя цена рыбной популяции, зависящая от района водоема. По сути, эти цены представляют собой частные производные функции Беллмана и могут быть использованы в качестве налога на выловленную рыбу. В этом случае проблема многолетнего промысла сводится к решению задачи одногодичной оптимизации.

Ключевые слова: многолетний промысел, оптимизация, пространственная адаптация, стратегия заманивания, внутренние цены

Публикация подготовлена в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН, проект № АААА-А18-118122790121-5, а также гранта РФФИ (№ 18-01-00453).

UDC: 577.38:574.62

Optimal fishing and evolution of fish migration routes

V. G. Il'ichev^a, L. V. Dashkevich

¹ Federal Research Centre The Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
41 Chekhov st., Rostov-on-Don, 344006, Russia

E-mail: ^a vitaly369@yandex.ru

*Received 13.08.2019, after completion — 11.09.2019.
Accepted for publication 11.09.2019.*

A new discrete ecological-evolutionary mathematical model is presented, in which the search mechanisms for evolutionarily stable migration routes of fish populations are implemented. The proposed adaptive designs have a small dimension, and therefore have high speed. This allows carrying out calculations on long-term perspective for an acceptable machine time. Both geometric approaches of nonlinear analysis and computer “asymptotic” methods were used in the study of stability. The migration dynamics of the fish population is described by a certain Markov matrix, which can change during evolution. The “basis” matrices are selected in the family of Markov matrices (of fixed dimension), which are used to generate migration routes of mutant. A promising direction of the evolution of the spatial behavior of fish is revealed for a given fishery and food supply, as a result of competition of the initial population with mutants. This model was applied to solve the problem of optimal catch for the long term, provided that the reservoir is divided into two parts, each of which has its own owner. Dynamic programming is used, based on the construction of the Bellman function, when solving optimization problems. A paradoxical strategy of “luring” was discovered, when one of the participants in the fishery temporarily reduces the catch in its water area. In this case, the migrating fish spends more time in this area (on condition of equal food supply). This route is evolutionarily fixed and does not change even after the resumption of fishing in the area. The second participant in the fishery can restore the status quo by applying “luring” to its part of the water area. Endless sequence of “luring” arises as a kind of game “giveaway”. A new effective concept has been introduced — the internal price of the fish population, depending on the zone of the reservoir. In fact, these prices are Bellman's private derivatives, and can be used as a tax on caught fish. In this case, the problem of long-term fishing is reduced to solving the problem of one-year optimization.

Keywords: long-term fishing, optimization, spatial adaptation, strategy of luring, internal prices

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 879–893 (Russian).

The research is carried out in the frame of government task of SSC RAS under project (state registration No. AAAA-A18-118122790121-5) and grant RFBR No. 18-01-00453.

1. Введение

Разработка стратегий оптимального промысла и анализ сопутствующих явлений весьма популярны в теоретических и прикладных компьютерных исследованиях ([Скалецкая и др., 1979; Clark, 2010] и т. д.). В основном здесь обсуждаются или вопросы максимизации многолетнего вылова, или проблемы устойчивости равновесий в рамках жестких математических моделей. Так, в работе [Ильичев и др., 2000] была показана возможность стабилизации хаотической динамики [Якобсон, 1976] в модели Риккера [Ricker, 1954] при действии оптимального промысла, в [Абакумов, Израильский, 2017] продемонстрировано сглаживающее действие промысла при случайных воздействиях среды, в статье [Тютюнов и др., 2019] показано преобладающее влияние факторов среды над промыслом (более или менее выраженное в зависимости от толерантности вида).

Ниже ключевым элементом модели будет формализация процесса миграции. Известно много различных схем, укажем свежие примеры: дискретный ареал [Сенашова, Садовский, 2014], непрерывный ареал [Будянский, Цибулин, 2011] и другие.

Отметим, что в зарубежных работах рассматривается примерно тот же круг вопросов о влиянии на промысел стохастической среды и видового разнообразия [Mendelssohn, 1980], сезонности и пространственной неоднородности [Hilborn, Walters, 1986]. Большое количество соответствующих примеров приведено в современной монографии [Anderson, Seijo, 2010]. В ряде перечисленных работ модельный механизм миграции основан на физико-химическом законе Фика (о перемещении распределения эксплуатируемой популяции пропорционально пространственному градиенту). Это не всегда соответствует натурным наблюдениям. Более приемлемым для описания движения популяции является использование марковской матрицы [Tuck, Passingham, 1994].

Наряду с динамическими моделями при обсуждении проблем промысла используются и теоретико-игровые методы [Mazalov, Rettieva, 2004]. Весьма экзотические способы промысла и их последствия упомянуты в обзоре [Фрисман и др., 2019]: вылов рыб определенного возраста, размера или пола.

В традиционных моделях оптимального вылова, как правило, не учитывается эволюционный ответ рыбной популяции на промысел. Так, характер вылова может вызвать изменения в маршрутах миграции. Требование учета механизма адаптации при моделировании позволяет по-новому взглянуть на привычную задачу оптимизации промысла.

2. Постановка задачи, основные обозначения

Следует выделить две основные проблемы.

Первая трудность заключается в эффективной реализации эволюционного процесса. Напомним, что в известных работах, например в [Свирижев, Пасеков, 1982], предлагается прямое копирование биологических факторов. А именно: сначала задается достаточно большой набор близких субпопуляций (мутантов) с несколько различающимися параметрами, а затем, в результате конкуренции, выявляется победитель — субпопуляция с «наилучшим» набором параметров. Такой пассивный подход требует задания тысячи и более переменных и при компьютерной реализации вызывает значительные затраты машинного времени. Напротив, в работе [Ильичев, Ильичева, 2014] был предложен активный метод адаптации, когда задается малое число мутантов, а параметры исходной популяции медленно изменяются.

Вторая трудность связана с неоднозначностью исходов эволюционного процесса в моделях [Фрисман и др., 2019]. Так, в работе [Ильичев, Ильичева, 2018] при поиске маршрутов (или матриц) миграции в зависимости от пространственного распределения кормовых ресурсов было обнаружено, что финальная матрица сильно зависит от выбора начальной. При этом неожиданно оказалось, что все такие финальные матрицы имеют практически один и тот же положительный собственный вектор π . Этот (*перроновский*) вектор оказывается единственным

[Робертс, 1986]. Каждая его компонента π_i является относительным временем пребывания популяции в i -м районе. Поэтому всякое адаптивное поведение сводится, по сути, к перестройке времен пребывания. Следовательно, матрица является лишь одной из многих *форм* конкретной миграции, а истинным *содержанием* миграции оказывается перроновский вектор. Такая «однозначность» будет ниже использована для «адекватной» трактовки результатов процесса миграции в зависимости от той или иной стратегии вылова.

Далее, задачу оптимального промысла можно дополнить экономической начинкой, основанной на идее внутренних цен рыбной популяции для различных районов. Это позволяет задать эффективные экономические механизмы: налогообложение, торговые обмены и др.

В данной статье приведена иллюстрация указанных подходов.

3. Миграция и адаптация рыбных популяций

Пусть водоем (например, Азовское море) разбит на два района — R и U , в каждом из которых производится вылов. Предполагается, что рыбная популяция мигрирует между этими районами. Формально пусть x_t и y_t — текущие численности данной популяции в районах R и U соответственно. Тогда ее перемещение за единицу времени задается линейной моделью

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $m_{ij} \geq 0$. Поскольку общая численность популяции при чистой миграции не меняется, сумма элементов по каждому столбцу равна 1. Такие матрицы называют марковскими. Удобно представлять двумерные марковские матрицы в следующей форме:

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$ и $0 \leq \beta \leq 1$. Внедиагональные элементы α и β характеризуют интенсивность перемещения популяции. Так, β — это доля популяции, которая может перейти из U -района в R -район; аналогично: α определяет долю популяции, переходящую из R -района в U -район.

Ниже воспользуемся представлением матриц вида (2) как некоторых точек плоскости:

$$M \rightarrow (\alpha, \beta). \quad (3)$$

В совокупности они заполняют квадрат $Q = [0,1] \times [0,1]$ с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$. Каждая точка Q является выпуклой комбинацией этих вершин. По сути, они составляют своеобразный выпуклый базис в Q . Построим соответствующие базисные матрицы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что исходная популяция с матрицей миграции M_0 может породить мутантов с маршрутами (μ) , близкими к M_0 , а именно:

$$\mu = (1-\varepsilon)M_0 + \varepsilon E_i, \quad (4)$$

где $\varepsilon > 0$ и мало, E_i — одна из базисных матриц. Для полноты картины можно выбирать малый параметр ε и порядок генерации базисных матриц случайным образом.

В процессе конкуренции исходной популяции с семейством таких мутантов может выявиться сильный мутант, численность которого превосходит численность исходной популяции

в 10 и более раз. Если сильных мутантов несколько, то выбираем самого сильного (для всякого более слабого мутанта порождаем новый маршрут (4) с другими ε и E_i). Тогда считаем, что такой мутант задает направление естественного отбора. А именно, пусть μ^* — матрица миграции сильного мутанта. Тогда деформируем матрицу исходной популяции следующим образом:

$$M_0 \rightarrow (1 - \xi)M_0 + \xi\mu^*, \quad (5)$$

где $\xi > 0$ и мало. Параметр ξ задает скорость адаптации.

Пусть M_0 и M_1 — две марковские матрицы. Показано, что к M_1 можно сколь угодно близко подойти с помощью композиции формул вида (4) и (5) при подходящем выборе базисных матриц [Ильичев, 2012]. Содержательно это означает практическую достижимость любой марковской матрицы с помощью композиции формул вида (4) и (5) из любой начальной M_0 .

Далее, введем параметр $\lambda \in (0, 1)$, который характеризует долю R -зоны. Так, обозначим через K общую величину кормовой базы в водоеме. В этом случае $K_1 = \lambda K$ — это величина корма в R -зоне и $K_2 = (1 - \lambda)K$ — количество корма в U -зоне. Ниже будем обсуждать простейший случай, когда запасы корма фиксированы и не изменяются в каждом районе.

В оптимизационном блоке модели рассматривается промысел в обеих зонах на многолетний период. Обозначим через $B_T(x, y)$ оптимальный доход за $(T + 1)$ лет, когда начальные запасы рыбы равны x (в R -зоне) и y (в U -зоне).

Разумеется, в процессе эксплуатации численность рыбы изменяется. Соответствующую траекторию обозначим через $\{x_t, y_t\}$. Согласно методу динамического программирования [Беллман, 1960] полагаем

$$B_T(x, y) = \sum_{t=0}^T \gamma^t [p(u_t) + q(v_t)] \rightarrow \max \quad (6)$$

по всем допустимым выловам $\{u_t\}$ и $\{v_t\}$ в первом и во втором районах, т. е. $0 \leq u_t \leq x_t$ и $0 \leq v_t \leq y_t$ для каждого t . Здесь γ — коэффициент дисконтирования (полагаем $\gamma = 0.9$), p, q — вогнутые и монотонно возрастающие функции полезности с $p(0) = q(0) = 0$. Ниже для расчетов возьмем $p(w) = q(w) = 10 \cdot \frac{w}{1 + w}$. Разумеется, $p'(0) = q'(0) = 10$. Отметим, что выбор равных функций полезности не имеет большого значения.

Динамику численности (z_t) немигрирующей популяции формально представим в виде $z_{t+1} = f(z_t, K)$. Ниже будет использован простейший вариант нелинейного роста f , когда она является гладкой, строго возрастающей и вогнутой функцией x ; $f(0, K) = 0$ и $f'_z(0, K) > 1$. Последнее неравенство гарантирует положительную численность популяции для всех t . Следует также установить *ограниченность роста* ее численности, например, в следующей форме: при некотором $\omega < 1$ имеет место $f(z, K) < \omega \cdot z$ для каждого K и для всех достаточно больших z . В частности, ниже будет использована зависимость Контуа [Contois, 1959]:

$$f(z, K) = z \left(d + r \frac{K}{K + z} \right),$$

где $d = 0.25$ и $r = 3$ — скорости смертности и роста. Разумеется, данная функция удовлетворяет оговоренным выше условиям. Отметим, что данная скорость роста относится к популярному классу дробно-рациональных трофических функций [Arditi, Ginzburg, 2012] и, по мнению биологов, является вполне адекватной для высокопродуктивных водоемов.

Обозначим для краткости $f_1(z) = f(z, K_1)$ и $f_2(z) = f(z, K_2)$. При заданной матрице миграции и последовательности ежегодных выловов динамика фазовых переменных в водоеме задается системой

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= (1 - \alpha)f_1(x_t - u_t) + \beta f_2(y_t - v_t), \\y_{t+1} &= \alpha f_1(x_t - u_t) + (1 - \beta)f_2(y_t - v_t).\end{aligned}\quad (7)$$

Компьютерные расчеты показали, что траектория (7) при оптимальных стратегиях вылова стремится к некоторому универсальному равновесию.

Пусть маршрут исходной популяция задается матрицей M_0 . Назовем M_0 эволюционно устойчивой (*ЭУ-матрицей*), если данная популяция не вытесняется своими мутантами с близкими к M_0 маршрутами. Поэтому в природе могут реализоваться только ЭУ-матрицы миграции. В наиболее сильном варианте этого понятия количество мутантов может быть любым. В простейшем варианте компьютерной реализации можно ограничиться и одним мутантом. В приведенных ниже расчетах использовались два мутанта, для которых перебор базисных матриц происходил в противоположных направлениях (т. е. по часовой стрелке и против часовой стрелки).

Актуальная задача: насколько зависят получаемые результаты от количества генерируемых мутантов? Предварительные расчеты показали, что найденные здесь закономерности слабо обусловлены числом мутантов. Но, строго говоря, это пока открытый вопрос.

Для краткости запишем модель (7) в форме

$$\tilde{x} = P(x - u, y - v), \quad \tilde{y} = Q(x - u, y - v).\quad (8)$$

Очевидно, все функции в (8) являются строго возрастающими и вогнутыми по каждой переменной. Теперь согласно известной схеме динамического программирования при построении $B_T(x, y)$ целесообразно воспользоваться рекурсией Беллмана:

$$B_{T+1}(x, y) = \max[p(u) + q(v) + \gamma B_T(\tilde{x}, \tilde{y})]\quad (9)$$

по всем $0 \leq u \leq x$, $0 \leq v \leq y$. Разумеется, $B_0(x, y) = p(x) + q(y)$. Каждая $B_T(x, y)$ является непрерывной функцией.

Утверждение 1. *Рекурсия (9) сходится к некоторой предельной непрерывной функции $B(x, y)$ (обоснование см. в приложении 1).*

Отметим, что при бесконечном горизонте планирования промысла оптимальный вылов зависит только от значений фазовых переменных. Напротив, при конечном горизонте планирования оптимальные выловы $u_t(x, y)$ и $v_t(x, y)$ существенно определяются моментом времени t . Поэтому исследование бесконечномерной версии данной задачи удобнее и проще.

Следует сказать, что $B(x, y)$ наследует свойства своих функций полезности, поэтому и сама функция Беллмана строго возрастает и вогнута по обоим переменным. Отметим, что достаточно общая схема локальных свойств глобальным отображением предложена в работе [Ильичев, 2003]. Некоторые ее идеи используются и в современном системном программировании [Непейвода, 2016].

Согласно известной теореме Лебега [Колмогоров, Фомин, 1972] всякая монотонная функция почти всюду дифференцируема. Отметим, что возможные точки недифференцируемости вогнутой функции устроены просто. Так, например, всегда существуют $B'_x(x - 0, y)$ и $B'_x(x + 0, y)$, при этом выполняется неравенство $B'_x(x - 0, y) > B'_x(x + 0, y)$. Имеются веские основания полагать, что здесь добавка «почти» является лишней (сравните с [Рохлин, 2000]). Ниже для краткости также будем опускать эту добавку. Например, из вогнутости $B(x, y)$ по переменной x следует, что $B'_x(x, y)$ убывает по x . Отметим, что из строгой вогнутости и непрерывности функции Беллмана вытекает непрерывность управления [Ланкастер, 1972].

Математическую функцию $B(x, y)$ можно трактовать и как большую экономическую функцию полезности, когда начальные запасы рыбной популяции по районам равны x и y . Поэтому частные производные $B'_x(x, y)$ и $B'_y(x, y)$ можно трактовать как внутренние цены рыбы в первом и во втором районах соответственно.

Большое значение имеют два утверждения, приведенных ниже.

Утверждение 2. Пусть в точке (x, y) оптимальный вылов $u = u(x, y)$ положителен, тогда существует $B'_x(x, y)$ и выполняется соотношение

$$B'_x(x, y) = p'(u). \quad (10)$$

Утверждение 3. Пусть в точке (x, y) оптимальный вылов $v = v(x, y)$ положителен, тогда существует $B'_y(x, y)$ и выполняется соотношение

$$B'_y(x, y) = q'(v).$$

Обоснование данных утверждений о полезности приведено в приложении 2.

Величину, например, $c = B'_x(x, y)$ можно использовать в качестве единицы налога на выловленную рыбу в первом районе. Так, обсудим решение следующей простой задачи оптимизации рыболовства в первом районе:

$$[p(u) - c \cdot u] \rightarrow \max \text{ по всем } u \in [0, x]. \quad (11)$$

Выясним, насколько сильно отличается управление при (11) и в (6). Для задачи (11) рассмотрим два случая.

1. Пусть $c \geq p'(0) = 10$, тогда целевая функция

$$H(u) = p(u) - c \cdot u \quad (12)$$

является строго убывающей, поскольку ее производная отрицательна:

$$H'(u) = p'(u) - c < 0.$$

Поэтому здесь решение $u^* = 0$ оказывается оптимальным.

2. Пусть теперь $c < 10$. В силу строгой вогнутости H искомое управление должно удовлетворять уравнению $H'(u^*) = 0$, т. е. $c = p'(u^*)$. Очевидно, данное соотношение совпадает с выражением (10).

Аналогично: величину $B'_y(x, y)$ можно использовать в качестве эффективного налога на вылов во втором районе.

Таким образом, решение проблемы многошаговой оптимизации (6) свелось к решению двух задач одношаговой оптимизации (11).

Любопытно изобрести некоторые глобальные экономические характеристики промысла. Например, вычислить средние значения внутренних цен $B'_x(x, y)$ или $B'_y(x, y)$ по всем (x, y) . Однако оказалось, что такие значения не очень чувствительны к изменению параметров водоема. Гораздо более эффективными показали себя следующие характеристики: $\bar{c}_1 = B'_x(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{c}_2 = B'_y(\bar{x}, \bar{y})$, где (\bar{x}, \bar{y}) — среднее значение асимптотик достаточно представительного пучка траекторий модели (7).

4. Коадаптация промысла и миграции

Поиск стратегии оптимального вылова и построение ЭУ-матриц миграции включает в себя два последовательных этапа (блока).

1. Блок «Оптимизация». При заданной матрице миграции (M) на основе метода динамического программирования производится поиск оптимальных выловов (функций u, v). Пусть x и y — соответствующие численности популяции в двух районах, тогда здесь строим отображение

$$M \rightarrow \langle u(x, y), v(x, y) \rangle.$$

2. Блок «Эволюция». При фиксированных функциях вылова $u(x, y), v(x, y)$ реализуется конкурентное взаимодействие исходной популяции (с матрицей миграции M) с несколькими мутантами, матрицы которых близки к M . Когда в результате отбора выявляется сильный мутант, производим некоторую деформацию M . Так, численно реализуется отображение

$$\langle u(x, y), v(x, y) \rangle \rightarrow M_1.$$

Если в результате многократного повторения этапов 1 и 2 этот процесс сходится, то определяются эволюционно устойчивая матрица M^* и выловы u^*, v^* при заданном значении корма в районах R (первом) и U (втором). В каждом случае произведены соответствующие расчеты при вариации начальных значений (x, y) на некоторой сетке. В качестве итоговых значений определялись средние значения \bar{x}, \bar{y} и $\bar{u} = \overline{u(x, y)}, \bar{v} = \overline{v(x, y)}$.

Пусть кормовой ресурс R -зоны характеризуется параметром λ , который принимает дискретные значения от 0.1 до 0.9. Этот коэффициент является долей R -зоны в общей акватории водоема. Представляет интерес анализ поведения экологических элементов при вариации λ . Основные результаты компьютерных расчетов представлены на рис. 1.

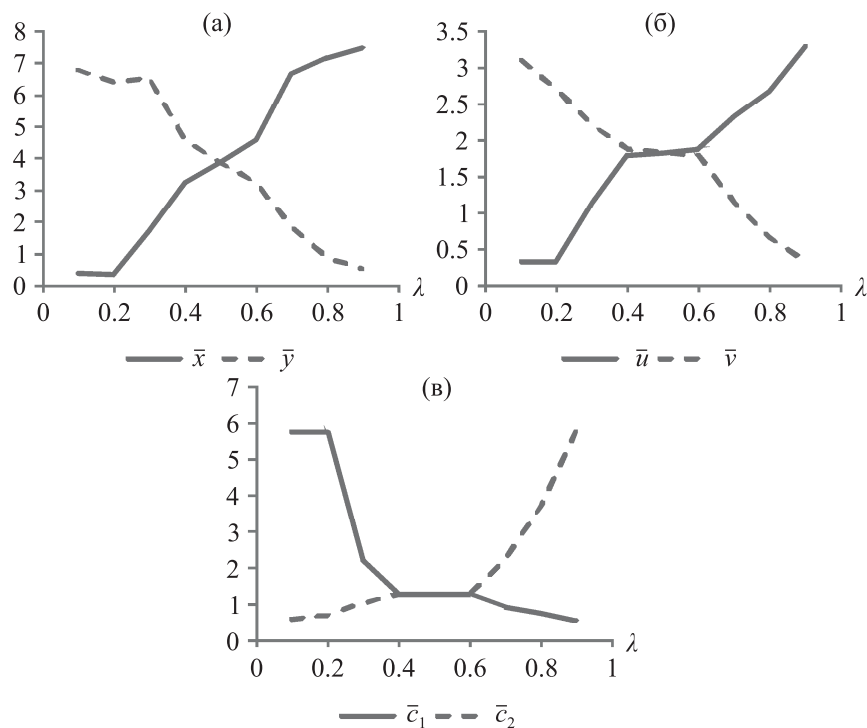


Рис. 1. Средние значения переменных (а), управлений (б) и цен (в) в модели (7) в зависимости от кормового ресурса λ (в долях от общей кормовой базы). Здесь \bar{x} и \bar{y} — запасы рыбы (у. е.), \bar{u} и \bar{v} — выловы (у. е.), \bar{c}_1 и \bar{c}_2 — цены на рыбу (у. е.) в районах R и U соответственно

Теперь обсудим динамику основных переменных в модели (7) в свете роста параметра λ от 0.1 до 0.9. Так, естественным образом средняя численность и средний вылов рыбы возрастают в первом районе из-за увеличения там кормового ресурса. Противоположным образом из-

меняются численность и вылов во втором районе. Разумеется, чем меньше рыбы, тем выше ее цена. Например, при $c_1 > c_2$ возможна выгодная продажа дешевой рыбы (собственника второго района) собственнику первого района.

Отметим, что вектор π пробегает значения

$$\begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.94 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.94 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.21 \\ 0.79 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.59 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.06 \end{pmatrix}.$$

Здесь наиболее существенные изменения компонент перроновского вектора происходят при $\lambda \approx 1/3$ и $\lambda \approx 2/3.5$.

5. Промысел как эволюционная игра в поддавки

В рамках предыдущей проблематики о конкурентном промысле двух собственников акватории обсудим возможность увеличения дохода, например, участника промысла R путем *временного добровольного* уменьшения своей величины вылова.

Будем действовать в духе иерархического управления, при этом несколько уточним прежние соглашения о стратегиях вылова. Считаем, что Центр на основе решения задачи (6) выдает рекомендации собственникам районов акватории о квоте вылова, которая не должна превышать величин u и v , зависящих от состояния рыбных запасов (x, y) . Разумеется, можно в какие-то годы вылавливать и меньше (реализуя либеральную стратегию вылова).

Рассмотрим следующую симметричную ситуацию. Пусть в начальный момент времени матрица миграции имеет вид

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

и кормовые ресурсы районов акватории данных собственников одинаковы, т. е. $\lambda = 0.5$. Ниже удобно использовать популярную шахматную терминологию.

Этап 1 (*равновесная, безобидная ситуация*). Если участники промысла действуют согласно рекомендациям Центра (с учетом вида M_0 и решения задачи (6)), то матрица миграции сохраняется и устанавливаются следующие значения: $\bar{u} = \bar{v} = 1.85$, $\bar{x} = \bar{y} = 3.89$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1.28$. Разу-

меется, для M_0 имеет место $\pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Этап 2 (*R проигрывает материал, но получает позиционное преимущество*). Пусть теперь собственник R вылавливает рыбу на 75 % от рекомендуемого уровня, а собственник U ведет промысел в 100 % от положенного. Тогда R -акватория становится более привлекательной для рыб. Происходит «заманивание» рыбной популяции в R -акваторию. В результате эволюции матрица миграции преобразуется к виду

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0.54 & 0.54 \\ 0.46 & 0.46 \end{pmatrix}$$

и достигаются новые значения: $\bar{u} = 1.48$ и $\bar{v} = 2.12$, $\bar{x} = 4.68$ и $\bar{y} = 3.96$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1.04$.

Очевидно, для M_1 имеет место $\pi = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{pmatrix}$, а поскольку $\pi_1 = 0.54 > \pi_2 = 0.46$, то R -зона стала предпочтительнее U -зоны. По-сути, R сыграл в поддавки с U , но получил позиционное преимущество в форме более выгодной матрицы миграции.

Этап 3 (*R* реализует позиционное преимущество и получает больший материал). С учетом вида матрицы M_1 . Центр выдает новые рекомендации оптимального вылова, которые теперь на 100 % реализуются обоими участниками: $\bar{u} = 2.03$ и $\bar{v} = 1.7$, $\bar{x} = 4.21$ и $\bar{y} = 3.56$, $\bar{c}_1 = 1.14$ и $\bar{c}_2 = 1.45$.

Если теперь участники промысла *R* и *U* придерживаются данного вылова, то матрица M_1 уже не изменяется. Следовательно, M_1 является эволюционно устойчивой при указанных управлениях. Самое главное, что после процедуры «заманивания» вылов в акватории *R* всегда будет больше, чем в районе *U*. А поскольку $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$, то у участника *R* возникает возможность дополнительной торговой выгоды.

Вероятно, чтобы восстановить прежний статус-кво, участник промысла *U* должен, в свою очередь, применить процедуру заманивания. Проверим, так ли это?

Этап 4 (*U* проигрывает материал, но получает позиционное преимущество). При заданной матрице миграции M_1 . Центр выдает рекомендации по вылову, которые *R* выполняет на 100 %, а *U* реализует лишь на 75 %. В результате преобразуется матрица миграции до

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.47 \\ 0.53 & 0.53 \end{pmatrix},$$

характеризующей предпочтение рыбой акватории *U*. Окончательно устанавливаются следующие значения переменных: $\bar{u} = 2.07$ и $\bar{v} = 1.6$, $\bar{x} = 4.0$ и $\bar{y} = 4.57$, $\bar{c}_1 = 1.04$ и $\bar{c}_2 = 1.04$. Разумеется, для M_2 имеет место $\pi = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.53 \end{pmatrix}$.

Здесь участник промысла *U* фактически применил стратегию игры в поддавки с *R*, поскольку вылов *U* уменьшился. Но зато возросла численность рыбы на *U*-акватории.

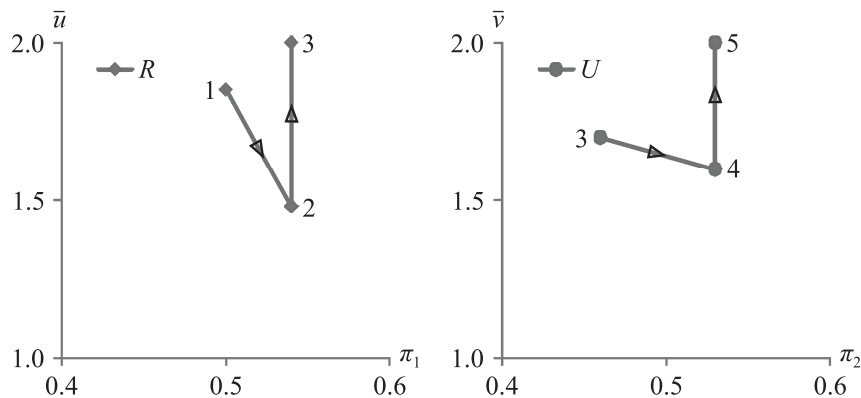


Рис. 2. Дорожная карта *R*- и *U*-заманиваний. *R*) отрезок 1 → 2 соответствует снижению *R*-вылова и порождает увеличение времени пребывания рыбной популяции в первом районе (π_1) + отрезок 2 → 3 означает увеличение *R*-вылова при сохранении π_1 ; *U*) отрезок 3 → 4 соответствует снижению *U*-вылова и порождает увеличение времени пребывания рыбной популяции во втором районе (π_2) + отрезок 4 → 5 означает увеличение *U*-вылова при сохранении π_2

Этап 5 (*U* реализует позиционное преимущество, добываясь большего материала). Теперь Центр, располагая матрицей M_2 , выдает новые рекомендации вылова участникам совместного промысла. При их 100 % реализации получают следующие значения переменных: $\bar{u} = 1.65$ и $\bar{v} = 2$, $\bar{x} = 3.5$ и $\bar{y} = 4.05$, $\bar{c}_1 = 1.45$ и $\bar{c}_2 = 1.14$. В выигрыше (в смысле вылова) оказывается *U*; более того, в результате применения данных стратегий вылова матрица M_2 не изменяется.

Возникает ситуация, когда вполне вероятным для оптимизации промысла оказывается бесконечная череда R - и U -заманиваний. Все это порождается влиянием эволюционного процесса.

Разумеется, трудно рекомендовать стратегию заманивания к практическому применению, поскольку процесс изменения маршрута миграции может занимать годы. Поэтому вынужденная смена стратегий заманивания представляет скорее теоретический интерес. Она показывает, что в промысловой конкуренции всегда неявно присутствует дополнительный игрок — эволюция. Смягчение проявления такого сорта парадоксальных ситуаций требует разработки специальных межгосударственных договоренностей и методов их контроля.

6. Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в данной статье.

1. Сравнительные расчеты показали, что с учетом поведенческой адаптации рыб их вылов снижается. По сути, данный процесс адаптации — это поиск компромисса между наличием корма и выловом.

2. Введено естественное понятие внутренних цен для рыбных запасов в том или ином районе. Внутренние цены могут быть использованы в качестве налога на единицу выловленной рыбы. В этом случае проблема многолетней оптимизации сводится к решению задач максимизации одногодичного вылова. Пространственная неоднородность внутренних цен позволяет конструировать разнообразные торговые механизмы обмена потребляемыми ресурсами.

3. Пусть в водоеме имеются две промысловые зоны, каждая из которых облавливается своим собственником (R и U). Возможна следующая парадоксальная эффективная стратегия долгосрочного вылова. Так, участник промысла R может на некоторое время существенно сократить свой вылов. Это приведет к эволюционной деформации маршрута миграции рыб с предпочтением первой зоны (R -заманивание). После этого первый участник промысла организует оптимальный вылов, который всегда будет превышать оптимальный вылов второго участника. Далее, может происходить периодическая смена R - и U -заманиваний.

Такая странная стратегия конкурентного промысла обусловлена действием процессов эволюции, и здесь возникает новая проблема поиска согласованного оптимума.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Ниже будет использована **лемма 1**. При достаточно большом S на границе прямоугольника $\Pi = \{(x, y): 0 \leq x \leq \beta S, 0 \leq y \leq \alpha S\}$ векторное поле (7) не направлено наружу.

Обоснование **леммы 1**. Обозначим через $A = (0, 0)$ и $B = (\beta S, \alpha S)$ две точки из Π . С помощью конуса K — первого квадранта плоскости — определим следующее отношение частичного порядка: положим $\mathcal{J} \prec \mathcal{Z}$, если $(\mathcal{Z} - \mathcal{J}) \in K$. В частности, имеет место $A \prec B$.

Обозначим вспомогательную модель с $u = v = 0$ через (7^0) . Положим отображение $P: (x_t, y_t) \rightarrow (x_{t+1}, y_{t+1})$, индуцируемое моделью (7^0) . Легко убедиться: P — монотонно, т. е. из $\mathcal{J} \prec \mathcal{Z}$ следует $P(\mathcal{J}) \prec P(\mathcal{Z})$.

Разумеется, теперь Π можно трактовать как промежуточное семейство точек между точками A и B . Поэтому достаточно установить, что точки $\pi(A)$ и $\pi(B)$ не покидают Π . Так, очевидно, имеет место $\pi(A) = A$.

Далее, для x -компоненты точки $\pi(B)$ из условия ограниченности роста популяций получаем оценку $P_x(B) = (1 - \alpha)f_1(\beta S) + \beta f_2(\alpha S) \leq \omega S[(1 - \alpha)\beta + \beta\alpha] < \beta S$.

Аналогично: для y -компоненты точки $\pi(B)$ получаем оценку

$$P_y(B) = \alpha f_1(\beta S) + (1 - \beta) f_2(\alpha S) \leq \omega S[\alpha\beta + (1 - \beta)\alpha] < \alpha S.$$

Последнее. В силу монотонного роста правых частей модели (7) на границе Π векторное поле не будет направлено наружу при всех допустимых неотрицательных u , v . **Лемма 1** доказана.

Обозначим через $C(\Pi)$ семейство всех непрерывных функций от двух переменных с метрикой Чебышёва $\|w - v\| = \max |w(x, y) - v(x, y)|$ по всем (x, y) из Π .

Известно, что данное пространство является полным [Колмогоров, Фомин, 1972]. С учетом обозначений (8) на $C(\Pi)$ зададим оператор Ω :

$$\hat{H}(x, y) = \Omega[H] = \max[p(u) + q(v) + \gamma H(\tilde{x}, \tilde{y})]$$

по всем допустимым u , v . Согласно [Ланкастер, 1972] и **лемме 1** функция $\hat{H}(x, y)$ непрерывна, и поэтому Ω отображает $C(\Pi)$ в себя.

Покажем, что Ω — сжатие. Так, пусть H_1 и H_2 — две функции из данного пространства. Формально имеем $\hat{H}_1(x, y) = p(u_1) + q(v_1) + \gamma H_1(\tilde{x}, \tilde{y})$ при своих оптимальных управлениях $u_1 = u_1(x, y)$ и $v_1 = v_1(x, y)$. В рамках предыдущих обозначений справедлива оценка

$$\hat{H}_2(x, y) \geq p(u_1) + q(v_1) + \gamma H_2(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

После вычитания последних соотношений находим

$$\hat{H}_1(x, y) - \hat{H}_2(x, y) \leq \gamma[H_1(\tilde{x}, \tilde{y}) - H_2(\tilde{x}, \tilde{y})] \leq \gamma\|H_1 - H_2\|.$$

Подобным образом, используя соответствующие управления u_2 и v_2 , устанавливаем:

$$\hat{H}_2(x, y) - \hat{H}_1(x, y) \leq \gamma\|H_2 - H_1\|.$$

Окончательно находим $\|\hat{H}_1 - \hat{H}_2\| \leq \gamma\|H_2 - H_1\|$, и поскольку $0 < \gamma < 1$, то оператор Ω является сжатием. И значит, для него существует единственная неподвижная точка (непрерывная функция двух переменных). Она и является решением уравнения Беллмана с бесконечным горизонтом управления.

Приложение 2

В качестве примера приведем обоснование **утверждения 2**. Так, в данной точке (x, y) согласно обозначениям (8) и (9) имеет место соотношение

$$B(x, y) = p(u) + q(v) + \gamma B(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (\text{П.1})$$

Пусть ε — достаточно малое число, тогда в точке $(x + \varepsilon, y)$ вылов $u + \varepsilon$ является допустимым независимо от знака ε . Поскольку он не может быть лучше оптимального, то справедливо неравенство

$$B(x + \varepsilon, y) \geq p(u + \varepsilon) + q(v) + \gamma B(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (\text{П.2})$$

Вычитая из (П.2) равенство (П.1), находим $B(x + \varepsilon, y) - B(x, y) \geq p(u + \varepsilon) - p(u)$.

Отсюда при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место

$$B'_x(x + 0, y) \geq p'(u). \quad (\text{П.3})$$

А при $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$B'_x(x-0, y) \leq p'(u). \quad (\text{П.4})$$

Согласно вогнутости по переменной x всегда имеет место неравенство $B'_x(x-0, y) \geq B'_x(x+0, y)$, и, следовательно, существует $B'_x(x, y)$. С учетом (П.3) и (П.4) выполняется требуемое равенство:

$$B'_x(x, y) = p'(u).$$

Список литературы (References)

- Абакумов А. И., Израильский Ю. Г.* Стабилизирующая роль структуры рыбной популяции в условиях промысла при случайных воздействиях среды обитания // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 4. — С. 609–620.
Abakumov A. I., Izrail'skiy Yu. G. Stabiliziruyushchaya rol' struktury rybnoy populyatsii v us-loviyakh promysla pri sluchaynykh vozdeystviyakh sredy obitaniya [The stabilizing role of the structure of the fish population in fishing conditions under random environmental influences] // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 4. — P. 609–620 (in Russian).
- Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
Bellman R. Dynamic Programming, 1957. (Russ. ed.: *Bellman R.* Dinamicheskoye programmirovaniye — Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1960).
- Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование пространственно-временной миграции близкородственных популяций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 477–488.
Budyanski A. V., Tsybulin V. G. Modelirovanie prostranstvenno-vremennoj migracii blizkorodstvennykh populjacij [Modeling of spatial-temporal migration for closely related species] // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3, No. 4. — P. 477–488 (in Russian).
- Ильичев В. Г.* Локальные и глобальные свойства неавтономных динамических систем и их приложения в моделях конкуренции // Сибирский математический журнал. — 2003. — Т. 44, № 3. — С. 677–684.
Il'ichev V. G. Lokal'nyye i global'nyye svoystva neavtonomnykh dinamicheskikh sistem i ikh prilozheniya v modelyakh konkurentсии [Local and global properties of non-autonomous dynamical systems and their applications in competition models] // Siberian Mathematical Journal. — 2003. — Vol. 44, No. 3. — P. 677–684 (in Russian).
- Ильичев В. Г.* Гипотезы о закономерностях биологической адаптации. Компьютерные эксперименты // Математ. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 10. — С. 15–32.
Il'ichev V. G. Gipotezy o zakonomernostyakh biologicheskoy adaptatsii. Komp'yuternyye eksperimenty [Hypotheses about laws of biological adaptation. Computer experiments] // Matem. Mod. — 2012. — Vol. 24, No. 10. — P. 15–32 (in Russian).
- Ильичев В. Г., Ильичева В. В.* Пространственная адаптация и оптимальный промысел рыбных популяций // Экономика и математические методы. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 119–129.
Il'ichev V. G., Il'icheva V. V. Prostranstvennaya adaptatsiya i optimal'nyy promysel rybnykh populyatsiy [Spatial adaptation and optimal harvesting of fish population] // Economics and mathematical methods. — 2014. — Vol. 50, No 3. — P. 119–129 (in Russian).
- Ильичев В. Г., Ильичева О. А.* Пространственная адаптация популяций в моделях экологии // Биофизика. — 2018. — Т. 63, вып. 2. — С. 373–381.
Il'ichev V. G., Il'icheva O. A. Prostranstvennaya adaptatsiya populyatsiy v modelyakh ekologii [Spatial adaptation of populations in ecology models] // Biophysics. — 2018. — Vol. 63, Iss. 2. — P. 373–381 (in Russian).
- Ильичев В. Г., Рохлин Д. Б., Угольницкий Г. А.* Об экономических механизмах управления биоресурсами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 4. — С. 104–110.
Il'ichev V. G., Rokhlin D. B., Ugol'nitskiy G. A. Ob ekonomicheskikh mekhanizmakh upravleniya biore-sursami [On the economic mechanisms of bioresource management] // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2000. — No. 4. — P. 104–110 (in Russian).

- Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]. — Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
- Ланкастер К.* Математическая экономика. — М.: Советское радио, 1972.
Lancaster K. Matematicheskaya ekonomika [Mathematical Economics]. — Moscow: Sovetskoe radio, 1972 (in Russian).
- Непейвода Н. Н.* О некоторых возможностях локальных вычислений в теории систем и базах данных // Программные системы, теория и приложения. — 2016. — Т. 7, вып. 4. — С. 145–160.
Nepeyvoda N. N. O nekotorykh vozmozhnostyakh lokal'nykh vychisleniy v teorii sistem i bazakh dannykh [About some possibilities of local computing in the theory of systems and databases] // Program systems, theory and applications. — 2016. — Vol. 7, Iss. 4. — P. 145–160 (in Russian).
- Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложением к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986.
Roberts F. S. Discrete mathematical models with application to social, biological and environmental problems. — Rutgers University Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976. (Russ. ed.: *Roberts F. S.* Diskretnyye matematicheskiye modeli s prilozheniyem k sotsial'nyim, biologicheskim i ekologicheskim zadacham. — Moscow: Nauka, 1986.)
- Рохлин Д. Б.* Производная решения функционального уравнения Беллмана и цена биоресурсов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2000 — Т. 3, № 1. — С. 169–181.
Rokhlin D. B. Proizvodnaya resheniya funktsional'nogo uravneniya Bellmana i tsena bioresursov [The derivative of the solution of the Bellman functional equation and the price of bioresources] // Siberian Journal of Industrial Mathematics. — 2000 — Vol. 3, No. 1. — P. 169–181 (in Russian).
- Свирижев Ю. М., Пасеков В. П.* Основы математической генетики. — М.: Наука, 1982.
Svirezhev Yu. M., Pasekov V. P. Osnovy matematicheskoy genetiki [Fundamentals of Mathematical Genetics]. — Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
- Сенашова М. Ю., Садовский М. Г.* Существование и устойчивость стационарной динамики популяции двухвидового сообщества при оптимизационной миграции // Фундаментальные исследования. — 2014. — № 11. — С. 1546–1551.
Senashova M. Yu., Sadovskiy M. G. Sushhestvovanie i ustojchivost' stacionarnoj dinamiki populjatsii dvuhvidovogo soobshhestva pri optimizatsionnoj migracii [Existence and stability of a steady dynamics of a two-species community with optimal migration] // Fundamental research. — 2014. — No. 11. — P. 1546–1551 (in Russian).
- Скалецкая Е. И., Фрисман Е. Я., Шапиро А. П.* Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. — М.: Наука, 1979.
Skaletskaya E. I., Frisman E. Ya., Shapiro A. P. Diskretnyye modeli dinamiki chislennosti populyatsiy i optimizatsiya promysla [Discrete models of population dynamics and fishing optimization]. — Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
- Тютюнов Ю. В., Титова Л. И., Сенина И. Н., Дашкевич Л. В.* Падение запасов и полный запрет промысла Азовского судака подтверждают долгосрочный модельный прогноз // Экология. Экономика. Информатика. Сер.: Системный анализ и моделирование экологических и экологических систем. — 2019. — Т. 1, вып. 4. — С. 239–240.
Tyutyunov Yu. V., Titova L. I., Senina I. N., Dashkevich L. V. Padeniye zapasov i polnyy zapret promysla Azovskogo sudaka podtverzhdayut dolgosrochnyy model'nyy prognoz [The decline in stocks and a complete ban on the fishing of Azov pike perch confirm a long-term model forecast] // Ecology. Economy. Informatics. System analysis and mathematical modeling of ecological and economic systems. — 2019. — Vol. 1, Iss. 4. — P. 239–240 (in Russian).
- Фрисман Е. Я., Кулакова М. П., Левуцкая О. А., Жданова О. А., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, вып. 1 — С. 119–151.
Frisman E. Ya., Kulakova M. P., Levutskaya O. A., Zhdanova O. A., Neverova G. P. Osnovnyye napravleniya i obzor sovremennogo sostoyaniya issledovaniy strukturirovannykh i vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy [The main directions and review of the current state of research on structured and interacting populations] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 119–151 (in Russian).
- Якобсон М. В.* О свойствах однопараметрического семейства динамических систем $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$ // УМН. — 1976. — 31, 2 (188) — С. 239–240.

- Yakobson M. V.* O svoystvakh odnoperametriceskogo semeystva dinamicheskikh system $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$ [On the properties of a one-parameter family of dynamical systems $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$] // UMN. — 1976. — 31, 2 (188). — P. 239–240 (in Russian).
- Anderson Lee G., Seijo J. C.* Bioeconomics of fishtrng management. — 1-st Edition. — Ebook Free Down Load: Wiley–Blackwell, 2010.
- Arditi R., Ginzburg L. R.* How Species Interact. — Oxford: University Press, 2012.
- Clark C. W.* Mathematical Bioeconomics / The Mathematics of conservation. — Third Edition. — New Jersey: J. Wiley and Sons Publ., 2010.
- Contois D. E.* Kinetics of bacterial growth relationship between population density and specific growth rate of continuous culture // J. Gen. Microbiol. — 1959. — No. 1–2. — P. 40–50.
- Hilborn R., Walters C. J.* A General Model for Simulation of Stock and Fleet Dynamics in Spatially Heterogeneous Fisheries // Can. J. Fish. Aquat. Sci. — 1987. — No. 44. — P. 1366–1369.
- Mazalov V. V., Rettieva A. N.* A fishery game model with migration reserved territory approach // Game Theory and Applications. — 2004. — Vol. 10. — P. 97–108.
- Mendelssohn R.* Managing Stochastic Multispecies Models // Mathematical Biosciences. — 1980. — No. 49. — P. 249–261.
- Ricker W. E.* Stock and recruitment // J. Fish. Res. Board of Canada. — 1954. — Vol. 11, No. 5. — P. 569–623.
- Tuck G. N., Possingham H. P.* Optimal Harvesting strategies for a metapopulation // Bulletin of Mathematical Biology. — 1994. — Vol. 56, No. 1. — P. 109–127.

УДК: 519.711.1, 591.555.42

О моделировании преодоления водной преграды *Rangifer tarandus* L.

Н. В. Малыгина^{1,a}, П. Г. Сурков^{1,2,b}

¹Уральский федеральный университет,

Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19

²Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Россия, 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16

E-mail: ^a adelaviza@gmail.com, ^b spg@imm.uran.ru

Получено 31.01.2019, после доработки — 06.08.2019.

Принято к публикации 09.08.2019.

Видоспецифическими поведенческими признаками дикого северного оленя *Rangifer tarandus* L. традиционно признаны сезонные миграции и стадный инстинкт. В период миграций эти животные вынуждены преодолевать водные преграды. Особенности поведения рассматриваются как результат процесса селекции, когда среди множества стратегий выбрана единственно эволюционно-стабильная, определяющая репродукцию и биологическую выживаемость дикого северного оленя как вида. Ввиду эскалации промышленного освоения Арктики в настоящее время естественные процессы в популяциях диких северных оленей таймырской популяции происходят на фоне увеличения влияния негативных факторов, поэтому естественно возникла необходимость выявления этологических особенностей этих животных. В настоящей работе представлены результаты применения классических методов теории оптимального управления и дифференциальных игр к исследованию миграционных этограмм диких северных оленей при преодолении водных преград, в том числе крупных рек. На основе этологических особенностей этих животных и форм поведения стадо представляется в качестве управляемой динамической системы. Также оно делится на два класса особей: вожак и остальное стадо, для которых строятся свои модели, описывающие траектории их движения. В основу моделей закладываются гипотезы, представляющие собой математическую формализацию некоторых схем поведения животных. Данный подход позволил найти траекторию важенки с использованием методов теории оптимального управления, а при построении траекторий остальных особей — применить принцип управления с поводырем. Апробация полученных результатов, которые могут быть использованы в формировании общей «платформы» для систематического построения моделей адаптивного поведения и в качестве задела для фундаментальных разработок моделей когнитивной эволюции, проводится численно на модельном примере, использующем данные наблюдений на реке Верхняя Таймыра.

Ключевые слова: дикий северный олень, миграции, математическое моделирование, динамическая система, управление

UDC: 519.711.1, 591.555.42

On the modeling of water obstacles overcoming by *Rangifer tarandus* L.

N. V. Malygina^{1,a}, P. G. Surkov^{1,2,b}

¹Ural Federal University,

19 Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russia

²Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,

16 S. Kovalevskaya st., Ekaterinburg, 620990, Russia

E-mail: ^a adelaviza@gmail.com, ^b spg@imm.uran.ru

Received 31.01.2019, after completion — 06.08.2019.

Accepted for publication 09.08.2019.

Seasonal migrations and herd instinct are traditionally recognized as wild reindeer (*Rangifer tarandus* L.) species-specific behavioral signs. These animals are forced to overcome water obstacles during the migrations. Behaviour peculiarities are considered as the result of the selection process, which has chosen among the sets of strategies, as the only evolutionarily stable one, determining the reproduction and biological survival of wild reindeer as a species. Natural processes in the Taimyr population wild reindeer are currently occurring against the background of an increase in the influence of negative factors due to the escalation of the industrial development of the Arctic. That is why the need to identify the ethological features of these animals completely arose. This paper presents the results of applying the classical methods of the theory of optimal control and differential games to the wild reindeer study of the migration patterns in overcoming water barriers, including major rivers. Based on these animals' ethological features and behavior forms, the herd is presented as a controlled dynamic system, which presents also two classes of individuals: the leader and the rest of the herd, for which their models, describing the trajectories of their movement, are constructed. The models are based on hypotheses, which are the mathematical formalization of some animal behavior patterns. This approach made it possible to find the trajectory of the important one using the methods of the optimal control theory, and in constructing the trajectories of other individuals, apply the principle of control with a guide. Approbation of the obtained results, which can be used in the formation of a common "platform" for the adaptive behavior models systematic construction and as a reserve for the cognitive evolution models fundamental development, is numerically carried out using a model example with observational data on the Werchnyaya Taimyra River.

Keywords: wild reindeer, migration, mathematical modeling, dynamical system, control

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 895–910 (Russian).

1. Введение

Одной из актуальных задач популяционной экологии в настоящее время является моделирование динамики поведения особей на основе их этологических характеристик. Особый интерес представляют моделирование стадного и территориального поведения животных и выявление эффектов подвижности особей на выделенном участке. Настоящее исследование характера возможных решений основано на описании поведенческого сценария реальной популяции при преодолении водной преграды как динамики значений поведенческих данных. Такой подход к изучению поведения диких северных оленей является новым и не представлен в научных работах. Известно, что самый тщательно выполненный традиционный визуальный анализ зачастую сопряжен с техническими сложностями и не лишен субъективности восприятия. Поэтому наша задача заключается в построении модели для создания возможности управления сценариями развития популяционных систем на примере рассмотрения динамики значений поведенческих данных дикого северного оленя *Rangifer tarandus* L. на рубеже «берег–река–берег». Данный этап моделирования необходим для использования его в качестве основы для создания компьютерной модели изменения поведения животных при возникновении антропогенного воздействия. Подобные модели могут представлять большой практический интерес, в частности, при анализе возрастающих антропогенных нагрузок.

Дикие северные олени — типично стадные животные, т. е. представляющие высокоинтегрированные надорганизменные системы, которые по размерам и численности могут быть крупными агрегациями (15 000–20 000 голов). Авангардную позицию в стаде занимает вожак. Согласно нашим наблюдениям и материалам других исследователей обычно вожаком бывает старая важенка, которая следует миграционными тропами, использование которых оказалось успешным в предыдущие годы и которые закреплены в стратегии освоения территории дикими северными оленями в период миграций. Под термином «важенка» понимается особь женского пола старше трех лет. При этом молодые особи могут «учиться», следуя за более опытными животными [Nicholson et al., 2016; Duquette, 1988]. По гендерной структуре стада различаются согласно периоду общемиграционного потока: весной первыми идут беременные самки с телятами прошлого года, затем к миграционному потоку подключаются самцы, осенью начинают движение самцы, участвующие в гоне, затем идут самки с телятами-сеголетками. Подобная структура миграционного потока показана в многочисленных работах зарубежных авторов, в частности для центрального арктического стада США [Nicholson et al., 2016; Duquette, 1988]. При любой структуре стада и, соответственно, разных биофизических показателей (различие в весе, интерьерных признаках, физиологическом состоянии) общеусредненные характеристики перемещения стада через акваторию не меняются. Поведенческая доминанта в период миграций — движение, при строго мотивированном характере и сроках миграции (климатическое обоснование) [Le Cotte et al., 2017; Маклаков, Малыгина, 2018], любая акватория на пути следования является преградой естественного происхождения, преодоление которой должно максимально поддержать заданный поведенческий стереотип, т. е. минимизировать энергетические затраты и потери времени.

Постоянные переходы через акватории, расположенные на миграционных тропах, закрепили у диких северных оленей определенные образцы и этограммы движения. Характерным поведенческим признаком при пересечении акватории является стремление животных сохранить постоянную, из года в год закрепленную пространственную конфигурацию стада как наиболее оптимальную для сохранения сезонной поведенческой доминанты. Это, по всей видимости, является одной из адаптивно-популяционных форм диких северных оленей, которые можно рассматривать как результат процесса селекции, единственно эволюционно стабильный, выбранный среди множеств стратегий.

Активное промышленное освоение Арктики приводит к тому, что в настоящее время естественные процессы в популяциях диких северных оленей таймырской популяции происходят

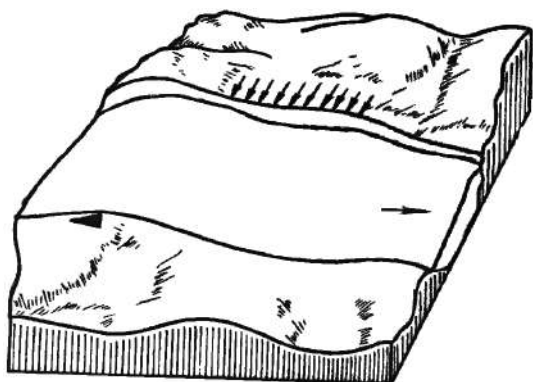


Рис. 1. Расположение стада вдоль берега

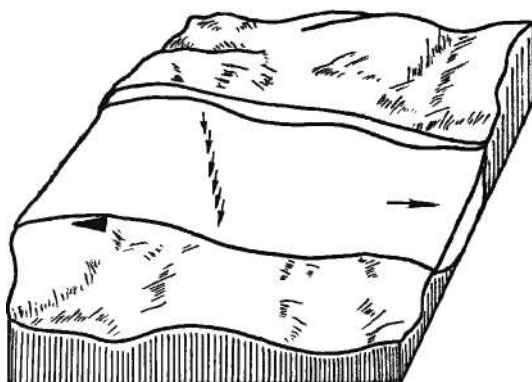


Рис. 2. Движение стада на воде

на фоне увеличения влияния негативных факторов: техногенных, пирогенных, зоогенных. Выявление особенностей поведения этих животных как процесса приспособления вида к меняющимся условиям обитания предполагает изучение миграционных этограмм, в которые входит преодоление водных преград, в том числе крупных рек [Линейцев, 1983; Савельев, 1977; Малыгина, 2000]. За годы эволюции сформировался определенный тип поведения, основанный на стадном инстинкте, являющимся видоспецифическим признаком этих животных [Малыгина, 2013; Панов, 1983; Bauer, Noye, 2014].

По результатам аэровизуальных и наземных наблюдений в период с 1984 по 2011 г. за характеристиками поведенческого стереотипа в период миграций дикого северного оленя на территории Восточного Таймыра [Malygina, 1997] составлены этограммы хроно-хоросных траекторий и конфигураций при преодолении водных преград, в частности реки Верхняя Таймыра, проведен анализ архитектур и принципов функционирования как адаптивных видо-специфических характеристик, позволяющих диким северным оленям жить и действовать в переменной внешней среде [Nicholson et al., 2016; Rosenthal et al., 2015].

Эти материалы были взяты за основу при построении математической модели группового преодоления водной преграды *Rangifer tarandus* L. [Малыгина, Сурков, 2018]. Под моделью мы понимаем результат абстрагирования при исследовании моделируемого объекта, с выделением наиболее существенных его свойств и характеристик, т. е. рассмотрение некоторой идеализации объекта. Предложенная модель заключается в представлении особей стада в качестве конфликтно-управляемой динамической системы [Krasovskii, Subbotin, 1988]. Формально мы делим его на два класса особей — вожак и остальное стадо, — для которых строятся свои законы управления, описывающие траектории их движения [Couzin et al., 2005; Torney et al., 2018]. При анализе каждой из подмоделей используются классические методы теории оптимального управления и дифференциальных игр. Так, например, траектория важенки находится с использованием методов теории оптимального управления [Pontryagin et al., 1964]. Построение траектории каждой особи из остального стада производится с помощью принципа управления с поводырём [Krasovskii, Subbotin, 1988], в качестве которого выбирается траектория важенки, в сочетании с управлением преследования. Полученное численное решение анализируется на наличие важного качественного признака: осуществления специфически выраженных вертикальных миграций, являясь при этом биологически реалистичным алгоритмом. В рассмотренных модельных примерах используются данные наблюдений на реке Верхняя Таймыра.

Результаты работы могут быть применены: в формировании общей платформы для систематического построения моделей адаптивного поведения, что является отработкой подхода к конструированию искусственных (в виде компьютерных программ или роботов) организмов, способных взаимодействовать с внешней средой; как задел для фундаментальных разработок

моделей когнитивной эволюции; для совершенствования методики охоты на дикого северного оленя [Размахин, Павлов, 1986; Сыроечковский, 1986] в целях увеличения экономической выгоды использования популяции при одновременной минимизации негативного влияния на ее численность.

2. Математические модели

Траектория движения животных определяется множеством факторов и зависит от биологических свойств организма и среды обитания. На основании наблюдений мы проводим математическую формализацию внешней среды, а также некоторых аспектов в поведении животных и влияющих на них факторов, которые мы считаем основными. Вопросами движения группы животных занимались многие авторы, см., например, работу [Berdahl et al., 2018] и библиографию в ней.

2.1. Модель движения важенки

Для описания движения важенки введем координатные оси: x_1 направлена перпендикулярно берегам реки, x_2 — вдоль берега. Если река имеет ширину l , то ее берега — это значения $x_1 = 0$ и $x_1 = l$. Пусть важенка может плыть с постоянной скоростью ρ и менять угол u направления вектора движения (управляющий параметр), при этом положим скорость течения реки постоянной и равной ξ_0 (внешнее возмущение). Данное предположение о скорости течения реки позволяет значительно упростить выкладки и обусловлено еще тем, что наблюдения проводились на нешироком участке реки, на котором значение скорости течения мало зависело от расстояния до берега. Также некоторая усредненная скорость реки — это информация, которую получает важенка на берегу, и важенка принимает решение о входе в воду. В данном исследовании нас интересует положение биологического объекта в пространстве, поэтому его можно заменить материальной точкой, уравнения движения которой запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho \cos u, \\ \dot{x}_2 &= \rho \sin u + \xi_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Управление u имеет ограничение $|u| \leq \pi/2$. Схематичное изображение траектории движения важенки на реке представлено на рис. 3.

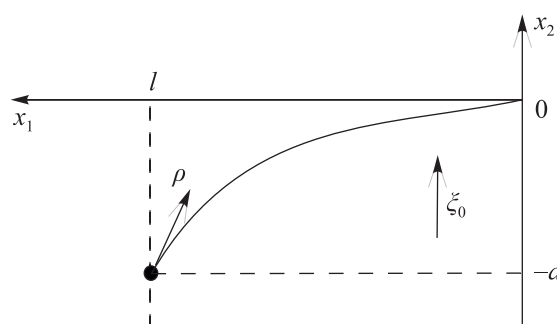


Рис. 3. Траектория движения важенки: l — ширина реки, a — выход тропы к реке, ρ — скорость особи в воде, ξ_0 — скорость течения реки

Поскольку движение в водной среде требует больших энергозатрат по сравнению с движением по земле [Fish, 1993] и при возможности выбора оленя выбирают путь по суше [Leblond et al., 2016], то мы предполагаем следующее (см. гипотезу 1).

Гипотеза 1. После входа в воду важенка стремится как можно скорее переплыть реку и выйти на тропу.

Поэтому функционал качества управления выбираем согласно задаче быстрогодействия в виде

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min.$$

Принимая во внимание то, что важенка является старой и опытной [Малыгина, 2005], считаем следующее (см. гипотезу 2).

Гипотеза 2. Траектория ее движения будет оптимальной для функционала J .

Таким образом, стоит задача (P): найти оптимальное по быстродействию управление, траекторию и время T , затрачиваемое на переход из положения $x_1(0) = l$, $x_2(0) = -a$ (выход тропы к реке) в положение $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$ (на противоположном берегу), т. е. для модели объекта управления (1) имеем задачу Лагранжа [Пантелеев, Бортакровский, 2003].

Теорема. Пусть для скоростей переплытия и течения реки выполнено соотношение

$$\rho \geq \frac{\xi_0 l}{\sqrt{a^2 + l^2}}. \quad (2)$$

Тогда решением задачи (P) будет оптимальное управление

$$u^*(t) \equiv \frac{c_2 \operatorname{sign} c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

и оптимальные траектории

$$x_1(t) = -\frac{\rho c_1 \operatorname{sign} c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} t + l, \quad x_2(t) = \left(-\frac{\rho c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \xi_0 \right) t - a, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются соотношениями

$$c_1 = \frac{-lT}{l^2 \pm |\xi_0 T - a|}, \quad c_2 = \frac{\pm |\xi_0 T - a| T}{l^2 \pm |\xi_0 T - a|}, \quad (5)$$

а время перехода T вычисляется по формуле

$$T = \begin{cases} \frac{a\xi_0 + \sqrt{\rho^2 a^2 + l^2(\rho^2 - \xi_0^2)}}{\xi_0^2 - \rho^2}, & \frac{\xi_0 l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \leq \rho < \xi_0, \\ \frac{a^2 + l^2}{2a\xi_0}, & \rho = \xi_0, \\ \frac{a\xi_0 - \sqrt{\rho^2 a^2 + l^2(\rho^2 - \xi_0^2)}}{\xi_0^2 - \rho^2}, & \xi_0 < \rho. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Для решения задачи (P) будем использовать принцип максимума Понтрягина. Составляем гамильтониан

$$H(t, \psi, \mathbf{x}, u) = -\psi_1 \rho \cos u + \psi_2 (\rho \sin u + \xi_0) - 1.$$

Находим условный максимум гамильтониана по управлению

$$u^* = \arg \max_{|u| \leq \pi/2} H(t, \psi(t), \mathbf{x}(t), u),$$

для этого вычислим

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1(t)\rho \sin u + \psi_2(t)\rho \cos u = 0,$$

откуда получаем

$$u^*(t) = -\arcsin \frac{\psi_2(t)}{\sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}}, \quad t \in [0, T].$$

Используя последнее выражение, выписываем канонические уравнения принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{\rho\psi_1(t)\text{sign } \psi_1(t)}{\sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}}, & x_1(0) &= l, & x_1(T) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\rho\psi_2(t)}{\sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}} + \xi_0, & x_2(0) &= a, & x_2(T) &= 0, \\ \dot{\psi}_1(t) &= -\frac{\partial H(t, \psi(t), x(t), u^*(t))}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\frac{\partial H(t, \psi(t), x(t), u^*(t))}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Из условия трансверсальности находим

$$H(T, \psi(T), \mathbf{x}(T), u^*(T)) = 0. \tag{7}$$

В результате получаем двухточечную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{\rho\psi_1(t)\text{sign } \psi_1(t)}{\sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}}, & x_1(0) &= l, & x_1(T) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\rho\psi_2(t)}{\sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}} + \xi_0, & x_2(0) &= -a, & x_2(T) &= 0, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, & H(T, \psi(T), x(T), u^*(T)) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Решая уравнения для вспомогательных переменных, находим

$$\psi_1(t) = c_1, \quad \psi_2(t) = c_2$$

и тождество (3). Учитывая последние формулы в (8), имеем

$$x_1(t) = -\frac{\rho c_1 \text{sign } c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} t + d_1, \quad x_2(t) = \left(-\frac{\rho c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \xi_0 \right) t + d_2.$$

Начальные условия на x_1 и x_2 краевой задачи (8) дают

$$d_1 = l, \quad d_2 = -a,$$

что приводит к формулам (4). Используя значения $x_1(T)$ и $x_2(T)$ в совокупности с условием (7), получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_1 \operatorname{sign} c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} T &= l, \\ \left(-\frac{\rho c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \xi_0 \right) T - a &= 0, \\ -c_1 \rho \frac{c_1 \operatorname{sign} c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + c_2 \left(-\frac{\rho c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \xi_0 \right) - 1 &= 0, \end{aligned}$$

решения которой определяются выражениями (5) и (6). Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученная в теореме траектория может свидетельствовать о наличии у важеньки ориентира на противоположном берегу, отличного от тропы, в направлении которого она движется на воде.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (2) для задачи (P) с системой (1) в данном случае носит скорее технический характер. Это соотношение обеспечивает существование возможности при выходе из одной точки берега достичь другую точку на противоположном берегу. Данное условие обретает биофизический смысл при рассмотрении более сложной модели, учитывающей изменение во времени скорости особи, зависимость скорости течения реки от расстояния до берега и наличие у тропы ширины до 10 м. Подобное развитие модели предполагается нами в будущих исследованиях.

2.2. Модель движения остального стада

Пусть остальное стадо состоит из K особей, занумерованных по порядку входа в воду, и движение каждой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k &= -\rho u_1^k, \\ \dot{x}_2^k &= \rho u_2^k + \xi_0, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (9)$$

Гипотеза 3. *Особи из стада стремятся двигаться в направлении идущего впереди.*

Будем предполагать, что управление строится по принципу экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [Krasovskii, Subbotin, 1988]. Подобные задачи управления в реальном времени решались в [Кряжимский, Максимов, 2013; Сурков, 2016]. Алгоритм их решения заключается в следующем [Osipov, Kryazhimskii, 1995]. Фиксируем семейство разбиений конечного промежутка времени $[0, T]$ контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_k = \{\tau_i^k\}_{i=1}^m, \quad \tau_0^k = 0, \quad \tau_m^k = T, \quad \tau_{i+1}^k = \tau_i^k + \delta.$$

Работа алгоритма разбивается на $m-1$ однотипных шагов. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. В момент времени τ_i вычисляется элемент

$$v_i = \arg \min \{ 2(x^{k-1}(\tau_i - r) - x^k(\tau_i), \rho w) + \alpha |w|^2 : w \in P \},$$

определяющий управление на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь r — запаздывание при входе в воду, равное 3 с [Малыгина, 2005], α — малый положительный параметр, множество $P = [-1, 1]$. Под действием этого управления уравнение (9) переходит из состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; \tau_{i-1}, x(\tau_{i-1}), v_{i-1})$ в состояние $x(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент времени T .

2.3. Упрощенная модель движения стада

В случае отсутствия опасности можно предложить упрощенную модель преодоления стадом реки, в которой каждая особь придерживается направления движения к противоположному берегу, не меняя его. Ее движение будет описываться системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho, \\ \dot{x}_2 &= \xi(x_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)^\top$, скорость течения реки (ввиду простоты модели) можно взять приближенной к реальности, т. е. имеющей параболическую зависимость от расстояния от берега $\xi(x_1) = \xi_0 - 4\xi_0(x_1 - l/2)^2/l^2$. Около берегов она равно нулю и принимает максимальное значение ξ_0 на середине реки.

Интегрируя уравнения системы (10) с начальными данными $x_1(0) = l$, $x_2(0) = -a$, имеем следующие траектории:

$$x_1(t) = -\rho t + l, \quad x_2(t) = \xi_0 t + \frac{4\xi_0 \left(\frac{l}{2} - \rho t\right)^3}{3\rho l^2} - \frac{\xi_0 l}{6\rho} - a.$$

Время пересечения реки $T = l/\rho$. В данном случае правый конец траектории не фиксирован и определяется только скоростью течения реки.

3. Численные эксперименты

Проведем численный расчет положения особей стада во время преодоления реки. Моделирование проводилось в системе Wolfram Mathematica.

3.1. Случай отсутствия внешнего воздействия

Параметры систем (1) и (10) выбираем согласно проведенным наблюдениям в Восточном Таймыре (река Верхняя Таймыра, 72.18 с. ш., 103.00 в. д.). Скорость течения реки на участках наблюдений $\xi_0 = 1.6$ м/с, скорость движения животного в воде $-\rho = 1.8$ м/с [Пармузин, 1964], время ожидания при входе в воду $r = 3$ с, выход тропы к реке $a = 10$ м и длина реки $l = 200$ м.

Результаты моделирования представлены на рис. 4, где в качестве модели взяты (1) и (9), и на рис. 5 с моделью в виде упрощенной системы (10).

На рис. 5 и рис. ?? представлены положения стада из 15 особей на воде через 150 с и через 550 с соответственно, когда в качестве модели взята упрощенная система.

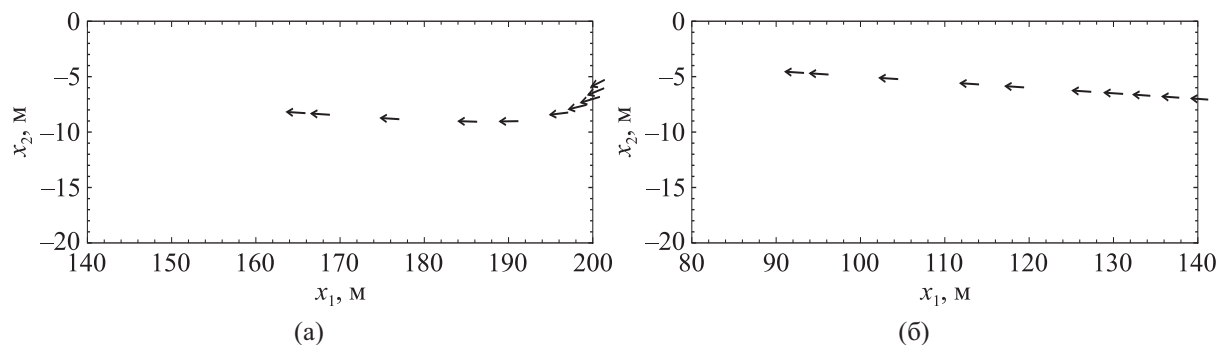


Рис. 4. Положение стада из 10 особей для моделей (1) и (9): (а) на 200 с; (б) на 600 с

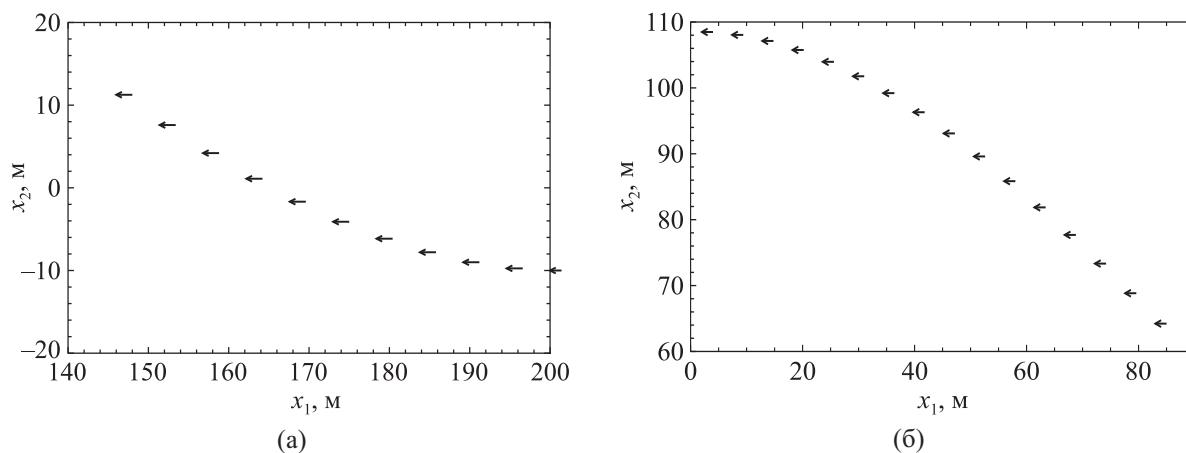


Рис. 5. Положение стада из 10 особей для модели (10): (а) на 150 с; (б) на 550 с

3.2. Случай наличия внешнего воздействия

Пусть движение особей описывается системами (1) и (9) с параметрами из предыдущего пункта.

Случай 1. В отсутствие фактора беспокойства стадо начинает вход в воду, его положение на 140 с представлено на рис. 6. В этот момент 3 особи «исчезает» (рис. 6, б), например, в процессе охоты.

Дальнейшее движение стада отражено на рис. 7.

Случай 2. Предложенная модель позволяет численно продемонстрировать действие внешнего воздействия на переплывающее стадо, один из видов которого (например, лодка) представлен на рис. 8.

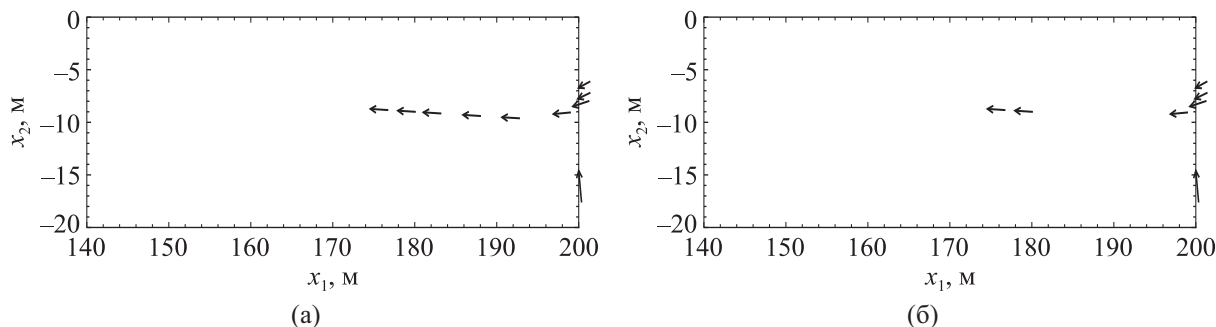


Рис. 6. Положение стада на 140 с: (а) до момента отстрела; (б) после момента отстрела

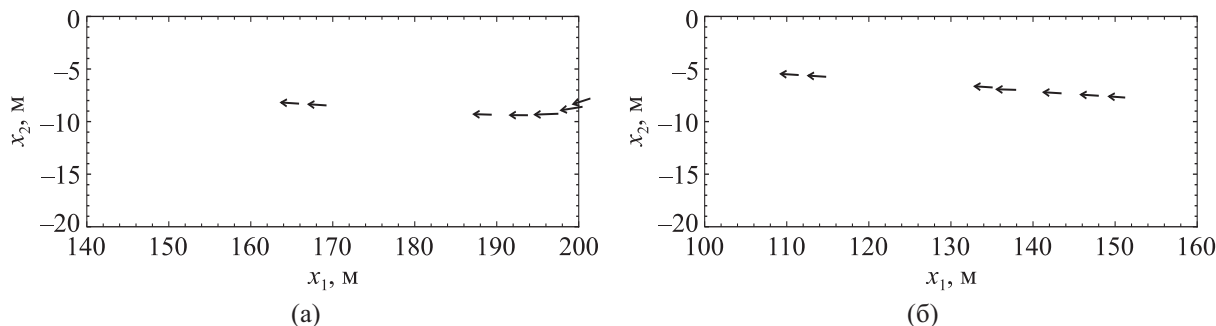


Рис. 7. Положение стада: (а) на 200 с; (б) на 500 с

Особь стада входят в воду и преодолевают реку. Их положение на 150 с и 600 с представлено на рис. 9. В момент времени $t = 600$ с мгновенное внешнее воздействие смещает часть особей, как показано на рис. 10, а. Дальнейшие положения особей на 601 с и 700 с приведены на рис. 10, б и рис. 10, в соответственно.

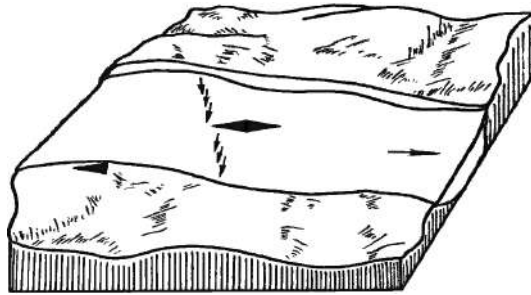


Рис. 8. Разбивка стада на два фрагмента и продолжение хода по стереотипу

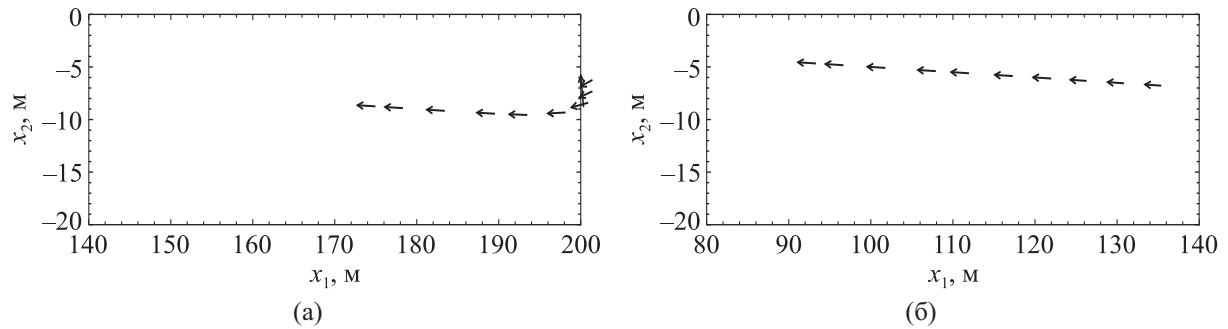


Рис. 9. Положение стада: (а) на 150 с; (б) на 600 с

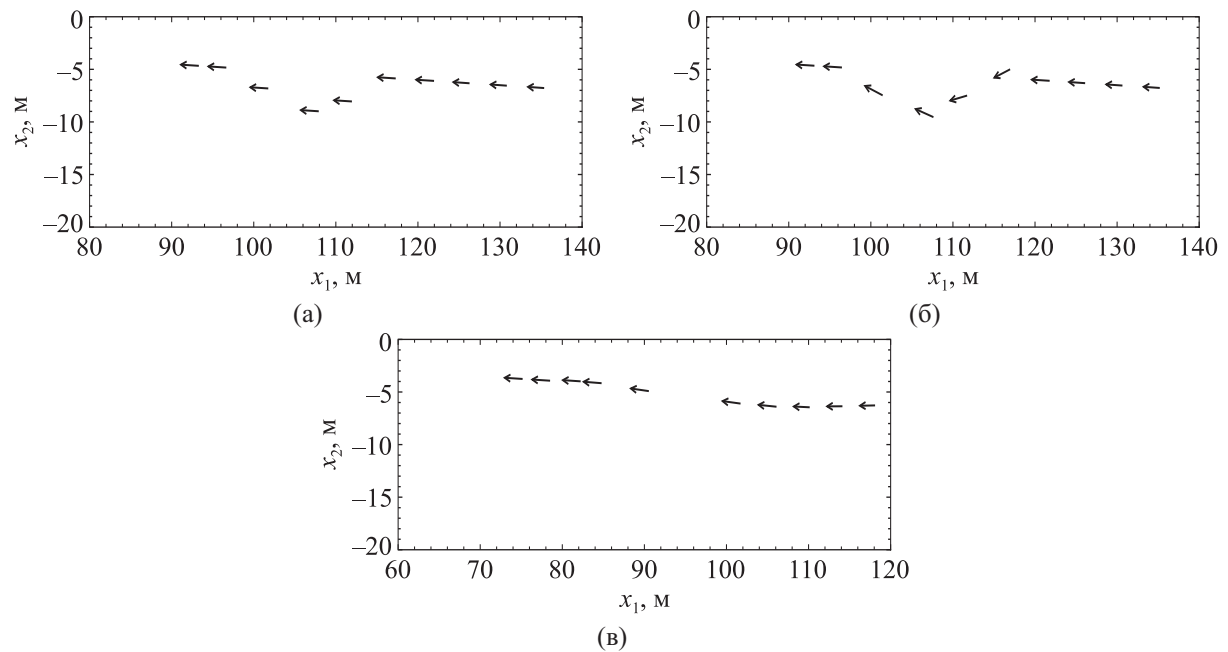


Рис. 10. Положение стада: (а) на 600 с в результате внешнего воздействия; (б) на 601 с воздействие прекратилось; (в) на 700 с

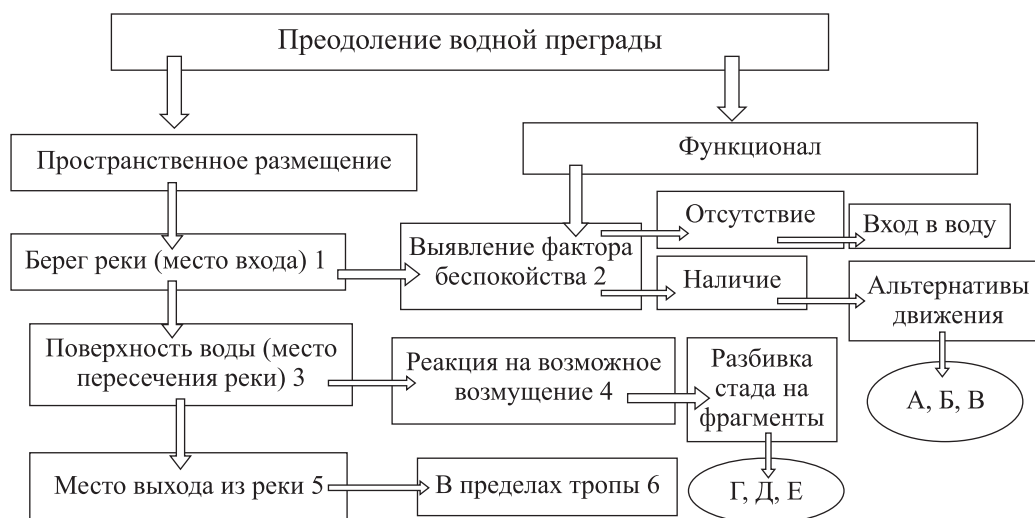


Рис. 11. Блок-схема экотона

4. Обсуждение

Все раздражители, действующие на оленей на водных переправах, можно условно разделить на две категории: первичные и вторичные. Первичные раздражители оказывают воздействие на животных в момент их выхода на берег. Стадо образует шеренгу вдоль реки (1). Здесь и далее: нумерация по блок-схеме рис. 11, в позиции выявления фактора беспокойства (2). Альтернативы движения: а) если направление ветра противоположно ходу животных, то запах человека (костра, пороха, бензина) и, в меньшей степени, звуки (голос, щелчки, треск) могут испугать животных, и они сразу же повернут обратно по наземной тропе, причем вожак первым начинает обратный ход, вслед идет все стадо, снова преобразовав шеренгу в цепочку; б) если направление ветра совпадает с направлением движения животных, то стадо может находиться на берегу достаточно долго, ожидая изменения направления ветра; в) если фактор беспокойства не выявлен, то первым в воду входит вожак (обычно это старая важенька). Стадо выстраивается цепочкой и плывет к противоположному берегу. Телята очень часто плывут, положив голову на круп матери. При появлении раздражителя (некоторого возмущения) вожаком выбирается альтернатива движения (3, 4). Выбор зависит от точки нахождения вожака на водной поверхности: г) вожак достиг половины пути (в приближенном варианте) — цепочка зверей распадается на небольшие фрагменты в точке внешнего воздействия на стадо, каждый из них плывет и стремится следовать тому же маршруту, что и в начале переправы, при этом в качестве фрагмента может быть одиночная особь (рис. 8); д) вожак не достиг половины пути — стадо плывет к месту входа в реку по траектории «петля иерархии»: первым разворачивается вожак, вслед за ним, цепочкой, — все стадо; е) стадо (вожак) не реагирует на действие раздражителя, это означает, что он слишком слабый как фактор беспокойства. При достижении противоположного берега стадо выходит на берег в заданной конфигурации.

Приведенная в работе модель аналитически описывает движение стада диких северных оленей в отсутствие внешнего возмущения. При численном моделировании все виды пространственных размещений (1, 3, 5) были получены. Более того, введение возмущений в модель при компьютерном эксперименте позволило смоделировать ситуацию выбора альтернатив (4). Характер полученных результатов полностью подтверждается натурными наблюдениями, за исключением обнаруженного в действительности сокращения больших разрывов в цепочке (рис. 7, а, б), что свидетельствует об увеличении скорости переплывания оставшимися особями. Основываясь

на долгосрочных и обоснованных натуральных наблюдениях, мы построили экологически реалистичную модель [Elith, Graham, 2009], поскольку соответствующим образом ограничили наши выводы связями между алгоритмом, данными и подобранными функциями.

Предлагаемый в работе подход к моделированию поведения животных не является единственным. Одним из широко распространенных видов экосистемного анализа является агентное моделирование (АМ). Его суть предполагает вывод свойства сложных систем путем выявления характерных признаков, свойств и способов взаимодействия составляющих частей системы — объектов (агентов). Этими объектами могут быть: а) большая часть составляющих экосистемы, в этом случае, как правило, один из объектов является фокусным, остальные рассматриваются как факторы влияния на исследуемые свойства; б) атрибуты и характеристики одного агента как качественные и количественные отражения, влияющие на состояние вида в экосистеме. Агентное моделирование в вышеизложенном подходе существовало со времен Аристотеля и Миддендорфа, развивалось и совершенствовалось по мере введения новых методов. Моделирование поведения начиналось с вербальных (словесных) моделей. Классический метод изучения поведения животных — прямое наблюдение и описание. «Описывая его [поведение. — *Уточнение авт.*] словами, мы тем самым создаем модель» [Баскин, 1976, с. 6]. Материал систематизируется как наглядно-образные (схемы, диаграммы, графики) и знаковые (описания) модели. Развитие технологий на сегодняшний день предоставляет исследователям широкий спектр методов, которые объединены в общие методические направления как ГИС-технологии, методы больших данных, дистанционное зондирование Земли [Белотелов и др., 2018; Стеряков, 2013]. Например, авторы в работе [Musiani et al., 2010] использовали ошейники с передатчиками для изучения взаимодействия составляющих экосистемы, где фокусным видом является волк. В основе построения модели в виде блок-схемы лежит пространственная сетка. Каждой ячейке сетки соответствует определенное поведение волка, которое определяется состоянием соседних ячеек и некоторыми другими факторами. Медведи, лоси и люди представлены в виде объектов без когнитивных способностей и составляют динамический компонент среды, в которой волки движутся и выполняют разные виды активности (охотятся на оленей, отдыхают, кормят щенков в логове, избегают медведей, человека, техногенного фактора). При любом методе архитектура АМ — это: а) концептуальная блок-схема, показывающая, как агенты связаны с окружающей средой; б) универсальный язык программирования, дающий начало рассмотрению автономности и «интеллекта» агента.

Мы не пытались провести всестороннее исследование состояния вида в экосистеме в целом (разные агенты, разные виды активности (пастьба, отдых, отел, наземные миграции) и многое другое), в нашем исследовании мы рассматриваем особенности и некоторые аспекты поведения *Rangifer tarandus* L. в конкретной видоспецифической ситуации и малоизученном случае — при преодолении водной преграды, которая является пространственно ограниченной областью. Уменьшение возможных видов активности и внешнего воздействия, по сравнению с АМ, позволяет при моделировании поведения животных выделить факторы, оказывающие основное влияние на поведенческий стереотип в конкретном случае. Дальнейшее аналитическое развитие модели видится естественным введением изменяющихся во времени характеристик водной среды и скорости особей, а также введением внешнего возмущения.

5. Заключение

В работе приведены модели и алгоритмы, описывающие преодоление реки стадом диких северных оленей, представляющие собой задел для фундаментальных разработок моделей когнитивной эволюции и формирования общей платформы для систематического построения моделей адаптивного поведения. Алгоритм движения особей, использующий траектории, построенные

с помощью теории оптимального управления и экстремального прицеливания, позволяет вести дальнейшее исследование в направлении введения фактора беспокойства, что было отражено в численных экспериментах. Упрощенный алгоритм может быть использован для моделирования переходов стада с большим числом особей. В хозяйственной деятельности полученные результаты открывают возможности управления сценариями развития популяционных систем, в частности, могут применяться для совершенствования действующей методики охоты на дикого северного оленя на водных переправах.

Список литературы (References)

- Баскин Л. М. Поведение копытных животных. — М.: Наука, 1976.
Baskin L. M. Povedenie zhivotnykh [Animal behavior]. — Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
- Белотелов Н. В., Коноваленко И. А., Назарова В. М., Зайцев В. А. Некоторые особенности групповой динамики в агентной модели «ресурс – потребитель» // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 6. — С. 833–850.
Belotelov A. A., Konovalenko I. A., Nazarova V. M., Zaitsev V. A. Some features of group dynamics in the resource-consumer agent model [Nekotoryye osobennosti gruppovoy dinamiki v agentnoy modeli “resurs–potrubitel”] // Computer Research and Modeling [Komp’yuternyye issledovaniya i modelirovaniye]. — 2018. — Vol. 10, No. 6. — P. 833–850 (in Russian).
- Кряжжмский А. В., Максимов В. И. О сочетании процессов реконструкции и гарантирующего управления // Автомат. и телемех. — 2013. — № 8. — С. 5–21.
Kryazhinskii A. V., Maksimov V. I. On combination of the processes of reconstruction and guaranteeing control // Autom. Remote Control. — 2013. — Vol. 74, No. 8. — P. 1235–1248. (Original Russian paper: Kryazhinskii A. V., Maksimov V. I. O sochetanii protsessov rekonstruktsii i garantiruyushchego upravleniya // Avtomat. i telemekh. — 2013. — No. 8. — P. 5–21.
- Линейцев С. Н. Сезонные миграции диких северных оленей на плато Путорана // Экология и рациональное использование наземных позвоночных севера Средней Сибири. — Новосибирск: ВАСХНИЛ Сиб. отд-ние, 1983. — С. 14–21.
Lineytshev S. N. Sezonnyye migratsii dikikh severnykh oleney na plato Putorana [Seasonal migrations of wild reindeer on the Putorana plateau] // Ekologiya i ratsional’noe ispol’zovanie nazemnykh pozvonochnykh severa Sredney Sibiri. — Novosibirsk: VASKhNIL Sib. otd-niye, 1983. — P. 14–21 (in Russian).
- Маклаков К. В., Малыгина Н. В. Адаптивные изменения сезонных миграций диких северных оленей на Таймыре // Проблемы Арктики и Антарктики. — 2018. — Т. 64, № 1. — С. 71–83.
Maklakov K. B., Malygina N. V. Adaptivnyye izmeneniya sezonnykh migratsyi dikikh severnykh oleney na Taimyre [Adaptive Change in Wild Reindeer Seasonal Migrations in the Taimyr Peninsula] // Problemy Arktiki i Antarktiki. — 2018. — Vol. 64, No. 1.— P. 71–83 (in Russian).
- Малыгина Н. В. Дикий северный олень (*Rangifer tarandus* L.) Восточного Таймыра: диссертация на соискание ученой степени кандидата биологических наук. — М., 2000.
Malygina N. V. Dikii severnyi olen’ (Rangifer tarandus L.) Vostochnogo Taimyra [Wild reindeer (Rangifer tarandus L.) of East Taimyr]: thesis for the degree of candidate of biological sciences. — Moscow, 2000 (in Russian).
- Малыгина Н. В. Объект охоты: дикий северный олень (*Rangifer tarandus* L.) Восточного Таймыра. — Екатеринбург: Банк культурной информации, 2005. — 112 с.
Malygina N. V. Ob’ekt okhoty: dikii severnyi olen’ (Rangifer tarandus L.) Vostochnogo Taimyra [Object of hunting: wild reindeer (Rangifer tarandus L.) of East Taimyr.]. — Ekaterinburg: Cultural Information Bank, 2005. — 112 p. (in Russian).
- Малыгина Н. В. Хоросинхронная динамика диких северных оленей (*Rangifer tarandus* L.) на территории Восточного Таймыра как отклик на внешние вызовы // В мире научных открытий. — 2013. — № 3.3. — С. 265–293.
Malygina N. V. Khorosinkhronnaya dinamika dikikh severnykh oleney (Rangifer tarandus L.) na territorii Vostochnogo Taimyra kak otklik na vneshnie vyzovy [Horosynchronous dynamics of wild reindeer (Rangifer tarandus L.) in the territory East Taimyr as a response to external challenges] // V mire nauchnykh otkrytii. — 2013. — No. 3.3. — P. 265–293 (in Russian).
- Малыгина Н. В., Сурков П. Г. К вопросу о моделировании группового преодоления водной преграды *Rangifer tarandus* L. // Тезисы докладов XXV Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». — Дубна, 2018. — С. 29.

- Malygina N. V., Surkov P. G.* On the issue of modeling group overcoming water obstacles *Rangifer tarandus* L. [K vo-prosu o modelirovanii gruppovogo preodoleniia vodnoi pregrady *Rangifer tarandus* L.] // Tezisy dokladov XXV Mezhdunarodnoi konferentsii "Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie" [Abstracts of the reports of the XXV International Conference "Mathematics. Computer. Education"]. — Dubna, 2018. — P. 29 (in Russian).
- Панов Е. Н.* Методологические проблемы в изучении коммуникации и социального поведения животных // Итоги науки и техники. Сер. Зоология позвоночных. — М.: ВИНТИ, 1983. — Т. 12. — С. 5–70.
Panov E. N. Metodologicheskie problemy v izuchenii kommunikatsii i sotsial'nogo povedeniya zhivotnykh [Methodological problems in the study of communication and social behavior of animals] // Itogi nauki i tekhniki. Ser. Zoologiya pozvonochnykh. — 1983. — Vol. 12.— P. 5–70 (in Russian).
- Пантелеев А. В., Бортакровский А. С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2003. — 583 с.
Panteleev A. V., Bortakovskii A. S. Teoriya upravleniya v primerakh i zadachakh [Control theory in examples and problems]. — Moscow: Vysshaya shkola, 2003. — 583 p. (in Russian).
- Пармузин Ю. П.* Средняя Сибирь. Очерк природы. — М.: Мысль, 1964. — 313 с.
Parmuzin Yu. P. Srednyaya Sibir'. Ocherk prirody [Central Siberia. Sketch of nature]. — Moscow: Mysl', 1964. — 313 p. (in Russian).
- Размахин В. В., Павлов Б. П.* Рекомендации по организации промысла диких северных оленей. — М.: ЦНИЛ Главохоты РСФСР, 1986. — 22 с.
Razmakhin V. V., Pavlov B. P. Rekomendatsii po organizatsii promysla dikikh severnykh olenei [Guidelines for organizing wild reindeer preying]. — Moscow: TsNIL Glavokhoty RSFSR, 1986. — 22 p. (in Russian).
- Савельев В. Д.* Поведение диких северных оленей на водных переправах // Экология и использование охотничьих животных Красноярского края: сборник ст. / АН СССР. ИЛИД. — Красноярск, 1977. — С. 17–20.
Savel'ev V. D. Povedenie dikikh severnykh olenei na vodnykh perepravakh [Behavior of wild reindeer on waterways] // Ekologiya i ispol'zovanie okhotnich'ikh zhivotnykh Krasnoyarskogo kraya. — 1977. — P. 17–20 (in Russian).
- Стеряков А. А.* Об одном универсальном методе построения моделей для сложных многоагентных систем // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 513–523.
Steryakov A. A. Ob odnom universal'nom metode postoeniya modeley dlya slozhnykh mnogoagentnykh sistem [A universal method for constructing the simulation model of complex multi-agent systems] // Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — 2013. — Vol. 5, No. 4. — P. 513–523.
- Сурков П. Г.* Отслеживание решения параболического уравнения с памятью для общего класса управлений // Изв. вузов. Матем. — 2016. — № 10. — С. 53–64.
Surkov P. G. Tracking of solution to parabolic equation with memory for general class of controls // Russian Math. (Iz. VUZ). — 2016. — Vol. 60, No. 10. — P. 44–54. (Original Russian paper: *Surkov P. G.* Otslezhivanie resheniya parabilicheskogo uravneniya s pamyat'yu dlya obshchego klassa upravleniy // Izv. vuzov. Matem. — 2016. — No. 10. — P. 53–64.
- Сыроечковский Е. Е.* Охота на диких северных оленей и проблема кругополярной культуры народов Севера // Северный олень. — М.: Агропромиздат, 1986. — С. 157–170.
Syroechkovskii E. E. Okhota na dikikh severnykh olenei i problema krugopolyarnoi kul'tury narodov Severa [Hunting for wild reindeer and the problem of the circular polar culture of the peoples of the North] // Severnyi olen'. — Moscow: Agropromizdat, 1986. — P. 157–170 (in Russian).
- Bauer S., Hoyer B. J.* Migratory animals couple biodiversity and ecosystem functioning worldwide // Science. — 2014. — Vol. 344, No. 1242552.
- Berdahl A. M., Kao A. B., Flack A., Westley P. A. H., Codling E. A., Couzin I. D., Dell A. I., Biro D.* Collective animal navigation and migratory culture: from theoretical models to empirical evidence // Phil. Trans. R. Soc. B. — 2018. — Vol. 373, No. 20170009.
- Couzin I. D., Krause J., Franks N. R., Levin S. A.* Effective leadership and decision-making in animal groups on the move // Nature. — 2005. — Vol. 433. — P. 513–516.
- Duquette L. S.* Snow characteristics along caribou trails and within feeding areas during spring migration // Arctic. — 1988. — Vol. 41, No. 2. — P. 143–144.

- Elith J., Graham C. H.* Do they? How do they? WHY do they differ? On finding reasons for differing performances of species distribution models // *Ecography*. — 2009. — Vol. 32, No. 1. — P. 66–77.
- Fish F. E.* Influence of hydrodynamic-design and propulsive mode on mammalian swimming energetics // *Aust. J. Zool.* — 1993. — Vol. 42, No. 1. — P. 79–101.
- Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-Theoretical Control Problems. — New York etc: Springer-Verlag, 1988. — 517 p.
- Leblond M., St-Laurent M.-H., Côté S. D.* Caribou, water, and ice — fine-scale movements of a migratory arctic ungulate in the context of climate change // *Movement Ecol.* — 2016. — Vol. 4, No. 1. — 14 p.
- Le Corre M., Dussault C., Steve D., Côté S. D.* Weather conditions and variation in timing of spring and fall migrations of migratory caribou // *Journal of Mammalogy*. — 2017. — Vol. 98, Iss. 1. — P. 260–271.
- Malygina N. V.* Le migrazione di renne nel Taimir centrale e orientale // *Alto Serie IV*. — 1997. — Vol. 115. — P. 111–117.
- Musiani M., Anwar Sk. M., McDermid G. J., Hebblewhite M., Marceau D. J.* How humans shape wolf behavior in Banff and Kootenay National Parks, Canada // *Ecological Modelling*. — 2010. — Vol. 221, Iss. 19. — P. 2374–2387.
- Nicholson K. L., Arthur S. M., Horne J. S., Garton E. O., Del Vecchio P. A.* Modeling Caribou Movements: Seasonal Ranges and Migration Routes of the Central Arctic Herd // *PLoS One*. — 2016. — Vol. 11, No. 4. — P. 1–20.
- Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. — Basel: Gordon and Breach, 1995. — 625 p.
- Politopoulos I.* Review and analysis of agent-based models in biology. — University of Liverpool, 2007.
- Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.* The mathematical theory of optimal processes. — New York: A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., 1964. — 338 p.
- Rosenthal S. B., Twomey C. R., Hartnett A. T., Wu H. S., Couzin I. D.* Revealing the hidden networks of interaction in mobile animal groups allows prediction of complex behavioral contagion // *Proc. Natl Acad. Sci. USA*. — 2015. — Vol. 112. — P. 4690–4695.
- Torney C. J., Lamont M., Debell L., Angohiatok R. J., Leclerc L. M., Berdahl A. M.* Inferring the rules of social interaction in migrating caribou // *Phil. Trans. R. Soc. B*. — 2018. — Vol. 373, No. 20170385.

УДК: 544.165: 615.917

Количественный анализ «структура – противоопухолевая активность» и рациональный молекулярный дизайн бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов

О. В. Тиньков^{1,а}, П. Г. Полищук², Д. С. Хачатрян³, А. В. Колотаев³,
А. Н. Балаев⁴, В. Н. Осипов⁵, В. Ю. Григорьев⁶

¹ Военный институт Министерства обороны ПМР,
Молдова, 3300, Приднестровье, г. Тирасполь, ул. Гоголя, д. 2В

² Институт молекулярной и трансляционной медицины, факультет медицины и стоматологии,
Университет Палацкого в г. Оломоуц,
Чешская Республика, 779 00, г. Оломоуц, ул. Гневотинская, д. 1333/5

³ Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» —
Институт химических реактивов и особо чистых химических веществ,
Россия, 107076, г. Москва, Богородский вал, д. 3

⁴ Акционерное общество «Фарм-синтез»,
Россия, 121357, г. Москва, ул. Верейская, д. 29, стр. 134

⁵ Национальный медицинский исследовательский центр онкологии имени Н. Н. Блохина
Министерства здравоохранения РФ,
Россия, 115478, г. Москва, Каширское шоссе, д. 23

⁶ Институт физиологически активных веществ Российской академии наук,
Россия, 142432, Московская область, г. Черноголовка, Северный пр., д. 1

E-mail: ^а oleg.tinkov.chem@mail.ru.

Получено 13.06.2019, после доработки — 14.08.2019.

Принято к публикации 06.09.2019.

Ингибиторы гистондеацетилаз (HDACi) рассматриваются в качестве перспективного класса препаратов для лечения рака из-за их влияния на рост клеток, дифференцировку и апоптоз. Ангиогенез играет важную роль в росте солидных опухолей и развитии метастазов. Фактор роста эндотелия сосудов (VEGF) является ключевым ангиогенным агентом, который секретируется злокачественными опухолями, что индуцирует пролиферацию и миграцию эндотелиальных клеток сосудов. В настоящее время наиболее перспективной стратегией в борьбе с онкологическими заболеваниями является создание гибридных лекарств, одновременно действующих на несколько физиологических мишеней. Значительный интерес с точки зрения создания бифункциональных противоопухолевых средств представляют соединения, содержащие одновременно N-фенил-4-аминохиназолин и гидроксамовую кислоту, так как данные фрагменты по отдельности присутствуют в уже успешно применяемых противоопухолевых лекарственных средствах. В этой связи в ходе литературного анализа была сформирована выборка из 42 соединений, содержащих указанные молекулярные фрагменты и обладающих экспериментальными данными по ингибированию HDAC, VEGFR-2 и росту клеток рака легкого человека MCF-7. С использованием симплексных дескрипторов и метода опорных векторов (Support Vector Machine, SVM) для указанной выборки, предварительно разделенной на обучающий и тестовый наборы, были построены удовлетворительные

($R^2_{\text{test}} = 0.64\text{--}0.87$) модели количественной связи «структура–активность» (Quantitative Structure-Activity Relationship, QSAR). Для полученных QSAR-моделей была проведена структурная интерпретация. Было оценено согласованное влияние различных молекулярных фрагментов на увеличение противоопухолевой активности исследуемых соединений. Среди заместителей N-фенильного фрагмента можно выделить положительный вклад брома в *para*-положении для всех трех видов активности. По результатам интерпретации был проведен рациональный молекулярный дизайн и предложены перспективные соединения. Для сравнительного QSAR-исследования использованы физико-химические дескрипторы, рассчитываемые программой HYBOT, метод случайного леса (Random Forest, RF), а также онлайн-версия экспертной системы OCHEM (<https://ochem.eu>). При моделировании OCHEM были выбраны PyDescriptor-дескрипторы и метод экстремального градиентного бустинга. Кроме того, полученные с помощью экспертной системы OCHEM модели были использованы для виртуального скрининга 300 соединений с целью отбора перспективных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов для последующего синтеза и испытаний.

Ключевые слова: ингибиторы гистондеацетилазы, ангиогенез, гибридные молекулы, симплексные дескрипторы, структурная интерпретация, виртуальный скрининг

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-11-2018-172 от 03.12.18). Уникальный идентификатор проекта RFMEFI62418X0051.

© 2019 Олег Викторович Тиньков, Павел Геннадьевич Полищук, Дереник Саркисович Хачатрян, Антон Владимирович Колотаев, Александр Николаевич Балаев, Василий Николаевич Осипов, Вениамин Юрьевич Григорьев
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 544.165: 615.917

Quantitative analysis of “structure – anticancer activity” and rational molecular design of bi-functional VEGFR-2/HDAC-inhibitors

O. V. Tinkov^{1,a}, P. G. Polishchuk², D. S. Khachatryan³, A. V. Kolotaev³,
A. N. Balaev⁴, V. N. Osipov⁵, V. Yu. Grigorev⁶

¹ Military Institute of the Ministry of Defense,
2B Gogol st., Tiraspol, Transdnistria, 3300, Moldova

² Institute of Molecular and Translational Medicine,
Faculty of Medicine and Dentistry, Palacký University and University Hospital in Olomouc,
1333/5 Hněvotínská st., Olomouc, 779 00, Czech Republic

³ NRC «Kurchatov Institute» – IREA,
3 Bogorodsky val, Moscow, 107076, Russia

⁴ JSC «Pharm-Sintez»,
29/134 Vereyskaya st., Moscow, 121357, Russia

⁵ NMRC of oncology N. N. Blokhin of the Health Ministry of Russia,
23 Kashirskoye Shosse, Moscow, 115478, Russia

⁶ Institute of Physiologically Active Compounds, Russian Academy of Sciences,
1 Northern Passage, Chernogolovka, Moscow oblast, 142432, Russia

E-mail: ^a oleg.tinkov.chem@mail.ru

Received 13.06.2019, after completion — 14.08.2019.

Accepted for publication 06.09.2019.

Inhibitors of histone deacetylases (HDACi) have considered as a promising class of drugs for the treatment of cancers because of their effects on cell growth, differentiation, and apoptosis. Angiogenesis play an important role in the growth of most solid tumors and the progression of metastasis. The vascular endothelial growth factor (VEGF) is a key angiogenic agent, which is secreted by malignant tumors, which induces the proliferation and the migration of vascular endothelial cells. Currently, the most promising strategy in the fight against cancer is the creation of hybrid drugs that simultaneously act on several physiological targets. In this work, a series of hybrids bearing N-phenylquinazolin-4-amine and hydroxamic acid moieties were studied as dual VEGFR-2/HDAC inhibitors using simplex representation of the molecular structure and Support Vector Machine (SVM). The total sample of 42 compounds was divided into training and test sets. Five-fold cross-validation (5-fold) was used for internal validation. Satisfactory quantitative structure—activity relationship (QSAR) models were constructed ($R^2_{\text{test}} = 0.64\text{--}0.87$) for inhibitors of HDAC, VEGFR-2 and human breast cancer cell line MCF-7. The interpretation of the obtained QSAR models was carried out. The coordinated effect of different molecular fragments on the increase of antitumor activity of the studied compounds was estimated. Among the substituents of the N-phenyl fragment, the positive contribution of *para* bromine for all three types of activity can be distinguished. The results of the interpretation were used for molecular design of potential dual VEGFR-2/HDAC inhibitors. For comparative QSAR research we used physico-

chemical descriptors calculated by the program HYBOT, the method of Random Forest (RF), and on-line version of the expert system OCHEM (<https://ochem.eu>). In the modeling of OCHEM PyDescriptor descriptors and extreme gradient boosting was chosen. In addition, the models obtained with the help of the expert system OCHEM were used for virtual screening of 300 compounds to select promising VEGFR-2/HDAC inhibitors for further synthesis and testing.

Keywords: hystondeacetylases, hybrid molecules, simplex descriptors, structural interpretation, virtual screening

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 911–930 (Russian).

The work was supported by Ministry of science and higher education of the Russian Federation (agreement No. 075-11-2018-172 of 03.12.18). Unique project ID RFMEFI62418X0051.

© 2019 Oleg V. Tinkov, Pavel G. Polishchuk, Derenik S. Khachatryan,
Anton V. Kolotaev, Alexander N. Balaev, Vasily N. Osipov, Benjamin Yu. Grigorev
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

В настоящее время, несмотря на активное развитие различных методов лечения онкологических больных, химиотерапия является основным, а при некоторых формах и стадиях распространения злокачественных опухолей — единственным методом лечения.

Наиболее серьезным препятствием к повышению эффективности химиотерапии опухолей остается фенотип их множественной лекарственной устойчивости. Утрата программы клеточной гибели дает возможность опухолевой клетке сохранять жизнеспособность в присутствии высоких концентраций противоопухолевых лекарств и формировать опухолевую ткань, абсолютно резистентную к лекарственному лечению. Достигнуть реактивации апоптоза в таких опухолевых клетках становится практически невозможным. В связи с этим актуальной остается потребность в создании новых противоопухолевых препаратов для избирательного воздействия на опухолевые клетки.

При целом ряде злокачественных опухолей различных локализаций в последние годы с успехом применяются химио- и биотерапевтические препараты направленного действия, позволяющие селективно воздействовать только на белки, участвующие в канцерогенезе и определяющие способность опухоли к прогрессии и метастазированию, — таргетные препараты. Однако через несколько месяцев монотерапии таргетным препаратом наступает резистентность. Сочетание таргетной терапии и существующих химиотерапевтических препаратов — комбинированная терапия — во многих случаях повышает эффективность лечения, но в отдельных случаях приводит к значительному увеличению токсичности, ограничивая продолжение исследований в этом направлении. Различные значения растворимости, отличия в фармакинетике и других свойствах двух или более химических веществ ограничивают применение комбинированной терапии. Кроме того, нормативные требования комбинированной терапии более сложны, поскольку профиль безопасности каждого препарата должен быть изучен перед клиническими испытаниями, затрудняя вопросы регулирования, в частности если два препарата разрабатываются разными компаниями.

В настоящее время в качестве перспективной стратегии лечения рака рассматриваются проектирование и синтез гибридных соединений, состоящих из двух или более биоактивных фрагментов, объединенных в один препарат и действующих через активацию нескольких механизмов гибели клетки. В гибридных молекулах два или более фармакофора соединены ковалентной связью в одной молекуле и действуют путем ингибирования одной мишени или одновременного ингибирования двух разных мишеней. Гибридные соединения способны устранить отдельные недостатки препаратов, направленных на блокаду какого-то одного сигнального пути. Сочетание двух активных групп в одной молекуле может приводить к более выраженному терапевтическому эффекту по сравнению с индивидуальными компонентами. Концепция гибридных лекарств более подробно изложена в публикации [Meunier, 2008].

Среди перспективных терапевтических мишеней для лечения злокачественных опухолей выделяют гистондеацетилазы (Histone deacetylases, HDACs), представляющие собой ферменты, удаляющие ацетильные группы гистонов. Модифицируя гистоны и изменяя конформацию хроматина, гистондеацетилазы играют важную роль в регуляции экспрессии генов. Гистондеацетилазы представлены 18 белками, принадлежащими к 4-м классам. Внимание исследователей привлекают ингибиторы гистондеацетилаз (HDACi), индуцирующие апоптоз, арест клеточного цикла, старение, дифференцировку, иммуногенность клеток и ингибирующие ангиогенез при некоторых видах рака. Среди HDACi наиболее важной и многочисленной группой являются производные гидроксамовой кислоты (Вориностат, Ромидепсин, Белиностат). Также к HDACi относятся некоторые циклические пептиды, алифатические кислоты и бензамиды. Большинство HDACi имеют трехкомпонентную структуру, состоящую из цинк-связывающего участка (zinc binding group, ZBG), линкера, способного занимать канал фермента, и функциональную группу, взаимодействующую с аминокислотными остатками у входа в активный центр HDAC («крышка», Capping group) (рис. 1). Ингибиторы классических деацетилаз функциони-

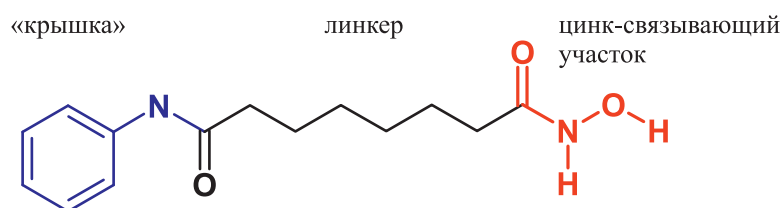


Рис. 1. Фармакофорное строение ингибиторов гистондеацетилаз на примере препарата Вориностат

руют путем связывания и вытеснения иона цинка из активного центра и таким образом инактивируют систему смены зарядов [West, Johnstone, 2014].

Одним из необходимых условий выживания опухолей разных гистологических типов является индуцирование ангиогенеза, в этой связи антиангиогенная терапия, основными мишенями которой являются фактор роста эндотелия сосудов (VEGF) и его рецепторные тирозинкиназы VEGFR-1, 2, играет важнейшую роль в борьбе с онкологическими заболеваниями. Блокирование VEGF/VEGFR-2-сигнального пути снижает кровоснабжение опухоли, приводя к гибели опухолевых клеток из-за нехватки питательных веществ и кислорода. Ингибиторы VEGF, производные хиназолина, такие как вандетаниб, седираниб, нашли активное применение при лечении онкологических заболеваний [Wells et al., 2010].

В публикациях [Yu et al., 2013; Rajagopalan et al., 2013] успешно применено фармакофорное моделирование к различным типам VEGFR-2-ингибиторов, при этом общие признаки данных ингибиторов включают акцептор и донор водородной связи, ароматическое гидрофобное кольцо, однако дистанции между фармакофорными группами и их взаимное расположение различны и зависят от скаффолдов исследуемых соединений.

Некоторые производные хиназолина проявляют свойства ингибиторов HDACi [Lin et al., 2010]. Согласно имеющимся данным [Yang et al., 2016] хиназолиновый цикл может выступать в роли эффективного домена поверхностного взаимодействия («крышки») с активными сайтами HDAC.

С другой стороны, некоторая часть HDACi способна подавлять кровоснабжение опухоли. Исследования HDACi выявили угнетение ангиогенеза путем подавления индуцирующих ангиогенез генов, таких как VEGF, VEGFR-2, HIF-1 α , Tie-2, и эндотелиальной синтазы оксида азота (eNOS) [Zupkovitz et al., 2006]. Несомненный интерес вызывают новые публикации о снижении экспрессии обоих рецепторов VEGF в клетках нейроblastомы HDACi [Deroanne et al., 2002].

Относительно недавно опубликован ряд примеров бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016].

С учетом вышесказанного логичным выглядит создание бифункциональных агентов, одновременно ингибирующих VEGFR-2 и HDAC, на основе двух фармакофорных групп — хиназолинов и гидроксамовых кислот.

В связи с возрастанием сложности поиска новых высокоактивных соединений значительное внимание исследователей привлекают методы количественной связи «структура – активность/свойство» (QSAR/QSPR), оказывающие значительную помощь в снижении как финансовых, так и временных затрат при разработке потенциальных лекарственных средств.

Детальный анализ существующих QSAR-моделей ингибиторов HDACs приведен в публикациях [Pham et al., 2017; Tang et al., 2009], при этом необходимо отметить, что большинство опубликованных исследований основаны на методах 3D-QSAR (ComFA, CoMSIA) в сочетании с молекулярным докингом, при этом размер выборок колеблется от 16 до 1488 соединений. Полученная с их помощью разноплановая информация представляет значительный интерес для практического использования: несколько разработанных моделей применены для виртуального скрининга HDACi в таких базах данных химических соединений, как ZINC, PubChem, Maybridge [Liu et al., 2010]. В работе [Tang et al., 2009] первоначально для выборки из 59 ингибиторов гистондеацетилаз класса 1 (HDAC1) созданы QSAR-модели, которые далее использо-

вались для поиска соединений-хитов методом виртуального скрининга (virtual screening, VS) среди 9 500 000 соединений, представленных в базах данных ZINC7.0, World Drug Index (WDI), ASINEX Synergy. Среди отобранных 45 хитов находились структурно уникальные соединения, скаффолды которых отсутствовали в первоначальной выборке. Четыре соединения с новыми скаффолдами были экспериментально протестированы, и три из них подтвердили высокую активность в качестве ингибиторов HDAC1 — со значения IC_{50} , равного 1 μ M для наиболее активного из них. Четвертое соединение позднее проявило активность в качестве селективного ингибитора HDAC6. Более того, два предложенных соединения-хита — продаваемые лекарства, которые, по понятным причинам, могут быстрее, чем вновь предложенные соединения, — использованы в качестве противораковых агентов. Вышеприведенное исследование иллюстрирует возможности комбинированного метода QSAR-VS в качестве общего подхода для эффективной идентификации новых физиологически активных соединений.

Однако в ряде случаев существующие QSAR-модели ингибиторов HDACs имеют ограниченное применение. Например, в методе CoMFA [Guo et al., 2005] существуют определенные трудности при анализе соединений разнородных по структуре из-за неоднозначности трехмерного выравнивания структур. Применяемые в большинстве существующих QSAR-моделей регрессионные методы анализа данных (MLR, PLS) [Xie et al., 2004] могут давать хорошие результаты только при наличии линейной связи между структурой и активностью. Один из способов преодоления вышеуказанного недостатка регрессионного анализа заключается в использовании непараметрических методов, в частности различных методов машинного обучения (machine learning, ML). Так, в публикациях [Tang et al., 2009] применялся метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM), а в [Zhao et al., 2013] — метод k -ближайших соседей (k -nearest neighbor algorithm, kNN). В работе [Pham et al., 2017] приведено консенсусное QSAR-моделирование с использованием в том числе методов kNN, SVM, случайного леса (Random Forest, RF). Отметим, однако, что примененные в данной работе при QSAR-моделировании дескрипторы, рассчитываемые программой Dragon v.6.0, сильно ограничивают возможность интерпретации полученных моделей с целью получения информации, необходимой для последующего рационального молекулярного дизайна [Polishchuk, 2017].

В ряде случаев [Ragno et al., 2008] авторы не приводят важных статистических характеристик моделей, таких как коэффициент детерминации (корреляции) между наблюдаемыми и предсказанными значениями активности при кросс-валидации для соединений обучающей выборки, а также указанный параметр для соединений тестовой выборки. Хотя именно эти показатели характеризуют качество и прогнозирующую способность модели и ее возможность использования в дальнейших исследованиях.

К сожалению, большинству существующих QSAR-моделей ингибиторов VEGFR-1, 2 [Yu et al., 2007; Sun et al., 2013; Rajagopalan et al., 2013; Reid et al., 2016; Patel et al., 2009] присущи вышеуказанные проблемы и ограничения. Следует отметить, что авторами публикации [Marzago et al., 2011] в рамках вышеуказанной перспективной стратегии разработки многофункциональных противоопухолевых средств предложены мультитаргетные классификационные QSAR-модели, количественно описывающие связь «структура – анти tiroзинкиназная активность», в том числе в отношении VEGFR-1.

В ходе литературного анализа не найдены публикации, посвященные созданию QSAR-моделей бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов, содержащих гидроксамовые кислоты и фрагменты хинозалинового цикла. Поэтому в задачи данного исследования входило:

- 1) построение QSAR-моделей бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов, содержащих гидроксамовые кислоты и фрагменты хинозалинового цикла;
- 2) структурная интерпретация построенных QSAR-моделей с целью выявления фрагментов, наиболее влияющих на проявление VEGFR-2/HDAC-ингибиторной активности;
- 3) рациональный молекулярный дизайн и виртуальный скрининг с использованием построенных QSAR-моделей с целью выявления наиболее перспективных соединений для последующего синтеза и исследований.

2. Методы

Источником формирования выборок для QSAR-моделирования послужили публикации [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016], в каждой из которых приведены экспериментальные значения для соединений, содержащих одновременно N-фенил-4-аминохиназолин и гидроксамовую кислоту, в отношении трех видов активностей:

- 1) ингибирование HDAC (изоформы);
- 2) ингибирование VEGFR-2;
- 3) ингибирование роста клеток рака легкого MCF-7. В настоящее время данная клеточная линия активно используется при исследовании *in vitro* цитотоксичности противоопухолевых лекарственных средств.

С целью расширения структурного пространства для QSAR-моделирования выборки из двух указанных публикаций [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016] объединены по соответствующим видам активностей в общие выборки, что, с нашей точки зрения, допустимо, поскольку имеющиеся в публикациях результаты получены одними авторами в одинаковых условиях и значения трех видов активностей для референтных структур (Вандетаниб и Вориностат) практически совпадают.

Для выборок приведенные в первоисточниках экспериментальные значения соответствующих видов биологической активности, выраженные с помощью концентрации полумаксимального ингибирования (IC_{50} , nM или μM), были сконвертированы в отрицательный десятичный логарифм данной величины (pIC_{50}), который наиболее общепринят в QSAR-исследованиях и используется в случаях, когда линейный рост концентрации вызывает экспоненциальный рост эффекта, по формуле

$$pIC_{50} = -\log_{10}(IC_{50}). \quad (1)$$

Экспериментальные значения и структуры соединений, экспортированные из публикаций [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016], приведены в таблице 1.

С целью оценки предсказательной способности QSAR-моделей первоначальные общие выборки разделяли на обучающие (ws) и тестовые (ts) наборы. Для этого в каждой выборке общий набор соединений упорядочивали по возрастанию активностей и каждое пятое соединение помещали в тестовый набор. Исходя из этого, размер обучающего и тестового наборов для каждого вида активности соответственно составил 80 и 20 процентов от общей выборки. Соединения, не имеющие точного значения активности, например **6ea**, **6eb**, **6ec**, **6ed** со значением $pIC_{50} < 5.0$ для VEGFR-2, при формировании выборок не учитывались.

Для стандартизации структур использовали ChemAxon Standardizer (<https://chemaxon.com/products/chemical-structure-representation-toolkit>).

При описании молекулярной структуры использованы 2D-симплексные дескрипторы, рассчитываемые в рамках симплексного представления молекулярной структуры (СПМС, Simplex representation of molecular structure, SiRMS, <https://github.com/DrrDom/sirms>). В рамках СПМС молекула рассматривается как система различных симплексов — четырехатомных молекулярных фрагментов фиксированной структуры (рис. 2).

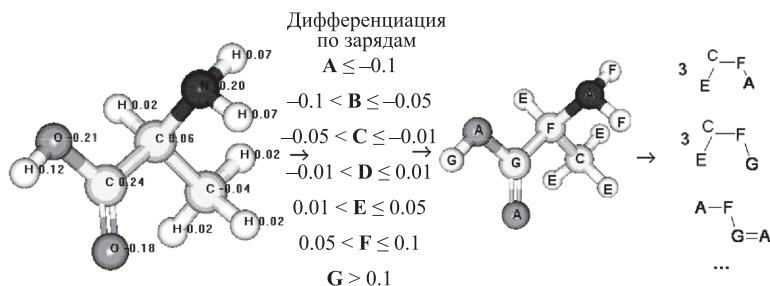


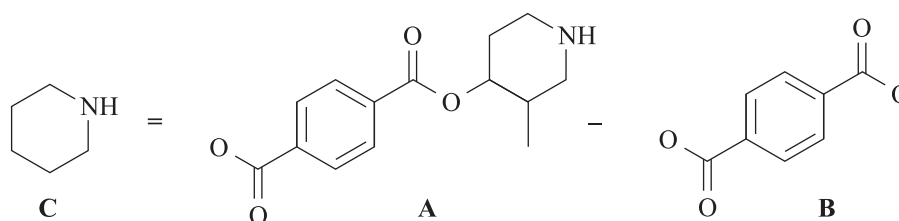
Рис. 2. Пример 2D-генерации симплексных дескрипторов для аланина на 2D-уровне при использовании дифференциации атомов по их парциальным зарядам

Таблица 1. Структуры соединений и их экспериментальные значения активностей

№	Соединение	R ¹	R ²	R ³	R ⁴	n	pIC ₅₀			Источник
							VEGFR-2	HDAC	MCF-7	
1	6aa	F	H	H	H	2	6.06	6.17	<4	[Peng et al., 2016]
2	6ab	F	H	H	H	3	6.08	6.26	<4	
3	6ac	F	H	H	H	4	6.04	6.84	4.08	
4	6ad	F	H	H	H	5	6.12	7.49	4.82	
5	6ba	H	H	F	H	2	6.42	5.87	<4	
6	6bb	H	H	F	H	3	6.34	6.86	4.13	
7	6bc	H	H	F	H	4	6.28	7.54	4.74	
8	6bd	H	H	F	H	5	6.57	8.07	5.62	
9	6ca	Cl	H	H	H	2	6.07	5.90	<4	
10	6cb	Cl	H	H	H	3	6.08	6.89	4.11	
11	6cc	Cl	H	H	H	4	6.16	7.54	4.82	
12	6cd	Cl	H	H	H	5	6.44	7.74	5.11	
13	6da	H	H	Cl	H	2	6.74	6.16	4.07	
14	6db	H	H	Cl	H	3	6.66	6.88	4.21	
15	6dc	H	H	Cl	H	4	6.50	7.96	5.40	
16	6dd	H	H	Cl	H	5	6.67	8.49	5.77	
17	6ea	Br	H	H	H	2	<5.0	6.08	<4	
18	6eb	Br	H	H	H	3	<5.0	7.13	4.48	
19	6ec	Br	H	H	H	4	<5.0	7.51	4.77	
20	6ed	Br	H	H	H	5	<5.0	8.06	5.59	
21	6fa	H	H	Br	H	2	7.01	6.26	4.28	
22	6fb	H	H	Br	H	3	7.23	7.17	4.44	
23	6fc	H	H	Br	H	4	6.82	7.92	5.46	
24	6fd	H	H	Br	H	5	7.13	8.66	6.07	
25	Вандетаниб	–	–	–	–	–	7.27	<5.0	4.73	
26	Вориностат	–	–	–	–	–	<5.0	7.82	5.38	
27	6a	H	Cl	H	H	2	6.32	6.19	<4	[Peng et al., 2015]
28	6b	H	Cl	H	H	3	6.45	6.92	4.19	
29	6c	H	Cl	H	H	4	6.21	7.77	5.07	
30	6d	H	Cl	H	H	5	6.30	8.27	5.49	
31	6e	H	Br	H	H	2	6.20	6.27	<4	
32	6f	H	Br	H	H	3	6.36	7.01	4.16	
33	6g	H	Br	H	H	4	6.38	7.82	5.07	
34	6h	H	Br	H	H	5	6.34	8.35	5.55	
35	6i	Cl	H	Cl	H	2	6.43	6.67	4.02	
36	6j	Cl	H	Cl	H	3	6.86	7.07	4.25	
37	6k	Cl	H	Cl	H	4	6.94	7.85	5.19	
38	6l	Cl	H	Cl	H	5	7.08	8.55	5.92	
39	6m	Cl	H	H	Cl	2	5.90	6.46	<4	
40	6n	Cl	H	H	Cl	3	5.67	7.24	4.35	
41	6o	Cl	H	H	Cl	4	5.28	7.68	4.86	
42	6p	Cl	H	H	Cl	5	5.61	8.08	5.40	
25	Вандетаниб	–	–	–	–	–	7.21	<5.0	4.73	
26	Вориностат	–	–	–	–	–	<5.0	7.92	5.35	

Дескриптором в этом случае служит количество симплексов одного вида. На 2D-уровне атомы (вершины симплекса) дифференцируют не только по природе «метки» атома, но и с учетом различных физико-химических свойств — частичного заряда на атоме, липофильности, рефракции, способности выступать донором или акцептором водорода при образовании водородной связи.

Одним из принципов проведения QSAR-исследований, предложенных экспертной группой OECD (Organization for Economic Cooperation and Development), является интерпретация полученной модели. Симплексные дескрипторы позволяют интерпретировать получаемые модели без существенных ограничений, присущих другим дескрипторам. В данном исследовании структурная интерпретация проводилась в соответствии с подходом [Polishchuk et al., 2013], при котором вклад исследуемого фрагмента (C) рассчитывался путем нахождения разницы между рассчитанными значениями активности/свойства для родительской структуры (A) и гипотетической структуры (B), полученной удалением исследуемого фрагмента (C) из родительской структуры (A) (рис. 3).



$$W(C) = X(A) - X(B)$$

Рис. 3. Используемый принцип структурной интерпретации: $W(C)$ — вклад фрагмента (C), $X(A)$ — предсказанное значение активности/свойства родительской структуры (A), $X(B)$ — предсказанное значение активности/свойства для гипотетической структуры (B)

При моделировании с использованием симплексных дескрипторов применяли пакет Scikit-learn для языка программирования Python, в котором реализован метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM) [Pedregosa et al., 2011]. Для внутренней валидации использовали процедуру пятикратной кросс-валидации (5-folds). При QSAR-моделировании для тестовых выборок учитывали вхождение соединений в область применимости (applicability domain, AD) [Jaworska et al., 2005], при этом если значение хотя бы одного дескриптора выходило за пределы его минимального или максимального значения для обучающей выборки, то соединение тестовой выборки, содержащее данный дескриптор, не входило в область применимости (bounding box). Вышеописанный подход для QSAR-моделирования с использованием симплексных дескрипторов реализован в виде программного обеспечения SPCI, которое находится в свободном доступе (http://qsar4u.com/pages/sirms_qsar.php).

Для сравнительного анализа предсказательной способности QSAR-моделей, построенных с помощью симплексных дескрипторов, при моделировании также использовались физико-химические дескрипторы, рассчитываемые программой HYBOT, в основе которых лежит оценка H-донорной и H-акцепторной способности молекул [Raevsky et al., 1992]. Всего было рассчитано 39 дескрипторов, из них в финальные QSAR-модели вошло 5 дескрипторов: ΣE_{ad} — сумма энтальпийных H-акцепторных и H-донорных дескрипторов; ΣC_a — сумма свободноэнергетических H-акцепторных дескрипторов; $\Sigma E_{a/\alpha}$ — сумма энтальпийных H-акцепторных дескрипторов, деленная на молекулярную поляризуемость; $\Sigma E_{ad/\alpha}$ — сумма энтальпийных H-акцепторных и H-донорных дескрипторов, деленная на молекулярную поляризуемость; Csp^3ac — число ациклических атомов углерода в состоянии sp^3 -гибридизации.

Создание QSAR-моделей при использовании вышеуказанных физико-химических дескрипторов проводили с использованием метода случайного леса (Random forest, RF). При выполнении регрессии в модели RF применяли ансамбль решающих деревьев [Breiman, 2001]. Каждое

дерево формировали на основе бутстреп-процедуры. Для конструирования деревьев на стадии расщепления использовали фиксированное число случайно выбранных переменных. Деревья решений создавали без обрезания. RF-моделирование проводили с помощью компьютерной программы RRforest (http://www.stat.berkeley.edu/~breiman/RandomForests/reg_examples/RFR.f) с использованием следующих параметров: jbt (число деревьев) = 500, mtry (число случайно выбираемых переменных на каждом узле) = $m/3$ (m — общее число переменных) и ndsize (число точек в узле, ниже которого дерево не расщепляли) = 5.

Отбор физико-химических дескрипторов, полученных с помощью программы HYBOT, и конструирование на их основе QSAR-моделей осуществляли путем перебора всех возможных комбинаций из 1-й, 2-х и 3-х переменных. Для оценки качества моделей использовали величину FIT (модифицированный критерий Фишера), которую рассчитывали по формуле [Kubinyi, 1994]

$$\text{FIT} = \frac{R^2(n-k-1)}{((n+k^2) \times (1-R^2))}, \quad (2)$$

где R^2 — квадрат коэффициента линейной корреляции, n — число соединений, k — число независимых переменных.

В качестве лучших моделей выбирали те из них, которые имели максимальные значения FIT в условиях кросс-валидации с размером блока, равным 5 (5-fold).

Область применимости оценивали интервальным методом путем анализа независимых (X-AD) и зависимых (Y-AD) переменных.

Обучающая выборка:

HDAC: X-AD: $\Sigma E_{ad}/\alpha$ (0.347÷0.427); Csp^3ac (4÷7); Y-AD: pIC_{50} (5.87÷8.66)

VEGFR-2: X-AD: ΣE_{ad} (14.06÷17.07); Y-AD: pIC_{50} (5.28÷7.27)

MCF-7: X-AD: ΣC_a (6.03÷9.10); $\Sigma E_a/\alpha$ (0.153÷0.273); $\Sigma E_{ad}/\alpha$ (0.307÷0.404); Y-AD: pIC_{50} (4.02÷6.07)

Тестовая выборка:

HDAC: X-AD: $\Sigma E_{ad}/\alpha$ (0.356÷0.407); Csp^3ac (4÷7); Y-AD: pIC_{50} (5.90÷8.27)

VEGFR-2: X-AD: ΣE_{ad} (16.69÷17.07); Y-AD: pIC_{50} (5.67÷7.01)

MCF-7: X-AD: ΣC_a (8.99÷9.09); $\Sigma E_a/\alpha$ (0.238÷0.276); $\Sigma E_{ad}/\alpha$ (0.350÷0.408); Y-AD: pIC_{50} (4.13÷5.59)

Помимо этого, для сравнительного QSAR-анализа нами была использована экспертная система OCHEM (<https://ochem.eu>). Для моделирования были выбраны дескрипторы PyDescriptor [Masand et al., 2017] и метод экстремального градиентного бустинга [Sheridan et al., 2016], при этом область применимости оценивалась с помощью концепции «расстояние до модели», в частности подхода CLASS-LAG [Manallack et al., 2003].

В интернет-ресурсе OCHEM реализован метод молекулярных пар [Sushko et al., 2014], который также позволяет проводить интерпретацию моделей, построенных на любых дескрипторах. Однако для интерпретации в нашем случае были использованы только модели, построенные с помощью симплексных дескрипторов, поскольку экспертная система OCHEM для построенных ею моделей не идентифицировала молекулярные пары, что, вероятно, связано с небольшим размером выборок, использованных для QSAR-моделирования.

Для расчета статистических характеристик QSAR-моделей использовали экспериментальные (наблюдаемые) и рассчитанные (предсказанные) значения активности для соединений обучающей выборки (в условиях кросс-валидации) и тестовой выборки.

Качество прогнозов на основе QSAR-моделей оценивалось коэффициентом детерминации (R^2):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - y_{\text{mean}})^2}, \quad (3)$$

а также среднеквадратичной ошибкой (RMSE):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{m-1}}, \quad (4)$$

где y_i — наблюдаемое значение активности для i -го соединения, \hat{y}_i — предсказанное значение активности для i -го соединения, mean — среднее значение наблюдаемой активности, m — количество соединений в выборке.

3. Результаты и обсуждение

Результаты QSAR-моделирования приведены в таблице 2, из которой видно, что получены адекватные QSAR-модели, обладающие сопоставимой предсказательной способностью. Рассчитанные значения активностей для исследуемых соединений приведены в дополнительных материалах, в таблицах 1S–3S.

Таблица 2. Статистические характеристики QSAR-моделей. Созданные с помощью OCHEM модели доступны по ссылкам, приведенным в скобках

Вид активности	Программа для построения QSAR-модели (дескрипторы)	R^2_{cv}	RMSE _{cv}	R^2_{test}	RMSE _{test}
HDAC	SPCI	0.91	0.24	0.69	0.43
	OCHEM (https://ochem.eu/model/11031947)	0.81	0.35	0.65	0.45
	HYBOT ($\Sigma E_{ad}/\alpha$; Csp ³ ac). RRforest	0.94	0.21	0.70	0.45
VEGFR-2	SPCI	0.53	0.32	0.64	0.26
	OCHEM(https://ochem.eu/model/44455912)	0.55	0.31	0.86	0.16
	HYBOT (ΣE_{ad}). RRforest	0.53	0.33	0.92	0.12
MCF-7	SPCI	0.66	0.37	0.87	0.22
	OCHEM (https://ochem.eu/model/19379008)	0.70	0.35	0.82	0.26
	HYBOT (ΣC_a , $\Sigma E_a/\alpha$, $\Sigma E_{ad}/\alpha$). RRforest	0.80	0.31	0.86	0.22

Для интерпретации были выбраны молекулярные фрагменты (заместители), отмеченные в публикациях [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016] и использованные в данных исследованиях в качестве вариативного параметра с сохранением молекулярного остова, представленного одновременно N-фенил-4-аминохиназолином и гидроксамовой кислотой, при синтезе с последующим испытанием потенциальных бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов. Краткое описание фрагментов представлено в таблице 3.

Результаты интерпретации приведены на рис. 4. Наибольшее положительное влияние на ингибирующую активность HDAC и ингибирование роста клеток рака легкого MCF-7 оказывает длина линкера, которая снижается в ряду (CH₂)₆ (фрагмент CH2_5) > (CH₂)₅ (фрагмент CH2_4) > (CH₂)₄ (фрагмент CH2_3). Эта закономерность подтверждается проведенным ранее SAR-анализом в публикации [Ding et al., 2017]. Для проявления VEGFR-2-ингибирующей активности длина линкера не является определяющей. Оптимальная длина линкера в этом случае составляет 4 метиленовых звена (фрагмент CH2_3).

Среди заместителей N-фенильного фрагмента можно выделить согласованный положительный вклад брома в параположении (фрагмент R3_Br) для всех трех видов активности.

Согласно полученным результатам варьирование положения и типа атома галогена в фенильном фрагменте оказывает заметное влияние на VEGFR-2-ингибирующую активность соединений.

Таблица 3. Молекулярные фрагменты (заместители), использованные при интерпретации QSAR-моделей. Нумерация заместителей соответствует таблице 1. Визуализация молекулярных фрагментов посредством SMART возможна с помощью ресурса <https://smarts.plus/>

Название фрагмента	Состав фрагмента	Окружение фрагмента	SMART
R1_F	R ¹ = F	R ² = R ³ = R ⁴ = H	<chem>[\$(Fc1ccccc1(N))]</chem>
R1_Br	R ¹ = Br	R ² = R ³ = R ⁴ = H	<chem>[\$(Br1ccccc1(N))]</chem>
R1_Cl	R ¹ = Cl	R ² = R ³ = R ⁴ = H	<chem>[\$(Clc1[cH][cH][cH]c1(N))]</chem>
R2_Br	R ² = Br	R ¹ = R ³ = R ⁴ = H	<chem>[\$(Br1cccc(N)c1)]</chem>
R2_Cl	R ² = Cl	R ¹ = R ³ = R ⁴ = H	<chem>[\$(Clc1[cH][cH][cH]c(N)[cH]1)]</chem>
R3_F	R ³ = F	R ¹ = R ² = R ⁴ = H	<chem>[\$(Fc1ccc(N)cc1)]</chem>
R3_Br	R ³ = Br	R ¹ = R ² = R ⁴ = H	<chem>[\$(Br1ccc(N)cc1)]</chem>
R3_Cl	R ³ = Cl	R ¹ = R ² = R ⁴ = H	<chem>[\$(Clc1[cH][cH]c(N)[cH][cH]1)]</chem>
R1_Cl(R3_Cl)	R ¹ = Cl	R ³ = Cl; R ² = R ⁴ = H	<chem>[\$(Clc1cc(Cl)ccc1(N))]</chem>
R3_Cl(R1_Cl)	R ³ = Cl	R ¹ = Cl; R ² = R ⁴ = H	<chem>[\$(Clc1ccc(N)c(Cl)c1)]</chem>
R1_Cl(R4_Cl)	R ¹ = Cl	R ⁴ = Cl; R ² = R ³ = H	<chem>[\$(Clc1ccc(Cl)cc1(N))]</chem>
R4_Cl(R1_Cl)	R ⁴ = Cl	R ¹ = Cl; R ² = R ³ = H	<chem>[\$(Clc1ccc(Cl)c(N)c1)]</chem>
CH2_2	(CH ₂) _n , n = 2		<chem>[\$([CH2](Oc)[CH2][CH2]C(=O)[NH][OH])[CH2][CH2]</chem>
CH2_3	(CH ₂) _n , n = 3		<chem>[\$([CH2](Oc)[CH2][CH2][CH2]C(=O)[NH][OH])[CH2][CH2][CH2]</chem>
CH2_4	(CH ₂) _n , n = 4		<chem>[\$([CH2](Oc)[CH2][CH2][CH2][CH2]C(=O)[NH][OH])[CH2][CH2][CH2][CH2]</chem>
CH2_5	(CH ₂) _n , n = 5		<chem>[\$([CH2](Oc)[CH2][CH2][CH2][CH2][CH2]C(=O)[NH][OH])[CH2][CH2][CH2][CH2][CH2]</chem>

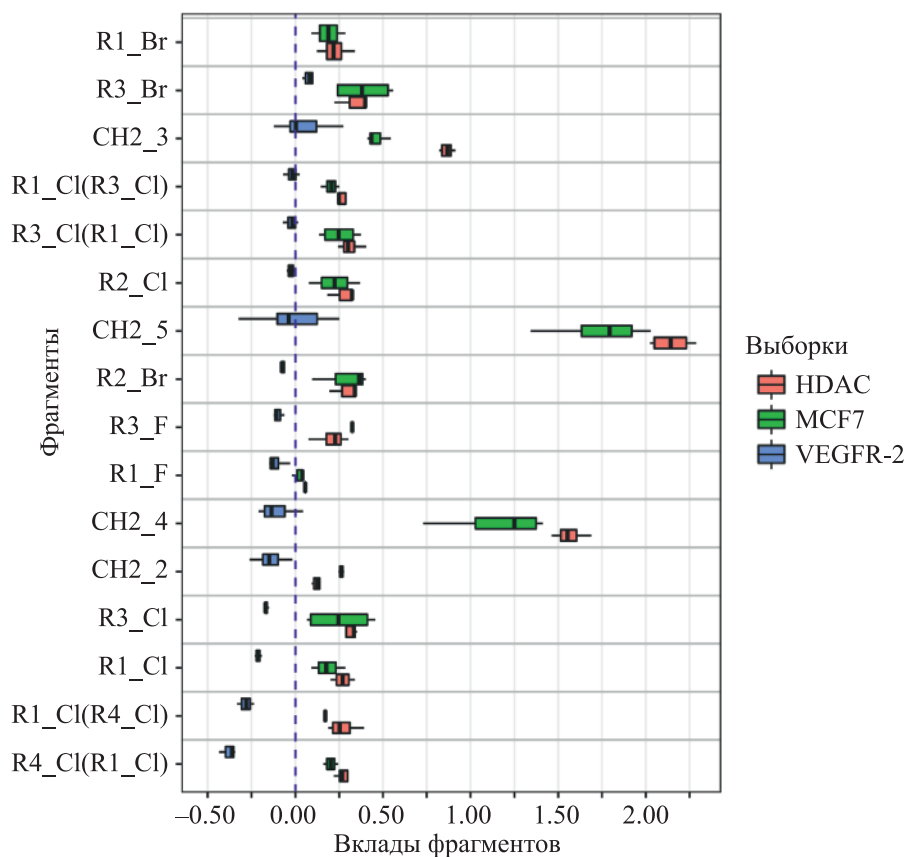


Рис. 4. Вклады молекулярных фрагментов в значения ингибирующей активности по отношению к HDAC. Фрагменты упорядочены по величине вклада в ингибирующую активность VEGFR-2. М-количество соединений, содержащих фрагмент. N-количество обнаружений соответствующего фрагмента в выборке

Построенные нами адекватные QSAR-модели с использованием физико-химических дескрипторов, представляющих те или иные количественные характеристики Н-связи, указывают на высокую значимость водородной связи в проявлении противоопухолевых свойств, что подтверждается в обзорной публикации [Patel et al., 2009]. В данном исследовании по результатам молекулярного докинга (PDB код: 1YWN) и фармакофорного анализа предложена консенсусная модель ингибиторов VEGFR-2, согласно которой для проявления высокой активности вышеуказанные соединения должны обладать следующими структурными особенностями: 1) обладать донором и акцептором водородной связи для взаимодействия соответственно с аминокислотами Glu883 и Cys919; 2) иметь липофильную группу, которая будет располагаться в «кармане», образованном аминокислотами Ile886, Leu887, Ile890, Val896, Leu1017; 3) содержать ароматическое кольцо.

Результаты проведенной нами интерпретации также подтверждают, что с ростом липофильности заместителей в фенильном фрагменте увеличивается активность ингибиторов VEGFR-2. Однако необходимо отметить, что положительным вкладом в VEGFR-2-ингибирующую активность обладает только вышеуказанный бром в *пара*положении относительно атома азота в N-фенильном фрагменте (фрагмент R3_Br). Остальные исследуемые фрагменты оказывают негативный вклад в повышение активности ингибиторов VEGFR-2. Выявленная тенденция может быть объяснена гипотезой, предложенной в публикации [Peng et al., 2016], согласно которой при введении объемного заместителя в ортоположение возникают стерические препятствия.

Таким образом, обобщая анализ, проведенный в публикациях [Peng et al., 2016; Patel et al., 2009], а также результаты нашей интерпретации, можно полагать, что для данной серии соединений значительная ингибирующая активность VEGFR-2 проявляется при наличии высоколипофильных заместителей в фенильном фрагменте, не создающих стерических препятствий, располагающихся, например, в *пара*положении.

В то же время для HDAC- и MCF-7-ингибирующей активности вклады заместителей в бензольном кольце почти не меняются — атомы галогенов, за исключением фтора, вносят небольшой положительный вклад, независимо от их положения в цикле.

Принимая во внимание выявленную тенденцию и учет существующих фармакофорных моделей, проведен рациональный молекулярный дизайн и предложен ряд структур (**7a-f**), обладающих, согласно спрогнозированным значениям, сопоставимой активностью с наилучшими соединениями (**6fd**, **6l** — таблица 1), приведенными в публикациях [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016]. Предложенные соединения **7a**, **7b**, **7c**, **7e**, **7f**, исходя из рассчитанных значений, обладают большей ингибирующей активностью в отношении HDAC и MCF-7 по сравнению с Вандетанибом и Вориностатом и достаточно высокой ингибирующей активностью по отношению к киназе VEGFR-2, что позволяет их рассматривать в качестве перспективных бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов. Результаты молекулярного дизайна приведены в таблице 4.

Помимо этого, с целью выявления перспективных бифункциональных ингибиторов среди соединений с различными скаффолдами, содержащими гидроксамовые кислоты и фрагменты хинозалинового цикла, проведен скрининг 300 виртуальных соединений, сгенерированных комбинаторно из структур известных и перспективных противоопухолевых лекарственных средств, например Эрлотиниб, Ралтитрексид, Седираниб. Для скрининга использовали модели, построенные экспертной системой OCHEM. QSAR-модели, полученные с помощью SPCI, ввиду вышеописанного метода определения области применимости, достаточно сильно ограничивающего структурное пространство модели, не использовались.

В ходе проведения виртуального скрининга отобраны соединения, входящие в области применимости всех трех QSAR-моделей, построенных экспертной системой OCHEM, и удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) рассчитанные значения pIC_{50} для MCF-7 — больше 5.4, для HDAC — больше 7.9. Указанный минимальный порог обусловлен соответствующими экспериментальными значениями активностей лекарственного средства Вориностат, которые были определены в публикации [Peng et al., 2016] и приведены в таблице 1 данного исследования;
- 2) 10 соединений с наилучшим значением pIC_{50} для VEGFR-2.

Таблица 4. Результаты рационального молекулярного дизайна. С целью сравнительного анализа для соединений **6fd** и **6l** приведены экспериментальные значения согласно [Peng et al., 2015; Peng et al., 2016]

Название	Структура	Рассчитанные значения pIC_{50}					
		HDAC		VEGFR-2		MCF-7	
		SPCI	OCHEM	SPCI	OCHEM	SPCI	OCHEM
7a		8.20	8.23	5.97	6.56	5.71	5.92
7b		8.38	8.25	6.52	6.27	5.70	5.92
7c		8.29	8.25	6.51	6.26	5.74	5.92
7d		7.98	8.54	6.31	6.3	5.03	5.87
7e		8.27	8.15	6.29	6.27	5.46	5.92
7f		8.27	8.15	6.29	6.23	5.46	5.92
6fd		8.66		7.23		6.07	
6l		8.55		7.08		5.92	

Отобранные с учетом указанных условий перспективные соединения приведены в таблице 5.

Таблица 5. Наиболее перспективные соединения по результатам виртуального скрининга

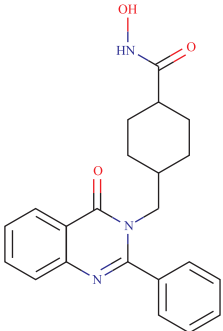
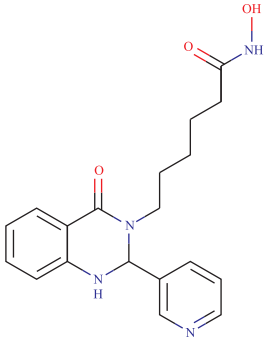
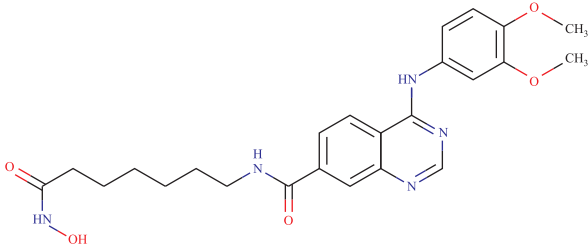
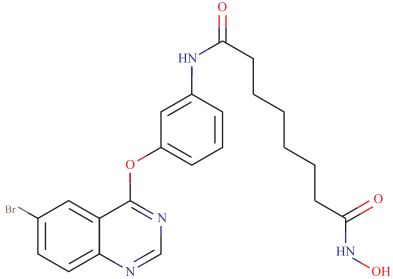
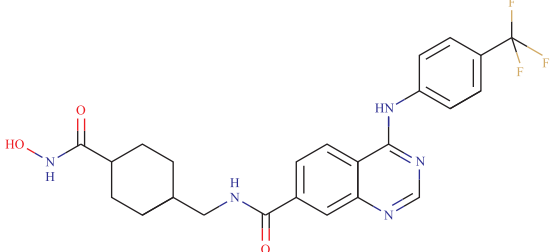
Название	Структура	Рассчитанные значения pIC_{50}		
		HDAC	VEGFR-2	MCF-7
OVFV-173		7.97	6.59	5.48
OVFV-115		8.01	6.58	5.43
OVFV-184		8.09	6.56	5.54
OVFV-037		7.95	6.52	5.8
OVFV-282		8.02	6.49	5.43

Таблица 5 (продолжение). Наиболее перспективные соединения по результатам виртуального скрининга

Название	Структура	Рассчитанные значения pIC_{50}		
		HDAC	VEGFR-2	MCF-7
OVFV-028		8.02	6.48	5.54
OVFV-112		8.18	6.47	5.48
OVFV-125		8.37	6.45	5.53
OVFV-017		7.95	6.44	5.78
OVFV-122		8.48	6.44	5.53

Для всех приведенных в таблицах 4 и 5 перспективных бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов была проведена проверка наличия структур в базах данных Reaxys (<https://www.reaxys.com>), PubChem (<https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/>), в том числе среди патентов, в ходе которой указанные вещества не были обнаружены.

4. Заключение и выводы

Проведенные исследования позволили:

- получить ряд адекватных регрессионных QSAR-моделей, обладающих удовлетворительными статистическими показателями и предсказательной способностью;
- проведенная интерпретация позволила количественно описать и ранжировать структурные фрагменты, устойчиво повышающие активность ингибиторов HDAC, VEGFR-2, MCF-7;
- в результате рационального молекулярного дизайна и виртуального скрининга предложен ряд перспективных бифункциональных VEGFR-2/HDAC-ингибиторов.

В последующем планируется синтезировать вышеуказанные бифункциональные VEGFR-2/HDAC-ингибиторы для оценки их биологической активности и сопоставить полученные результаты с расчетными.

Полученные результаты будут способствовать снижению финансовых, временных и трудовых затрат при синтезе и испытании перспективных противоопухолевых препаратов. Результаты структурной интерпретации могут оказать помощь в установлении механизмов действия новых бифункциональных гибридных лекарственных средств, направленных на лечение онкологических заболеваний.

Список литературы (References)

- Breiman L.* Random Forests // *Machine Learning*. — 2001. — Vol. 45. — P. 5–32.
- Deroanne C. F., Bonjean K., Servotte S., Devy L., Colige A., Clausse N., Blacher S., Verdin E., Foidart J. M., Nusgens B. V., Castronovo V.* Histone deacetylases inhibitors as anti-angiogenic agents altering vascular endothelial growth factor signaling // *Oncogene*. — 2002. — Vol. 21. — P. 427–436.
- Ding C., Chen S., Zhang C., Hu G., Zhang W., Li L., Chen Y. Z., Tan C., Jiang Y.* Synthesis and investigation of novel 6-(1,2,3-triazol-4-yl)-4-aminoquinazolin derivatives possessing hydroxamic acid moiety for cancer therapy // *Bioorg Med Chem*. — 2017. — Vol. 25, No. 1. — P. 27–37.
- Guo Y., Xiao J., Guo Z., Chu F., Cheng Y., Wu S.* Exploration of a binding mode of indole amide analogues as potent histone deacetylase inhibitors and 3D-QSAR analyses // *Bioorg. Med. Chem*. — 2005. — Vol. 13. — P. 5424–5434.
- Jaworska J., Nikolova-Jeliazkova N., Aldenberg T.* QSAR applicabilty domain estimation by projection of the training set descriptor space: a review // *Altern Lab Anim*. — 2005. — Vol. 33, No. 5. — P.445–459.
- Kubinyi H.* Variable Selection in QSAR Studies. II. A Highly Efficient Combination of Systematic Search and Evolution // *Quant. Struct.-Act. Relat*. — 1994. — Vol. 13. — P. 393–401.
- Lin Z., Murray P. M., Ding Y., Denny W. A., Ferguson L. R.* Quinazolines as novel anti-inflammatory histone deacetylase inhibitors // *Mutation Research*. — 2010. — Vol. 690. — P. 81–88.
- Liu X. H., Song H. Y., Zhang J. X., Han B. C., Wei X. N., Ma X. H., Cui W. K., Chen Y. Z.* Identifying novel type ZBGs and nonhydroxamate HDAC inhibitors through a SVM based virtual screening approach // *Mol. Inf*. — 2010. — Vol. 29. — P. 407–420.

- Manallack D. T., Tehan B. G., Gancia E., Hudson B. D., Ford M. G., Livingstone D. J., Whitley D. C., Pitt W. R.* A Consensus neural network-based technique for discriminating soluble and poorly soluble compounds // *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* — 2003. — Vol. 43. — P. 674–679.
- Marzaro G., Chilin A., Guiotto A., Uriarte E., Brun P., Castagliuolo I., Tonus F., González-Díaz H.* Using the TOPS-MODE approach to fit multi-target QSAR models for tyrosine kinases inhibitors // *Eur J Med Chem.* — 2011. — Vol. 46, No. 6. — P. 2185–2192.
- Masand V., Rastija V.* PyDescriptor: A new PyMOL plugin for calculating thousands of easily understandable molecular descriptors // *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems.* — 2017. — Vol. 169. — P. 12–18.
- Meunier B.* Hybrid molecules with a dual mode of action: dream or reality? // *Acc Chem Res.* — 2008. — Vol. 41. — P. 69–77.
- Online chemical modeling environment (OCHEM): web platform for data storage, model development and publishing of chemical information.* URL: <https://ochem.eu> (accessed: 12.05.2019).
- Patel A., Karthikeyan C., Moorthy N. S., Trivedi P.* QSAR study on N-(aryl)-4-(azolyethyl) thiazole-5-carboxamides: novel potent inhibitors of VEGF receptors I and II // *Med. Chem.* — 2009. — Vol. 5, No. 5. — P. 455–461.
- Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau D., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E.* Scikit-learn: Machine Learning in Python // *J. Mach. Learn. Res.* — 2011. — Vol. 12. — P. 2825–2830.
- Peng F. W., Wu T. T., Zeng Z. W., Xue J. Y., Shi L.* Hybrids from 4-anilinoquinazoline and hydroxamic acid as dual inhibitors of vascular endothelial growth factor receptor-2 and histone deacetylase // *Bioorganic & Medicinal Chemistry Letters.* — 2015. — Vol. 25, No 22. — P. 5137–5141.
- Peng F. W., Xuan J., Wu T. T., Xue J. Y., Ren Z. W., Liu D. K., Wang X. Q., Chen X. H., Zhang J. W., Xu Y. G., Shi L.* Design, synthesis and biological evaluation of N-phenylquinazolin-4-amine hybrids as dual inhibitors of VEGFR-2 and HDAC // *European Journal of Medicinal Chemistry.* — 2016. — Vol. 109. — P. 1–12.
- Pham-The H., Casañola-Martin G., Diéguez-Santana K., Nguyen-Hai N., Ngoc N. T., Vu-Duc L., Le-Thi-Thu H.* Quantitative structure-activity relationship analysis and virtual screening studies for identifying HDAC2 inhibitors from known HDAC bioactive chemical libraries SAR QSAR Environ Res. // — 2017. — Vol. 28, No. 3. — P. 199–220.
- Polishchuk P.* Interpretation of quantitative structure-activity relationship models: past, present, and future // *J. Chem. Inf. Model.* — 2017. — Vol. 57. — P. 2618–2639.
- Polishchuk P. G., Kuz'min V. E., Artemenko A. G., Muratov E. N.* Universal approach for structural interpretation of QSAR/QSPR models // *Mol. Inform.* — 2013. — Vol. 32. — P. 843–853.
- Program RRforest. — URL: http://www.stat.berkeley.edu/~breiman/RandomForests/reg_examples/RFR.f (accessed: 12.05.2019).
- Raevsky O. A., Grigor'ev V. Yu., Kireev D. B., Zefirov N. S.* Complete thermodynamic description of H-bonding in the framework of multiplicative approach // *Quant. Struct.-Act. Relat.* — 1992. — Vol. 11. — P. 49–63.
- Ragno R., Simeoni S., Rotili D., Caroli A., Botta G., Brosch G., Massa S., Mai A.* Class II-selective histone deacetylase inhibitors. Part 2: alignment-independent GRIND 3D-QSAR, homology and docking studies // *Eur. J. Med. Chem.* — 2008. — Vol. 43. — P. 621–632.
- Rajagopalan M., Balasubramanian S., Ramaswamy A., Mathur P. P.* Pharmacophore based 3D-QSAR modeling and free energy analysis of VEGFR-2 inhibitors // *J. Enzyme Inhib. Med. Chem.* — 2013. — Vol. 28, No. 6. — P. 1236–1246.
- Reaxys — Chemistry data and chemical literature. — URL: <https://www.reaxys.com> (accessed: 08.08.2019).

- Reid T. E., Fortunak J. M., Wutoh A., Simon Wang X. Cheminformatic-based drug discovery of human tyrosine kinase inhibitors // *Curr. Top. Med. Chem.* — 2016. — Vol. 16, No. 13. — P. 1452–1462.
- Sheridan R. P., Wang W. M., Liaw A., Ma J., Gifford E. M. Extreme gradient boosting as a method for quantitative structure–activity relationships // *J. Chem. Inf. Model.* — 2016. — Vol. 56, No. 12. — P. 2353–2360.
- Simplex representation of molecular structure — a chemoinformatic tool for calculation of simplex descriptors. — URL: <https://github.com/DrrDom/sirms> (accessed: 12.05.2019).
- SPCI — Tool for mining structure-property relationships from chemical datasets. — URL: http://qsar4u.com/pages/sirms_qsar.php (accessed: 12.05.2019).
- Standardizer, version 5.4; ChemAxon: Budapest, Hungary. — URL: <https://chemaxon.com/products/chemical-structure-representation-toolkit> (accessed: 12.05.2019).
- Sun J., Li D. D., Li J. R., Fang F., Du Q. R., Qian Y., Zhu H. L. Design, synthesis, biological evaluation, and molecular modeling study of 4-alkoxyquinazoline derivatives as potential VEGFR2 kinase inhibitors // *Org. Biomol. Chem.* — 2013. — Vol. 11, No. 44. — P. 7676–7686.
- Sushko Y., Novotarskyi S., Korner R., Vogt J., Abdelaziz A., Tetko I. Prediction-driven matched molecular pairs to interpret QSARs and aid the molecular optimization process // *J. Cheminf.* — 2014. — Vol. 6. — P. 48
- Tang H., Wang X. S., Huang X. P., Roth B. L., Butler K. V., Kozikowski A. P., Jung M., Tropsha A. Novel inhibitors of human histone deacetylase (HDAC) identified by QSAR modeling of known inhibitors, virtual screening, and experimental validation // *J. Chem. Inf. Model.* — 2009. — Vol. 49, No. 2. — P. 461–476.
- U.S. EPA. “User’s Guide for T.E.S.T. (version 4.2) (Toxicity Estimation Software Tool): A Program to Estimate Toxicity from Molecular Structure.” — URL: <https://www.epa.gov/chemical-research/users-guide-test-version-42-toxicity-estimation-software-tool-program-estimate> (accessed: 10.08.2019).
- Wells S. A., Gosnell J. E., Gagel R. F., Moley J., Pfister D., Sosa J. A., Skinner M., Krebs A., Vasselli J., Schlumberger M. Vandetanib for the treatment of patients with locally advanced or metastatic hereditary medullary thyroid cancer // *J. Clin. Oncol.* — 2010. — Vol. 28. — P. 767–772.
- West A. C., Johnstone R. W. New and emerging HDAC inhibitors for cancer treatment // *J. Clin. Invest.* — 2014. — Vol. 124, No. 1 — P. 30–39.
- Xie A., Liao C., Li Z., Ning Z., Hu W., Lu X., Shi L., Zhou J. Quantitative structure-activity relationship study of histone deacetylase inhibitors // *Curr. Med. Chem. Anticancer Agents.* — 2004. — Vol. 4. — P. 273–299.
- Yang Z., Wang T., Wang F., Niu T., Liu Z., Chen X., Long C., Tang M., Cao D., Wang X., Xiang W., Yi Y., Ma L., You J., Chen L. Discovery of selective histone deacetylase 6 inhibitors using the quinazoline as the cap for the treatment of cancer // *Journal of Medicinal Chemistry.* — 2016. — Vol. 59, No. 4. — P. 1455–1470.
- Yu H., Wang Z., Zhang L., Zhang J., Huang Q. Pharmacophore modeling and in silico screening for new KDR kinase inhibitors // *Bioorg. Med. Chem. Lett.* — 2007. — Vol. 17, No. 8. — P. 2126–2133.
- Zhao L., Xiang Y., Song J., Zhang Z. A novel two-step QSAR modeling work flow to predict selectivity and activity of HDAC inhibitors // *Bioorg. Med. Chem. Lett.* — 2013. — Vol. 23. — P. 929–933.
- Zupkovitz G., Tischler J., Posch M., Sadzak I., Ramsauer K., Egger G., Grausenburger R., Schweifer N., Chiocca S., Decker T., Seiser C. Negative and positive regulation of gene expression by mouse histone deacetylase 1 // *Molecular and Cellular Biology.* — 2006. — Vol. 26. — P. 7913–7928.

УДК: 51-77

Режимы с обострением в истории человечества или воспоминания о будущем

С. Ю. Малков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет глобальных процессов,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

E-mail: s@malkov.org

Получено 09.03.2019, после доработки — 03.08.2019.

Принято к публикации 05.08.2019.

В статье рассмотрены режимы с обострением в социальной и биологической истории. Проведен анализ возможных причин резкого ускорения биологических и социальных процессов в определенные исторические эпохи. С использованием математического моделирования показано, что гиперболические тренды в социальной и биологической эволюции могут быть следствием переходных процессов в периоды расширения экологических ниш. Ускорение биологического видообразования связано с тем, что более ранние виды своей жизнедеятельностью изменяют среду обитания, делая ее более разнообразной, насыщая органикой, тем самым создавая благоприятные условия для появления новых видов. В социальной истории расширение экологических ниш связано с технологическими революциями, важнейшими из которых были: неолитическая революция — переход от присваивающего хозяйства к производящему (10 тыс. лет назад), «городская революция» — переход от неолита к бронзовому веку (5 тыс. лет назад), «осевое время» — переход к массовому освоению железных орудий (2.5 тыс. лет назад), промышленная революция — переход от ручного труда к машинному (200 лет назад). Все эти технологические революции сопровождалось резким демографическим ростом, изменениями в социальной и политической сферах. Так, наблюдаемый в последние столетия гиперболический характер роста некоторых демографических, экономических и других показателей мировой динамики — это следствие переходных процессов, начавшихся вследствие промышленной революции (замены ручного труда машинным) и предвещающих переход общества на новую стадию своего развития. Точка сингулярности гиперболического тренда характеризует окончание начального этапа этого процесса и переход к завершающей его стадии. Предложена математическая модель, описывающая демографические и экономические изменения в эпохи перемен. Показано, что прямым аналогом современной ситуации в этом смысле является «осевое время» (период с 8 века до нашей эры до начала нашей эры). Наличие такой аналогии позволяет заглянуть в будущее, изучая прошлое.

Ключевые слова: биологическая и социальная эволюция, гиперболический рост, переходные процессы, стабилизация

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-06-00464).

UDC: 51-77

Regimes with exacerbation in the history of mankind or memories of the future

S. Yu. Malkov

Lomonosov Moscow State University, the department of global processes,
1 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia

E-mail: s@mallkov.org

Received 09.03.2019, after completion — 03.08.2019.

Accepted for publication 05.08.2019.

The article describes the modes with the exacerbation of social and biological history. The analysis of the possible causes of the sharp acceleration of biological and social processes in certain historical periods is carried out. Using mathematical modeling shows that hyperbolic trends in social and biological evolution may be the result of transitional processes in periods of expansion of ecological niches. Accelerating biological speciation due to the fact that its earlier life change inhabitancy, making it more diverse, saturating the organic, thus creating favourable conditions for the emergence of new species. In the social history of the expansion of ecological niches associated with technological revolutions, of which the most important were: Neolithic revolution — the transition from appropriating economy to producing economy (10 thousand years ago), “urban revolution” — a shift from the Neolithic epoch to the bronze epoch (5 thousand years ago), the “axial age” — transition to the development of iron tools (2.5 thousand years ago), the industrial revolution — the transition from manual labor to machine production (200 years ago). All of these technological revolutions have been accompanied by dramatic population growth, changes in social and political spheres. So, observed in the last century, hyperbolic nature of some demographic, economic growth and other indicators of world dynamics is a consequence of the transition process, which began as a result of the industrial revolution and to prepare for the transition of the society to a new stage of its development. Singularity point of hyperbolic trend shows the end of the initial phase of the process and marks the transition to the final stage. The mathematical model describing the demographic and economic changes in the era of change is proposed. It is shown that a direct analogue of the contemporary situation in this sense is the “axial age” (since 8 century BC to the beginning of our era). The existence of this analogy allows you to see into the future by studying the past.

Keywords: probability density function, Rice distribution, likelihood function, maximum likelihood method, method biological and social evolution, hyperbolic growth, transients, stabilization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 931–947 (Russian).

The work was supported by RFBR (No. 17-06-00464).

1. Введение. Загадка сингулярности

В последние годы в научной и популярной литературе все чаще обсуждается тема сингулярности в истории. Различные авторы пишут о биологической [Марков, Коротаев, 2007, 2008; Марков и др., 2010; Grinin et al., 2013], эволюционной [Панов, 2005, 2008; Добролюбов, 2016; Коротаев, 2006; Коротаев и др., 2007b; Цирель, 2012], демографической [Белавин и др., 1998; Коротаев и др., 2008; Куркина, Куретова, 2013; Foerster et al., 1960], технологической [Kurzweil, 2005; Назаретян, 2013, 2015] сингулярности, и этот список только расширяется. Суть проблемы в том, что проводимая различными исследователями математическая экстраполяция в будущее некоторых глобальных процессов дает удивительный результат. Оказывается, что эти процессы развиваются с ускорением, но не просто с ускорением экспоненциального типа, которое является привычным и естественным для многих природных и социально-экономических процессов, а с ускорением по гиперболическому закону, имеющему *точку сингулярности*¹, причем эта гипербола уходит в бесконечность в ближайшие годы или десятилетия. То есть формально получается, что в ближайший период времени должно произойти что-то из ряда вон выходящее, что кардинально изменит ход событий, имевший место на протяжении тысяч, миллионов и даже сотен миллионов лет. В качестве примера можно привести данные из работы А. Д. Панова [Панов, 2008] (см. таблицу 1).

Данные из таблицы можно представить в виде графика (см. рис. 1).

На рисунке представлен ряд, отображающий «планетарные революции» по классификации А. Д. Панова [Панов, 2008], и гиперболическая аппроксимация этого ряда в предположении, что точка сингулярности t^* имеет место в 2019 году (в координатах рисунка гиперболическая аппроксимация имеет вид прямой линии). Видно, что качество гиперболической аппроксимации очень высокое.

Таблица 1. «Планетарные революции» по А. Д. Панову [Панов, 2008]

№ п/п	Планетарная революция	Количество лет от 2019 г.
0	Возникновение жизни на Земле: около $4 \cdot 10^9$ лет назад	4000000000
1	Кислородный кризис или неопротерозойская революция: $1.5 \cdot 10^9$ лет назад	1500000000
2	Кембрийский взрыв: $590-510 \cdot 10^6$ лет назад	550000000
3	Начало мезозойской эры, революция пресмыкающихся: $235 \cdot 10^6$ лет назад	232000000
4	Начало кайнозойской эры, революция млекопитающих: $66 \cdot 10^6$ лет назад	66000000
5	Начало неогена: $25-20 \cdot 10^6$ лет назад	22500000
6	Начало четвертичного периода (антропоген): $4.4 \cdot 10^6$ лет назад	4400000
7	Олдувай, палеолитическая революция: $2.0-1.6 \cdot 10^6$ лет назад	1800000
8	Шелль: $0.7-0.6 \cdot 10^6$ лет назад	650000
9	Ашель: $0.4 \cdot 10^6$ лет назад	400000
10	Мустье (культурная революция неандертальцев): 150–100 тыс. лет назад	125000
11	Верхнепалеолитическая революция (культурная революция кроманьонцев): 40 тыс. лет назад	40000
12	Неолитическая революция: 12–9 тыс. лет назад	10000
13	Городская революция, начало Древнего мира: IV–III тыс. до н. э.	5500
14	Железный век, эпоха империй, революция Осеевого времени: 800–500 лет до н. э.	2650
15	Гибель Древнего мира, начало Средневековья: 400–630 гг.	1500
16	Первая промышленная революция: 1450–1550 гг.	520
17	Вторая промышленная революция: 1830–1840 гг.	184
18	Информационная революция: 1950 г.	69
19	Кризис и распад социалистического лагеря, информационная глобализация: 1991 г.	28

¹ Точка сингулярности — точка на числовой оси, в которой график гиперболической функции уходит в бесконечность (поскольку знаменатель функции становится равным нулю).

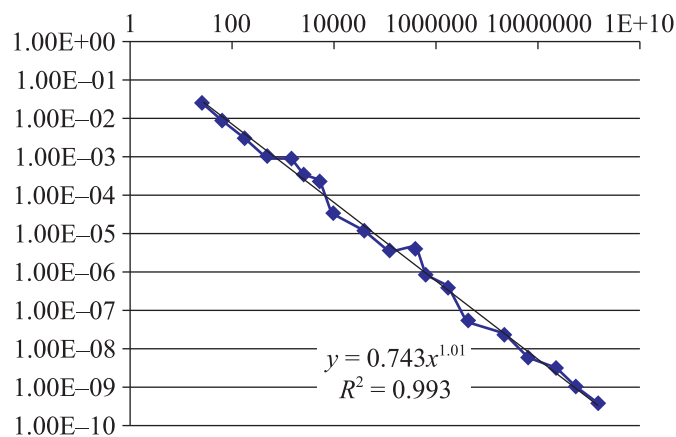


Рис. 1. Гиперболическая аппроксимация «планетарных революций» по А. Д. Панову [Панов, 2008]: точки на графике соответствуют событиям из таблицы 1; по оси ординат — величина, обратная времени от рассматриваемого события до 2019 г., по оси абсцисс — интервал времени между событиями (время измеряется в годах)

Аналогичные графики приводят и другие авторы (см., например, [Kurzweil, 2005; Назаретян, 2015]). Можно, конечно, подвергнуть сомнению правильность подбора событий, на основе которых делаются заключения этих авторов о приближении точки сингулярности, но есть и более аргументированные свидетельства, основанные на объективных статистических данных. Так, в работе [Марков, Коротаев, 2008] приведены количественные данные о динамике разнообразия фанерозойской биоты за период с 550 млн лет до нашей эры до наших дней. В работе показано, что эти данные хорошо (с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.95$) аппроксимируются гиперболой $N_t = 434\,635/(30 - t)$, где N_t — число родов морской и континентальной фанерозойской биоты, время t измеряется в млн лет, за нулевую точку на временной оси принята современная эпоха.

Еще одним примером являются данные о динамике численности населения Земли, приведенные на рис. 2.

В этом случае данные тоже на удивление хорошо аппроксимируются гиперболой. Фон Ферстер, впервые сделавший такую аппроксимацию для численности населения Земли, даже назвал свою статью, в которой были приведены результаты расчета, «Судный день: пятница, 13 ноября 2016 года» [Foerster et al., 1960], где дата 13.11.2026 г. означает вычисленную им точку сингулярности, когда гиперболический тренд уходит в бесконечность.

Возникает вопрос: что является причиной столь удивительного результата аппроксимации, является ли возникновение точек сингулярности при анализе глобальных процессов артефактом или это отражение реальной закономерности?

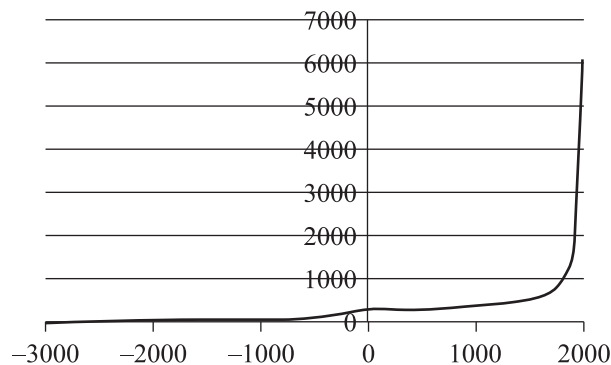


Рис. 2. Динамика численности населения Земли, млн чел.: по оси абсцисс — годы от начала нашей эры (источник данных: [Коротаев и др., 2007b; www.ggdc.net/maddison])

К настоящему времени высказано много комментариев по поводу опубликованных в научной и популярной литературе гиперболических аппроксимаций. Приведем лишь некоторые высказанные соображения.

1. В том случае, когда гиперболические аппроксимации опираются на выборку знаковых событий в истории, многое зависит от того, какие события считать знаковыми. В работе [Добролюбов, 2016] на эту тему был приведен остроумный мысленный эксперимент. Приведем отрывок из этой работы (см. [Добролюбов, 2016, с. 249–250]):

«Можно привести и другие примеры того, как различное толкование «быстрых» для современников изменений меняет результат всей «планетарной эволюции». Например, если бы мы оказались в Англии в разгар промышленной революции XIX в. и не знали о будущей цифровой революции, то фазовые переходы в самых разных сферах деятельности могли интерпретировать как вход технологической эволюции в режим с обострением, и тогда точка сингулярности эволюции оказалась бы в $t^* = 1834$ г. ...Можно и поток фазовых переходов начала XX в. (автомобиль, самолет, танк, кино, радио, ядерная физика, теория относительности и т. д.), которые, собственно, и породили современный мир, вывести в сингулярность 1914 г. и связать с социальной катастрофой Первой мировой войны. Но очевидно, что подобная связь технологического прогресса и социальных отношений слишком спекулятивна».

Действительно, выбор набора «быстрых» изменений во многом субъективен, но именно он определяет определяемую в результате аппроксимации конкретную дату сингулярности. Можно привести еще один любопытный пример (см. рис. 3).

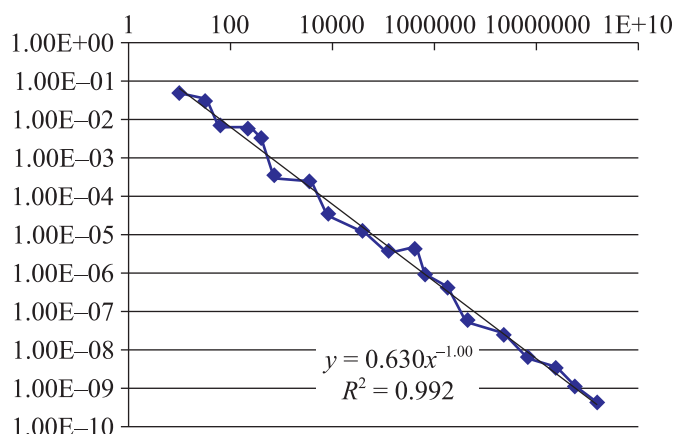


Рис 3. Гиперболическая аппроксимация знаковых событий в истории с точки зрения христианина, жившего в Римской империи в эпоху правления Нерона: по оси ординат — величина, обратная времени от знакового события до 64 г., по оси абсцисс — интервал между знаковыми событиями (время измеряется в годах)

На рисунке представлены ряд, отображающий знаковые события с точки зрения христианина в первом веке нашей эры (см. таблицу 2), и гиперболическая аппроксимация этого ряда с точкой сингулярности в 64 году, когда Нерон поджег Рим и потом обвинил в этом христиан (таблица 2 получается из таблицы 1, которую использовал А. Д. Панов, путем замены пяти последних «быстрых» изменений на те, которые были актуальными для жителя Римской империи).

Видно, что рис. 1 и 3 практически идентичны (включая качество гиперболических аппроксимаций), но предвещают совершенно разные точки сингулярности: соответственно в 2019 и 64 г. н. э. Между прочим, христианами – современниками Нерона — этот император воспринимался как антихрист во плоти, а гонения на христиан после поджога Рима воспринимались как начало конца света, т. е., в современных терминах, как точка сингулярности. Недаром Апокалипсис был написан в первом веке в ожидании Армагеддона и второго пришествия Христа (т. е. в ожидании сингулярности, конца времен).

Таблица 2. «Планетарные революции» с точки зрения жителя Римской империи начала первого тысячелетия

№ п/п	Планетарная революция	Количество лет от 64 г. н. э.
0	Возникновение жизни на Земл: около $4 \cdot 10^9$ лет назад	4000000000
1	Кислородный кризис или неопротерозойская революция: $1.5 \cdot 10^9$ лет назад	1500000000
2	Кембрийский взрыв: $590-510 \cdot 10^6$ лет назад	550000000
3	Начало мезозойской эры, революция пресмыкающихся: $235 \cdot 10^6$ лет назад	232000000
4	Начало кайнозойской эры, революция млекопитающих: $66 \cdot 10^6$ лет назад	66000000
5	Начало неогена: $25-20 \cdot 10^6$ лет назад	22500000
6	Начало четвертичного периода (антропоген): $4.4 \cdot 10^6$ лет назад	4400000
7	Олдувай, палеолитическая революция: $2.0-1.6 \cdot 10^6$ лет назад	1800000
8	Шелль: $0.7-0.6 \cdot 10^6$ лет назад	650000
9	Ашель: $0.4 \cdot 10^6$ лет назад	400000
10	Мустье (культурная революция неандертальцев): 150–100 тыс. лет назад	123000
11	Верхнепалеолитическая революция (культурная революция кроманьонцев): 40 тыс. лет назад	38050
12	Неолитическая революция: 12–9 тыс. лет назад	8050
13	Городская революция, начало Древнего мира: IV–III тыс. до н. э.	3550
14	Железный век, эпоха империй, революция Осевого времени: 800–500 лет до н. э.	700
15	Александр Македонский: 330 г. до н. э.	490
16	Экспансия Рима: с середины II в. до н. э.	210
17	Рождение Иисуса: 0 г.	60
18	Распятие Иисуса: 33 г.	27
19	Нерон, император: 54 г.	6

2. Увеличение интервала между знаковыми событиями в прошлом отчасти объясняется тем, что близкие события нам кажутся более значащими. Кроме того, чем более удален в прошлое рассматриваемый период, тем меньше у нас о нем информации, и поэтому кажется, что значащих изменений на единицу времени было меньше. Это одна из причин того, что в один ряд помещаются такие события, как кембрийский взрыв и распад социалистического лагеря (см. таблицу 1).

3. Что касается рядов количественных показателей, подобных ряду на рис. 2, то тут необходимо иметь в виду следующее. При попытке аппроксимации процесса, состоящего из фаз медленного и быстрого развития, наилучший результат, как правило, дает аппроксимация гиперболой, а не экспонентой или полиномом. Обычно такие ситуации возникают, когда стабильный процесс завершается переходом в нестабильное состояние и запускается интенсивный переход системы в другое фазовое состояние. Здесь уместно соображение из работы [Добролюбов, 2016, с. 231]:

«При желании... быстрый процесс можно объединить с предыдущим стабильным состоянием системы и описать их одной гиперболической кривой, чем, собственно, и грешат математические подходы к реальным явлениям».

При всей справедливости этих комментариев остается загадкой то, почему аппроксимации разных авторов при всей субъективности используемых ими подходов дают схожий результат, а показатели степени гиперболических функций, получаемых в ходе аппроксимации, чрезвычайно близки к единице (речь идет о том, что наилучшими оказываются аппроксимирующие гиперболические функции вида

$$x(t) = \frac{C}{(t' - t)^m}, \quad (1)$$

где C — константа, t' — точка сингулярности (момент времени, когда функция $x(t)$ превращается в бесконечность), $m \approx 1$ — показатель степени).

Попробуем разобраться с этой ситуацией.

2. Режимы с обострением в биологической эволюции

Сразу озвучим предлагаемую гипотезу: гиперболический рост типа (1) возникает тогда, когда происходит фазовый переход сложной биологической системы из одного относительно стабильного состояния в другое. При этом показатель степени m в формуле (1) примерно равен единице, поскольку данный переходный процесс зависит от *взаимодействия* ключевых акторов. Ситуация взаимодействия на языке динамических уравнений описывается выражением типа

$$\frac{dx}{dt} \approx ax^2, \tag{2}$$

решением которого является функция $x(t)$ с показателем степени $m \approx 1$. Пока мы находимся в стадии переходного процесса, мы не знаем, чем и когда он окончится; мы видим только, что он идет по гиперболе (1), имеющей точку сингулярности t' , которая вызывает у нас тревожные ожидания и трепет. В действительности при приближении к точке сингулярности происходит переструктурирование системы, она преобразуется, меняет свой облик и продолжает жить в новом качестве.

Ниже приведено обоснование предлагаемой гипотезы.

Начнем с долгопериодных макроприродных процессов (первые семь позиций в таблице 1). Сделаем важное замечание, что последовательность «планетарных революций» выстроена в таблице 1 по отношению к биологической (а не, к примеру, геологической) эволюции. Поэтому в таблице замешаны геологические эры, периоды, эпохи, имеющие разный таксономический смысл, что, вообще говоря, некорректно. Если по той же методике, что на рис. 1, расположить не позиции таблицы 1, а геологические периоды от кембрия до четвертичного периода (антропогена)², отражающие геологическую и климатическую историю, то получится картина, представленная на рис. 4.

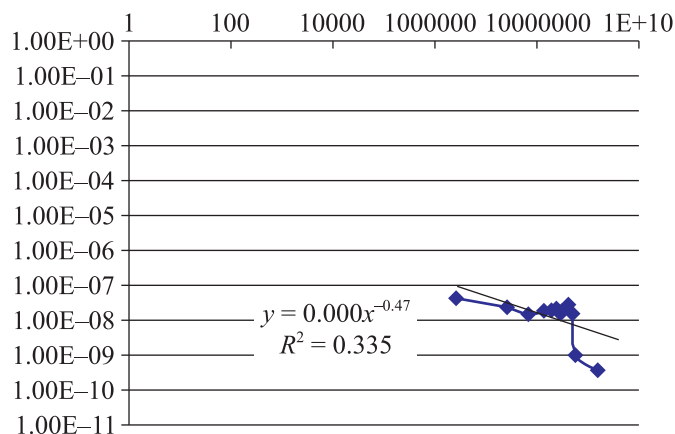


Рис. 4. Гиперболическая аппроксимация геологических периодов: по оси ординат — величина, обратная времени от рассматриваемого события до 2019 г., по оси абсцисс — интервал времени между событиями (время измеряется в годах)

Из рис. 4 (особенно при сопоставлении его с рис. 1) видно, что о гиперболической аппроксимации и о сингулярности в эволюции геологических процессов говорить не приходится: они живут своей жизнью, слабо связанной с жизнью биосферы.

В отношении биосферы действительно наблюдается гиперболическое убыстрение эволюции и увеличение многообразия. Но это биологическое многообразие не связано с человеческой

² Кембрий, ордовик, силур, девон, карбон, пермь, триас, юра, мел, палеоген, неоген, антропоген.

эволюцией³. Это следует из того, что в соответствии с приведенной выше аппроксимацией из работы [Марков, Коротаев, 2008] гиперболическая сингулярность биологической эволюции наступит примерно через 30 млн лет, а не в первой половине XXI века (как это следует из анализа человеческой эволюции [Панов, 2005, 2008]).

Причина гиперболического характера биологической эволюции, по-видимому, заключается в следующем. Увеличение видового многообразия — это процесс с обратной положительной связью. В биологии возникновение новых видов происходит за счет и благодаря уже существующим видам. Более ранние виды своей жизнедеятельностью изменяют среду обитания, делая ее более разнообразной, насыщая ее органикой, порождая новые биологические ниши (так, плодородные почвы есть продукт жизнедеятельности огромного количества предыдущих поколений живых организмов; кислород, без которого невозможна жизнь на Земле, — это продукт фотосинтеза растений и т. п.). Процесс увеличения видового многообразия с помощью упрощенной базовой математической модели может быть описан следующим образом. Рассмотрим эволюцию двух биологических сообществ, развивающихся в изолированных экологических нишах [Ризниченко, 2011]. На базовом уровне видовая динамика этих сообществ может быть описана уравнениями

$$\frac{dn_1}{dt} \approx \alpha_1 n_1 - \beta_1 n_1 - \gamma_1 n_1^2, \quad (3)$$

$$\frac{dn_2}{dt} \approx \alpha_2 n_2 - \beta_2 n_2 - \gamma_2 n_2^2, \quad (4)$$

где n_i — количество видов каждого из двух сообществ ($i = 1, 2$); α_i — коэффициенты, характеризующие скорость появления новых видов (например, в результате мутаций); β_i, γ_i — коэффициенты, характеризующие скорость гибели видов, причем член $\gamma_i n_i^2$ отражает эффект тесноты, то есть увеличение скорости гибели видов, когда экологическая ниша заполнена и ресурсы исчерпаны. Решение уравнений (3)–(4) имеет вид логистических кривых, вид которых изображен на рис. 5.

Логистическая динамика характеризуется тем, что после периода роста происходит торможение и стабилизация n_i вследствие исчерпания экологической ниши. При наступлении стабильного состояния рост видового разнообразия прекращается:

$$\frac{dn_1}{dt} = 0, \quad \frac{dn_2}{dt} = 0. \quad (3)$$

Т. е. в соответствии с (3)–(4) выполняются соотношения

$$\alpha_i n_i - \beta_i n_i - \gamma_i n_i^2 \approx 0, \quad (4)$$

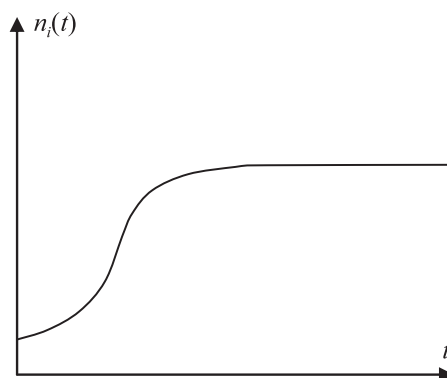


Рис. 5. Логистическая кривая динамики n_i в отсутствие расширения экологической ниши

³ Если не считать того, что в последние тысячелетия человек стал ощутимо влиять на биологическое многообразие в результате своего активного воздействия на природу.

а значения n_i устанавливаются на максимальном для них уровне:

$$n_{i \max} = \frac{\alpha_i - \beta_i}{\gamma_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Если же биологические сообщества начинают взаимодействовать, не конкурируя, а расширяя экологические ниши друг друга, то уравнения (3)–(4) преобразуются к виду

$$\frac{dn_1}{dt} \approx \alpha_1 n_1 - \beta_1 n_1 - \gamma_1 n_1^2 + \delta_1 n_1 n_2, \quad (6)$$

$$\frac{dn_2}{dt} \approx \alpha_2 n_2 - \beta_2 n_2 - \gamma_2 n_2^2 + \delta_2 n_1 n_2, \quad (7)$$

где δ_i — коэффициент, отражающий интенсивность взаимодействия, влияющего на расширение экологических ниш. Вследствие такого взаимодействия ограничения на рост n_i снимаются. Возникающую после этого динамику иллюстрирует рис. 6, где на фоне стабильного состояния в момент времени t_1 включается взаимодействие биологических сообществ, приводящее к расширению экологических ниш.

Естественно, после определенного времени возникнут ограничения на расширение экологических ниш, но на начальном этапе рост n_i идет в соответствии с приближенными уравнениями:

$$\frac{dn_1}{dt} \approx \delta_1 n_1 n_2, \quad \frac{dn_2}{dt} \approx \delta_2 n_1 n_2, \quad (8)$$

поскольку в исходном стабильном состоянии выполняется условие (4) и система (6)–(7) преобразуется в (8).

Можно показать, что система (8) при достаточно общих допущениях может быть преобразована в систему уравнений (9):

$$\frac{dn_1}{dt} \approx \delta_2 n_1^2, \quad \frac{dn_2}{dt} \approx \delta_1 n_2^2, \quad (9)$$

которые аналогичны (2) и соответственно описывают гиперболический рост $n_i(t)$ по типу (1) с показателем $m \approx 1$.

Так как биологические сообщества в результате своей жизнедеятельности постоянно насыщают среду обитания органикой, порождая новые экологические ниши, то процесс, описываемый уравнениями (6)–(7), не останавливается, создавая непрерывный переходный процесс увеличения многообразия и повышения специализации новых биологических видов (при том что в отдельные периоды могут наблюдаться определенные спады).

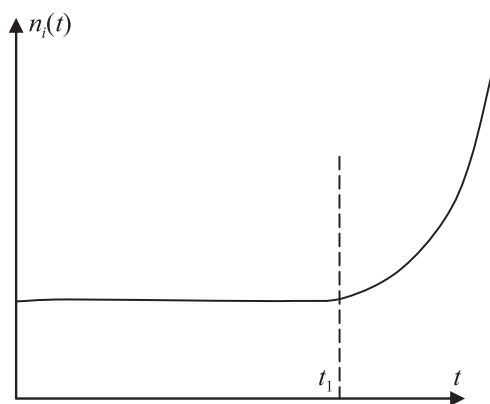


Рис. 6. Динамика n_i в случае, когда в момент времени t_1 начинается расширение экологических ниш в результате взаимодействия биологических сообществ в соответствии с уравнениями (6)–(7)

3. Режимы с обострением в истории человечества

Перейдем к процессам средней и относительно малой длительности, связанным с эволюцией человеческого общества (с восьмой по девятнадцатую позицию в таблице 1). Здесь основным количественным показателем является численность населения Земли (см. рис. 2). Отличие от рассмотренного выше случая биологической эволюции заключается в том, что человек научился *сам* расширять свою экологическую нишу и ресурсную базу, используя орудия труда и создавая новые технологии. В условиях ограниченной ресурсной базы численность человеческой популяции изменяется по логистическому закону (см. рис. 5) в соответствии с уравнением

$$\frac{dN}{dt} \approx \alpha N - \beta N - \gamma N^2, \quad (10)$$

где N — численность человеческой популяции, α — усредненный коэффициент рождаемости, β, γ — коэффициенты, характеризующие скорость гибели населения от природных (старость, болезни) и социальных (войны) причин, причем член γN^2 отражает эффект тесноты, т. е. увеличение скорости гибели населения, когда наблюдается острый дефицит ресурсов (голод, народные восстания, гражданские войны и т. п.) [Коротаев и др., 2007а; Малков, 2009]. Технологический прогресс снимает ресурсные ограничения и позволяет осваивать новые природные экологические ниши. В терминах модели технологический прогресс в основном влияет на снижение коэффициента γ , отражающего ограниченность ресурсов [Подлазов, 2002, 2017].

При этом нужно иметь в виду, что технологический прогресс происходит не непрерывно, а рывками, воспринимаемыми как «технологические революции», которые запускают целый пучок связанных друг с другом инноваций, преобразующих мир и инициирующих фазовый переход общества в качественно иное экономическое, социальное, политическое состояние. Динамика фазового перехода такова. Сначала общество находится в стабильном состоянии, определяемом уровнем традиционно используемых технологий. В этом состоянии численность населения стабильна, и справедливы соотношения

$$\frac{dN}{dt} \approx 0, \quad \alpha N - \beta N - \gamma N^2 \approx 0, \quad N \approx \frac{\alpha - \beta}{\gamma}. \quad (11)$$

Технологическая революция расширяет ресурсную базу общества и снижает значение γ до уровня γ' ($\gamma - \gamma' = \Delta\gamma$). Численность населения начинает расти от уровня $N = (\alpha - \beta)/\gamma$ в соответствии с уравнением

$$\frac{dN}{dt} \approx \alpha N - \beta N - \gamma' N^2, \quad (12)$$

где γ' становится переменной величиной, постепенно снижающейся по мере разворачивания технологической революции и реализации инноваций.

Динамика, описываемая этим уравнением, отражена на рис. 7.

Рисунок показывает, что в результате «технологической революции» (и соответствующего снижения значения γ) происходит своеобразный демографический взрыв, заканчивающийся тем, что численность популяции выходит на новый уровень, обеспечиваемый новыми технологиями, и стабилизируется на нем. Для нового стабильного состояния характерны соотношения

$$\frac{dN}{dt} \approx 0, \quad \alpha N - \beta N - \gamma' N^2 \approx 0, \quad N \approx \frac{\alpha - \beta}{\gamma'}, \quad (13)$$

которые будут выполняться до следующей «технологической революции»⁴.

⁴ Следует отметить, что уровень нового стабильного уровня численности населения определяется не только новым значением γ , но и новыми значениями α и β , определяющими динамику рождаемости и естественной смертности в «новом» обществе, изменившем свою социально-экономическую и демографическую структуру в результате произошедшей «технологической революции». Так, в современных развитых странах значение α снижается (в силу перехода от многодетной к малодетной модели семьи) при одновременном снижении значения β (в силу улучшения медицины и повышения продолжительности жизни).

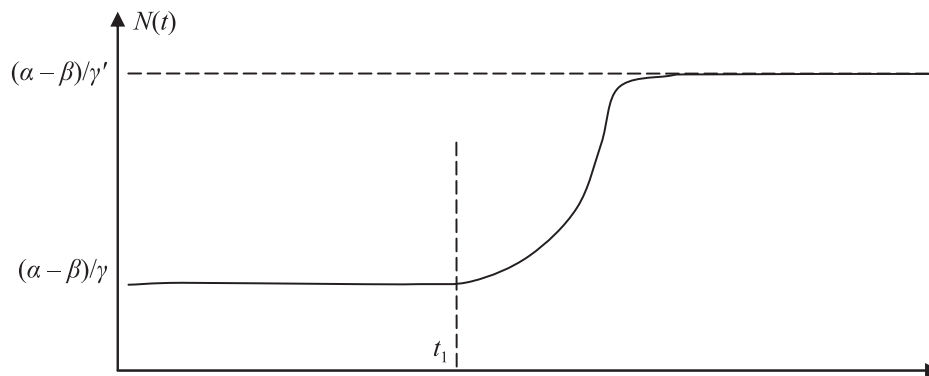


Рис. 7. Динамика N в случае, когда в исторический момент t_1 произошла технологическая революция

При этом, пока общество находится в переходной стадии и еще не знает, что его ожидает, ему будет казаться, что идет гиперболический рост N с близкой сингулярностью. Действительно, на начальной стадии переходного процесса, в силу справедливости соотношения (11), рост N описывается приближенным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &\approx \alpha N - \beta N - \gamma' N^2 = \alpha N - \beta N - (\gamma - \Delta\gamma) N^2 = \\ &= (\alpha N - \beta N - \gamma N^2) + \Delta\gamma N^2 \approx \Delta\gamma N^2, \end{aligned} \quad (14)$$

которое является аналогом уравнения (2), т. е. уравнением гиперболического роста с показателем степени $m \approx 1$. Конечно, уравнение (14) носит весьма приближенный характер, кроме того, в нем не учтена в явном виде зависимость величины γ' от времени. Поэтому возникает вопрос: будет ли изменение величины γ' в процессе технологической революции таким, чтобы динамика N имела в переходный период вид гиперболы или чего-то близкого к гиперболе. Для ответа на этот вопрос необходимо дать содержательную и математическую трактовку процессам, которые отражает член γN^2 . Для этого представим (10) в виде

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N - \gamma N^2 = rN \left(1 - \frac{\gamma}{r} N \right) = rN(1 - cN), \quad (15)$$

где r — коэффициент естественного прироста населения⁵ при отсутствии ресурсных ограничений ($r = \alpha - \beta$), c — переменный коэффициент, отражающий влияние эффекта тесноты, обусловленного с ресурсными ограничениями. В ряде работ (см., например, [Малков, 2009; Grinin et al., 2013]) предложена следующая трактовка члена cN в уравнении (15): этот член характеризует отношение ресурсной базы R_c , критически необходимой для устойчивого функционирования общества численностью N , к актуально имеющейся в рассматриваемый период времени ресурсной базе $R(t)$. То есть $cN = R_c/R(t) = x_c N/R(t)$, где x_c — величина ресурса, необходимого для физического выживания одного члена общества. Если $R_c/R(t) < 1$, то имеющихся ресурсов достаточно, и имеет место демографический рост (предполагается, что $r > 0$); если $R_c/R(t) = 1$, то ресурсы на пределе, и имеет место простое воспроизводство населения; если $R_c/R(t) > 1$, то ресурсов для простого воспроизводства недостаточно, и имеет место депопуляция⁶ [Нефедов, 2002, 2007]. С учетом этого уравнение может быть (15) представлено в виде

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{x_c N}{R(t)} \right). \quad (16)$$

⁵ Конкретное значение r для разных обществ может быть разным, поскольку оно определяется культурными факторами (малодетная или многодетная модель семьи), состоянием здравоохранения и т. д.

⁶ Здесь важно отметить, что депопуляция возможна и при $R_c/R(t) < 1$, если $r < 0$, т. е. если в обществе происходит переход от многодетной к малодетной модели семьи.

При $R(t) = R_0 = \text{const}$ (это условие имеет место, когда уровень развития жизнеобеспечивающих технологий не изменяется или меняется очень медленно, как это было, например, в Средневековье) уравнение (16) эквивалентно уравнению (10) с неизменным коэффициентом γ . В этом случае в конечном итоге в рассматриваемом регионе устанавливается численность населения, соответствующая максимальной демографической емкости территории: $N = R_0/x_c$.⁷

При наличии глобальных климатических изменений $R(t)$ может изменяться⁸, что неизбежно приводит к колебаниям в численности аграрных обществ [Малков, 2009], к массовым миграциям.

В эпохи «технологических революций» происходит рост величины $R(t)$, что влечет за собой рост $N(t)$. Динамика увеличения $R(t)$ в эпохи «технологических революций» может быть описана следующим образом. Пусть до «технологической революции» с помощью традиционных технологий⁹ был достигнут уровень ресурсного обеспечения R' . Пусть «технологическая революция», начавшаяся в момент времени t_0 , в конечном счете подняла ресурсное обеспечение до уровня R'' , который затем остается относительно стабильным до следующей «технологической революции». Тогда уравнение для роста ресурсной базы $R(t)$ с момента t_0 можно записать в виде

$$\frac{dR}{dt} = f(N, R) \left(1 - \frac{R}{R''}\right), \quad (17)$$

где первый множитель в правой части отражает скорость роста технологических нововведений (изобретений), расширяющих ресурсную базу, второй множитель отражает последующее торможение роста $R(t)$ вследствие исчерпания возможностей «технологической революции». Выражение для $f(N, R)$ по аналогии с [Kremer, 2005; Коротаев и др., 2007b] может быть записано в виде

$$f(N, R) = kN(R - R'), \quad (18)$$

где k — постоянный коэффициент. В соответствии с (18) скорость роста технологических нововведений пропорциональна количеству инноваторов (изобретателей), количество которых пропорционально N^{10} , а также уже имеющейся новой технологической базе (поскольку новые инновации и изобретения появляются как продолжение и развитие уже имеющихся). Таким образом, результирующее выражение для динамики $R(t)$ в эпоху технологической революции имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = kN(R - R') \left(1 - \frac{R}{R''}\right). \quad (19)$$

В результате совместного решения уравнений (19) и (16) определяются изменения $R(t)$ и $N(t)$ в эпохи перемен (типичные графики приведены на рис. 8).

Видно, что в ходе технологической революции $N(t)$ растет по закону, близкому к гиперболическому (гиперболическая зависимость с точкой сингулярности $t' = 138$ изображена на рис. 8 пунктирной линией). Серьезные отклонения $N(t)$ от гиперболического закона начинают наблюдаться лишь в близкой окрестности от точки сингулярности.

Для современной эпохи гиперболическая асимптота была выявлена эмпирически фон Ферстером на основе статистической обработки демографических данных [Foerster et al., 1960]. Значение t' (точка сингулярности) оказалось при этом равным 2026 г. Понятно, что это не

⁷ При этом важно понимать, что в ходе «технологической революции», кроме всего прочего, происходит изменение величины x_c (достаточно сравнить ресурсы, необходимые для физического выживания одного члена аграрного общества и одного члена развитого индустриального общества, например жителя современного мегаполиса).

⁸ Это связано с изменением урожайности сельскохозяйственных культур, с изменением вегетационного периода, повышением/снижением засушливости и т. п.

⁹ Предполагается, что инновационный потенциал традиционных технологий уже исчерпан.

¹⁰ Количество изобретателей хотя и составляет небольшой процент от численности населения, но тем не менее чем больше N , тем больше изобретателей и, соответственно, тем больше изобретений.

«Судный день», а ориентировочная дата завершения начальной стадии переходного процесса, начавшегося двести лет назад промышленной революцией, к его завершающей стадии, которая должна закончиться формированием «нового» общества. Признаками перехода к завершающей стадии являются начавшееся торможение демографического роста, трансформация индустриального общества в информационное, глобализация экономических, информационных, политических процессов [Малков, Максимов, 2018]. По поводу того, каким будет «новое» общество, написано много работ, высказано много гипотез (см., например, [Добролюбов, 2016; Назаретян, 2015; Малков, Максимов, 2018] и др.); ясно одно — что оно будет принципиально новым.

Любопытно, что переходные демографические процессы, подобные тому, который происходит сейчас, в человеческой истории уже были [Коротаев и др., 2007b; Малков, Максимов, 2018]. Речь идет о неолитической революции (10 тыс. лет назад, переход от общества охотников-собирателей к обществу животноводов-земледельцев), о «городской революции» (5 тыс. лет назад, переход от эпохи неолита к эпохе бронзы, появление городов и ремесел), об «осевом времени» (2.5 тыс. лет назад, широкое распространение железных орудий и связанных с ними технологий). Каждый раз причиной изменений в обществе были «технологические революции», резко повышавшие производительность труда и возможности человека в различных сферах жизни, расширявшие ресурсную базу и приводящие к резкому увеличению численности человеческой популяции. Демографических данных, относящихся к первым двум революциям, немного, поэтому о количественном моделировании говорить сложно. Интересно более внимательно рассмотреть демографическую динамику «осевого времени», по которой есть более надежные и точные данные [Коротаев, Малков, Халтурина, 2007]. Уже на рис. 2 видно, что с 8 по 1 век до нашей эры происходил интенсивный рост населения. Масштабы этого роста кажутся незначительными, если сравнивать их с демографическим взрывом последних двух веков. Но ситуация сильно изменится, если рассматривать ее глазами современников тех событий. На рис. 9 показана демографическая динамика, как она виделась современникам в 200 г. до нашей эры, в 1 г. нашей эры и в 600 г. нашей эры.

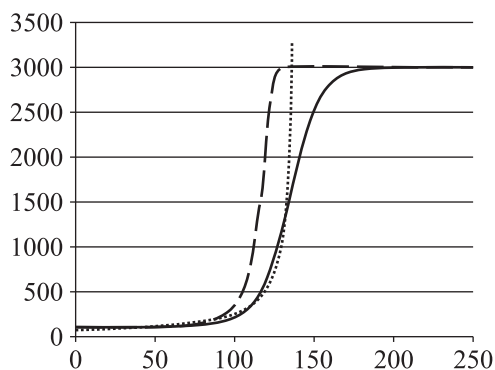


Рис. 8. Типовая динамика $N(t)$ (сплошная линия) и $R(t)$ (штриховая линия) в соответствии с уравнениями (16) и (19): по оси абсцисс — годы, по оси ординат — отн. ед., пунктирная линия — гипербола

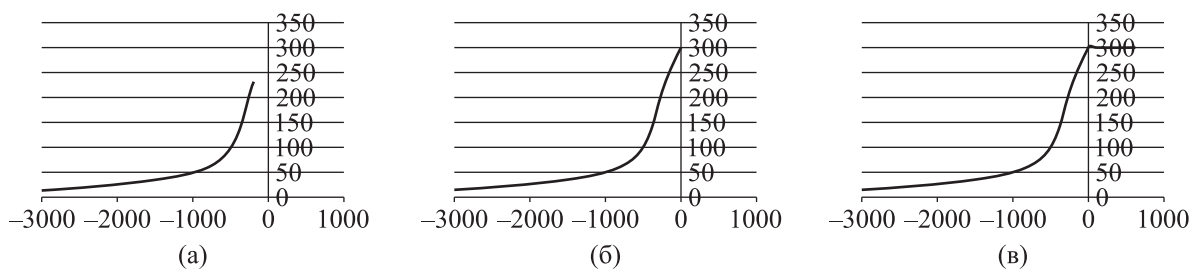


Рис. 9. Население Земли к 200 BC (а), к 1 AD (б) и к 600 AD (в), млн чел.: по оси абсцисс — время в годах (источник данных: [Коротаев и др., 2007b])

Видно, что к 600 г. н. э. переходный демографический процесс уже завершился (при этом произошел переход от Античности к Средневековью), к 1 г. н. э. стало явным торможение демографического роста (это время трансформации Римской республики в Римскую империю, завершение «локальной глобализации» на пространстве Средиземноморья). А в 200 г. до н. э. переходный процесс был еще в разгаре, демографическая кривая отлично аппроксимировалась гиперболой с точкой сингулярности в 1 г. н. э. и с показателем степени $m = 1.00$ (см. рис. 10).

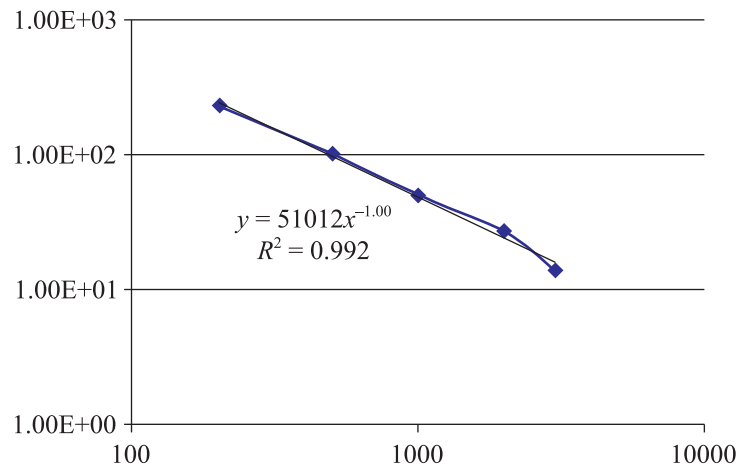


Рис. 10. Гиперболическая аппроксимация численности населения Земли в период с 3000 г. до н. э. до 200 г. до н. э., см. рис. 9, а (по данным [Коротаев и др., 2007b]): по оси ординат — величина, обратная времени от рассматриваемого события до 1 г. н. э., по оси абсцисс — интервал времени между событиями (время измеряется в годах)

Таким образом, рубеж тысячелетий — это эпоха, чрезвычайно схожая с нынешним временем [Малков, Максимов, 2018]: эпоха бурного экономического, технологического, демографического роста и одновременно эсхатологических предчувствий и ожидания конца света (см. рис. 3). В конечном итоге мир действительно кардинально изменился: произошел фазовый переход в новое состояние — от Античности к Средневековью. Начался новый исторический период, который длился до конца XVIII века, когда произошла очередная «технологическая революция», запустившая очередной фазовый переход.

Осталось разобраться, почему интервалы между очередными «технологическими революциями» уменьшаются: неолитическая революция произошла 10 тыс. лет назад, «городская революция» — 5 тыс. лет назад, «осевое время» — 2.5 тыс. лет назад, промышленная революция — 200 лет назад (мы используем такой перечень революций потому, что именно эти революции сопровождались глобальными демографическими взрывами). На этот счет, как уже упоминалось выше, существует весьма аргументированное соображение, что скорость роста изобретений пропорциональна количеству изобретателей, которое составляет небольшую, но достаточно постоянную часть численности населения N [Kremer, 2005; Коротаев и др., 2007b] и приближенно может быть описана уравнением

$$\frac{dS}{dt} \approx aNS, \quad (20)$$

где S — количество технологических инноваций (это уравнение отражает тот факт, что скорость появления инноваций пропорциональна текущему технологическому уровню развития общества). Таким образом, получается, что рост числа инноваций и связанные с ними «технологические революции» приводят к росту населения, который в свою очередь убыстряет появление инноваций. Данная положительная обратная связь сокращает время между «технологическими революциями», что и наблюдается в человеческой истории.

4. Заключение

Все вышесказанное позволяет сформулировать следующие выводы.

1. Часто проводимое объединение биологической и социальной эволюций в публикациях, посвященных феномену сингулярности, является большой натяжкой (точнее, некорректностью). Общее между ними лишь то, что скорость изменений и в том и в другом случае носит **ускоряющийся** характер.

2. При этом эволюции живых организмов характерны обратные положительные и отрицательные связи в результате их **взаимодействия** (то есть пропорциональные N^2). Это приводит к зависимостям гиперболического типа в фазах ускорения и логистического типа в фазах замедления.

3. Общее ускорение **биологического** видообразования связано с тем, что более ранние виды своей жизнедеятельностью изменяют среду обитания, делая ее более разнообразной, насыщая органикой, порождая новые биологические ниши, тем самым создавая благоприятные условия для появления новых видов. Математическое моделирование и имеющиеся эмпирические данные показывают, что к настоящему времени динамика разнообразия биоты достаточно хорошо описывается гиперболическим трендом, который формально уходит в бесконечность примерно через 30 млн лет [Марков, Коротаев, 2008].

4. Для **социальной** эволюции тоже характерно ускорение, но широко обсуждаемые феномены технологической, демографической, социальной сингулярности во многом носят спекулятивный характер. Как показывает математическое моделирование, наблюдаемый в последние столетия гиперболический характер роста некоторых демографических, экономических и др. показателей — это следствие **переходных процессов**, начавшихся вследствие промышленной революции (замены ручного труда машинным) и предвещающих переход общества на новую стадию своего развития. Точка сингулярности гиперболического тренда характеризует окончание начального этапа этого процесса и переход к завершающей его стадии. Прямым аналогом современной ситуации в этом смысле является «осевое время» (период с 8 века до нашей эры до начала нашей эры). Наличие такой аналогии позволяет заглянуть в будущее при изучении прошлого.

Список литературы (References)

- Белавин В. А., Капица С. П., Курдюмов С. П. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. — № 38 (6). — С. 885–902.
- Belavin V. A., Kapitsa S. P., Kurdyumov S. P. Matematicheskaya model' global'nykh demograficheskikh processov s uchetom prostranstvennogo raspredeleniya [Mathematical model of global demographic processes, taking into account the spatial distribution] // Journal of computational mathematics and mathematical physics. — 1998. — No. 38 (6). — P. 885–902 (in Russian).
- Добролюбов С. В. Глобальное общество как точка сингулярности и фазового перехода к новому типу социальной эволюции // Эволюция. — 2016. — № 8. — С. 229–262.
- Dobrolyubov S. V. Global'noe obshchestvo kak tochka singulyarnosti i fazovogo perexoda k novomu tipu social'noj evolyucii [Global society as the point of singularity and a phase transition to a new type of social evolution] // Evolution. — 2016. — No. 8. — P. 229–262 (in Russian).
- Коротаев А. В. Периодизация истории Мир-Системы и математические макромоделли социально-исторических процессов // История и математика. Проблемы периодизации исторических макропроцессов / ред. Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, С. Ю. Малков. — М.: УРСС, 2006. — С. 116–167.
- Korotaev A. V. Periodizaciya istorii Mir-Sistemy i matematicheskie makromodeli social'no-istoricheskikh processov [Periodization of the history of the world-system and mathematical macromodel socio-historical processes] // History, and mathematics. The problem of historical periodization macroprocesses / eds. L. E. Grinin, A. V. Korotaev, S. Yu. Mal'kov. — Moscow: URSS, 2006. — P. 116–167 (in Russian).

- Коротаев А. В., Комарова Н. Л., Халтурина Д. А.* Законы истории. Вековые циклы и тысячелетние тренды. Демография. Экономика. Войны. — М.: КомКнига/URSS, 2007a.
Korotaev A. V., Komarova N. L., Khalturina D. A. Zakony istorii. Vekovye cikly i tysyacheletnie trendy. Demografiya. Ekonomika. Vojny [The laws of history. Secular cycles and millennial trends. Demography. Economy. War]. — Moscow: KomKniga/URSS, 2007a (in Russian).
- Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А.* Законы истории. Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура. — М.: КомКнига, 2007b.
Korotaev A. V., Malkov A. S., Khalturina D. A. Zakony istorii. Matematicheskoe modelirovanie razvitiya Mir-Sistemy. Demografiya, ekonomika, kul'tura [Laws history: mathematical modeling of development of world-system. Demography, economy, culture]. — Moscow: KomKniga, 2007b (in Russian).
- Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А.* Компактная математическая модель экономического и демографического развития Мир-Системы (1–1973 гг.) // Экономика и математические методы. — 2008. — № 44 (4). — С. 90–101.
Korotaev A. V., Malkov A. S., Khalturina D. A. Kompaktnaya matematicheskaya model' ekonomicheskogo i demograficheskogo razvitiya Mir-Sistemy (1–1973 gg.) [Compact mathematical model of economic and demographic development of the world-system (1–1973)] // Economics and mathematical methods. — 2008. — No. 44 (4). — P. 90–101 (in Russian).
- Куркина Е. С., Куретова Е. Д.* Математические модели эволюции Мир-Системы // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2013. — Т. 21, № 6. — С. 93–113.
Kurkina E. S., Kuretova E. D. Matematicheskie modeli evolyucii Mir-Sistemy [Mathematical model of the evolution of the world-system] // Proceedings of higher educational establishments. Applied Nonlinear Dynamics. — 2013. — Vol. 21, No. 6. — P. 93–113 (in Russian).
- Малков С. Ю.* Социальная самоорганизация и исторический процесс: возможности математического моделирования. — М.: Либроком, 2009.
Malkov S. Yu. Social'naya samoorganizaciya i istoricheskij process: vozmozhnosti matematicheskogo modelirovaniya. [Social and historical process of self-organization: the ability of mathematical modeling]. — Moscow: Librokom, 2009 (in Russian).
- Малков С. Ю., Максимов А. А.* Контуры грядущего миропорядка // История и современность. — 2018. — № 4 (30). — С. 3–29.
Malkov S. Yu., Maksimov A. A. Kontury gryadushhego miroпорядка [The contours of the coming world order] // History and modernity. — 2018. — No. 4 (30). — P. 3–29 (in Russian).
- Марков А. В., Анисимов В. А., Коротаев А. В.* Взаимосвязь размера генома и сложности организма в эволюционном ряду от прокариот к млекопитающим // Палеонтологический журнал. — 2010. — № 4. — С. 3–14.
Markov A. V., Anisimov V. A., Korotaev A. V. Vzaimosvyaz' razmera genoma i slozhnosti organizma v evolyucionnom ryadu ot prokariot k mlekopitayushhim [The relationship of the size and complexity of the genome of an organism in an evolutionary series from prokaryotes to mammals] // Paleontological journal. — 2010. — No. 4. — P. 3–14 (in Russian).
- Марков А. В., Коротаев А. В.* Динамика разнообразия фанерозойских морских животных соответствует модели гиперболического роста // Журнал общей биологии. — 2007. — № 68 (1). — С. 3–18.
Markov A. V., Korotaev A. V. Dinamika raznoobraziya fanerozojskikh morskikh zhitvnykh sootvetstvuet modeli giperbolicheskogo rosta [The dynamics of diversity fanerozojskikh of marine animals to model hyperbolic growth] // Journal of general biology. — 2007. — No. 68 (1). — P. 3–18 (in Russian).
- Марков А. В., Коротаев А. В.* Гиперболический рост разнообразия морской и континентальной биот фанерозоя и эволюция сообществ // Журнал общей биологии. — 2008. — № 69 (3). — С. 175–194.
Markov A. V., Korotaev A. V. Giperbolicheskij rost raznoobraziya morskoy i kontinental'noj biot fanerozoya i evolyuciya soobshhestv [Hyperbolic growth of marine and continental BIOT fanerozoja and community evolution] // Journal of general biology. — 2008. — No. 69 (3). — P. 175–194 (in Russian).
- Назаретян А. П.* Середина XXI века: загадка сингулярности // Философские науки. — 2013. — № 9. — С. 15–24.
Nazaretyan A. P. Seredina XXI veka: zagadka singulyarnosti [The middle of the twenty-first century: the Enigma of the singularity] // Philosophical Sciences. — 2013. — No. 9. — P. 15–24 (in Russian).

- Назаретян А. П.* Мегаистория и ее «загадочная сингулярность» // Вестник Российской академии наук. — 2015. — № 85 (8). — С. 755–764.
Nazaretyan A. P. Megaistoriya i ee «zagadochnaya singulyarnost'» [Megaistorija and its mysterious singularity] // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. — 2015. — No. 85 (8). — P. 755–764 (in Russian).
- Нефедов С. А.* О теории демографических циклов // Экономическая история. — 2002. — № 8. — С. 116–121.
Nefedov S. A. O teorii demograficheskix ciklov [On the theory of demographic cycles] // Economic history. — 2002. — No. 8. — P. 116–121 (in Russian).
- Нефедов С. А.* Концепция демографических циклов. — Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2007.
Nefedov S. A. Konceptiya demograficheskikh ciklov [The concept of demographic cycles]. — Ekaterinburg: Izd. UGGU, 2007 (in Russian).
- Панов А. Д.* Сингулярная точка истории // Общественные науки и современность. — 2005. — № 1. — С. 122–137.
Panov A. D. Singulyarnaya tochka istorii [Singular point in history] // Social science and modernity. — 2005. — No. 1. — P. 122–137 (in Russian).
- Панов А. Д.* Универсальная эволюция и проблема поиска внеземного разума. — М.: ЛКИ, 2008.
Panov A. D. Universal'naya evolyuciya i problema poiska vnezemnogo razuma [Universal evolution and the problem of search of extraterrestrial intelligence]. — Moscow: LKI, 2008 (in Russian).
- Подлазов А. В.* Теоретическая демография. Модели роста народонаселения и глобального демографического перехода // Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие / ред. Г. Г. Малинецкий, С. П. Курдюмов. — М.: Наука, 2002. — С. 324–345.
Podlazov A. V. Teoreticheskaya demografiya. Modeli rosta narodonaseleniya i global'nogo demograficheskogo perekhoda [Theoretical demography. Models of population growth and the global demographic transition] // New in synergetic. Look in the third Millennium / ed. G. G. Malinetskij, S. P. Kurdyumov. — Moscow: Nauka, 2002. — P. 324–345 (in Russian).
- Подлазов А. В.* Теория глобального демографического процесса // Вестник Российской академии наук. — 2017. — № 6. — С. 520–531.
Podlazov A. V. Teoriya global'nogo demograficheskogo processa [Theory of global demographic process] // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. — 2017. — No. 6. — P. 520–531 (in Russian).
- Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. — М.–Ижевск: РХД, 2011.
Riznichenko G. Yu. Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii [Lectures on mathematical models in biology]. — Moscow–Izhevsk: RCD, 2011 (in Russian).
- Цирель С. В.* Скорость эволюции: пульсирующая, замедляющаяся, ускоряющаяся // Универсальная и глобальная история. Эволюция Вселенной, Земли, жизни, общества. — Волгоград: Учитель, 2012. — С. 167–196.
Cirel' S. V. Skorost' evolyucii: pul'siruyushhaya, zamedlyayushhayasya, uskoryayushhayasya [The speed of evolution: a throbbing, slowing, accelerating] // Universal and global history. The evolution of the universe, Earth, life, and society. — Volgograd: Uchitel', 2012. — P. 167–196 (in Russian).
- von Foerster H., Mora P. M., Amiot L. W.* Doomsday: Friday, 13 November, AD 2026 // Science. — 1960. — No. 132. — P. 1291–1295.
- Grinin L., Markov A., Korotayev A.* On Similarities between Biological and Social Evolutionary Mechanisms: Mathematical Modeling // Cliodynamics: the Journal of Theoretical and Mathematical History. — 2013. — No. 4 (2). — P. 185–228.
- Kremer M.* Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990 // The Quarterly Journal of Economics. — 1993. — No. 108. — P. 681–716.
- Kurzweil R.* The Singularity Is Near: When Humans Transcend Biology. — New York: Viking Penguin, 2005.
- Maddison Historical Statistics [Electronic resource]. — URL: <http://www.ggdc.net/maddison> (accessed: 02.03.2019).

УДК: 330.4.51-77

Техника проведения расчетов динамики показателей олигополистических рынков на основе операционного исчисления

Л. Е. Варшавский

Центральный экономико-математический институт РАН,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: hodvar@yandex.ru

Получено 19.06.2019, после доработки — 05.09.2019.

Принято к публикации 09.09.2019.

В настоящее время наиболее распространенный подход к расчету оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков, а следовательно и показателей таких рынков, связан с использованием линейных динамических игр с квадратичными критериями и решением обобщенных матричных уравнений Риккати.

Другой подход к исследованию оптимальных разомкнутых (open-loop) стратегий участников олигополистических рынков, развиваемый автором, основан на использовании операционного исчисления (в частности, Z -преобразования). Этот подход позволяет получить экономически приемлемые решения для более широкого диапазона изменения параметров используемых моделей, чем при применении методов, основанных на решении обобщенных матричных уравнений Риккати. Метод отличается относительной простотой вычислений и необходимой для экономического анализа наглядностью. Одним из его достоинств является то, что во многих важных для экономической практики случаях он, в отличие от традиционного подхода, обеспечивает возможность проведения расчетов с использованием широко распространенных электронных таблиц, что позволяет проводить исследование перспектив развития олигополистических рынков широкому кругу специалистов и потребителей.

В статье рассматриваются практические аспекты определения оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков на основе операционного исчисления, в частности техника проведения расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий в среде Excel. В качестве иллюстрации возможностей предлагаемых методов расчета исследуются примеры, близкие к практическим задачам прогнозирования показателей рынков высокотехнологичной продукции.

Полученные автором для многочисленных примеров и реальных экономических систем результаты расчетов, как с использованием полученных соотношений на основе электронных таблиц, так и с использованием расширенных уравнений Риккати, оказываются весьма близкими. В большинстве рассмотренных практических задач отклонение рассчитанных в соответствии с двумя подходами показателей, как правило, не превышает 1.5–2 %. Наибольшая величина относительных отклонений (до 3–5 %) наблюдается в начале периода прогнозирования. В типичных случаях период сравнительно заметных отклонений составляет 3–5 моментов времени. После переходного периода наблюдается практически полное совпадение значений искомым показателей при использовании обоих подходов.

Ключевые слова: олигополистические рынки, операционное исчисление, обобщенные матричные уравнения Риккати, электронные таблицы, факторизация

© 2019 Леонид Евгеньевич Варшавский

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 330.4.51-77

Studying indicators of development of oligopolistic markets on the basis of operational calculus

L. E. Varshavsky

Central Economics and Mathematics Institute RAS,
47 Nahimovskii ave., Moscow, 117418, Russia

E-mail: hodvar@yandex.ru

Received 19.06.2019, after completion — 05.09.2019.

Accepted for publication 09.09.2019.

The traditional approach to computing optimal game strategies of firms on oligopolistic markets and of indicators of such markets consists in studying linear dynamical games with quadratic criteria and solving generalized matrix Riccati equations.

The other approach proposed by the author is based on methods of operational calculus (in particular, Z-transform). This approach makes it possible to achieve economic meaningful decisions under wider field of parameter values. It characterizes by simplicity of computations and by necessary for economic analysis visibility. One of its advantages is that in many cases important for economic practice, it, in contrast to the traditional approach, provides the ability to make calculations using widespread spreadsheets, which allows to study the prospects for the development of oligopolistic markets to a wide range of professionals and consumers.

The article deals with the practical aspects of determining the optimal Nash–Cournot strategies of participants in oligopolistic markets on the basis of operational calculus, in particular the technique of computing the optimal Nash–Cournot strategies in Excel. As an illustration of the opportunities of the proposed methods of calculation, examples close to the practical problems of forecasting indicators of the markets of high-tech products are studied.

The results of calculations obtained by the author for numerous examples and real economic systems, both using the obtained relations on the basis of spreadsheets and using extended Riccati equations, are very close. In most of the considered practical problems, the deviation of the indicators calculated in accordance with the two approaches, as a rule, does not exceed 1.5–2%. The highest value of relative deviations (up to 3–5%) is observed at the beginning of the forecasting period. In typical cases, the period of relatively noticeable deviations is 3–5 moments of time. After the transition period, there is almost complete agreement of the values of the required indicators using both approaches.

Keywords: oligopolistic markets, operational calculus, generalized matrix Riccati equations, spreadsheets, factorization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 949–963 (Russian).

© 2019 Leonid E. Varshavsky

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

В настоящее время значительная часть рынков функционирует в условиях *олигополии*. Особенно это характерно для рынков высокотехнологичной продукции. Так, олигополистическими рынками являются, например, рынки авиационной техники, аппаратных средств информационно-коммуникационных технологий (ИКТ, включая микроэлектронную продукцию), продукции энергетического машиностроения и др.

В связи с тем, что динамика показателей олигополистических рынков тесно связана со стратегиями участников рынка, важное практическое значение представляют анализ, моделирование и прогнозирование рыночных стратегий высокотехнологичных фирм. В настоящее время наиболее распространенный подход к расчету оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков связан с использованием линейных динамических игр с квадратичными критериями и решением обобщенных (*generalized*, в англоязычной литературе используется также термин *coupled*) матричных уравнений Риккати (см., например, [Starr, Ho, 1969; Basar, Olsder, 1995; Dockner, Jorgenson, 2000; Engwerda, 2006]). Однако получаемые при этом подходе решения не обладают достаточной наглядностью, требуемой при анализе влияния тех или иных параметров и показателей моделей на исследуемые экономические переменные. При некоторых значениях параметров моделей решения уравнений Риккати, имеющие экономический смысл, вообще могут отсутствовать, в то время как оптимальные игровые стратегии существуют [Engwerda, 2006]. Кроме того, в ряде задач использование решений уравнений Риккати приводит к неустойчивым расчетам [Варшавский, 2012, с. 226].

Другой подход к исследованию оптимальных по Нэшу–Курно разомкнутых (*open-loop*) стратегий участников олигополистических рынков основан на использовании операционного исчисления (в частности, *Z*-преобразования). Этот подход позволяет получить экономически приемлемые решения для более широкого диапазона изменения параметров используемых моделей, чем при применении методов, основанных на решении обобщенных матричных уравнений Риккати [Варшавский, 2012, 2014]. Он отличается относительной простотой вычислений и необходимой для экономического анализа наглядностью. Одним из его достоинств является то, что во многих важных для экономической практики случаях он, в отличие от традиционного подхода, обеспечивает возможность проведения расчетов с использованием широко распространенных электронных таблиц (например, типа Excel и др.). Целесообразность использования электронных таблиц для нахождения оптимальных стратегий в динамических играх обусловлена и тем, что с их помощью очень удобно решать разностные уравнения, соответствующие получаемым операторным зависимостям. Всё это, в сочетании с прозрачностью проводимых расчетов, позволяет облегчить работу аналитиков и увеличить число потенциальных пользователей метода, начиная от студентов и до высококлассных профессионалов.

Вместе с тем оба подхода взаимно дополняют друг друга. Здесь также имеет место двойственность, характерная для теории линейных систем управления, в рамках которой используются соотношения между исследуемыми переменными как в пространстве состояний (т. е. непосредственно в форме дифференциальных и разностных уравнений), так и в частотной области (т. е. в форме преобразований Лапласа, Фурье, *Z*-преобразования и др.); см., например, [Kwakernaak, Sivan, 1972].

В настоящей статье, являющейся продолжением работ автора [Варшавский, 2012, 2014], рассматриваются **практические аспекты** определения оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников олигополистических рынков на основе операционного исчисления (в частности, *Z*-преобразования).

В качестве иллюстрации возможностей предлагаемых методов расчета исследуются примеры, близкие к практическим задачам прогнозирования рынков высокотехнологичной продукции.

2. Модель поведения участников олигополистических рынков

В настоящей статье техника проведения расчетов иллюстрируется применительно к линейной динамической игре с квадратичными критериями, представленной в форме, использованной, в частности, в статьях [Варшавский, 2012, 2014, 2017]. Центральным блоком используемой модели является следующая зависимость, связывающая объемы производства Q_{it} со входной переменной u_{it} (производственными инвестициями или вводом мощностей), i — индекс фирмы, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$Q_{it} = W_i(z) u_{it} + Q_{0it} = \frac{A_i(z)}{B_i(z)} u_{it} + Q_{0it}, \quad (1)$$

где $W_i(z) = B_i(z) / A_i(z)$ — передаточная функция, причем $A_i(z)$, $B_i(z)$ — полиномы относительно переменной z , представляющей собой оператор сдвига, $zx_t = x_{t+1}$:

$$A_i(z) = \sum_{k=0}^m a_{ik} z^k, \quad B_i(z) = \sum_{j=0}^n b_{ij} z^j, \quad m \leq n, \quad (2)$$

Q_{0it} — объем производства при отсутствии инвестиций.

Другой блок модели — обратная функция (оператор) спроса. В модели предполагается баланс суммарного спроса D_t и предложения Q_t , т. е. $D_t = Q_t = \sum_{i=1}^N Q_{it}$ и линейная зависимость цены на рынке p_t от объема спроса:

$$p_t = a_t - bD_t = a_t - b \sum_{i=1}^N Q_{it} = a_t - b \sum_{i=1}^N [W_i(z) u_{it} + Q_{0it}]. \quad (3)$$

Предполагается, что олигополисты максимизируют чистую текущую стоимость (NPV) в режиме скользящего планирования (receding horizon):

$$J_{it} = \sum_{\tau=t}^{t+T_p} \beta^{\tau-t} \left[(p_\tau - c_i) Q_{i\tau} - q_i u_{i\tau} - \frac{1}{2} \rho_i u_{i\tau}^2 \right] \rightarrow \max_{u_{i\tau}}, \quad (4)$$

где $\beta = 1 / (1 + r)$ — дисконтирующий множитель, соответствующий ставке дисконтирования r ; p_t — цена продукции; c_i — средние производственные издержки (без амортизации); q_i — стоимость единицы мощностей; $\frac{1}{2} \rho_i u_{i\tau}^2$ — затраты регулирования (adjustment costs) (см., например, [Варшавский, 2003]), причем ρ_i — коэффициент, характеризующий инвестиционные возможности олигополистов, $i = 1, 2, \dots, N$; T_p — период скользящего планирования (для упрощения расчетов ставки налогов приняты равными нулю). Управляющими переменными в модели являются объемы ввода мощностей (или инвестиции в основной капитал) $u_{i\tau}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Эквивалентная форма модели (1)–(4) в пространстве состояний, ориентированная на использование обобщенных уравнений Риккати, имеет следующий вид [Варшавский, 2012]:

$$X_t = AX_{t-1} + \sum_{i=1}^N B_i u_{it} + D \xi_t, \quad (1a)$$

$$J_{it} = \sum_{t=\tau}^{\tau+T_p} \beta_i^{\tau-t} \left(\frac{1}{2} X_\tau' H_i X_\tau - C_{0i}' X_\tau - q_{i\tau}' u_{i\tau} - \frac{1}{2} \rho_i u_{i\tau}^2 \right) \rightarrow \max_{u_{i\tau}}, \quad (4a)$$

где матрицы и векторы $A, B_i, D, H_i, C_{0i}, q_{it}, X_t, \xi_t, i=1,2,\dots,N$, связаны с параметрами и переменными исходной модели (1)–(4).

3. Определение оптимальных по Нэшу–Курно разомкнутых стратегий участников рынка с использованием операционного исчисления

Наиболее распространенный метод определения стратегий олигополистов в случае линейных систем с квадратичным критерием оптимальности (1а), (4а) включает в себя в качестве одного из этапов нахождение решений матричных уравнений, в том числе N обобщенных уравнений типа Риккати (подробнее см. в [Basar, Olsder, 1995]). В результате разомкнутые стратегии u_{it}^{NOL} (отыскиваемые в классе функций времени, исходя из принципа максимума) оказываются линейно связанными с вектором состояния системы (1а):

$$u_{it}^{NOL} = K_{it}^{NOL} X_{t-1} + \eta_{it}^{NOL}, \tag{*}$$

где K_{it}^{NOL} и η_{it}^{NOL} — векторы, зависящие от решений обобщенных уравнений Риккати и параметров системы (см. [Basar, Olsder, 1995]).

Однако, как показали результаты компьютерных экспериментов, при использовании олигополистами скользящего планирования реализация оптимальных по Нэшу–Курно стратегий (*) может приводить к неустойчивости систем (1а) [Варшавский, 2012]. В связи с этим возникает необходимость разработки и использования альтернативных подходов и методов.

Наглядный и удобный для экономического анализа подход для определения оптимальных разомкнутых игровых стратегий олигополистов в игровой задаче (1)–(4) основан на использовании операционного исчисления. Правомерность его использования в данной задаче обусловлена тем, что во многих практических случаях значения расчетных показателей при достаточно большом конечном ($T_p \approx 15 \div 20$) и бесконечном ($T_p \rightarrow \infty$) периодах скользящего планирования совпадают [Варшавский, 2012, 2014].

Если ввести скалярное произведение элементов (функций) x_t и y_t :

$$\langle y_t, x_t \rangle = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t x_t, \tag{5}$$

то критерий оптимальности i -го олигополиста (4) можно переписать в виде

$$J_i' = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(p_t - c_i)Q_{it} - q_i u_{it} - \frac{1}{2} \rho_i u_{it}^2] = \langle (p_t - c_i), Q_{it} \rangle - \langle q_i, u_{it} \rangle - \frac{1}{2} \rho_i \langle u_{it}, u_{it} \rangle. \tag{4b}$$

Из необходимого условия экстремума функционала (4b) можно получить формулы для расчета оптимальных по Нэшу–Курно управления u_{it} (производственных инвестиций и др.) и объемов производства Q_{it} i -го олигополиста, максимизирующих критерий NPV с учетом затрат регулирования [Варшавский, 2012, 2014]:

$$u_{it} = \frac{W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})} (p_t - PL_i - bQ_{0it}), \tag{6a}$$

$$Q_{it} = W_i(z)u_{it} = \frac{\Gamma_i(z, (\beta z)^{-1})}{b} (p_t - PL_i) + \{1 - \Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}]\} Q_{0it}, \tag{6b}$$

где $PL_i = c_i + q_i / W(1 + r_i)$ — лимитирующие затраты i -й фирмы;

$$\Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}] = \frac{bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{7}$$

$$p_t = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]} \left\{ a_t^* + \sum_{i=1}^N \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] PL_i \right\}, \quad (8)$$

где $a_t^* = a_t - N_i \{1 - \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]\} Q_{0it}$.

На практике значительный интерес представляет случай, когда на рынке присутствуют фирмы двух типов (в количестве N_1 и N_2), использующие соответственно традиционную и передовую технологии (характеризующиеся передаточными функциями $W_1(z)$ и $W_2(z)$ невысокого порядка и индикаторами $\Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}]$ и $\Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}]$), и имеющие постоянные лимитирующие затраты PL_1 и PL_2 ($N = N_1 + N_2$). Такая задача возникает, например, при формировании требований к технико-экономическим показателям вводимой на рынок новой техники, которая может считаться «прорывной» [Варшавский, 2010]. В этом случае можно найти операторные выражения для определения суммарных объемов производства для двух групп фирм:

$$\begin{aligned} Q_t^{iNash} &= \frac{1}{b} N_i \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] * (p_t - PL_i) + N_i \{1 - \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]\} Q_{0it} = \\ &= \frac{N_i \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]}{b \Pi_1} \{a_t^* - PL_i + N_j \Gamma_j [z, (\beta z)^{-1}] (PL_j - PL_i)\} + N_i \{1 - \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]\} Q_{0it}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Pi_1 = 1 + N_1 \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] + N_2 \Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}], \quad (9a),$$

$j \neq i, i, j = 1, 2$.

Приведенные выше соотношения могут использоваться как при одноразовом прогнозировании, так и в режиме скользящего планирования. Очевидно, в последнем случае должен происходить регулярный пересчет прогнозируемых показателей в соответствии с (6)–(9), но при новых начальных условиях и с учетом возможных изменений значений параметров модели (в том числе параметров функций спроса).

4. Расчет оптимальных по Нэшу–Курно стратегий участников рынка с использованием электронных таблиц

Для проведения расчетов стратегий фирм и показателей рынка необходимо конкретизировать операторные выражения (9), (9a). С целью упрощения записи примем $Q_{0it} = 0$, $Q_{0jt} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N_1$; $j = 1, 2, \dots, N_2$. Тогда с учетом (1) и (7) соотношения (9) можно представить в следующем виде:

$$Q_t^{iNash} = \frac{N_i |A_i|_\beta^2}{\Phi(z, (\beta z)^{-1})} \{ \rho_j |B_j|_\beta^2 (a_t - PL_j) + b |A_j|_\beta^2 [a_t - (1 + N_j) PL_i + N_j PL_j] \}, \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} |W_i|_\beta^2 &= W_i(z) W_i((\beta z)^{-1}), \quad |A_i|_\beta^2 = A_i(z) A_i((\beta z)^{-1}), \quad |B_i|_\beta^2 = B_i(z) B_i((\beta z)^{-1}), \\ \Phi(z, (\beta z)^{-1}) &= \rho_1 \rho_2 |B_1|_\beta^2 |B_2|_\beta^2 + \rho_2 (1 + N_1) b^2 |A_1|_\beta^2 |B_2|_\beta^2 + \\ &+ \rho_1 (1 + N_2) b^2 |A_2|_\beta^2 |B_1|_\beta^2 + (1 + N_1 + N_2) b^2 |A_1|_\beta^2 |A_2|_\beta^2, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Основная проблема при проведении **устойчивых** вычислений оптимальных стратегий олигополистов (u_{jt} , Q_{jt}) состоит в **факторизации знаменателей выражений** (10). Учитывая

симметричную зависимость знаменателей этих соотношений относительно переменных z и $(\beta z)^{-1}$, можно представить $\Phi(z, (\beta z)^{-1})$ и $F(z, (\beta z)^{-1})$ в виде

$$\Phi(z, (\beta z)^{-1}) = C(z) * C((\beta z)^{-1}), \quad F(z, (\beta z)^{-1}) = \phi(z) * \phi((\beta z)^{-1}), \quad (12)$$

где корни многочленов $C(z)$ и $\phi(z)$ локализованы внутри круга с радиусом $\beta^{-1/2} = \sqrt{1+r}$ на комплексной плоскости, а корни многочленов $C((\beta z)^{-1})$, $\phi((\beta z)^{-1})$ — вне этого круга (см., например, [Варшавский, 2014]). Устойчивость вычислений имеет место при локализации всех корней многочленов $C(z)$ и $\phi(z)$ внутри единичного круга комплексной плоскости¹.

Факторизация многочленов может быть проведена, например, в среде MATLAB с использованием процедур поиска корней полиномов, а также ряда процедур формирования соединений систем, реализованных в Control Systems Toolbox (таких, в частности, как series(), parallel(), feedback() и др.). При невысоком порядке передаточных функций $W_i(z)$ факторизация может быть также проведена с использованием нашедших широкое распространение электронных таблиц. Ниже рассматриваются техника проведения расчетов и условные примеры расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий, которые могут быть реализованы не только в MATLAB, но и в электронных таблицах (например, в среде Excel), в случае когда $\Phi(z, (\beta z)^{-1})$ и в (13) представляют собой многочлены степени 2 относительно z и $(\beta z)^{-1}$.

4а. Случай 1 ($\rho_i = \rho_j = \rho$, $W_i(z) = W_j(z) = W(z)$)

Когда $\rho_i = \rho_j = \rho$ или $W_i(z) = W_j(z) = W(z)$, $i, j = 1, 2$, вычисления упрощаются. В этом случае $\Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}] = \Gamma_j[z, (\beta z)^{-1}]$, $i, j = 1, 2$, и справедливо

$$Q_t^{iNash} = \frac{N_i |A_i|_\beta^2}{\Phi(z, (\beta z)^{-1})} \{ (a_t - PL_j) + \frac{N_j b |A_j|_\beta^2}{F(z, (\beta z)^{-1})} (PL_j - PL_i) \}, \quad (10a)$$

где

$$\Phi(z, (\beta z)^{-1}) = \rho |B|_\beta^2 + (1 + N_1 + N_2) b |A|_\beta^2, \quad F(z, (\beta z)^{-1}) = \rho |B|_\beta^2 + b |A|_\beta^2. \quad (13)$$

Учитывая (12), можно преобразовать (10a) к виду

$$Q_t^{iNash} = \left(\frac{N_i (A_i(z))}{C(z)} \right) * \left(\frac{A_i((\beta z)^{-1})}{C((\beta z)^{-1})} \right) \left\{ (a_t - PL_j) + \left(\frac{b N_j A_j(z)}{\phi(z)} \right) * \left(\frac{A_j((\beta z)^{-1})}{\phi((\beta z)^{-1})} \right) (PL_j - PL_i) \right\}. \quad (10b)$$

Таким образом, при проведении **устойчивых** вычислений вначале следует делать расчеты в обратном времени (в соответствии со вторым сомножителем каждого слагаемого в (10b), содержащим $(\beta z)^{-1}$, при нулевых значениях промежуточных переменных в конце достаточно длительного расчетного периода, существенно превышающего период планирования), а затем в прямом времени (в соответствии с первым сомножителем каждого слагаемого в (10b)). При постоянных значениях параметров и показателей $a_t = a$, PL_i , $i, j = 1, 2$, выражение (10b) упрощается:

$$Q_t^{iNash} = \left(\frac{N_i (A_i(z))}{C(z)} \right) * \left(\frac{A_i((\beta z)^{-1})}{C((\beta z)^{-1})} \right) \left\{ (a_t - PL_j) + \left(\frac{b N_j A_j(z)}{\phi(z)} \right) * \left(\frac{A_j((\beta z)^{-1})}{\phi((\beta z)^{-1})} \right) (PL_j - PL_i) \right\}. \quad (10c)$$

¹ В крайне редких, но все же возможных аномальных случаях, когда модули некоторых корней многочленов $C(z)$ и $\phi(z)$ в (12) находятся в интервале $[1, \sqrt{1+r}]$, вычисления становятся неустойчивыми.

В важном для практики случае, когда порядок знаменателя $B_i(z) = B(z)$ передаточной функции $W_i(z) = W(z)$ в (2) равен $n = 2$ (этот случай будет рассматриваться в дальнейших примерах), можно представить многочлены $\Phi(z, (\beta z)^{-1})$ и $F(z, (\beta z)^{-1})$ в (13) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z, (\beta z)^{-1}) &= \Phi_2 z^2 + \Phi_1 z + \Phi_0 + \Phi_1 (\beta z)^{-1} + \Phi_2 (\beta z)^{-2} = C(z) * C((\beta z)^{-1}) = \\ &= (C_2 z^2 + C_1 z + C_0)(C_2 (\beta z)^{-2} + C_1 (\beta z)^{-1} + C_0), \end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} F(z, (\beta z)^{-1}) &= F_2 z^2 + F_1 z + F_0 + F_1 (\beta z)^{-1} + F_2 (\beta z)^{-2} = \phi(z) * \phi((\beta z)^{-1}) = \\ &= (\phi_2 z^2 + \phi_1 z + \phi_0)(\phi_2 (\beta z)^{-2} + \phi_1 (\beta z)^{-1} + \phi_0). \end{aligned} \tag{14b}$$

Нетрудно показать, что коэффициенты C_i многочлена $C(z)$ могут быть определены из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} C_2^2 (\beta)^{-2} + C_1^2 (\beta)^{-1} + C_0^2 &= \Phi_0, \\ C_1 (C_2 \beta^{-1} + C_0) &= \Phi_1, \\ C_2 C_0 &= \Phi_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Формулы для вычисления коэффициентов $\Phi_i, i = 0, 1, 2$, для некоторых часто используемых при эконометрическом анализе передаточных функций, характеризующих распределенные запаздывания, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Формулы для вычисления коэффициентов в (15) для типовых передаточных функций, описывающих инвестиционные процессы

1. Передаточная функция $W_i(z) = W(z) = \frac{\gamma z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \rho_i = \rho, i = 1, 2$
$\Phi_0 = \rho\beta[\beta^{-2} + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \beta^{-1} + (\lambda_1 \lambda_2)^2] + (1 + N_1 + N_2)b^2 \gamma^2$
$\Phi_1 = -\rho\beta(\lambda_1 + \lambda_2)(\beta^{-1} + \lambda_1 \lambda_2)$
$\Phi_2 = \rho\beta \lambda_1 \lambda_2$
2. Передаточная функция $W_i(z) = W(z) = \frac{k_0 z^2 + (k_1 - k_0)z + 1 - k_1}{z(z - 1)}, \rho_i = \rho, i = 1, 2$
$\Phi_0 = (1 + N_1 + N_2)b(R_0 \beta^{-2} + R_1 \beta^{-1} + R_2) + \rho\beta^{-1}(\beta^{-1} + 1)$
$\Phi_1 = (1 + N_1 + N_2)bR_1(R_0 \beta^{-1} + R_2) - \rho\beta^{-1}$
$\Phi_2 = (1 + N_1 + N_2)bR_0 R_2$, где $R_0 = k_0, R_1 = (k_1 - k_0), R_2 = (1 - k_1)$

Из вышеприведенных соотношений можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} C_2 \beta^{-1} + C_1 \beta^{-1/2} + C_0 &= +(\Phi_{30})^{1/2}, \\ C_2 \beta^{-1} - C_1 \beta^{-1/2} + C_0 &= +(\Phi_{31})^{1/2}, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{30} &= \Phi_0 + 2(\Phi_1 \beta^{-1/2} + \Phi_2 \beta^{-1}), \\ \Phi_{31} &= \Phi_0 - 2(\Phi_1 \beta^{-1/2} - \Phi_2 \beta^{-1}) \end{aligned} \tag{17}$$

(знак «+» перед $(\Phi_{30})^{1/2}$ и $(\Phi_{31})^{1/2}$ связан с необходимостью удовлетворения критерия устойчивости [Jury, 1964]). Таким образом, из (16) следует, что

$$C_1 = \frac{1}{2} \beta^{1/2} ((\Phi_{30})^{1/2} - (\Phi_{31})^{1/2}). \tag{18}$$

С учетом (18) можно преобразовать (15) к виду

$$C_2\beta^{-1} + C_0 = \frac{1}{2}((\Phi_{30})^{1/2} + (\Phi_{31})^{1/2}) = \Phi_4, \quad C_2\beta^{-1} \cdot C_0 = \Phi_2\beta^{-1}. \quad (19)$$

Так как ввиду (17) $\Phi_4^2/4 > \Phi_2\beta^{-1}$, то из (19) следует, что $C_2\beta^{-1}$ и C_0 являются действительными корнями квадратичного уравнения и могут быть вычислены по формулам

$$C_0 = \frac{1}{2}\Phi_4 - \sqrt{\Phi_4^2/4 - \Phi_2\beta^{-1}}, \quad C_2\beta^{-1} = \frac{1}{2}\Phi_4 + \sqrt{\Phi_4^2/4 - \Phi_2\beta^{-1}} \quad (20)$$

(в силу условия устойчивости должно соблюдаться неравенство $C_2\beta^{-1} > C_0$).

Аналогичным способом может быть проведена факторизация многочлена $F(z, (\beta z)^{-1})$.

Пример 1

В данном примере предполагается, что рынок представляет собой дуополию, участниками которой являются 2 фирмы ($N_1 = N_2 = 1$). Объемы производства фирм связаны с инвестициями в основной капитал u_{it} передаточной функцией 2-го порядка:

$$W_i(z) = \frac{\gamma z}{(z - \lambda)^2}, \quad \gamma = 0.0027, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0.0003, \quad \lambda = 0.85, \quad i = 1, 2.$$

Обратная функция спроса представляет собой линейную функцию от объемов спроса (предложения):

$$p_t = 120 - 0.015(Q_{1t} + Q_{2t}).$$

Экономические показатели фирм приведены в таблице 2.

Таблица 2. Показатели фирм в примере 1

$c_1 =$	95
$c_2 =$	75
$r =$	0.05

Оптимальные стратегии участников рынка, определенные в соответствии с формулой (10а), имеют следующий вид:

$$Q_{it} = \frac{0.0076}{C(z)} \left(A_i - \frac{0.0028}{\phi(z)} \right), \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

$$C(z) = 0.0173z^2 - 0.0286z + 0.0119, \quad A_1 = 10.9,$$

$$\phi(z) = 0.0170z^2 - 0.0287z + 0.0121, \quad A_2 = 30.9.$$

Сравнительный анализ результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (21) (Q_{it} (ЕТ)), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) показывает практическое совпадение траекторий этих показателей (таблица 3).

4b. Случай 2 ($\rho_i \neq \rho_j$, $W_i(z) = \gamma_i W(z)$, $W(z)$, $W_j(z) = \gamma_j W(z)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$)

Приведенные выше формулы (18)–(20) могут быть использованы и в случае, когда передаточные функции участников рынка одинаковы, т. е. $W_i(z) = W(z)$, со знаменателем $B(z)$, имеющим второй порядок, но коэффициенты ρ_i и γ_i разные, т. е. $\rho_i \neq \rho_j$, $\gamma_i \neq \gamma_j$.

Таблица 3. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (21) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати Q_{it} (Riccati) в примере 1

Years	Q_{1t} (ET)	Q_{1t} (Riccati)	Q_{2t} (ET)	Q_{2t} (Riccati)
1	3.771	3.753	14.708	14.690
2	9.871	9.822	39.210	39.162
3	17.219	17.134	69.758	69.673
4	25.033	24.907	103.538	103.413
5	32.761	32.593	138.485	138.318
6	40.035	39.826	173.118	172.910
7	46.625	46.378	206.416	206.168
8	52.409	52.124	237.708	237.424
9	57.337	57.020	266.595	266.277
10	61.418	61.071	292.873	292.526

В этом случае

$$\Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] = \frac{b\gamma_i^2 W(z)W((\beta z)^{-1})}{\rho_i + b\gamma_i^2 W(z)W((\beta z)^{-1})} = \frac{bW(z)W((\beta z)^{-1})}{R_i + bW(z)W((\beta z)^{-1})}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7a)$$

где $R_i = \rho_i / \gamma_i^2$.

С учетом (7a) формула (9) может быть преобразована к виду

$$Q_i^{iNash} = \frac{N_i |W|_\beta^2}{\Pi(|W|_\beta^2)} \{ [R_j + b|W|_\beta^2](a - PL_i) + N_j b |W|_\beta^2 (PL_j - PL_i) \}, \quad (22)$$

$i, j = 1, 2$, где

$$\Pi(|W|_\beta^2) = b^2(1 + N_1 + N_2) |W|_\beta^4 + b[R_1(1 + N_2) + R_2(1 + N_1)] |W|_\beta^2 + R_1 R_2. \quad (23)$$

Нетрудно показать, что корни μ_i , $i = 1, 2$, двучлена $\Pi(|W|_\beta^2)$ действительны и отрицательны, т. е. $\mu_i < 0$, $i = 1, 2$. Действительно, в силу того, что все коэффициенты двучлена $\Pi(|W|_\beta^2)$ положительны, его корни имеют отрицательную действительную часть. С другой стороны, дискриминант двучлена положителен, так как

$$\begin{aligned} &= b^2 [R_1(1 + N_2) + R_2(1 + N_1)]^2 - 4R_1 R_2 b^2 (1 + N_1 + N_2) = \\ &= b^2 \{ [R_1(1 + N_2)]^2 + [R_2(1 + N_1)]^2 + 2R_1 R_2 (1 + N_2)(1 + N_1) \} = \\ &= b^2 [R_1(1 + N_2) - R_2(1 + N_1)]^2 + 4R_1 R_2 b^2 N_1 N_2 > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом,

$$\Pi(|W|_\beta^2) = \chi(|W|_\beta^2 - \mu_1)(|W|_\beta^2 - \mu_2), \quad (25)$$

где $\mu_i < 0$, $i = 1, 2$, — корни двучлена (23), $\chi = b^2(1 + N_1 + N_2)$.

Подставляя (25) в (22), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} Q_i^{iNash} &= \frac{N_i |W|_\beta^2}{\Pi(|W|_\beta^2)} \{ [R_j + b|W|_\beta^2](a - PL_i) + N_j b |W|_\beta^2 (PL_j - PL_i) \} = \\ &= \frac{N_i |A|_\beta^2}{\chi(|A|_\beta^2 - \mu_1 |B|_\beta^2)(|A|_\beta^2 - \mu_2 |B|_\beta^2)} \{ R_j |B|_\beta^2 (a - PL_j) + b |A|_\beta^2 [a - (1 + N_j)PL_i + N_j PL_j] \}. \end{aligned} \quad (26)$$

В случае когда порядок знаменателя $B_i(z) = B(z)$ передаточной функции $W_i(z) = W(z)$ равен $n = 2$, для проведения вычислений в соответствии с предлагаемой методикой остается только, используя формулы (18)–(20), провести факторизацию двух членов в знаменателе выражения (26):

$$(|A|_\beta^2 - \mu_i |B|_\beta^2) = \Omega_i(z)\Omega_i((\beta z)^{-1}) = (\Omega_{i2}z^2 + \Omega_{i1}z + \Omega_{i0})(\Omega_{i2}(\beta z)^{-2} + \Omega_{i1}(\beta z)^{-1} + \Omega_{i0}), \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Ниже рассматривается пример проведения расчетов с использованием полученных в данном подразделе соотношений.

Пример 2

В данном примере рассматривается рынок с показателями, близкими к рынку микропроцессоров для серверов, который представляет собой дуополию, участниками которой являются 2 фирмы ($N_1 = N_2 = 1$). Предполагалось, что технологический уровень оборудования компаний, выпускающих микропроцессоры, одинаков, причем операторная зависимость между объемами производства микропроцессоров Q_{it} (в млн ед.) и инвестиций в основной капитал I_t (в млн долл.) имеет следующий вид (Варшавский, 2017):

$$Q_{it} = \frac{0.0156z}{(z - 0.494)^2} I_t. \quad (28)$$

Экономические показатели компаний приведены в таблице 4.

Таблица 4. Показатели компаний в примере 2

Показатель	Фирма 1	Фирма 2
c_i (долл./ед.)	393	314
ρ_i	0.03625	0.0036

В качестве обратной функции спроса использовалась следующая зависимость:

$$p_t = 697.684 + 24.087R \& D_t - 16.351Q_{\Sigma t}, \quad (29)$$

где $Q_{\Sigma t}$ — суммарный объем поставок микропроцессоров для серверов в млн. ед., p_t — средняя цена этих микропроцессоров в долл./ед., $R \& D_t$ — объем исследований и разработок в компании-лидере (фирма 2) в млрд долл. Принято, что компанией-лидером является компания с показателями, близкими к компании Intel. Прогнозный уровень исследований и разработок в компании Intel рассчитывался на основе экономико-статистической зависимости, связывающей $R \& D_t$ в млн долл. с минимальным топологическим размером интегральных схем $hp_{\min t}$ (см. [Варшавский, 2017]).

Результаты условных расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий фирм (т. е. объемов производства микропроцессоров для серверов) на основе соотношений (26) (Q_{it} (ET)), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) при нулевых начальных условиях и при значении дисконт-фактора $r = 0.05$ представлены в таблице 5.

Пример 3

В данном примере предполагается, что на рынок с 7 участниками, имеющими одинаковые показатели и использующими традиционную технологию, входит новый участник с более совершенной технологией (при этом $N_1 = 7$, $N_2 = 1$).

Объемы производства фирм связаны с инвестициями в основной капитал u_{2t} передаточной функцией 2-го порядка:

$$W_i(z) = \frac{\gamma_1 z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad W_8(z) = \frac{\gamma_2 z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \quad (30)$$

Таблица 5. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (26) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) в примере 2

Years	Q_{1t} (ET)	Q_{1t} (Riccati)	Q_{2t} (ET)	Q_{2t} (Riccati)
1	4.21	3.88	14.66	14.96
2	7.07	6.70	19.26	19.37
3	8.68	8.34	20.04	19.89
4	9.63	9.34	20.52	20.21
5	10.30	10.01	21.16	20.78
6	10.86	10.57	21.96	21.56
7	11.38	11.08	22.76	22.35
8	11.89	11.61	23.60	23.22
9	12.40	12.12	24.42	24.06
10	12.88	12.62	25.18	24.85

Таблица 6. Показатели фирм в примере 3

Показатель	7 фирм	Фирма 8
γ_i	0.018	0.025
c_i	95	75
ρ_i	9.259	10.400

причем $\lambda_1 = 0.75$, $\lambda_1 = 0.55$. Обратная функция спроса представляет собой линейную функцию от объемов спроса (предложения):

$$p_t = 120 - 0.015 \sum_{i=1}^8 Q_{it}. \quad (31)$$

Экономические показатели фирм приведены в таблице 6.

Результаты расчетов оптимальных по Нэшу–Курно игровых стратегий фирм (объемов производства условной продукции) для 7 старых фирм $Q_{\Sigma 7t}$ (ET) и для одной новой Q_{8t} (ET) на основе полученных соотношений (ET), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Riccati) представлены в таблице 7. В расчетах использованы начальные значения объемов производства 7 фирм ($Q_{\Sigma 700} = 300$, $Q_{\Sigma 700} = 500$) и новой фирмы ($Q_{800} = 70$, $Q_{80} = 80$), а также дисконт-фактора ($r = 0.05$).

Таблица 7. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений (26) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) в примере 3

Years	$Q_{\Sigma 7t}$ (ET)	$Q_{\Sigma 7t}$ (Riccati)	Q_{8t} (ET)	Q_{8t} (Riccati)
1	554.432	561.326	92.814	93.957
2	552.577	559.641	106.740	108.000
3	527.070	533.525	119.334	120.569
4	495.995	501.541	130.056	131.193
5	467.190	471.777	138.876	139.882
6	443.376	447.072	145.978	146.843
7	424.891	427.817	151.612	152.341
8	411.103	413.388	156.033	156.639
9	401.093	402.859	159.473	159.970
10	393.963	395.317	162.132	162.536

4с. Случай 3. Рынок с дифференцированным продуктом

($\rho_i \neq \rho_j$, $W_i(z) = \gamma_i W(z)$, $W(z)$, $W_j(z) = \gamma_j W(z)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$)

Если фирмы являются участниками рынка с дифференцированным продуктом, с обратными функциями спроса:

$$\begin{aligned} p_{1t} &= a_{1t} - b_1 N_1 Q_{1t} - d_1 N_2 Q_{2t}, \\ p_{2t} &= a_{2t} - d_2 N_1 Q_{1t} - b_2 N_2 Q_{2t}, \end{aligned} \tag{32}$$

то после алгебраических преобразований можно получить следующие операторные выражения для определения суммарных объемов производства двух групп фирм:

$$Q_t^{iNash} = \frac{1}{b_i} N_i \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] \cdot (p_{it} - PL_i) = \frac{N_i \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]}{b_i \Pi_2 [z, (\beta z)^{-1}]} \{a_{it} - PL_i + N_j \Gamma_j \Lambda_i\}, \tag{9b}$$

где $\Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]$ имеют вид (7),

$$\Pi_2 [z, (\beta z)^{-1}] = 1 + N_1 \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] + N_2 \Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}] + \Lambda_0 N_1 N_2 \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] \Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}], \tag{9c}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= 1 - \frac{d_1 d_2}{b_1 b_2}, \quad \Lambda_i = a_{it} - PL_i - \frac{d_i}{b_j} (a_{jt} - PL_j), \\ & i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{33}$$

Расчеты в этом случае проводятся в той же последовательности, что и в п. 4б. (см. (26)), но с добавлением параметров Λ_0 , Λ_i $i = 1, 2$. Ниже приводятся результаты расчета для примера 4.

Пример 4

В данном примере, как и в примере 2, рассматривается дуополия, участники которой производят 2 разных продукта. Предполагается, что технологический уровень оборудования компаний, выпускающих продукцию, одинаков, причем операторная зависимость между объемами производства продукции Q_{it} и инвестиций в основной капитал I_t имеет вид (28).

Экономические показатели компаний и коэффициенты обратных функций спроса (32) приведены в таблицах 8, 9.

Результаты условных расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий фирм (т. е. объемов производства продукции — Q_{it} (ЕТ)) на основе полученных соотношений типа (26) с учетом (9с), (33), а также на основе обобщенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) при нулевых начальных условиях и значении дисконт-фактора $r = 0.05$ представлены в таблице 10. Данные таблицы 10 свидетельствуют о практическом совпадении результатов расчетов в соответствии с двумя подходами.

Таблица 8. Показатели компаний в примере 4

Показатель	Фирма 1	Фирма 2
c_i	75	45
ρ_i	0.06639	0.00589

Таблица 9. Коэффициенты обратных функций спроса (32)

i	a_i	b_i	d_i
1	120.0	2.500	0.500
2	159.5	3.769	1.000

Таблица 10. Сопоставление результатов расчетов оптимальных по Нэшу–Курно стратегий на основе соотношений типа (26) (Q_{it} (ET)) и с использованием расширенных уравнений Риккати (Q_{it} (Riccati)) в примере 4

Years	Q_{1t} (ET)	Q_{1t} (Riccati)	Q_{2t} (ET)	Q_{2t} (Riccati)
1	0.253	0.244	4.785	4.854
2	0.480	0.467	8.051	8.142
3	0.632	0.620	9.533	9.610
4	0.721	0.713	10.038	10.090
5	0.770	0.766	10.153	10.184
6	0.797	0.794	10.155	10.172
7	0.810	0.809	10.140	10.149
8	0.817	0.817	10.130	10.134
9	0.821	0.821	10.126	10.128
10	0.823	0.822	10.125	10.126

Таким образом, во многих случаях результаты расчетов с использованием полученных соотношений на основе электронных таблиц и с использованием расширенных уравнений Риккати оказываются весьма близкими (конечно тогда, когда использование решений уравнений Риккати приводит к устойчивым расчетам). В большинстве рассмотренных практических задач отклонение рассчитанных в соответствии с двумя подходами показателей, как правило, не превышает 1.5–2 %. Наибольшая величина относительных отклонений (до 3–5 %) наблюдается в начале периода прогнозирования. В типичных случаях период сравнительно заметных отклонений составляет 3–5 моментов времени. После переходного периода наблюдается практически полное совпадение значений искомым показателей при использовании обоих подходов.

Вместе с тем следует отметить, что на величину отклонений показателей в рассмотренных подходах могут влиять как начальные условия, так и значения параметров модели (параметров λ_i в соотношениях, характеризующих инерционность отдачи от инвестиций, дисконтифактора r , параметра обратной функции спроса b , длительности расчетного периода и др.).

5. Заключение

Для рассмотренного класса динамических игр подход к расчету оптимальных по Нэшу–Курно разомкнутых игровых стратегий, основанный на использовании операторных методов и электронных таблиц, во многих практически важных случаях обеспечивает устойчивость вычислений при широком диапазоне изменения параметров моделей. Расчеты игровых стратегий олигополистов для систем невысокого порядка на основе электронных таблиц и с использованием расширенных матричных уравнений Риккати приводят к близким результатам.

Использование методов операционного исчисления и популярных электронных таблиц упрощает проведение расчетов, что позволяет проводить исследование перспектив развития олигополистических рынков **широкому кругу** специалистов и потребителей.

Эффективная реализация предлагаемого подхода для систем более высокого порядка (4-го и выше) сдерживается отсутствием в электронных таблицах (в частности, в Excel) удобных и надежных процедур, необходимых для проведения факторизации многочленов.

Список литературы (References)

Варшавский Л. Е. Исследование инвестиционных стратегий фирм на рынках капиталов- и наукоемкой продукции (производственные мощности, цены, технологические изменения). — М.: ЦЭМИ РАН, 2003. — 354 с.

Varshavsky L. E. Issledovanie investitsionnykh strategii firm na ryknakh kapitalo- i naukoemkoi produktsii (proizvodstvennye moshchnosti, tseny, tekhnologicheskie izmeneniya) [The Study of investment strategies of firms on the markets of capital and R&D intensive products]. — Moscow: CEMI RAS, 2003. — 354 p. (in Russian).

- Варшавский Л. Е.* Методологические основы моделирования развития олигополистических рынков продукции с длительным жизненным циклом (на примере рынка гражданской авиационной техники) // Прикладная эконометрика. — 2010. — № 4. — С. 53–74.
Varshavsky L. E. Metodologicheskie osnovy modelirovanija razvitija oligopolisticheskikh rynkov produkcii s dlitel'nyim zhiznennym ciklom (na primere rynka grazhdanskoj aviacionnoj tehniky) [Methodological foundations of modeling evolution of markets of products with long lifecycle: A study of the market of civil aircraft] // Prikladnaja jekonometrika [Applied Econometrics]. — 2010. — Vol. 4. — P. 53–74 (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Приближенные методы исследования динамики показателей рыночной структуры // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 219–229.
Varshavsky L. E. Priblizhennye metody issledovanija dinamiki pokazatelej rynochnoj struktury [Approximate methods of studying dynamics of market structure] // Komp'juternye issledovanija i modelirovanie [Computer Research and Modeling]. — 2012. — Vol. 4, No. 1. — P. 219–229 (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Использование методов теории управления для формирования рыночных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 5. — С. 839–859.
Varshavsky L. E. Ispol'zovanie metodov teorii upravlenija dlja formirovanija rynochnyh struktur [Control theory methods for creating market structures] // Komp'juternye issledovanija i modelirovani [Computer Research and Modeling]. — 2014. — Vol. 6, No. 5. — P. 839–859 (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Моделирование динамики ключевых показателей рынков компонентов высокопроизводительных вычислительных систем // Труды Института системного анализа Российской академии наук. — 2017. — Т. 67, № 1. — С. 12–27.
Varshavsky L. E. Modelirovanie dinamiki klyuchevykh pokazatelej rynkov komponentov vysokoproizvoditel'nykh vychislitel'nykh system [Modeling dynamics of key market indicators of components of hpc systems] // Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossijskoj akademii nauk [Proceeding of the ISA RAS]. — 2017. — Vol. 67, No. 1. — P. 12–27 (in Russian).
- Basar T., Olsder G. J.* Dynamic Noncooperative Game Theory. — London / New York: Academic Press, 1995.
- Dockner E. J., Jorgenson S. et al.* Differential Games in Economics and Management Science. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- Engwerda J. C.* Linear Quadratic Games: An Overview. — Discussion Paper 2006-110. — Tilburg University, Center for Economic Research. — 2006.
- Kwakernaak H., Sivan R.* Linear Optimal Control Systems. — New York: Wiley, 1972.
- Starr A. W., Ho Y. C.* Nonzero-sum differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. — March 1969. — Vol. 3. — P. 184–206.

УДК: 519.8

Моделирование трендов динамики объема и структуры накопленной кредитной задолженности в банковской системе

А. А. Пехтерев^а, Д. В. Домашенко^б, И. А. Гусева^с

Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Россия, 115093, г. Москва, Стремянный пер., д. 36

E-mail: ^а lexpekhterev@gmail.com, ^б dendv@rambler.ru, ^с i.sorochinskaya@gmail.com

*Получено 27.03.2019, после доработки — 18.08.2019.
Принято к публикации 17.09.2019.*

Объем и структура накопленной кредитной задолженности перед банковской системой зависят от множества факторов, важнейшим из которых является текущий и ожидаемый уровень процентных ставок. Изменения в поведении заемщиков в ответ на сигналы денежно-кредитной политики позволяют разрабатывать эконометрические модели, представляющие динамику структуры кредитного портфеля банковской системы по срокам размещения средств. Эти модели помогают рассчитать показатели, характеризующие влияние регулирующих действий со стороны центрального банка на уровень процентного риска в целом. В работе проводилась идентификация четырех видов моделей: дискретной линейной модели, основанной на передаточных функциях, модели в пространстве состояний, классической эконометрической модели ARMAX и нелинейной модели типа Гаммерштейна–Винера. Для их описания использовался формальный язык теории автоматического управления, а для идентификации — программный пакет MATLAB. В ходе исследования было выявлено, что для краткосрочного прогнозирования объема и структуры кредитной задолженности больше всего подходит дискретная линейная модель в пространстве состояний, позволяющая прогнозировать тренды по структуре накопленной кредитной задолженности на прогнозном горизонте в 1 год. На примере реальных данных по российской банковской системе модель показывает высокую чувствительность реакции на изменения в денежно-кредитной политике, проводимой центральным банком РФ, структуры кредитной задолженности по срокам ее погашения. Так, при резком повышении процентных ставок в ответ на внешние рыночные шоки заемщики предпочитают сокращать сроки кредитования, при этом общий уровень задолженности повышается прежде всего за счет возрастающей переоценки номинального долга. При формировании устойчивого тренда снижения процентных ставок структура задолженности смещается в сторону долгосрочных кредитов.

Ключевые слова: кредитная задолженность, процентная ставка, динамическое моделирование, модель в пространстве состояний, прогнозирование

UDC: 519.8

Modelling of trends in the volume and structure of accumulated credit indebtedness in the banking system

A. A. Pekhterev^a, D. V. Domaschenko^b, I. A. Guseva^c

Plekhanov Russian University of Economics,
36 Stremianny per., Moscow, 115093, Russia

E-mail: ^a lexpekhterev@gmail.com, ^b dendv@rambler.ru, ^c i.sorochinskaya@gmail.com

Received 27.03.2019, after completion — 18.08.2019.

Accepted for publication 17.09.2019.

The volume and structure of accumulated credit debt to the banking system depends on many factors, the most important of which is the level of interest rates. The correct assessment of borrowers' reaction to the changes in the monetary policy allows to develop econometric models, representing the structure of the credit portfolio in the banking system by terms of lending. These models help to calculate indicators characterizing the level of interest rate risk in the whole system. In the study, we carried out the identification of four types of models: discrete linear model based on transfer functions; the state-space model; the classical econometric model ARMAX, and a nonlinear Hammerstein–Wiener model. To describe them, we employed the formal language of automatic control theory; to identify the model, we used the MATLAB software pack-age. The study revealed that the discrete linear state-space model is most suitable for short-term forecasting of both the volume and the structure of credit debt, which in turn allows to predict trends in the structure of accumulated credit debt on the forecasting horizon of 1 year. The model based on the real data has shown a high sensitivity of the structure of credit debt by pay back periods reaction to the changes in the Central Bank monetary policy. Thus, a sharp increase in interest rates in response to external market shocks leads to shortening of credit terms by borrowers, at the same time the overall level of debt rises, primarily due to the increasing revaluation of nominal debt. During the stable falling trend of interest rates, the structure shifts toward long-term debts.

Keywords: credit debt, dynamic modeling, forecasting, interest rate, state-space model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 965–978 (Russian).

Введение

Влияние динамики процентных ставок является определяющим фактором при принятии заемщиками решений о целесообразности банковского кредитования. Однако невозможно точно определить степень данного влияния из-за множества прочих факторов. Например, из-за особенностей развития отдельных отраслей экономики, бюджетно-налоговой политики, уровня кредитных рисков и т. д. Тем не менее фактор процентных ставок можно оценить с помощью подбора эффективных эконометрических моделей, полученных на основе ретроспективы реальных данных по срочной структуре портфеля накопленной кредитной задолженности организаций перед банковской системой и динамики средневзвешенных процентных ставок по срокам кредитования.

Верно подобранный метод моделирования позволит оценить прогнозную динамику накопленной кредитной задолженности при различных сценариях денежно-кредитной политики центрального банка, а также величину процентного риска в банковской системе на основе анализа потенциальных сдвигов по срочной структуре кредитной задолженности заемщиков.

Обзор литературы

В данной работе для решения поставленной задачи рассматриваются четыре типа моделей: дискретные линейные модели и модели в пространстве состояний на основе разностных уравнений, ARMAX-модели и нелинейные Гаммерштейна – Винера.

Для решения задач прогнозирования/моделирования экономических процессов, происходящих в динамических нелинейных экономических системах, были применены методы и математический аппарат, используемый в теории автоматического управления (ТАУ) механических систем. Такой подход близок для областей экономической кибернетики и экономофизики.

Динамическое моделирование систем позволяет исследовать реакции системы на предполагаемые внешние воздействия, и будущие состояния системы в таком случае и являются источником прогноза. В приложении к сфере экономики данный вопрос изучался многими исследователями, которые предлагали свои подходы построения моделей [Петров и др., 1996; Краснощеков, Петров, 2000; Красс, 1976; Романовский, Романовский, 2007]. Автор работы [Sølgård, 2009] предпринял попытку к построению моделей макроэкономических систем в виде систем линейных дифференциальных уравнений с применением программного пакета Simulink Matlab. По его мнению, такие модели уровня национальной экономики, которые включают в себя отдельные ее подсистемы, позволяют изучать и управлять теми параметрами системы, которые могут влиять на возможность долгового кризиса. В ходе исследования он пытался установить эффективность способов регулирования государством экономики исходя из динамики макроэкономических показателей. В данном исследовании моделирование экономических процессов производилось с нуля с целью исследования возможностей регулирования, при этом привязка к реальным практическим данным отсутствует.

Приложение идей и методов кибернетики к экономическим системам было рассмотрено в работах Кугаенко А. [Кугаенко, 2005, 2015]. В его исследовании были разработаны модели в виде линейных дифференциальных уравнений для различных социально-экономических систем и взаимоотношений. Разработанные модели были представлены в виде структурных схем, наглядно описывающих все связи в системе дифференциальных уравнений, которые выводились аналитическим путем, исходя из общеизвестных формул, а также знаний и практического опыта автора. В данной работе также структура большинства моделей никак не подкреплена проверкой их соответствия реальным практическим данным. В нашем исследовании, в отличие от работ Кугаенко, для разработки динамической модели, приближенной к реальной практике,

вместо аналитического вывода уравнений зависимостей был использован метод идентификации модели, позволяющий оценивать ее параметры исходя из взаимосвязи между уже имеющимися временными рядами вида «вход – выход». Идентификация систем является подобластью теории автоматического управления (ТАУ), включающая в себя как и теоретические исследования, так и программные приложения. Одним из таких приложений является Matlab System Identification Toolbox, предназначенный для работы с опытными данными, измеренными в технических системах. Программная надстройка позволяет выбирать тип модели при ее идентификации, а также различные методы идентификации, основные принципы которых описаны в работах [Ljung, 1999, 2008].

Первоначально возникшие для решения инженерных задач, линейные динамические системы, а именно модели пространства состояний, применялись основоположником кибернетики Н. Винером, а также Р. Калманом, которым впоследствии был разработан легендарный фильтр Калмана, который широко применяется как в инженерных, так и в эконометрических приложениях. Применение таких моделей для анализа временных рядов рассматривалось в работах [Durbin, Koopman, 2001; Künsch, 2005; Migon et al., 2005; Petris et al., 2009]. В них традиционно временной ряд представляется в виде совокупности трех компонентов: тренда, сезонной составляющей и ошибки. Интерес к их использованию объясняется тем, что математические модели в виде пространств состояний имеют четкую структуру, которая без особых проблем может быть реализована программно, а также их широкой применимостью для решения различного рода задач. Л. Е. Варшавский в своих работах по исследованию динамики показателей рыночной структуры и моделированию динамических систем успешно применял методы автоматического управления, описание моделей в пространстве состояний и в линейных динамических играх, подход, основанный на использовании операционного исчисления (Z -преобразования) [Варшавский, 2012, 2013, 2018].

Модель ARMAX является подвидом моделей вида векторной авторегрессии (AR), впервые предложенной S. Sims в 1980 году. Авторегрессионные модели нашли широкое применение для анализа и прогноза временных рядов именно в области эконометрики. Существенными преимуществами модели по сравнению с моделями на дифференциальных или разностных уравнениях являлись простота реализации и большая гибкость, позволяющая не учитывать зависимости от каждой переменной. Недостатком таких моделей является то, что они могут улавливать несущественную или зашумленную информацию как основу для прогнозирования. В работах [Zhang, Frey, 2015; Corrêa et al., 2016] показано, что такие модели могут давать довольно точные прогнозы и достаточно просты в реализации.

Несмотря на то что существует эквивалентность (взаимозаменяемость) между моделями в пространстве состояний и классической стационарной моделью авторегрессии (скользящего среднего), иногда легче работать с одной формой, нежели с другой. Основным преимуществом моделей в пространстве состояний перед AR является возможность подбора более эффективных структур с меньшим количеством параметров для описания многомерных систем, а также то, что они могут использоваться для моделирования и прогнозирования как одномерных, так и многомерных систем [Shumway, Stoffer, 2011]. При построении модели ее структура может быть разработана как строго фиксированная, так и меняющаяся с течением времени.

Так как взаимосвязи между экономическими временными рядами в большинстве случаев имеют нелинейный характер, то целесообразным является использование нелинейных моделей для их описания. Рассмотрение нелинейной модели можно обосновать подходом системной динамики в экономике, где поведение экономических систем рассматривается при наличии петель обратных связей, задержек реакции, влияния окружающей среды и других. Таким образом, предполагается, что идентификация нелинейной модели может быть эффективна при наличии в рядах отклонений от трендового движения. В нашем исследовании этим критериям могли бы

удовлетворить модели Гаммерштейна – Винера. Они входят в класс блочно-ориентированных моделей и структурно представляют собой объединение линейных динамических систем и блоков нелинейностей. В этом и заключается их преимущество. Они крайне эффективны, если анализируемые временные ряды можно разложить на линейную и нелинейную составляющие. Методы идентификации подобных моделей описаны в работах [Billings, 1980; Haber, Keviczky, 1999; Yu et al., 2014; Zhang, Frey, 2015; Ma, Liu, 2015]. Но явление переобучения является главным недостатком нелинейных моделей, когда модель работает с высокой точностью на данных обучения, но непригодна для прогноза.

К тематике поставленной задачи по прогнозированию структуры кредитной задолженности на основании кривой процентных ставок наиболее близки исследования по моделированию влияния денежно-кредитной политики регуляторного органа на макроэкономические параметры [Малюгин и др., 2009; Макаров и др., 2011; De Fiore, Tristani, 2013]. В работах рассматриваются крупные макроэкономические модели, в том числе и динамическая стохастическая модель общего равновесия (DGSE). Главными недостатками таких моделей являются их громоздкость, а также то, что работоспособность каждого отдельного дифференциального уравнения сомнительна без предварительной проверки. Для таких моделей параметры часто оцениваются на глаз. Модели кредитной задолженности, или связанных с ней параметров, например денежного агрегата M2, являются частью таких крупных моделей. При этом в качестве влияющего на кредитную задолженность параметра в работах обычно рассматривается ставка рефинансирования.

Методология

В теории автоматического управления для математического описания динамики механических систем используются передаточные функции. Передаточная функция представляет собой дифференциальный оператор, выражающий связь между входом и выходом линейной стационарной системы.

Дискретной передаточной функцией называется соотношение [Dorf, Bishop, 2001]

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \tag{1}$$

$u(k)$ — входной сигнал, который представляет собой дискретную функцию, определенную в заданные моменты времени,

$y(k)$ — выходной сигнал, который представляет собой дискретную функцию, определенную в заданные моменты времени,

$U(z)$ и $Y(z)$ — Z-преобразования входного и выходного сигналов, которое представляет собой эквивалент преобразования Лапласа для дискретных систем.

In our case input signal is an interest rates vector:

$$IR(k) = (IR_1(k) \ IR_2(k) \ IR_3(k) \ IR_4(k) \ IR_5(k) \ IR_6(k)),$$

$IR_1(k)$ — процентная ставка по кредитам сроком до 30 дней,

$IR_2(k)$ — процентная ставка по кредитам сроком от 30 до 90 дней,

$IR_3(k)$ — процентная ставка по кредитам сроком от 90 до 180 дней,

$IR_4(k)$ — процентная ставка по кредитам сроком от 180 дней до 1 года,

$IR_5(k)$ — процентная ставка по кредитам сроком от 1 до 3 лет,

$IR_6(k)$ — процентная ставка по кредитам сроком свыше 3 лет.

А выходным — вектор кредитных задолженностей:

$$L(k) = (L_1(k) \ L_2(k)),$$

$L_1(k)$ — суммарная кредитная задолженность сроком до 1 года,

$L_2(k)$ — суммарная кредитная задолженность сроком свыше 1 года.

На этапе идентификации такой модели подбор производился в виде дискретных передаточных функций для каждого элемента входного вектора. Структурная схема модели представлена на рис. 1. В общем виде передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W_{ij}(z) = \frac{(b_{ij}^0 + b_{ij}^1 \times z^{-1} - b_{ij}^2 \times z^{-2})}{(a_{ij}^0 - a_{ij}^1 \times z^{-1} + a_{ij}^2 \times z^{-2})} = \frac{L_j(z)}{IR_i(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

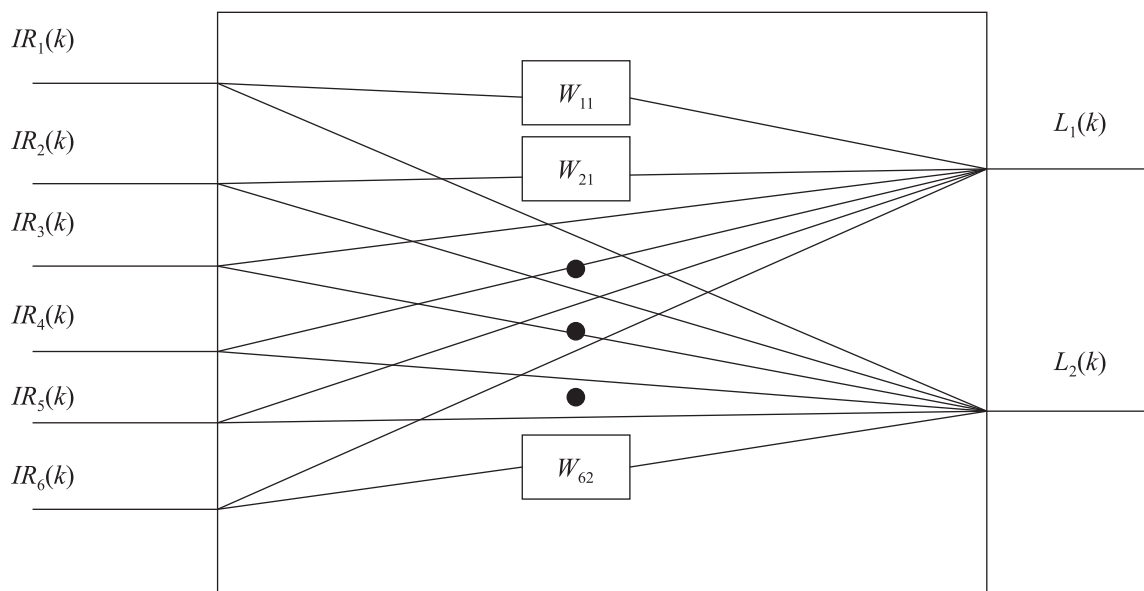


Рис. 1. Структурная схема модели кредитных задолженностей

Для проведения моделирования различных сценариев в программном пакете был произведен переход от описания в виде передаточных функций к описанию модели в пространстве состояний (далее эта модель обозначается как Transfer Functions State-space model, TF SSM). Описание представляет собой систему разностных (для дискретных систем) уравнений первого порядка (3), связанных между собой. В нашем случае система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x(nT_s + T_s) = A \times x(nT_s) + B \times IR(nT_s), \\ L(nT_s) = C \times x(nT_s) + D \times IR(nT_s), \end{cases} \quad (3)$$

$x(nT_s)$ — вектор состояния системы,

A — матрица состояний системы, 24×24 ,

B — матрица входов, 24×6 ,

C — матрица выходов, 2×24 ,

D — матрица прямого прохождения, 2×6 ,

T_s — период дискретизации.

Для идентификации непосредственно модели в пространстве состояний (далее — State-space model, SSM) размер этих матриц зависит от выбранного порядка системы. Порядок в данном случае выбирался перебором параметров, а метод — автоматически тулбоксом.

Эконометрическая ARMAX-модель в общем виде может быть описана следующим уравнением:

$$y(t) + a_1 \times y(t-1) + \dots + a_{n_a} \times y(t-n_a) = b_1 \times u(t-n_k) + \dots + b_{n_b} \times u(t-n_k-n_b+1) + c_1 \times e(t-1) + \dots + c_{n_c} \times e(t-n_c) + e(t). \quad (4)$$

Или в более компактном виде:

$$A(q) \times y(t) = B(q) \times u(t - n_k) + C(q) \times e(t), \tag{5}$$

$y(t)$ — выходной сигнал,

n_a — число полюсов,

n_b — число нулей плюс 1,

n_c — число C -коэффициентов,

n_k — число временных точек входного сигнала, которые не оказывают влияния на выход,

$y(t - 1) \dots y(t - n_a)$ — предыдущие выходы, от которых зависит текущий,

$u(t - n_k) \dots u(t - n_k - n_b + 1)$ — предыдущие вход и входы с задержкой, от которых зависит текущий выход,

$e(t - 1) \dots e(t - n_c)$ — белый шум.

Параметры n_a , n_b и n_c являются порядками ARMAX-модели.

Нелинейная модель Гаммерштейна – Винера, идентифицированная в работе, имеет структуру, представленную на рис. 2, где

f — входная нелинейность, которая преобразует входной сигнал $u(t)$ к виду $w(t) = f(u(t))$,

h — выходная нелинейность, которая преобразует сигнал $x(t)$ к виду $y(t) = h(x(t))$,

W_{ir} — линейная передаточная функция перехода от $w(t)$ к $x(t)$.

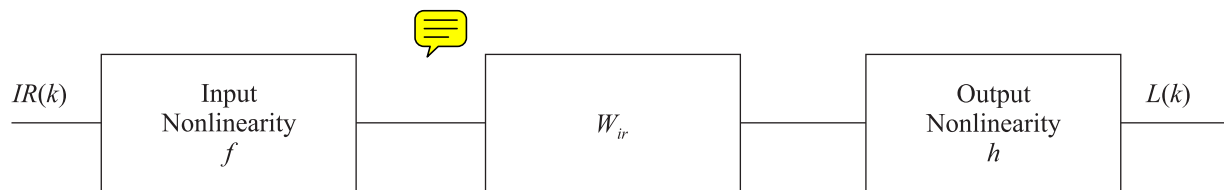


Рис. 2. Модель Гаммерштейна – Винера

Использование модели такого типа строится на предположении, что если выходной сигнал системы нелинейным образом зависит от входного сигнала (-ов), то целесообразно разбить эту зависимость на две или более составляющих. В данном случае динамика системы описывается линейной передаточными функциями (такими, которые были описаны ранее), а нелинейные свойства выходного временного ряда определяются нелинейными блоками.

Идентификация моделей

Идентификация моделей проводилась в программном пакете Matlab с помощью System Identification Toolbox. Обычно данный инструментарий используется для построения моделей динамических систем на основе реальных измеренных входных и выходных данных механических систем. В нашем случае в качестве входных данных были использованы временные ряды средневзвешенных процентных ставок по всем срокам кредитования организаций в рублях в период с 2014 по 2019 г., в качестве выходных — ряды кредитных задолженностей организаций-заемщиков по соответствующим срокам. Исходные данные представлены в официально публикуемом Банком России Бюллетене банковской статистики.

Для первоначальной инициализации параметров моделей использовался метод инструментальных переменных. Для минимизации штрафной функции автоматически выбирался метод последовательного квадратичного программирования. В качестве нелинейных функций модели Гаммерштейна – Винера выбирались линейно-кусочные функции.

Оценка точности идентификации параметров модели в System Identification Toolbox производилась с помощью нормального среднеквадратичного отклонения (NRMSE) для выходных сигналов (рис. 3).

$$fit(i) = 100 \times \left(1 - \frac{\|xref(:,i) - x(:,i)\|}{\|xref(:,i) - mean(xref(:,i))\|} \right), \quad (6)$$

$xref$ – опорная функция,

x – оцениваемая функция,

fit – оценка в процентах.

Оценка проведенной идентификации приведена в таблице 1. Наилучшие значения по совпадению с выходным сигналом дает нелинейная модель Гаммерштейна – Винера, в то время как остальные модели близки по данному показателю точности.

В ходе исследования выяснилось, что идентифицированная нелинейная модель Гаммерштейна – Винера хотя и дает лучший результат по совпадению с заданной выходной функцией, но из-за переобучения показывает неудовлетворительный результат на этапе валидации и поэтому абсолютно непригодна для построения прогнозов (рис. 4). Нелинейные блоки модели слишком «подгоняются» под выходной сигнал. Поэтому данная модель не включена в результирующую таблицу прогнозных значений.

Устойчивость остальных моделей оценивалась по графикам переходных функций для каждой из пар «вход – выход» (рис. 5).

Из оставшихся моделей в качестве опорной для прогнозирования тренда по кредитной задолженности была выбрана линейная дискретная модель TF SSM, как наиболее точно моде-

Таблица 1. Точность идентификации моделей

Название модели	Идентификация NRMSE, %		Валидация NRMSE, %		Макс. ошибка, $\times 10^5$	
	< 1 года	> 1 года	< 1 года	> 1 года	< 1 года	> 1 года
TF SSM	78.6	88.35	70.84	86.51	3.4	3.7
SSM	72.22	77.75	60.33	69.93	3.9	5.9
ARMAX	78.53	77.31	58.67	55.78	3.3	5.4
Hammerstein – Wiener	85.91	90.37	< 0	< 0	3.4	6

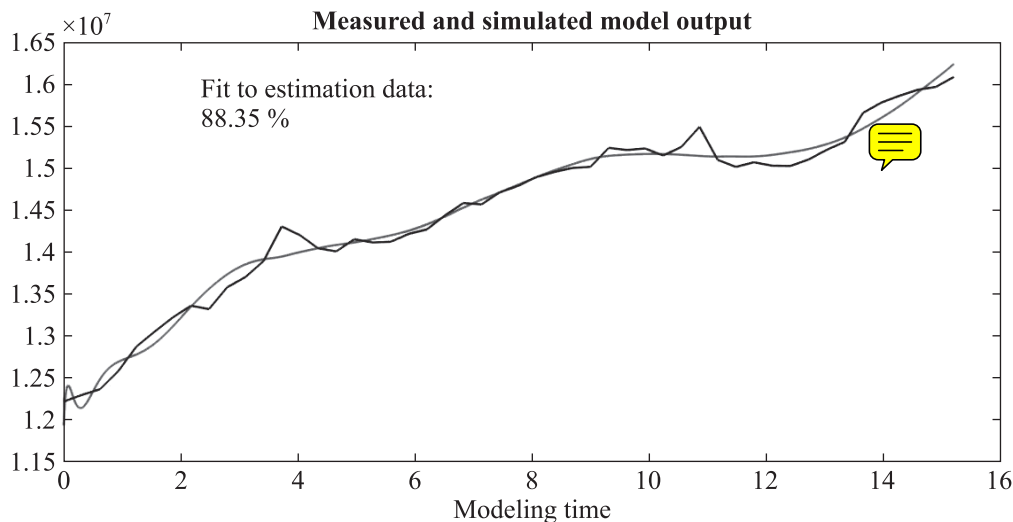


Рис. 3. Оценка точности TF SSM с помощью NRMSE-модели

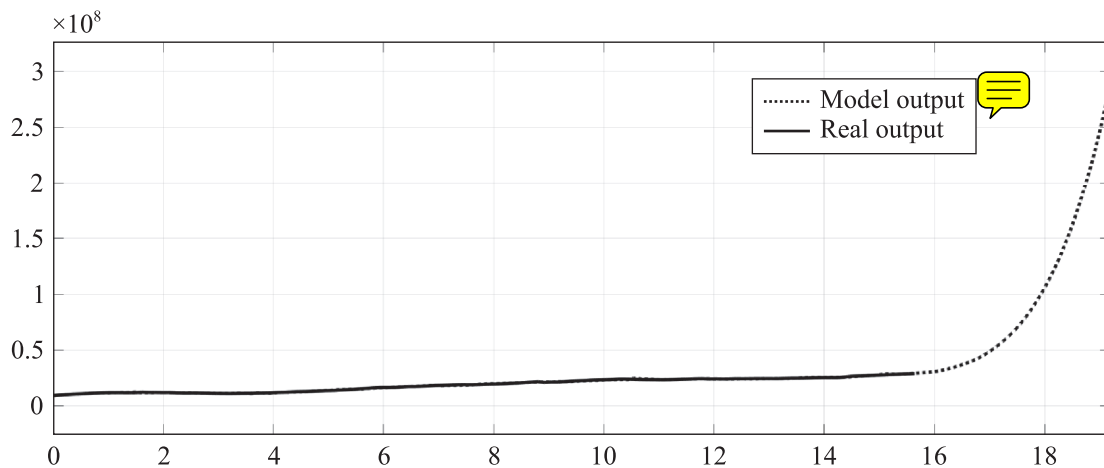


Рис. 4. Результат прогнозного моделирования кредитной задолженности в руб. на 1 год для нелинейной модели Гаммерштейна – Винера

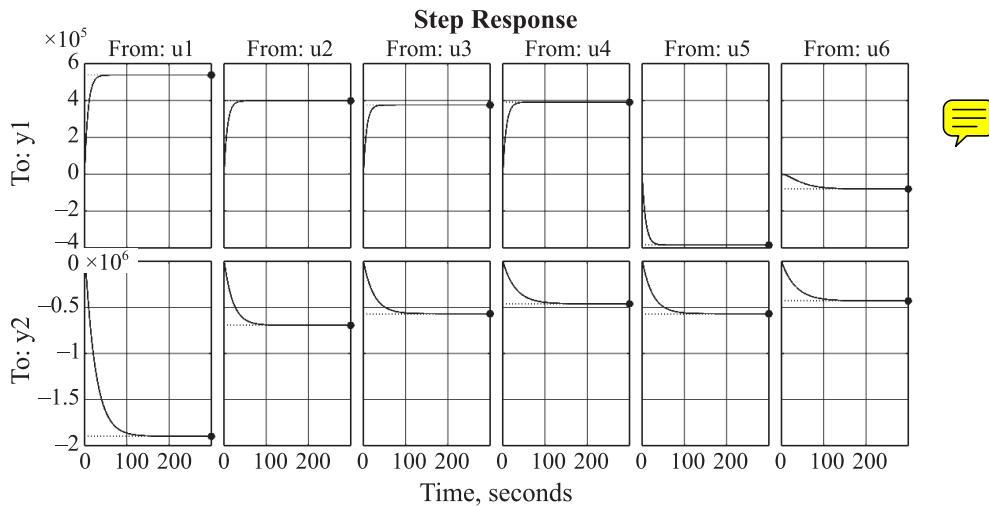


Рис. 5. Переходные процессы для идентифицированной TF SSM

лирующая выходной сигнал с параметрами совпадения с опорной функцией на этапе валидации в 86.51 % для кредитов на срок больше года и 70.84 % для кредитов на срок меньше года. Валидация проводилась на части исходной выборки, NRMSE-оценка представлена в таблице 1.

Несмотря на то что этап валидации наиболее успешно прошла первая модель, по результатам идентификации в целом можно предположить о наличии хорошей прогнозируемости системы. Для проверки данной гипотезы для временных рядов был посчитан показатель Хёрста (7), который является показателем наличия устойчивых тенденций во временном ряду. Данный показатель определяется следующим образом:

$$E \left[\frac{R(n)}{S(n)} \right] = C \times n^H, \quad n \rightarrow \infty, \tag{7}$$

- $R(n)$ — размах накопленных отклонений первых n значений от среднего значения ряда,
- $S(n)$ — стандартное отклонение,
- $E[x]$ — математическое ожидание,
- N — величина промежутка времени,
- C — константа.

Для кредитной задолженности по срокам свыше 1 года показатель принимает значение 0.83, что говорит о персистентности временного ряда, что свидетельствует о хорошей прогнозируемости. Для кредитной задолженности по срокам меньше 1 года коэффициент Хёрста принимает значение 0.58, что также говорит о наличии трендовых тенденций в динамике. Так как значение показателя близко к 0.5, этим можно обосновать более низкие показатели по точности моделей и на этапе идентификации, и на этапе валидации для этой части задолженности. Полученные хорошие результаты по валидации первой модели говорят о наличии фундаментальных связей между процентными ставками и структурой кредитной задолженности.

Как было сказано в конце обзора литературы, наиболее близкими к поставленной в данном исследовании задаче являются работы по моделированию денежно-кредитной политики на макроуровне. При этом сложно сравнивать эффективность полученного нами прогноза ввиду отсутствия полностью идентичной задачи и оценки в этих работах. Однако при исследовании влияния денежно-кредитной политики на макроэкономические параметры исследователи обычно используют агрегированные параметры, т. е. ставку рефинансирования (ключевую ставку) и общую кредитную задолженность. Результаты нашего исследования говорят о наличии фундаментальных связей между процентными ставками на различные сроки кредитования и структурой кредитной задолженности, что может учитываться при необходимости уточнения таких крупных моделей, т. е. целесообразно использовать для прогнозирования кривую ставок, что подтверждается результатами валидации.

Результаты моделирования и программное представление

Дальнейшее моделирование проводилось в пакете Matlab Simulink, а затем была разработана программа для имитации различных сценариев денежно-кредитной политики регулятора (в нашем случае Банка России), т. е. изменений процентных ставок. Банк России, изменяя ключевую процентную ставку, воздействует на доступность кредитования и прочие сегменты финансового рынка. Реакция рынка на данные изменения является очевидным результатом решений банковского регулятора. В экономике эта реакция относится к понятию «трансмиссионный механизм денежно-кредитной политики».

Программа, моделирующая реакцию кредитного рынка, является обучающей имитационной игрой, описывающей характер изменений общей структуры кредитной задолженности в зависимости от регулирующего воздействия Банка России. Она разрабатывалась для удобства представления результатов моделирования подобного рода моделей (переход от процентных ставок к какому-либо связанному экономическому показателю) в рамках общей задачи разработки имитационных игр на основе различных социально-экономических блоков. Разработка имитационных игр по таким процессам позволяет провести декомпозицию экономики на подсистемы и в дальнейшем переходить на мезо- и микроуровни при изучении изменения в характере связей между показателями на разных уровнях. Интерфейс программы представлен на рис. 6. Пользователем задаются конечная дата прогнозного моделирования и предполагаемые значения средневзвешенных процентных ставок банковской системы по различным срокам кредитования. Затем данные линейно интерполируются и подаются на вход загруженной модели.

Для проверки адекватности работы модели было проведено моделирование для трех различных видов кривой процентных ставок, т. е. для разных сценариев развития денежно-кредитной политики регулятора (рис. 7):

- наиболее вероятный сценарий А (базовый), в рамках которого не предполагается существенных изменений процентных ставок на прогнозном горизонте;
- мягкий сценарий Б, в рамках которого центральный банк снижает ключевую процентную ставку до 4%, руководствуясь низкими инфляционными ожиданиями;

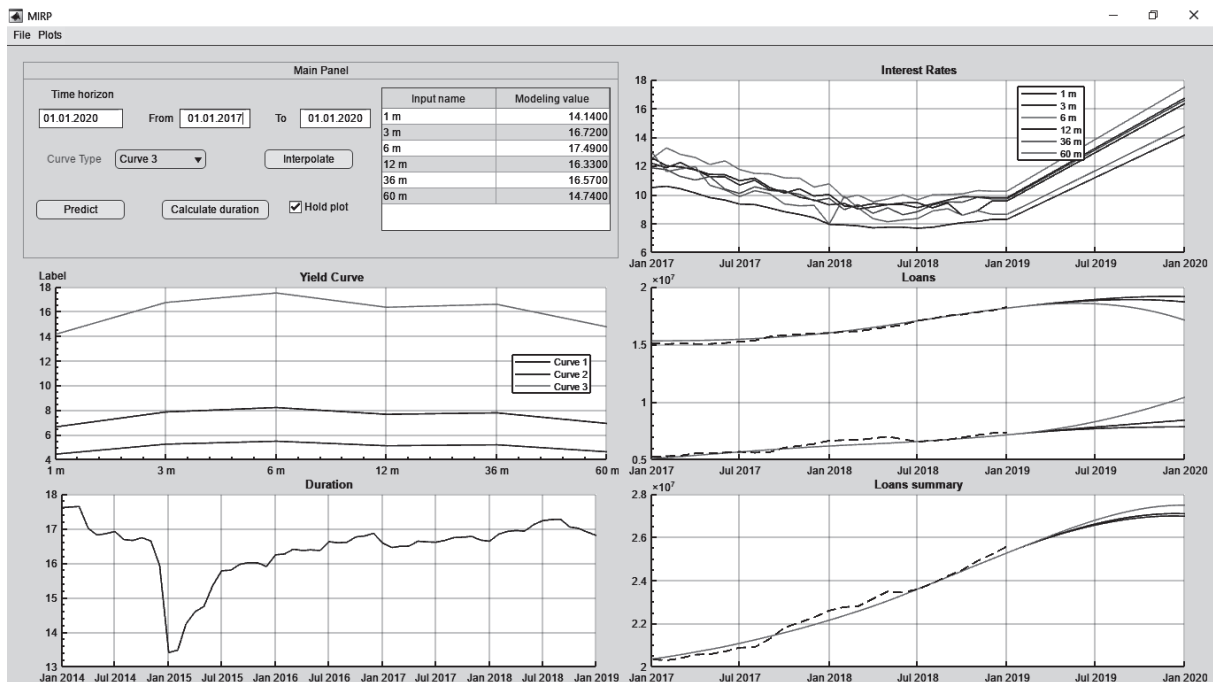


Рис. 6. Интерфейс программы для моделирования кредитной задолженности

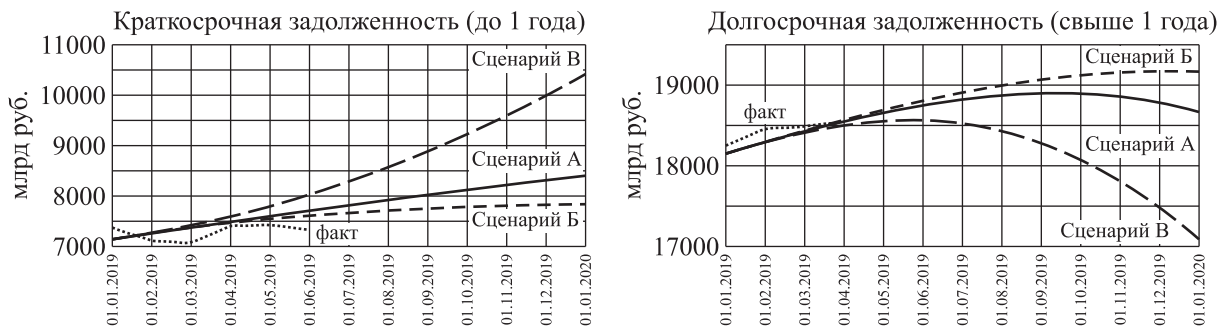


Рис. 7. Результаты моделирования на 01.01.2020 модели TF SSM

Таблица 2. Результаты моделирования кредитной задолженности, трлн руб.

Сценарий	TF SSM		SSM		ARMAX	
	> 1 года	< 1 года	> 1 года	< 1 года	> 1 года	< 1 года
Базовый	18.7	8.4	18.5	11.2	19.0	11.8
Мягкий	19.1	7.8	18.4	11.3	18.8	11.9
Жесткий	17.0	10.4	19.1	11.0	19.5	11.3

- жесткий сценарий В, в рамках которого ключевая процентная ставка повышается до 16%, реагируя на спекулятивные атаки на рубль со стороны валютных спекулянтов, что может быть вызвано, в частности, ужесточение антироссийских финансовых санкций.

В таблице 2 приведены последние точки прогнозного моделирования этих сценариев для рассмотренных выше моделей.

Интерпретация результатов

Полученные результаты и прогнозные сценарии позволяют сделать выводы, что на прогнозном горизонте в 1 год разработанная модель предсказывает рост суммарной кредитной задолженности при любом из сценариев реализации денежно-кредитной политики. Влияние на существенный сдвиг структуры задолженности по срокам кредитования может оказать жесткий сценарий, который для России может быть спровоцирован каким-либо внешним шоком, например ужесточением санкций или резким падением цен на нефть. При этом, несмотря на более высокую по сравнению с остальными сценариями процентную ставку, рост общей кредитной задолженности окажется самым высоким именно при этом сценарии. Это можно объяснить тем, что уже существующие кредиты будут переоцениваться по более высоким ставкам.

Применяемый в исследовании математический аппарат позволил идентифицировать и объяснить парадокс более быстрого роста денежной массы в краткосрочном временном интервале вслед за значительным ростом процентных ставок. Ужесточение денежно-кредитной политики имеет стратегическую цель снизить инфляцию и ограничить рост денежной массы в экономике через недоступность кредита. В реальности мы видим более быстрый рост денежной массы за счет переоценки активов и обязательств банков по более высоким процентными ставкам. На долгосрочном временном горизонте очевидно замедление процессов выдачи новых кредитов из-за падения рентабельности в экономике. Начинаются процессы делевериджа, когда в банки обращается все меньше и меньше заемщиков, а те из них, у кого финансовое состояние позволяет, предпочитают избегать новых займов. Однако навес уже накопленных долгов на краткосрочном горизонте у неблагополучных заемщиков с высоким уровнем долговой нагрузки может вызвать необходимость дополнительных заимствований, несмотря на рост процентных ставок.

Заключение

Подводя итог проведенному исследованию, можно сделать вывод, что инструментарий и методы, применяемые в кибернетике и ТАУ, можно использовать и для исследования экономических систем. Результаты показали, что именно в разрезе поставленной задачи по прогнозированию структуры кредитных задолженностей от динамики процентных ставок по кредитам наиболее эффективно повела себя модель TF SSM, которая представляет собой систему разностных уравнений в пространстве состояний, выигрывая у остальных моделей по NRMSE-оценке. Было выявлено, что при построении нелинейной модели Гаммерштейна–Винера в такой задаче возникает явление переобучения, когда модель эффективна только на обучающей выборке. Идентифицированные напрямую SS-модель и классическая ARMAX при прогнозировании дают схожие результаты, но проигрывают по оценке точности на этапе идентификации.

Разработанная модель TF SSM, как линейная, в основе которой лежат разностные уравнения, будет эффективна при прогнозировании (только) тренда по кредитным задолженностям. Максимальное значение прогнозного горизонта модели — 1 год.

Список литературы (References)

- Варшавский Л. Е.* Использование методов теории управления для формирования рыночных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 6, № 5. — С. 839–859.
Varshavskii L. E. Ispolzovanie metodov teorii upravleniya dlya formirovaniya rynochnykh struktur [Control theory methods for creating market structures] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 6, No. 5. — P. 839–859 (in Russian).

- Варшавский Л. Е.* Приближенные методы исследования динамики показателей рыночной структуры // Копьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 219–229.
Varshavskii L. E. Priblizhennyye metody issledovaniya dinamiki pokazatelej rynochnoj struktury [Approximate methods of studying dynamics of market structure] // Computer Research and Modeling. — 2012. — Vol. 4, No. 1. — P. 219–229 (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Моделирование динамики экономических систем с неопределенными параметрами // Копьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 2. — С. 261–276.
Varshavskii L. E. Modelirovanie dinamiki ekonomicheskikh sistem s neopredelennymi parametrami [Uncertainty factor in modeling dynamics of economic systems] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 261–276 (in Russian).
- Краснощечков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Фазис, 2000. — 412 с.
Krasnozhchyokov P. S., Petrov A. A. Principy postroeniya modelej [Principles of Models Building]. — 2-e izd., peresm. i dop. — Moscow: Fazis, 2000. — 344 p. (in Russian).
- Красс И. А.* Математические модели эконометрической динамики. — М.: Советское радио, 1976. — 280 с.
Krass I. A. Matematicheskie modeli ehkonomicheskoy dinamiki [Mathematical Models of Economic Dynamics]. — Moscow: Sovetskoe radio, 1976. — 280 p. (in Russian).
- Кугаенко А. А.* Экономическая кибернетика. — М.: Вузовская книга, 2015. — 880 с.
Kugaenko A. A. Ehkonomicheskaya kibernetika [Economic Cybernetics]. — Moscow: Vuzovskaya kniga, 2015. — 880 p. (in Russian).
- Кугаенко А. А.* Методы динамического моделирования и управления экономикой. — М.: Вузовская книга, 2005. — 456 с.
Kugaenko A. A. Metody dinamicheskogo modelirovaniya v upravlenii ehkonomikoj [Methods of Dynamic Modeling and Regulation of Economics]. — Moscow: Vuzovskaya kniga, 2005. — 456 p. (in Russian).
- Макаров В. Л., Афанасьев А. А., Лосев А. А.* Вычислимая имитационная модель денежного обращения экономики // Экономика и математические методы. — 2011. — Т. 47, № 1. — С. 3–27.
Makarov V. L., Afanasyev A. A., Losev A. A. Vychislimaya imitacionnaya model' denezhnogo obrashcheniya ekonomiki [Computable simulation model for money circulation in the Russian economy] // Economics and Mathematical Methods. — 2011. — Vol. 47, No. 1. — P. 3–27 (in Russian).
- Малюгин В. И., Демиденко М. В., Калечиц Д. Л., Миксюк А. Ю., Цукарев Т. В.* Разработка и применение эконометрических моделей для прогнозирования и анализа вариантов денежно-кредитной политики // Прикладная эконометрика. — 2009. — Т. 2, № 14. — С. 24–38.
Malyugin V. I., Demidenko M. V., Kalechic D. L., Miksyuk A. Yu., Cukarev T. V. Razrabotka i primeneniye ekonometri-cheskikh modelej dlya prognozirovaniya i analiza variantov denezhno-kreditnoj politiki [Development and application of econometric models for forecasting and analysis of monetary policy options] // Applied Econometrics. — 2009. — Vol. 2, No. 14. — P. 24–38 (in Russian).
- Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А.* Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 544 с.
Petrov A. A., Pospelov I. G., Shaninin A. A. Opyt matematicheskogo modelirovaniya ehkonomiki [Experience in Mathematical Modeling of Economics]. — Moscow: Ehnergoatomizdat, 1996. — 544 p. (in Russian).
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. — 280 с.
Romanovskij M. Yu., Romanovskij Yu. M. Vvedenie v ehkonofiziku. Statisticheskie i dinamicheskie modeli [Introduction to Econophysics. Statistical and Economic Models]. — Moscow–Izhevsk: Instilut kompiuternih issledovanliy, 2007. — 280 p. (in Russian).
- Billings S. A.* Identification of Nonlinear Systems: A Survey // IEE Proceedings D — Control Theory and Applications. — 1980. — Vol. 126, No. 6. — P. 272–285.
- Corrêa J. M., Neto A. C., Júnior L. T., Franco E. M. C., Faria A. E.* Time series forecasting with the WARIMAX-GARCH method // Neurocomputing. — 2016. — Vol. 216. — P. 805–815.
- de Fiore F., Tristani O.* Optimal monetary policy in a model of the credit channel // The Economic Journal. — 2013. — Vol. 123, No. 571. — P. 906–931.
- Dorf R., Bishop R.* Modern control systems. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001. — 1018 p.

- Durbin J., Koopman S. J.* Time Series Analysis by State Space Methods. — Oxford: Oxford University Press, 2001. — 240 p.
- Haber R., Keviczky L.* Nonlinear System Identification — Input Output Modeling Approach. — Vols. 1 and 2. — Kluwer Academic Publishers, 1999. — 823 p.
- Künsch H.* State space and hidden Markov models // Complex Stochastic Systems. — 2005. — P. 109–173.
- Ljung L.* Perspectives on System Identification // IFAC Proceedings Volumes. — 2008. — Vol. 49, No. 2. — P. 7172–7184.
- Ljung L.* System Identification: Theory for the User. — Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall PTR, 1999. — 609 p.
- Ma L., Liu X. A.* A nonlinear recursive instrumental variables identification method of Hammerstein ARMAX system // Nonlinear Dynamics. — 2015. — Vol. 79, No. 2. — P. 1601–1613.
- Migon H., Gamerman D., Lopez H., Ferreira M.* Bayesian dynamic models / D. Day and C. Rao (eds.) // Handbook of Statistics. — 2005. — Vol. 25, No. 19. — P. 553–588.
- Petris G., Petrone S., Campagnoli P.* Dynamic Linear Models with R // Journal of Applied Statistics. — 2009. — Vol. 38. — P. 31–84.
- Shumway M. H., Stoffer D. S.* Time Series Analysis and Its Applications With R Examples. — Springer; 3rd ed., 2011. — 596 p.
- Solgård S. B.* Modelling, simulation and control of macroeconomic systems. — Master's thesis. Norwegian University of Science and Technology, 2009. — 89 p.
- van Mulders A., Schoukens J., Vanbeylen L.* Identification of systems with localised nonlinearity: From state-space to block-structured models // Automatica. — 2013. — Vol. 49. — P. 1392–1396.
- Yu F., Mao Zh., Jia M., Yuan P.* Recursive Parameter Identification of Hammerstein-Wiener Systems With Measurement Noise // Signal Processing. — 2014. — Vol. 105. — P. 137–147.
- Zhang X., Frey R.* Improving ARMA-GARCH forecasts for high frequency data with regime-switching AR-MA-GARCH // Journal of Computational Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 18, No. 1. — P. 727–757.

УДК: 519.217, 32.019.52

Стохастическая модель числа сторонников политического лидера в цифровом публичном пространстве

К. В. Светлов^а, С. А. Иванов^б

Лаборатория изучения социально-экономических и политических процессов современного общества,
Санкт-Петербургский государственный университет (ФГБОУ ВО СПбГУ),
Россия, 191124, г. Санкт-Петербург, ул. Смольного, д. 1/3, 9-й подъезд

E-mail: ^а k.svetlov@spbu.ru, ^б s.a.ivanov@spbu.ru

Получено 12.05.2019, после доработки — 22.07.2019.

Принято к публикации 21.08.2019.

В представленной статье мы исследуем процесс изменения рейтинга одобрения политического лидера под влиянием процессов, протекающих в цифровом публичном пространстве. Драйвером указанных изменений служит взаимодействие пользователей онлайн-площадок (информационных и новостных ресурсов, блогов, социальных сетей), в результате которого они могут обмениваться друг с другом мнениями и формулировать свою позицию в отношении политика. Помимо межличностного взаимодействия мы рассмотрим такие факторы, как информационное воздействие, выражающееся в создании информационного потока, имеющего заданную мощность и тональность (положительную или отрицательную, в контексте влияния на имидж политического лидера), а также наличие группы агентов (лидеров мнений), оказывающих поддержку политике или же, наоборот, негативно влияющих на его представление в медийном пространстве.

Математической основой представленного исследования является модель Кирмана, имеющая истоки в биологии и первоначально нашедшая свое применение в экономике. В рамках данной модели считается, что каждый участник находится в одном из двух возможных состояний, а также задается скачкообразный марковский процесс, описывающий переходы между этими состояниями. Для рассматриваемой нами задачи данными состояниями являются 0 или 1, в зависимости от того, является ли конкретный агент сторонником политика и одобряет его деятельность или же нет. Пользуясь аппаратом теории марковских процессов, мы находим его диффузионное приближение, известное как процесс Якоби. При помощи спектрального разложения для инфинитезимального оператора данного процесса мы имеем возможность найти аналитическое представление для плотности переходных вероятностей.

Анализируя вероятности, полученные указанным образом, можно оценить влияние отдельных факторов модели: мощность и тональность новостных сообщений, доступных для пользователей онлайн-пространства и релевантных для задач формирования рейтинга, а также численности сторонников или противников политика. Далее, пользуясь найденными собственными функциями и значениями, мы выводим выражения для оценки условных математических ожиданий рейтинга политика, что может служить основой для построения прогнозов, важных для задач формирования стратегии представления политического лидера в онлайн-среде.

Ключевые слова: рейтинг одобрения, политическое лидерство, информационное воздействие, стадное поведение, марковский процесс

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и АНО ЭИСИ в рамках научного проекта № 19-011-31651 «Коммуникативные стратегии российских политических лидеров в онлайн-пространстве».

UDC: 519.217, 32.019.52

Stochastic model of voter dynamics in online media

K. V. Svetlov^a, S. A. Ivanov^b

Laboratory for research of social-economic and political processes of modern society,
St. Petersburg State University,
9th entrance, 1/3 Smolny st., St. Petersburg, 191124, Russia

E-mail: ^a k.svetlov@spbu.ru, ^b s.a.ivanov@spbu.ru

Received 12.05.2019, after completion — 22.07.2019.

Accepted for publication 21.08.2019.

In the present article we explore the process of changing the level of approval of a political leader under the influence of the processes taking place in online platforms (social networks, forums, etc.). The driver of these changes is the interaction of users, through which they can exchange opinions with each other and formulate their position in relation to the political leader. In addition to interpersonal interaction, we will consider such factors as the information impact, expressed in the creation of an information flow with a given power and polarity (positive or negative, in the context of influencing the image of a political leader), as well as the presence of a group of agents (opinion leaders), supporting the leader, or, conversely, negatively affecting its representation in the media space.

The mathematical basis of the presented research is the Kirman model, which has its roots in biology and initially found its application in economics. Within the framework of this model it is considered that each user is in one of the two possible states, and a Markov jump process describing transitions between these states is given. For the problem under consideration, these states are 0 or 1, depending on whether a particular agent is a supporter of a political leader or not. For further research, we find its diffusional approximation, known as the Jacoby process. With the help of spectral decomposition for the infinitesimal operator of this process we have an opportunity to find an analytical representation for the transition probability density.

Analyzing the probabilities obtained in this way, we can assess the influence of individual factors of the model: the power and direction of the information flow, available to online users and relevant to the tasks of rating formation, as well as the number of supporters or opponents of the politician. Next, using the found eigenfunctions and eigenvalues, we derive expressions for the evaluation of conditional mathematical expectations of a politician's rating, which can serve as a basis for building forecasts that are important for the formation of a strategy of representing a political leader in the online environment.

Keywords: approval rating, political leadership, herd behaviour, Markov process

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 979–997 (Russian).

The reported study was funded by RFBR and EISR according to the research project No. 19-011-31651.

Введение

В данной статье мы исследуем вопрос формирования рейтинга одобрения (approval rating) политического лидера под влиянием процессов, протекающих в цифровом публичном пространстве. Под рейтингом одобрения мы будем понимать индикатор, значение которого оценивается в зависимости от ответов респондентов на вопрос вида «Одобряете ли вы деятельность... на его/ее посту?». Данный вопрос проводится по каждому политику отдельно и является закрытым, с заранее обозначенными вариантами ответов («да», «нет», «затрудняюсь ответить»). Доля положительных ответов показывает уровень одобрения действий и программ данного политика.

Основой для исследований в рассматриваемом нами случае являются модель Алана Кирмана [Kirman, 1993], а также ее обобщения [Alfarano et al., 2008; Kononovicius, Gontis, 2014]. Модель Кирмана базируется на фактах из биологии и описывает процесс формирования коллективного мнения среди членов муравьиной колонии. Всевозможные ее обобщения широко применяются в социально-экономическом моделировании процессов, связанных с феноменом стадного поведения. Так, например, в статье [Alfarano et al., 2008] данная модель используется для описания механизма формирования цены акции на рынке под влиянием смены настроений трейдеров (изменения соотношения между числом оптимистов и пессимистов, ожидающих роста или снижения цены соответственно). В статьях [Kononovicius, Gontis, 2014; Kononovicius, Gontis, 2013] указываются возможные направления в обобщении модели Кирмана, учитывающие такие факторы, как наличие контролируемых агентов и более чем двух состояний, в которых могут находиться агенты. В последнее время появляется большое число исследований в области формирования мнений и диффузии информации, опирающихся на рассматриваемый класс моделей. Среди исследований в области формирования мнений электората можно выделить работы [Jedrzejewski, Sznajd-Weron, 2018; Peralta et al., 2018], в которых рассматриваются нелинейные версии модели Кирмана в приложениях к формированию мнения граждан.

Основываясь на методах теории случайных процессов [Van Kampen, 1992; Гихман, Скороход, 1965; Karlin, Taylor, 1981], мы исследуем основные аспекты модели формирования рейтинга политического лидера, учитывающей внешнее информационное воздействие. В частности, исследуется влияние параметров модели на классификацию границ $\{0, 1\}$ интервала возможных значений рейтинга одобрения, а также приводятся выражения для определения переходных вероятностей между различными значениями рейтинговых показателей и выражения для расчета условных математических ожиданий. Также в статье представлены условия достижения состояния консенсуса в данной модели, то есть значений рейтинга одобрения, равных 0 или 1.

Мы будем предполагать, что в цифровом пространстве имеется набор агентов, у которых под влиянием ряда факторов формируется определенное мнение в отношении рассматриваемого политического лидера. Мнения агентов мы будем классифицировать в зависимости от того, являются ли данные агенты сторонниками данного политика и одобряют его деятельность или же, напротив, не готовы оказывать ему поддержку. Динамика рейтинга одобрения, то есть доли агентов, являющихся сторонниками политика и его программы, будет предметом исследования данной статьи. Важно подчеркнуть, что классификация конкретного агента, как сторонника рассматриваемого политического лидера, не является перманентной и может меняться с течением времени. Среди факторов, которые могут повлиять на то, что конкретный агент одобряет деятельность политика, мы будем выделять следующие: *межличностные взаимодействия* агентов, под влиянием которых они могут изменять свою точку зрения в отношении политика и становиться его сторонниками либо же выходить из их числа, а также *наличие выделенной категории агентов*, которые не меняют своего мнения в отношении данного политика, однако способны оказать влияние на других агентов (так называемые лидеры мнений). Представленная в данной статье модель предусматривает наличие дополнительного фактора, способного оказывать на численность популяции сторонников, — *новостного фона*, имеющего отношение к рассматриваемому

политику и доступного в публичном цифровом пространстве. Отметим, что существуют многочисленные публикации, например [Bollen et al., 2011; Barberá, Rivero, 2015], связывающие результаты анализа сообщений в социальных сетях методами NLP (Natural language processing, обработка естественного языка) и результаты социологических опросов по политической и социально-экономической тематике. Действительно, новостные сообщения, появляющиеся в онлайн-пространстве, представленном многочисленными информационными ресурсами и площадками, блогами и социальными сетями, являются одним из главных факторов, благодаря которому представители электората могут получить сведения о деятельности политика и сформировать свое отношение к нему. А следовательно, управление данным фактором и контроль за ним становятся неотъемлемыми условиями формирования успешной стратегии политического лидера. В работе [Gayo-Avello, 2012] делается обзор публикаций по предсказанию результатов опросов на основе таких характеристик новостей в социальной сети Twitter, как доля сообщений на заданную тему и их тональность. Статьи [O'Connor, 2010; Cummings et al., 2010] подтверждают наличие существенной корреляции (по данным работы [Cummings et al., 2010], корреляция может достигать до 0.696) между опросами по уровню одобрения политических лидеров и указанными показателями сообщений из социальных сетей. Отметим, что приведенные публикации касаются прежде всего микроблогингового сервиса Twitter ввиду его популярности в США и разработанных открытых средств получения информации из него. В данной статье мы не ставим перед собой целью анализ сообщений из конкретной социальной сети или новостного ресурса, поэтому используем широкий термин «публичное цифровое пространство». Включение конкретных информационных ресурсов для анализа сообщений из них следует осуществлять в зависимости от их популярности в том или ином регионе мира, например, на основании статистики, предоставляемой ресурсами [Alexa Internet] или [SimilarWeb].

Описание модели и постановка задачи

Пусть N — общее число агентов, обладающих доступом к цифровому публичному пространству и способных получать из него информацию, а также общаться между собою, формируя при этом собственное мнение. Будем считать, что каждый из агентов может находиться в одном из двух возможных состояний: $n_i = 0$ (не является сторонником рассматриваемого политика, не одобряет его деятельность или затрудняется с ответом) или $n_i = 1$ (является сторонником, одобряет деятельность), $i = 1, \dots, N$. В данной статье мы будем рассматривать случай, когда каждый агент i в состоянии общаться с оставшимися $N - 1$ агентами, что является допустимым предположением, в ситуации публичного цифрового пространства, где отдельный пользователь может свободно вступить в открытый диалог с остальными представителями сообщества. Также введем обозначение $n = \sum_{i=1}^N n_i$ для общего числа сторонников политического лидера в рамках данной аудитории.

Динамика численности сторонников политического лидера моделируется при помощи задания для случайной величины n соответствующей цепи Маркова с непрерывным временем и описанием интенсивностей перехода между возможными состояниями $\{0, 1, \dots, N\}$.

Для интенсивностей переходов из состояния n в состояния $n - 1$ и $n + 1$ введем обозначения $\pi^-(n, t)$ и $\pi^+(n, t)$ соответственно. При этом отметим наличие зависимости данных интенсивностей от момента времени t . С учетом данных обозначений вероятности перехода между состояниями рассматриваемой цепи формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} P(n \pm 1, t + \Delta t | n, t) &= \pi^\pm(n, t)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(n \pm m, t + \Delta t | n, t) &= o(\Delta t), \quad m > 1, \\ P(n, t + \Delta t | n, t) &= 1 - (\pi^-(n, t) + \pi^+(n, t))\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, за малый промежуток времени Δt число агентов, одобряющих деятельность данного политика, может измениться на ± 1 или остаться неизменным.

Перейдем к описанию интенсивностей $\pi^-(n, t)$. В оригинальной модели Кирмана [Kirman, 1993], а также, в последствии, в модели Альфарано [Alfarano et al., 2008] они заданы как

$$\begin{aligned}\pi^+(n, t) &= (N - n)(a + bn), \\ \pi^-(n, t) &= n(a + b(N - n)).\end{aligned}$$

Смысл подобной функциональной зависимости состоит в следующем. Параметр $b > 0$ отвечает за изменение числа сторонников вследствие их межличностного взаимодействия и общения. Параметр $a > 0$, напротив, отвечает за смену мнений под влиянием внешних факторов, не связанных взаимодействием агентов между собой, например из-за деятельности СМИ по освещению событий, прямо или косвенно связанных с деятельностью данного политика. Отметим, что в данной форме рассматриваемая модель является идеологически близкой моделям [Михайлов, Маревцева, 2011; Михайлов и др., 2014], в которых рассматривается проблема динамики численности индивидов, владеющих информацией и распространяющих ее. Вместо аппарата теории марковских процессов в ней применяются методы теории дифференциальных уравнений. Аналог параметра a в данных работах связан со «скоростью внешней вербовки», а аналог параметра b влияет на «скорость внутренней вербовки». В представленной статье мы сформулируем один из возможных вариантов развития механизма воздействия информации на рост или снижение числа сторонников политического лидера, высказывающих одобрение проводимой им деятельности.

Следующий шаг, который возможно (см. [Kononovicius, Gontis, 2014]) сделать на пути построения модели распространения популярности политического лидера, состоит во введении в рассмотрение обособленной группы численностью M , представляющей множество агентов, не меняющих свое отношение к политику под влиянием каких бы то ни было факторов. При этом будем считать, что в данной группе находятся M_+ безусловных сторонников политического лидера и M_- безусловных противников. Как будет показано в ходе анализа данной модели, конфигурация данной группы агентов оказывает существенное значение на уровень поддержки политика, в том числе в предельном случае, при $N \rightarrow +\infty$. Поэтому при применении излагаемой модели на практике в данной группе необходимо учитывать лидеров мнений, имеющих большую аудиторию подписчиков, а также способных воздействовать на имидж политического лидера. С учетом изложенного интенсивности смены мнений будут моделироваться как

$$\begin{aligned}\pi^+(n, t) &= (N - n)(a + bn + cM_+), \\ \pi^-(n, t) &= n(a + b(N - n) + cM_-),\end{aligned}$$

где параметр $c > 0$ отвечает за степень влияния группы сторонников или противников политика на рассматриваемой в данной модели агентов.

Завершающим элементом в построении нашей модели является описание механизма информационного воздействия, учитывающего возможную смену интенсивности потока сообщений и их тональности в цифровом публичном пространстве. Будем предполагать, что за интервал времени $(t - \Delta t, t]$ появляются $h_t \geq 0$ новых информационных сообщений, имеющих отношение к рассматриваемому политику и размещенных на крупных информационных порталах или крупных группах в социальных сетях. Иными словами, под информационными и новостными сообщениями мы будем подразумевать материалы, размещенные на ресурсах указанных типов. Длительность Δt выбирается в зависимости от особенностей цифрового ресурса (новостного сайта, блога или социальной сети) и промежутка времени, в течение которого актуальные информационные сообщения могут быть сравнительно просто получены пользователями. Каждое из сообщений $\{m_{1,t}, \dots, m_{h_t,t}\}$ имеет тональность (см. [De et al., 2014]) $e_{i,t} \in [-1, 1]$, $i = 1, \dots, h_t$.

Для ее определения можно использовать один из многочисленных методов оценки тональности текстов (sentiment analysis) [Mälntyläl et al., 2018; Nakov et al., 2018]. Тональность -1 соответствует абсолютно негативному (по эмоциональной окраске) новостному сообщению, и, напротив, оценка $+1$ соответствует абсолютно позитивному сообщению. Если тональность сообщения не удастся определить, считается, что оно имеет нейтральную (нулевую) тональность. Введем обозначение для среднего значения тональностей сообщений:

$$s_t = \frac{\sum_{i=1}^{h_t} e_{i,t}}{h_t}, \quad (2)$$

и обозначение для показателя мощности информационного воздействия:

$$q_t = \tanh(\delta h_t). \quad (3)$$

Использование монотонно возрастающих, ограниченных функций, таких как \tanh или сигмоида, является распространенной практикой (например, [Chen et al., 2016]) при работе с неограниченными величинами. Величина $\delta \geq 0$ играет роль параметра чувствительности и отвечает за то, какое число сообщений требуется для роста мощности воздействия от 0 до 1. При $0 < \delta < +\infty$ минимальная мощность ($q_t = 0$) соответствует отсутствию каких-либо сообщений, относящихся к данному политику, а максимальная мощность ($q_t = 1$) соответствует ситуации бесконечно большого потока сообщений. При $\delta = 0$ величина q_t будет равняться 0, вне зависимости от числа сообщений, таким образом делая рассматриваемую нами систему нечувствительной к внешней информации. В ситуации, когда $\delta = +\infty$, наличие хотя бы одного сообщения будет соответствовать максимальной мощности. Для того чтобы учесть, что даже максимальное информационное воздействие может иметь ограниченный эффект при формировании мнения агентов в отношении политического лидера, введем параметр $a \geq 0$, как и прежде отражающий степень влияния информации на число сторонников политика, одобряющих его деятельность, и величину

$$a_t = a q_t.$$

Далее под мощностью информационного воздействия будем понимать именно величину a_t . Также нами будет сделано допущение о том, что тональность s_t и мощность q_t информационного воздействия являются функциями времени t . Данное допущение, безусловно, накладывает ограничения на рассматриваемую нами модель, делая ее менее «гибкой» и реалистичной, однако позволяет понять принципиальные зависимости между объемом и характером информации и динамикой рейтинговых показателей.

Теперь применим наше знание о средней тональности информационных сообщений, для этого зададим интенсивности переходов в рассматриваемой модели как

$$\begin{aligned} \pi^+(n, t) &= (N - n) \left(a_t \frac{1 + s_t}{2} + bn + cM_+ \right) = (N - n) \left(\bar{a} \cdot \tanh(\delta h_t) \cdot \frac{1 + s_t}{2} + bn + cM_+ \right), \\ \pi^-(n, t) &= n \left(a_t \frac{1 - s_t}{2} + b(N - n) + cM_- \right) = n \left(\bar{a} \cdot \tanh(\delta h_t) \cdot \frac{1 - s_t}{2} + b(N - n) + cM_- \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подобная функциональная форма задания интенсивностей **соответствует тому, мощность** информационного воздействия a_t раскладывается на две составляющие $a_t \frac{1 + s_t}{2}$ и $a_t \frac{1 - s_t}{2}$, значения которых определяется в зависимости от показателя тональности. Первая из частей положительно влияет на интенсивность роста числа сторонников и увеличивает рейтинг одобрения, а вторая, соответственно, повышает интенсивность их оттока и негативно сказывается на динамике рейтинга.

Мощность информационного воздействия, влияющего на рост числа сторонников политика, будет достигать максимального значения при абсолютно положительной тональности новостей ($s_t = 1$) и снижаться до нулевого значения при абсолютно отрицательных сообщениях ($s_t = -1$). Противоположным образом сказанное относится к тем, кто не причисляет себя к сторонникам политика. Нейтральная по тональности информация $s_t = 0$ будет с одинаковой мощностью $a_t/2$ действовать как на интенсивность роста, так и на интенсивность снижения числа сторонников, поскольку с одинаковой вероятностью может быть интерпретирована как в положительном, так и в отрицательном ключе. Также отметим, что даже отрицательная средняя тональность новостей $-1 < s_t < 0$ имеет ненулевое влияние (при $a > 0$) на интенсивность роста числа сторонников, поскольку, как и в предыдущем случае, возможны различные варианты интерпретации новостных сообщений, в том числе не совпадающие с результатами алгоритмов определения тональности.

Для дальнейшего изложения модели введем процесс

$$X_t = \frac{n_t}{N}, \quad t \geq 0,$$

равный доле агентов на момент времени t , одобряющих деятельность политика. Именно данный процесс (рейтинг одобрения) будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

Пространством состояний процесса X является отрезок множество $\left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\right\}$. Для описания динамики процесса процесса X введем следующие вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} \pi^+(x, t) &= (1 - x) \left(\frac{a_t \frac{(1 + s_t)}{2} + cM_+}{N} + bx \right), \\ \pi^-(x, t) &= x \left(\frac{a_t \frac{(1 - s_t)}{2} + cM_-}{N} + b(1 - x) \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Связь между ранее заданными интенсивностями (4) и только что определенными величинами (5) задается соотношениями

$$\pi^\pm(n, t) = N^2 \pi^\pm(x, t).$$

С использованием (5) переходные вероятности в терминах процесса X можно записать как

$$P(x \pm \Delta x, t + \Delta t \mid x, t) = N^2 \pi^\pm(x, t) \Delta t + o(\Delta t),$$

где $\Delta x = \frac{1}{N}$.

Пусть на начальный момент времени t_0 имеется $n_0 = \lceil x_0 \cdot N \rceil$ сторонников политика. Вероятность $P(n, t) = P(n_t = n \mid n_{t_0} = n_0)$ наличия n сторонников в момент времени $t > t_0$ удовлетворяет уравнению Колмогорова [Гихман, Скороход, 1965]:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(n, t) = \pi^+(n - 1, t)P(n - 1, t) + \pi^-(n + 1, t)P(n + 1, t) - (\pi^-(n, t) + \pi^+(n, t))P(n, t).$$

В терминах переменной $x \left(x = \frac{n}{N}\right)$, отвечающей процессу X , данное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = N^2 (\pi^+(x - \Delta x, t)P(x - \Delta x, t) + \pi^-(x + \Delta x, t)P(x + \Delta x, t) - (\pi^-(x, t) + \pi^+(x, t))P(x, t)).$$

Используя операторы шага $Ef(x) = f(x + \Delta x)$, $E^{-1}f(x) = f(x - \Delta x)$ (см. [Van Kampen, 1992]), можно переписать данное уравнение как

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = N^2((E - 1)(\pi^-(x, t)P(x, t)) + (E^{-1} - 1)(\pi^+(x, t)P(x, t))). \quad (6)$$

Перепишем уравнение (6) для плотности $p(x, t)$, определяемой как $p(x, t) = \frac{1}{\Delta x}P(x, t) = \frac{1}{\Delta x}P\left(x \leq X_t < x + \Delta x \mid X_{t_0} = \frac{n_0}{N}\right)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = N^2((E - 1)(\pi^-(x, t)p(x, t)) + (E^{-1} - 1)(\pi^+(x, t)p(x, t))).$$

Для дважды непрерывно дифференцируемой функции f действие оператора E можно описать приближенно:

$$\begin{aligned} Ef(x) &= f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + o(\Delta x^2), \quad \Delta x \rightarrow 0, \\ E^{-1}f(x) &= f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + o(\Delta x^2), \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Подставим данное разложение в предыдущее уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = N^2\left(-\Delta x \frac{\partial}{\partial x}((\pi^+ - \pi^-)p(x, t)) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}((\pi^+ + \pi^-)p(x, t)) + o(\Delta x^2)\right)$$

и осуществим предельный переход $N \rightarrow +\infty$.

При этом

$$N(\pi^+ - \pi^-) = a_t \left(\frac{1 + s_t}{2} - x\right) + c(M_+(1 - x) - M_-x)$$

и

$$\pi^+ + \pi^- = 2bx(1 - x) + O\left(\frac{1}{N}\right) \rightarrow 2bx(1 - x).$$

Таким образом, имеет место следующее предложение о переходных вероятностях диффузионного приближения рассматриваемого процесса.

Предложение 1. Плотность переходной вероятности $p(x, t \mid x_0, t_0)$ процесса X_t , $t > t_0$, удовлетворяет следующему уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial p}{\partial t}p(x, t \mid x_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, t)p(x, t \mid x_0, t_0)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(x, t)p(x, t \mid x_0, t_0)), \quad (7)$$

$$\lim_{t \downarrow t_0} p(x, t \mid x_0, t_0) = \delta(t - t_0), \quad (8)$$

где функции сноса и диффузии определены как

$$\mu(x, t) = a_t \left(\frac{1 + s_t}{2} - x\right) + c(M_+(1 - x) - M_-x), \quad (9)$$

$$\sigma^2(x, t) = 2bx(1 - x). \quad (10)$$

Известно (см. [Gardiner et al., 1985]), что полученное уравнение Фоккера–Планка соответствует следующему стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ):

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \quad (11)$$

Действительно, возьмем тестовую функцию $f(x) \in C^2(R)$, такую, что $f(x) = 0$ при $x \in R \setminus [0, 1]$, $f(0) = 0 = f(1)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1)$. Вычислим выражение для $\frac{d}{dt}Ef(X_t | X_{t_0} = x_0)$, пользуясь формулой Ито [Øksendal, 2003] и уравнением (11):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Ef(X_t | X_{t_0} = x_0) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mu(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(x, t) \right) p(x, t | x_0, t_0) dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, t) p(x, t | x_0, t_0)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x, t) p(x, t | x_0, t_0)) \right) f(x) dx. \end{aligned} \tag{12}$$

С другой стороны, имеет место следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}Ef(X_t | X_{t_0} = x_0) = \frac{d}{dt} \int_0^1 p(x, t | x_0, t_0) f(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) f(x) dx. \tag{13}$$

Приравняв правые части (12) и (13), получаем в силу произвольного выбора тестовой функции f

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, t) p(x, t | x_0, t_0)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x, t) p(x, t | x_0, t_0)).$$

Таким образом, плотность вероятности перехода случайного процесса, являющегося решением уравнения (11), удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка (8).

Именно процесс X , являющийся решением уравнения (11), будет основным предметом нашего внимания. В рамках данной статьи мы представим выражения для вычисления переходных вероятностей данного процесса, а также исследуем задачу построения прогнозов для данного процесса для произвольных моментов будущего T , в том числе в долгосрочной перспективе, т. е. при $T \rightarrow +\infty$.

Анализ и обсуждение модели

В данном и следующем разделах для простоты мы будем полагать, что мощность и тональность информационного потока являются фиксированными, то есть $a_t \equiv a$ и $s_t \equiv s$ соответственно. В соответствии с данным допущением далее в функциях σ и μ мы будем пропускать зависимость от переменной t , поскольку мощность и тональность информационного воздействия фиксированы и не зависят от времени.

Следуя технике, изложенной в [Бородин, 2013], введем функцию

$$s(x) = e^{-\int_x^1 \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz} \propto \frac{1}{(1-x)^{\frac{a}{b} \frac{1-s}{2} + \frac{c}{b} M_-} x^{\frac{a}{b} \frac{1+s}{2} + \frac{c}{b} M_+}}, \tag{14}$$

называемую *плотностью меры шкалы*. Далее, $S(x) = \int_x^1 s(z) dz$ — *шкала диффузии*, и соответствующая ей мера $S[x, y] = S(x) - S(y) = \int_x^y s(z) dz$ — *мера шкалы*. Также введем функцию

$$m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)s(x)} \propto (1-x)^{\frac{a}{b} \frac{1-s}{2} + \frac{c}{b} M_- - 1} x^{\frac{a}{b} \frac{1+s}{2} + \frac{c}{b} M_+ - 1}, \tag{15}$$

называемую *плотностью меры скорости*, и меру индуцированную ею, $M[x, y] = \int_x^y m(z) dz$, называемую *мерой скорости*. Отсутствие нижнего индекса интегрирования в данных определениях означает, что требуется вычислить произвольную первообразную подынтегральной функции.

Таким образом, введенные выше функции определены с точностью до некоторого постоянно-го слагаемого или множителя. Однако нас будут интересовать не конкретные значения данных функций, а возможность того, могут ли данные функции принимать значения, равные $\pm\infty$.

Поскольку рассматриваемый нами процесс принимает значения в ограниченном интервале $[l, r]$, $l = 0$, $r = 1$, необходимо определить характер его поведения в граничных точках 0 и 1 в зависимости от сочетания параметров модели. Для решения этой задачи дополнительно введем следующие функции и рассчитываемые на их основе величины, которые будут использованы при установлении характеристик процесса X :

$$\begin{aligned}\Sigma[x, y] &= \int_x^y (S(z) - S(x)) dM(z), & N[x, y] &= \int_x^y (S(y) - S(z)) dM(z), \\ \Sigma(l) &= \lim_{z \downarrow l} \Sigma(z, c), & N(l) &= \lim_{z \downarrow l} N(z, c), \\ \Sigma(r) &= \lim_{z \uparrow r} \Sigma(c, z), & N(r) &= \lim_{z \uparrow r} N(c, z),\end{aligned}$$

где c — произвольная точка из интервала (l, r) , выбор которой не принципиален для определения того, конечны или же бесконечны величины $\Sigma(l)$, $\Sigma(r)$, $N(l)$, $N(r)$. Указанные величины имеют следующую эвристическую интерпретацию [Karlin, Taylor, 1981]: $\Sigma(l)$ измеряет время, которое требуется для достижения l диффузией, начинающейся во внутренней точке $c \in (l, r)$; $N(l)$ измеряет время, которое требуется для достижения точки $c \in (l, r)$ диффузией, начинающейся с границы l . Аналогичную интерпретацию имеют величины $\Sigma(r)$, $N(r)$.

Пусть $H_z = \inf\{s: X_s = z\}$ — момент первого достижения процессом X уровня z . Если уровень z не достигается, полагаем $H_z = \infty$. Граница l называется *границей входа*, если она не может быть достигнута из любой точки интервала (l, r) . Но при этом можно рассматривать диффузии, начинающиеся на этой границе. Такие диффузии перемещаются внутрь интервала и никогда не возвращаются к входной границе. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы l была границей входа, является $\Sigma(l) = \infty$ и $N(l) < \infty$. Если же граница может как заходить на границу, так и выходить из нее, то такая граница называется *регулярной*. Граница l является регулярной тогда и только тогда, когда $\Sigma(l) < \infty$ и $N(l) < \infty$. Еще одним пунктом классификации границ являются *границы выхода*: l является границей выхода, если

$$\lim_{z \downarrow l} \lim_{x \downarrow l} P_x(H_z < t) = 0.$$

Т. е. для диффузии, начинающейся в точке l (или в точке x , приближающейся к l), невозможно достигнуть никакого другого внутреннего состояния z , независимо от того, как близко z к l . Граница является выходом тогда и только тогда, когда $\Sigma(l) < \infty$ и $N(l) = \infty$. Далее, граница, которая не может быть достигнута за конечное время и из которой диффузия не может начинаться, называется *естественной* (по Феллеру). Граница l является естественной тогда и только тогда, когда $\Sigma(l) = \infty$ и $N(l) = \infty$. Все приведенные характеристики аналогично переносятся и на правую границу r . Пользуясь выражениями (14), (15) и повторяя рассуждения, сделанные в [Karlin, Taylor, 1981] для диффузионного процесса в модели Райта–Фишера, приходим к следующему предложению о классификации границ интервала возможных значений рейтинга одобрения.

Предложение 2. Для рассматриваемого процесса X , в зависимости от значения величин

$$\gamma_l = \frac{a}{b} \frac{1+s}{2} + \frac{c}{b} M_+, \quad (16)$$

$$\gamma_r = \frac{a}{b} \frac{1-s}{2} + \frac{c}{b} M_-, \quad (17)$$

имеет место следующая классификация границ: $l = 0$ и $r = 1$ (таблица 1).

Таблица 1. Классификация по Феллеру границы $i = l, r$ в зависимости от значений параметров модели

Случай	$\Sigma(i)$	$N(i)$	Тип границы i
$\gamma_i = 0$	$< \infty$	$= \infty$	Граница выхода
$\gamma_i \in (0, 1)$	$< \infty$	$< \infty$	Регулярная граница
$\gamma_i \geq 1$	$= \infty$	$< \infty$	Граница входа

Дадим некоторые комментарии по представленной классификации в приложении к исследуемому вопросу. Ситуация, при которой левая граница ($l = 0$) интервала возможных значений рейтинга будет границей выхода, означает, что реалистичным (и достижимым) вариантом развития событий является полная утрата поддержки у сторонников и отсутствие возможности продолжать политическую карьеру. Данная ситуация возможна при абсолютно негативном ($s = -1$) потоке новостей (либо полном их отсутствии ($a = 0$)) вместе с отсутствием «группы поддержки» из числа лидеров мнений ($M_+ = 0$). При наличии хотя бы одного лидера мнений ($M_+ \geq 1$), безусловно поддерживающего данного политика, граница $l = 0$ уже не будет границей выхода. А при наличии $M_+ > \frac{b}{c}$ лиц из числа лидеров мнений, безусловно поддерживающих данного политика, граница $l = 0$ станет границей входа и перестанет быть достижимой из внутренних состояний интервала (l, r) , вне зависимости от тональности информационных сообщений. Ситуация, когда правая граница $r = 1$ будет границей выхода, соответствует тому, что отсутствуют безусловные политические противники ($M_- = 0$), способные оказать влияние на рейтинг одобрения данного политика, а информационные сообщения либо имеют абсолютно положительную тональность ($s = 1$), либо же отсутствуют вообще ($a = 0$).

Безусловно, приведенные выше варианты, при которых границы интервала возможных значений рейтинга являются границами выхода, являются исключительно модельными, поскольку в цифровом публичном пространстве имеет место плюрализм мнений, приводящий к тому, что тональность сообщений никогда не достигает предельных значений ± 1 . Поэтому далее мы будем считать, что $-1 < s < 1$, и предполагать, что границы интервала возможных значений рейтинга являются либо регулярными границами с отражением, либо границами входа.

Обратимся теперь к вопросу отыскания плотности $\pi(x)$ стационарного распределения процесса X , такой, что выполняется равенство $\pi(y) = \int_0^1 \pi(x)p(y, t | x, 0) dx$ для любого $t > 0$. Известно (см. [Karlin, Taylor, 1981]), что выражение для нее может быть представлено через определенные ранее меру шкалы S и плотность меры скорости m :

$$\pi(x) = m(x) (C_1 S(x) + C_2), \tag{18}$$

где константы C_1 и C_2 выбираются таким образом, чтобы $0 \leq \pi(x) < +\infty, x \in [0, 1]$ и $\int_0^1 \pi(x) dx = 1$.

Если $\gamma_r = \frac{a(1-s)}{b} + \frac{c}{b}M_- \geq 1$ или $\gamma_l = \frac{a(1+s)}{b} + \frac{c}{b}M_+ \geq 1$, то интеграл в определении $S(x)$ будет расходящимся, поэтому $C_1 = 0$ и, таким образом, $\pi(x) = C_2 m(x)$:

$$\pi(x) = \frac{\Gamma(\gamma_r + \gamma_l)}{\Gamma(\gamma_r)\Gamma(\gamma_l)} (1-x)^{\gamma_r-1} x^{\gamma_l-1}. \tag{19}$$

Таким образом, стационарным распределением будет бета-распределение $Be(\gamma_l, \gamma_r)$. Если же и $\gamma_l < 1$ и $\gamma_r < 1$, то формула (18) определяет параметрическое семейство распределений. С учетом сделанных замечаний, для того, чтобы плотность стационарного распределения процесса X

определялась в соответствии с формулой (19), достаточно выполнение условия

$$b \leq \frac{1}{2}(a + cM).$$

Рассмотрим инфинитезимальный оператор A случайного процесса X :

$$A = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d}{dx^2} + \mu(x)\frac{d}{dx} = bx(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \left(a\frac{1+s}{2} + cM_+ - x(a+cM)\right)\frac{d}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dM}\left(\frac{df(x)}{dS}\right), \quad (20)$$

заданный в $L_2([0, 1], m)$ — пространстве функций, квадраты которых на отрезке $[0, 1]$ суммируемы с весом $m(x)$. В данном пространстве скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ определяется как

$$\langle u, v \rangle_m = \int_0^1 u(x)v(x)\pi(x)dx.$$

Областью определения оператора A является (см. [McKean, 1956])

$$D(A) = \{f \in L_2([0, 1], m) : Af \in C_b((0, 1)), \text{ граничные условия в точках } 0 \text{ и } 1\},$$

где граничные условия выбираются в зависимости от типа границы: если точка $l = 0$ является границей выхода или же регулярной границей с поглощением, то условие задается как $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$; если же $l = 0$ — это граница входа или регулярная граница с отражением, то усло-

вие формулируется как $\lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{s(x)} = 0$. Аналогично задаются условия для правой границы $r = 1$.

В работах [Elliott, 1955; McKean, 1956] доказано, что в ситуации отсутствия естественных границ у процесса X оператор A имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $0 \geq \lambda_0 > \dots > \lambda_n > \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty$. Пусть ψ_n — собственные функции, отвечающие данным собственным значениям, такие, что $\|\psi_n\|_m^2 = 1$ и

$$A\psi_n = \lambda_n\psi_n, \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Указанные функции будут ортогональными:

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle_m = \delta_{ij}, \quad (22)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Ортогональность функций легко проверяется за счет использования канонического представления оператора A :

$$\begin{aligned} \lambda_i \langle \psi_i, \psi_j \rangle_m &= \lambda_i \int_0^1 \psi_i(x)\psi_j(x)m(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{s(x)} \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right) \psi_j(x)m(x)dx = \\ &= \int_0^1 \psi_i(x) \frac{1}{2} \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{s(x)} \frac{d\psi_j(x)}{dx} \right) m(x)dx = \lambda_j \int_0^1 \psi_i(x)\psi_j(x)m(x)dx = \lambda_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle_m. \end{aligned}$$

внеинтегральные члены при этом обращаются в 0 в силу заданных граничных условий.

Таким образом, при $i \neq j$ функции ψ_i и ψ_j ортогональны друг другу.

Выпишем уравнение для нахождения собственных функций и собственных значений:

$$bx(1-x)\psi_n'' + \left(a \cdot \frac{1+s}{2} + cM_+ - x(a+cM)\right)\psi_n' = \lambda_n\psi_n, \quad (23)$$

а также соответствующие граничные условия:

$$\lim_{x \downarrow 0} \psi'_n(x)x^{\gamma_l} = 0, \tag{24}$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \psi'_n(x)(1-x)^{\gamma_r} = 0. \tag{25}$$

Проделив замену $y = 2x - 1$, $\varphi_n(y) = \psi_n(x)$, преобразуем (23) к виду

$$(1-y^2)\varphi'_n + \left(\frac{a}{b}s + \frac{c}{b}(M_+ - M_-) - y\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}M\right)\right)\varphi'_n - \frac{\lambda_n}{b}\varphi_n = 0. \tag{26}$$

Решением (26) является (см. [Abramowitz, Stegun, 1966]) следующая функция:

$$\begin{aligned} \varphi_n(y) &= P_n^{(\gamma_r-1, \gamma_l-1)}(y), \quad n \geq 0, \\ \lambda_n &= -(bn^2 + (a + cM)n - 1), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{27}$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлен Якоби:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^m,$$

а величины γ_l, γ_r определены как (16) и (17) соответственно. Возвращаясь к исходным переменным, получим $\psi_n(x) = P_n^{\gamma_r-1, \gamma_l-1}(2x - 1)$. Поскольку ψ_n являются непрерывными на отрезке $[0, 1]$ функциями и, по предположению, $\gamma_l > 0$ и $\gamma_r > 0$, то граничные условия (24), (25) очевидным образом выполняются. Для функций $\psi_n(x)$, заданных таким образом, выполнено (см. [Abramowitz, Stegun, 1966]) условие $\int_0^1 (\psi_n(x))^2 m(x) dx = h_n$, где

$$h_n = \frac{1}{2n + \gamma_l + \gamma_r - 1} \frac{\Gamma(n + \gamma_l)\Gamma(n + \gamma_r)}{n! \Gamma(n + \gamma_l + \gamma_r - 1)}.$$

Поэтому для выполнения тождества $\|\psi_n\|^2 = 1$ переопределим ψ_n как

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} P_n^{(\gamma_r-1, \gamma_l-1)}(2x - 1), \quad n \geq 0. \tag{28}$$

Для вывода уравнения для плотности $p(y, t | x, t_0)$ воспользуемся тем, что функция

$$u(x, t) = E(g(X(t)) | X_{t_0} = x) = \int_0^1 g(y)p(y, t | x, t_0)dy, \quad t > t_0, \tag{29}$$

является (см. [Гихман, Скороход, 1965]) решением уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au, \\ u(x, t_0) = g(x), \end{cases} \tag{30}$$

где $g \in L_2([0, 1], m)$ — произвольная непрерывная функция. Разложим в ряд Фурье по семейству собственных функций оператора A данные задачи (30) и ее решение будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\psi_n(x).$$

Подставляя указанное представление функции $u(x, t)$ в (30), получим, что функции $u_n(t)$, $n \geq 0$, являются решениями уравнений

$$\frac{du_n}{dt} = \lambda_n u_n, \quad u_n(t_0) = d_n, \quad n \geq 0,$$

где $d_n = \langle g, \psi_n \rangle_m$. Решение данного уравнения можно записать как

$$u_n(t) = d_n e^{\lambda_n(t-t_0)}, \quad n \geq 0, \quad t \geq t_0.$$

Таким образом, решение уравнения (30) для рассматриваемого нами случая можно записать как

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n(t-t_0)} \psi_n(x) \langle g, \psi_n \rangle_m = \int_0^1 g(y) m(y) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(y) e^{\lambda_n(t-t_0)} dy. \quad (31)$$

Сравнивая правые части (29) и (31), в силу произвольного выбора функции g приходим к следующему утверждению

Предложение 3. При условии, что мощность и тональность информационного воздействия являются фиксированными, т. е. $a_t \equiv a$ и $s_t \equiv s$, плотность переходных вероятностей

$$p(y, t | x, t_0) = \frac{\partial}{\partial y} P(X_t < y | X_{t_0} = x)$$

случайного процесса X , заданного как решение стохастического дифференциального уравнения (11), равна

$$p(y, t | x, t_0) = m(y) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(y) e^{\lambda_n(t-t_0)}. \quad (32)$$

Пользуясь данным выражением для плотности, легко убедиться в том, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(y, t | x, t_0) = \pi(y),$$

причем скорость сходимости к плотности стационарного распределения тем выше, чем больше значение величин b и $a + cM$, входящих в выражение (27) для собственных значений λ_n .

Обратимся теперь к вопросу вычисления условных моментов для процесса X_t , $t \geq 0$. А именно, нас будет интересовать задача вычисления величин вида

$$E[X_T^k | X_0 = x_0], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (33)$$

— условных моментов процесса X в некоторый момент будущего $T \geq 0$, при условии того, что текущая доля сторонников политика известна и равна $x_0 \in [0, 1]$. Для практических приложений наиболее интересны случаи $k = 1$ и $k = 2$, необходимые для расчета среднего значения и дисперсии величины X_T .

Воспользовавшись решением (31) задачи (30) для случая $g(x) = x^k$, получим следующий результат, а также тем, что $\langle x^k, \psi_n(x) \rangle_m = 0$ при $n > k$.

Предложение 4. *k*-й условный момент случайной величины X_t , $t > 0$, может быть вычислен как

$$E[X_t^k | X_0 = x_0] = \sum_{n=0}^k e^{\lambda n t} \psi_n(x_0) \langle x^k, \psi_n(x) \rangle_m. \quad (34)$$

Пользуясь данным результатом, получим, что условное математическое ожидание для процесса X равняется

$$r(x, t) = E[X_t | X_0 = x_0] = r_\infty + e^{-(a+cM)T} (x_0 - r_\infty), \quad (35)$$

где

$$r_\infty = \frac{a\left(\frac{1+s}{2}\right) + cM_+}{a + cM}.$$

При $t \rightarrow +\infty$ имеем $r(x, t) \rightarrow r_\infty$. Таким образом, долгосрочный прогноз рейтинга политического лидера в рамках рассматриваемой модели допускает эвристическую интерпретацию как долю сил $a\left(\frac{1+s}{2}\right) + cM_+$, направленных на рост числа агентов, одобряющих его деятельность, в общем объеме усилий $a + cM$ (см. (5)). Примечательно, что параметр b , отвечающий за межличностное взаимодействие представителей электората, в оценке ожидаемого значения не фигурирует. При $M = 0$ долгосрочный прогноз рейтинга будет равен $\frac{1+s}{2}$. Таким образом, при отсутствии лидеров мнений, являющихся безусловными сторонниками или противниками данного политика, его рейтинг будет однозначно определяться (при $a > 0$) тональностью новостного фона. И соответственно, при отсутствии информационного воздействия, т. е. $a = 0$, рейтинг одобрения будет определяться долей сторонников политика из числа лидеров мнений $\frac{M_+}{M}$.

Рассмотрим некоторые численные примеры, демонстрирующие возможности расчета переходных вероятностей. На графиках (1), (2) и (3) отобразим динамику плотности $p(y, t | x, 0)$ переходной вероятности при различных значениях t . Параметры модели для обоих графиков выбраны следующими: $a = 0.30$, $b = 0.20$, $c = 0.10$, $M_+ = 2$, $M_- = 5$. На всех трех графиках выбрано начальное состояние $x = 0.05$. Однако в первом случае (график (1)) параметр, моделирующий тональность новостей, имеющих отношение к рассматриваемому политику, выбран равным $s = 0$, на графике (2) $s = 0.90$ и на графике (3) изображена динамика плотности переходной вероятности для случая $s = -0.90$. Над каждым графиком изображено среднее значение величины рейтинга одобрения политика, а также ее стандартное отклонение. Таким образом, становится видным влияние мощности и тональности информационного воздействия на долю сторонников политического лидера: разница между математическим ожиданием рейтинга на момент времени $t = 0.3$ в случае информационного фона с тональностью $s = -0.9$ и аналогичным вариантом, но с тональностью $s = 0.9$, составляет 23.9 процентных пункта. Также видно, как с течением времени t плотность переходной вероятности стремится к своему стационарному значению.

Заключение

В представленной работе мы рассмотрели модель формирования рейтинга одобрения политического лидера под влиянием процессов, протекающих в цифровом публичном пространстве, таких как взаимодействие и обмен мнениями между агентами, наличие лидеров мнений, являющихся сторонниками или противниками данного политика, и появление информационных и новостных сообщений с определенной эмоциональной тональностью. Представленная модель дает возможную интерпретацию такого факта, как наличие положительной взаимосвязи (см. [O'Connor, 2010; Cummings et al., 2010]) между числом и тональностью сообщений, относящихся к политическому лидеру, и результатами социологических опросов по выявлению уровня

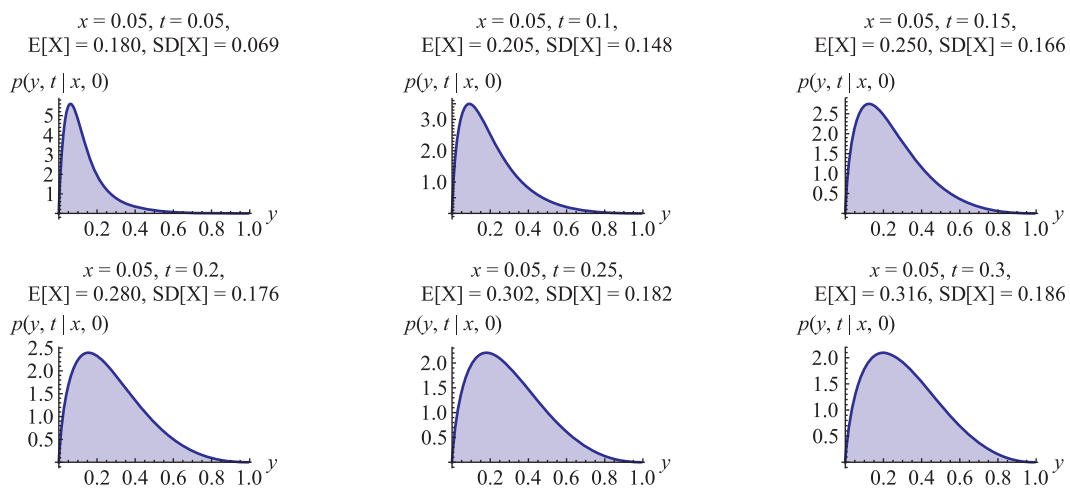


Рис. 1. Плотность переходной вероятности $p(y, t | x, 0)$ при $x = 0.01$ с течением времени t для параметров $a = 0.30, b = 0.20, c = 0.10, M_+ = 2, M_- = 5$. Значение параметра s выбрано равным 0

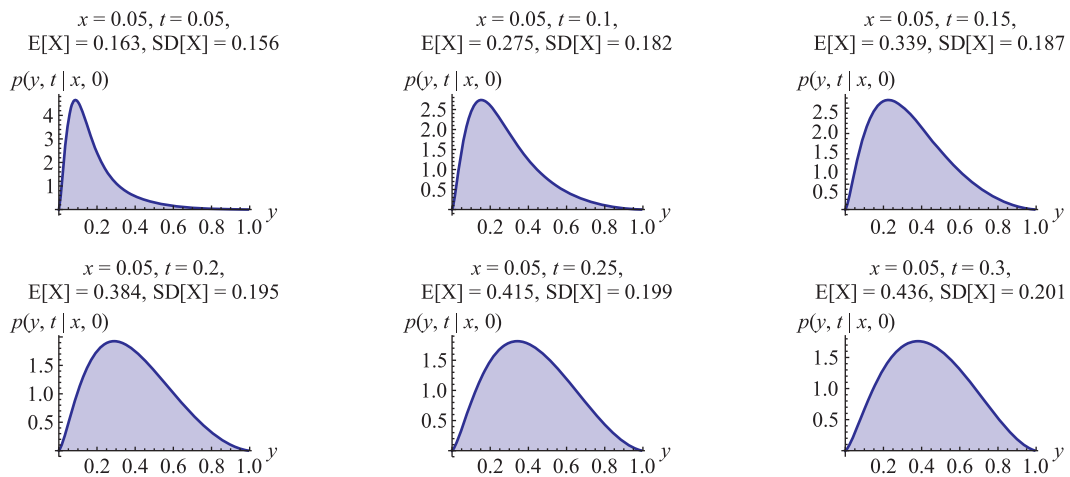


Рис. 2. Плотность переходной вероятности $p(y, t | x, 0)$ при $x = 0.01$ с течением времени t для параметров $a = 0.30, b = 0.20, c = 0.10, M_+ = 2, M_- = 5$. Значение параметра s выбрано равным 0.90

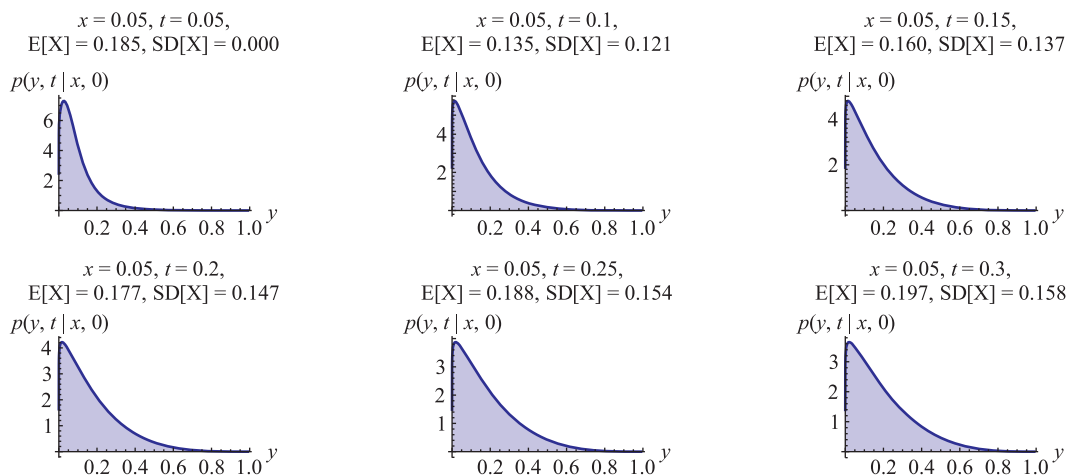


Рис. 3. Плотность переходной вероятности $p(y, t | x, 0)$ при $x = 0.01$ с течением времени t для параметров $a = 0.30, b = 0.20, c = 0.10, M_+ = 2, M_- = 5$. Значение параметра s выбрано равным -0.90

одобрения его деятельности. Различные сочетания и значения параметров a и c , отражающих степень влияния информационного воздействия и позиции лидеров мнений на рейтинги политика, могут объяснять, почему указанная взаимосвязь может как усиливаться, так и ослабевать. Математической основой данной модели является так называемый случайный процесс Якоби. При условии, что параметр, отвечающий за межличностное взаимодействие представителей электората b , не превышает величины $\frac{1}{2}(a+cM)$, единственным стационарным распределением данного процесса будет бета-распределение, параметры которого определяются параметрами модели.

Также исследован характер границ диапазона возможных значений рейтинга одобрения политика. Показано, что граница 0 может быть границей выхода (достигнув ее, невозможно более достигнуть никакого другого состояния) при абсолютно негативном ($s = -1$) потоке новостей (либо полном их отсутствии ($a = 0$)) вместе с отсутствием «группы поддержки» из числа лидеров мнений ($M_+ = 0$). Данная ситуация соответствует варианту завершения политической карьеры в связи с полной утратой какого-либо одобрения у представителей электората. При выполнении неравенства $\min\{M_-, M_+\} > \frac{b}{c}$, то есть при наличии достаточно большого числа лидеров мнений, как сторонников, так и противников данного политика, границы $l = 0$, $r = 1$ будут границами входа и перестанут быть достижимыми из внутренних состояний интервала (l, r) , вне зависимости от тональности информационных сообщений. Таким образом, при выполнении указанного условия достижение консенсуса в мнениях, относительно данного политического лидера, будет невозможным. Далее, в работе представлены формулы расчета значений переходных вероятностей и на условном примере продемонстрировано то, насколько тональность новостных сообщений способна повлиять на распределение возможных значений рейтинга одобрения политического лидера.

Применение предложенной модели на практике позволит дать численную оценку того, как изменение тональности и числа сообщений, относящихся к данному политику, способно повлиять на рейтинги его одобрения. Использование аппарата теории случайных процессов открывает возможности по проведению симуляций различных вариантов развития событий с использованием методов численного решения уравнения (11). Однако заметим, что практическое применение полученных результатов ставит отдельные и масштабные задачи разработки эффективного и релевантного для исследуемой области метода анализа текстов, отбора исследуемых цифровых ресурсов и регулярного мониторинга сообщений на них. Также подчеркнем, что в текущем варианте представленной модели мы рассматривали зависимости рейтинга одобрения политика от параметров информационного фона, считая последний заданным. В действительности имеет место и обратная зависимость — зависимость таких характеристик, как тональность сообщений от показателей рейтинга. Исследование данных взаимосвязей может служить развитием представленной статьи.

Список литературы (References)

- Бородин А. Н. Случайные процессы. — СПб.: Лань, 2013.
Borodin Sluchaynye protsessi [Random processes]. — St. Petersburg: Lan', 2013 (in Russian).
- Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
Gikhman I. I., Skorokhod A. V. Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov [Introduction to the theory of random processes]. — Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
- Михайлов А. П., Маревцева Н. А. Модели информационной борьбы // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 10. — С. 19–32.
Mikhailov A. P., Marevtseva N. A. Models of information warfare // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4, No. 3. — P. 251–259.

- Михайлов А. П. и др.* Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 65–74.
Mikhailov A. P. et al. Development of a model of information dissemination in society // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2014. — Vol. 26, No. 3. — P. 65–74 (in Russian).
- Abramowitz M., Stegun I. (ed.)* Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York, USA: Dover Publications, Inc., 1964.
- Alexa Internet — The top 500 sites on the web [Электронный ресурс]: <https://www.alexa.com/topsites/> (дата обращения: 15.07.2019).
Alexa Internet — The top 500 sites on the web [Electronic resource]: <https://www.alexa.com/topsites/> (accessed 15.07.2019).
- Alfarano S., Lux T., Wagner F.* Time variation of higher moments in a financial market with heterogeneous agents: An analytical approach // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2008. — Vol. 32, No. 1. — P. 101–136.
- Barberá P., Rivero G.* Understanding the political representativeness of Twitter users // Social Science Computer Review. — 2015. — Vol. 33, No. 6. — P. 712–729.
- Bhattacharya R. N., Waymire E. C.* Stochastic processes with applications. — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- Bollen J., Mao H., Pepe A.* Modeling public mood and emotion: Twitter sentiment and socio-economic phenomena // Fifth International AAAI Conference on Weblogs and Social Media. — 2011.
- Chen C. et al.* Content-based influence modeling for opinion behavior prediction // Proceedings of COLING 2016, the 26th International Conference on Computational Linguistics: Technical Papers. — 2016. — P. 2207–2216.
- Carro A., Toral R., San Miguel M.* Markets, herding and response to external information // PloS one. — 2015. — Vol. 10, No. 7.
- Cummings D., Oh H., Wang N.* Who needs polls? Gauging public opinion from Twitter data // Unpublished manuscript. — 2010.
- De A. et al.* Learning a linear influence model from transient opinion dynamics // Proceedings of the 23rd ACM International Conference on Conference on Information and Knowledge Management. — ACM, 2014. — P. 401–410.
- Delbaen F., Shirakawa H.* An interest rate model with upper and lower bounds // Asia-Pacific Financial Markets. — 2002. — Vol. 9, No. 3. — P. 191–209.
- Elliott J.* Eigenfunction expansions associated with singular differential operators // Transactions of the American Mathematical Society. — 1955. — Vol. 78, No. 2. — P. 406–425.
- Föllmer H., Schweizer M.* A microeconomic approach to diffusion models for stock prices // Mathematical Finance. — 1993. — Vol. 3, No. 1. — P. 1–23.
- Gardiner C. W. et al.* Handbook of stochastic methods. — Springer, 1985.
- Gayo-Avello D.* I Wanted to Predict Elections with Twitter and all I got was this Lousy Paper — A Balanced Survey on Election Prediction using Twitter Data // arXiv preprint arXiv:1204.6441. — 2012.
- Jedrzejewski A., Sznajd-Weron K.* Impact of memory on opinion dynamics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2018. — Vol. 505. — P. 306–315.
- Karlin S., Taylor H. E.* A second course in stochastic processes. — Elsevier, 1993.
- Kirman A.* Ants, rationality, and recruitment // The Quarterly Journal of Economics. — 1993. — Vol. 108, No. 1. — P. 137–156.

- Kononovicius A., Gontis V.* Three-state herding model of the financial markets // EPL (Europhysics Letters). — 2013. — Vol. 101, No. 2. — P. 28001.
- Kononovicius A., Gontis V.* Control of the socio-economic systems using herding interactions // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2014. — Vol. 405. — P. 80–84.
- McKean H.P.* Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. — 1956. — Vol. 82, No. 2. — P. 519–548.
- Mälntylä M. V., Graziotin D., Kuutila M.* The evolution of sentiment analysis — A review of research topics, venues, and top cited papers // Computer Science Review. — 2018. — Vol. 27. — P. 16–32.
- Nakov P. et al.* SemEval-2016 task 4: Sentiment analysis in Twitter // Proceedings of the 10th international workshop on semantic evaluation (semeval-2016). — 2016. — P. 1–18.
- Øksendal B.* Stochastic differential equations. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
- O'Connor B. et al.* From tweets to polls: Linking text sentiment to public opinion time series // Fourth International AAAI Conference on Weblogs and Social Media. — 2010.
- Peralta A.F. et al.* Analytical and numerical study of the non-linear noisy voter model on complex networks // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — Vol. 28, No. 7.
- SimilarWeb — Top Websites Ranking [Электронный ресурс]: <https://www.similarweb.com/top-websites/> (дата обращения: 15.07.2019).
- SimilarWeb — Top Websites Ranking [Electronic resource]: <https://www.similarweb.com/top-websites/> (accessed 15.07.2019).
- Stroock D. W., Varadhan S. S.* Multidimensional diffusion processes. — Springer, 2007.
- Van Kampen N. G.* Stochastic processes in physics and chemistry. Vol. 1. — Elsevier, 1992.

УДК: 519.8

Математическая модель дифференциации общества с социальной напряженностью

В. Г. Цибулин^{1,a}, З. Х. Хосаева^{2,b}

¹Южный федеральный университет,
Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 105/42

²Владикавказский научный центр РАН,
Россия, 362027, РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22

E-mail: ^a vgcibulin@sfedu.ru, ^b hzaiac83@mail.ru

Получено 04.09.2018, после доработки — 27.08.2019.

Принято к публикации 30.08.2019.

В статье моделируется развитие во времени многопартийной политической системы с учетом социальной напряженности. Предлагается система нелинейных дифференциальных уравнений относительно долей приверженцев партий и дополнительной скалярной переменной, характеризующей величину напряженности в обществе. Изменение доли каждой партии пропорционально текущему значению, умноженному на коэффициент, который состоит из притока беспартийных, перетоков членов из конкурирующих партий и убыли вследствие роста социальной напряженности. Напряженность прирастает пропорционально долям партий и снижается при их отсутствии. Число партий фиксировано, в модели отсутствуют механизмы объединения существующих или рождения новых партий.

Для исследования модели использован подход, основанный на выделении условий, при которых данная задача относится к классу косимметричных систем. Это позволяет проанализировать мультистабильность возможных динамических процессов и их разрушение при нарушении косимметрии. Существование косимметрии для системы дифференциальных уравнений обеспечивается наличием дополнительных связей на параметры, и при этом возможно возникновение непрерывных семейств стационарных и нестационарных решений. Для анализа сценариев нарушения косимметрии применяется подход на основе селективной функции. В случае с одной политической партией мультистабильности нет, каждому набору параметров соответствует только одно устойчивое решение. Для системы из двух партий показано, что возможны два семейства равновесий, а также семейство предельных циклов. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие разрушение семейств и реализацию различных сценариев, приводящих к стабилизации политической системы с сосуществованием обеих партий или к исчезновению одной из партий, когда часть населения перестает поддерживать одну из партий и становится безразличной.

Рассматриваемая модель может быть использована для прогнозирования межпартийной борьбы во время предвыборной кампании. В этом случае необходимо учитывать зависимость коэффициентов системы от времени.

Ключевые слова: моделирование социума, напряженность, дифференциальные уравнения, косимметрия, семейства равновесий, предельные циклы, мультистабильность

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 17-31-50050, 18-01-00453.

Авторы благодарны Е. С. Каменецкому и рецензентам за полезные замечания и стимулирующие предложения.

UDC: 519.8

Mathematical model of political differentiation under social tension

V. G. Tsybulin^{1,a}, Z. H. Khosaeva^{2,b}

¹Southern Federal University,

105/142 Bolshaya Sadovaya st., Rostov-on-Don, 344006, Russia

²Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
22 Markusa st., Vladikavkaz, 362027, Russia

E-mail: ^a vgcibulin@sfedu.ru, ^b hzaiac83@mail.ru

Received 04.09.2018, after completion — 27.08.2019.

Accepted for publication 30.08.2019.

We consider a model of the dynamics a political system of several parties, accompanied and controlled by the growth of social tension. A system of nonlinear ordinary differential equations is proposed with respect to fractions and an additional scalar variable characterizing the magnitude of tension in society the change of each party is proportional to the current value multiplied by a coefficient that consists of an influx of novice, a flow from competing parties, and a loss due to the growth of social tension. The change in tension is made up of party contributions and own relaxation. The number of parties is fixed, there are no mechanisms in the model for combining existing or the birth of new parties.

To study of possible scenarios of the dynamic processes of the model we derive an approach based on the selection of conditions under which this problem belongs to the class of cosymmetric systems. For the case of two parties, it is shown that in the system under consideration may have two families of equilibria, as well as a family of limit cycles. The existence of cosymmetry for a system of differential equations is ensured by the presence of additional constraints on the parameters, and in this case, the emergence of continuous families of stationary and nonstationary solutions is possible. To analyze the scenarios of cosymmetry breaking, an approach based on the selective function is applied. In the case of one political party, there is no multistability, one stable solution corresponds to each set of parameters. For the case of two parties, it is shown that in the system under consideration may have two families of equilibria, as well as a family of limit cycles. The results of numerical experiments demonstrating the destruction of the families and the implementation of various scenarios leading to the stabilization of the political system with the coexistence of both parties or to the disappearance of one of the parties, when part of the population ceases to support one of the parties and becomes indifferent are presented.

This model can be used to predict the inter-party struggle during the election campaign. In this case necessary to take into account the dependence of the coefficients of the system on time.

Keywords: multistability, limit cycles, families of equilibria, socium simulation, differential equations, cosymmetry

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 999–1012 (Russian).

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research. Grants Nos. 17-31-50050, 18-01-00453.

The authors are grateful to E. S. Kamenetsky and unknown referees for helpful comments and stimulative suggestions.

Введение

Прогнозирование политической динамики и возможных сценариев развития общества является актуальной, но трудной задачей. Глобализация и открытость современного общества делают его достаточно нестабильным и, в силу этого, малопредсказуемым. С другой стороны, появляются новые инструменты воздействия на различные социальные группы. В этих условиях математическое моделирование может внести существенный вклад в понимание социальных процессов и выбор реализуемых стратегий.

Моделирование общественных процессов требует учета многих факторов и содержит большое число параметров, определение которых априори не точно [Comissiong, Sooknanan, 2018]. Это связано с малой предсказуемостью человеческого фактора, сложностью получения достоверных данных, трудностью верификации полученных результатов. Для анализа современного состояния общества и прогнозирования его динамики естественно использовать различные математические методы [Самарский, Михайлов, 2001]. Используемые при этом модели обычно бывают динамическими, имитационными и теоретико-игровыми [Шведовский, Петрова, 2001; Александров, Ахременко, 2011; Малинецкий, Потапов, 1998; Карадже, 2012].

Построение математических моделей требует выдвижения гипотез о функциональной зависимости между интересующей исследователя величиной и факторами, которые влияют на ее изменение. Исследование полученных математических структур может позволить предсказать возможный характер поведения социальной системы. Это обуславливает применение динамических моделей для анализа возможного поведения социальной системы и проведения вычислительных экспериментов для уточнения положенных в основу модели гипотез.

В последнее время при прогнозировании социальных явлений активно применяются модели, получившие распространение при описании экологических сценариев [Misra, 2012; Bosse et al., 2013; Reding et al., 2016; Nyabadza et al., 2016; Михайлов и др., 2017; Dominioni et al., 2018; Berestycki et al., 2019; Comissiong, Sooknanan, 2018]. Так, в [Misra, 2012] анализ динамики двухпартийной системы проводится на основе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе близкой модели в [Nyabadza et al., 2016] исследуются процессы «переключения», описывающие изменение партийных представительств путем введения функций для переходов. Модель информационного противоборства в социуме рассматривается на основе системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической разрывной правой частью [Михайлов и др., 2017]. Неавтономная модель Лотки–Вольтерры используется в [Dominioni et al., 2018] для изучения и прогнозирования взаимодействия расовых групп. В [Berestycki et al., 2019] исследуется система дифференциальных уравнений с запаздыванием для моделирования динамики социальных возмущений, в которой анализируется уровень активности и социального напряжения. В [Вайдлих, 2005] обсуждаются подходы к моделированию социальных групп с учетом групповых целей и идеологий. Отмечается, что имеется большое число факторов, которые трудно оценить количественно, и это затрудняет интерпретацию решений.

Интерес представляет построение и анализ моделей, допускающих некоторые «идеальные» сценарии при определенных соотношениях на параметры с последующим изучением «реальных» сценариев при возмущениях параметров (отклонениях от идеальных ситуаций). По мнению авторов, для исследования таких моделей эффективным является использование теории косимметрии [Юдович, 1991; Yudovich, 1995], которая была построена В. И. Юдовичем для объяснения одновременного существования бесконечного числа стационарных режимов в задаче фильтрационной конвекции. Согласно [Юдович, 1991] косимметрией дифференциального уравнения $\dot{u} = F(u)$, $u \in R^n$ называется вектор, ортогональный F , т. е. $(L, F) = 0$. Если система дифференциальных уравнений имеет равновесие u_* и $L(u_*) \neq 0$, то при отсутствии дополнительных вырождений равновесие u_* принадлежит семейству равновесий. В отличие от задачи с непрерывной симметрией, в которой стационарные решения из семейства обладают одинаковым спектром

устойчивости, в случае косимметрии возникают семейства решений с индивидуальным спектром устойчивости.

Существование косимметрии для системы дифференциальных уравнений обеспечивается обычно наличием дополнительных связей на параметры системы, и при этом возможно возникновение непрерывных семейств стационарных или нестационарных решений. Системы с косимметрией демонстрируют мультистабильность с сосуществованием равновесий и колебательных режимов. Такие сценарии возникают, например, в задачах динамики популяций [Frischmuth et al., 2011; Епифанов, Цибулин, 2017; Budyansky et al., 2019]. Далее для анализа сценариев нарушения косимметрии и распада семейства решений применяется подход на основе селективной функции [Юдович, 2004].

Математическая модель стратификации общества

Рассмотрим модель развития во времени t политической системы, состоящей из n групп или партий. Пусть $u_i(t)$ — доля i -й партии (группы), $u_0(t)$ — доля «безразличных» (партийно неопределившихся) граждан, так что

$$\sum_{i=0}^n u_i = 1,$$

Считается, что изменение каждой партии пропорционально произведению ее текущего значения (доли населения) и множителя, учитывающего сопутствующие факторы:

$$\frac{du_i}{dt} = u_i \left[\alpha_i f(u_0) + \sum_{j \neq i} \mu_{ij} u_j - \beta_i v \right]. \quad (1)$$

Функция $f(u_0)$ характеризует прирост за счет людей, не вовлеченных в партии, α_i — соответствующий параметр роста. Слагаемые с коэффициентами μ_{ij} позволяют учесть межпартийные перетоки. Последнее слагаемое характеризует изменение доли партии за счет социальной напряженности $v(t)$.

В качестве $f(u_0)$ могут быть использованы различные функциональные зависимости, далее в основном рассматривается квадратичный закон

$$f(u_0) = u_0(1 - u_0), \quad u_0 = 1 - \sum_{i=1}^n u_i, \quad (2)$$

описывающий прекращение поступления новых членов при отсутствии беспартийных ($u_0 = 0$) и трудное начало организации партий ($u_0 = 1$).

Для коэффициентов μ_{ij} , используемых при описании межпартийных перетоков, принимаются следующие условия:

$$\mu_{ij} = -\mu_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Это условие означает, что при нулевой напряженности ($v = 0$) и нулевом числе «безразличных» ($u_0 = 0$) сумма партийных долей равна единице в каждый момент времени. Предполагается, что доля переходящих из одной партии в другую пропорциональна численностям партий. Аналогичный член встречается в модели Лотки–Вольтерры, и его вид связан с контактами между «хищником» и «жертвой».

Слагаемые с коэффициентами β_i учитывают снижение или увеличение численности партии при росте напряженности. Модель допускает, что в результате роста напряженности (например, усиление межпартийной борьбы) часть населения перестает поддерживать соответствующую партию и становится безразличной.

Изменение напряженности регулируется множителем, включающим коэффициент релаксации γ , и слагаемыми прироста, который пропорционален весу партий с параметрами δ_i :

$$\frac{dv}{dt} = v \left[-\gamma + \sum_{j=1}^n \delta_j u_j \right]. \quad (4)$$

Рассматривается модель, в которой учитывается, что партии по-разному влияют на рост напряженности. Принято, что напряженности нет при индифферентности населения, ее спад возможен, если большинство общества входит в партию, слабо подпитывающую социальное напряжение.

В общем случае параметры роста, релаксации и другие могут быть функциями времени, тогда система (1)–(4) будет состоять из $n + 1$ дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

1. Система для одной партии

При $n = 1$ заменой переменных ($\tau = t\alpha_1$) и $z = v\beta_1/\alpha_1$ модель (1), (4) приводится к системе второго порядка относительно доли единственной партии $x = u_1$, напряженности z с двумя параметрами c, d :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x[f(1-x) - z], \\ \frac{dz}{d\tau} &= z[-c + dx], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$c = \frac{\gamma}{\alpha_1}, \quad d = \frac{\delta_1}{\alpha_1}.$$

Система (5) при $f(1-x) = 1$ сводится к модели Лотки–Вольтерры, с периодическими колебаниями численности партии («жертва») и напряженности («хищник»). Имеется семейство заполняющих фазовое пространство интегральных кривых; амплитуда колебаний зависит от начального уровня напряженности и численности партии.

В случае $f(1-x) = 1-x$ получается система, для которой в диапазоне $c > d$ устойчиво стационарное решение $x = 1, z = 0$ (все население в одной партии, полная мобилизованность, напряженности нет). При $c \leq d$ устойчиво стационарное решение $x = c/d, z = 1 - c/d$, что соответствует постоянным уровням партийной вовлеченности и напряженности («застой»). Других равновесий или периодических решений нет.

Для $f(1-x) = x(1-x)$ получается модель, для которой в диапазоне $c \geq d$ устойчиво стационарное решение $x = 1, z = 0$ (все население в одной партии, полная мобилизованность, напряженности нет). В диапазоне $d/2 < c < d$ устойчиво стационарное решение $x = c, z = a(1-c)$, что соответствует большому партийному представительству и постоянному уровню напряженности. При $c < d/2$ реализуются периодические колебания.

Таким образом, модель с одной партией не допускает мультстабильности, каждому набору параметров соответствует только одно устойчивое решение.

2. Система для двух партий

При $n = 2$ заменой времени ($\tau = t\alpha_1$) и напряженности $z = v\beta_1/\alpha_1$ можно уменьшить число параметров. В результате получается система трех уравнений относительно долей партий $x = u_1,$

$y = u_2$ и z :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= x[f(1-x-y) + my - z], & f(w) &= w(1-w), \\ \frac{dy}{d\tau} &= y[af(1-x-y) - mx - bz], \\ \frac{dz}{d\tau} &= z[-c + d_1x + d_2y],\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$m = \frac{\mu_1}{\alpha_1}, \quad a = \frac{\alpha_1}{\alpha_1}, \quad b = \frac{\beta_1}{\beta_1}, \quad c = \frac{\gamma}{\alpha_1}, \quad d_1 = \frac{\delta_1}{\alpha_1}, \quad d_2 = \frac{\delta_2}{\alpha_1}.$$

Система (6) имеет равновесие, отвечающее отсутствию партий и нулевой напряженности:

$$x = y = z = 0.\tag{7}$$

Анализ показывает, что это равновесие неустойчиво и при ненулевых начальных данных для x и/или y формируется политическая партийная структура.

Мультистабильность — сосуществование решений — получается при отсутствии перетоков ($m = 0$), когда имеется континуальное семейство равновесий:

$$x + y = 1, \quad z = 0,\tag{8}$$

связанное с наличием косимметрии на инвариантном подпространстве $z = 0$:

$$L = (ay, -x, 0).\tag{9}$$

Это семейство содержит решения

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0\tag{10}$$

и

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0,\tag{11}$$

которые являются равновесиями и при ненулевых значениях параметра интенсивности перетока m . Этому соответствует ситуация, когда все население состоит в одной партии и напряженность равна нулю.

Устойчивость равновесий в семействе равновесий (8) (нулевой уровень напряженности) определяется собственными числами матрицы линеаризации:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -a(1-x) - x, \quad \sigma_3 = -c + d_1x + d_2(1-x).$$

Нулевое значение σ_1 соответствует направлению вдоль непрерывного семейства равновесий. Остальные два собственных числа зависят от континуального номера равновесия на семействе $x \in [0,1]$, при этом $\sigma_2 < 0$. Если коэффициенты удовлетворяют неравенствам $c < d_2 - a$, $d_2 < c < 1 + d_1$, то при любых допустимых значениях $0 \leq x \leq 1$ все равновесия семейства будут устойчивы. При $a = 1$ и $d_1 = d_2$ спектр устойчивости членов семейства одинаков. Это соответствует одинаковому воздействию обеих партий на власть.

Если перетоков нет ($m = 0$) и выполнено условие $a = b$, то у системы (6) также имеется семейство равновесий

$$d_1x + d_2y = c, \quad z = f(1-x-y),\tag{12}$$

вызванное существованием косимметрии (9).

В случае ненулевых m семейство (12) разрушается, но остаются равновесия, отвечающие ситуации выживания только одной партии при стационарном уровне напряженности.

$$x = \frac{c}{d_1}, \quad z = f\left(1 - \frac{c}{d_1}\right) \tag{13}$$

и

$$y = \frac{c}{d_3}, \quad z = \frac{a}{b}f\left(1 - \frac{c}{d_2}\right). \tag{14}$$

Поскольку при $m = 0$ и $\delta = 0$ ($b = a$) система является косимметричной, то в зависимости от начальных данных могут реализоваться различные сценарии дифференциации партий. На рис. 1, 2 представлены графики зависимости от времени долей партий x , y и напряженности z при следующих значениях параметров: $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$. Начальные значения для y и z были фиксированы, менялась начальная величина x .

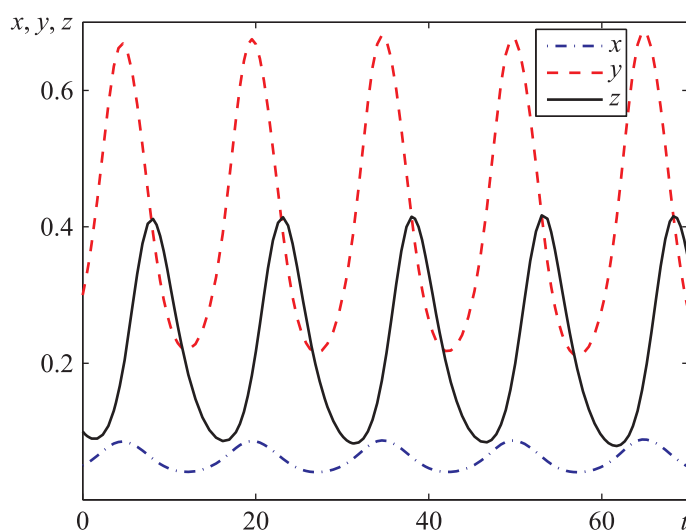


Рис. 1. Графики зависимости от времени долей партий x , y и напряженности z для решения из семейства предельных циклов; начальные данные: $x(0) = 0.05$, $y(0) = 0.3$, $z(0) = 0.1$; параметры: $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$

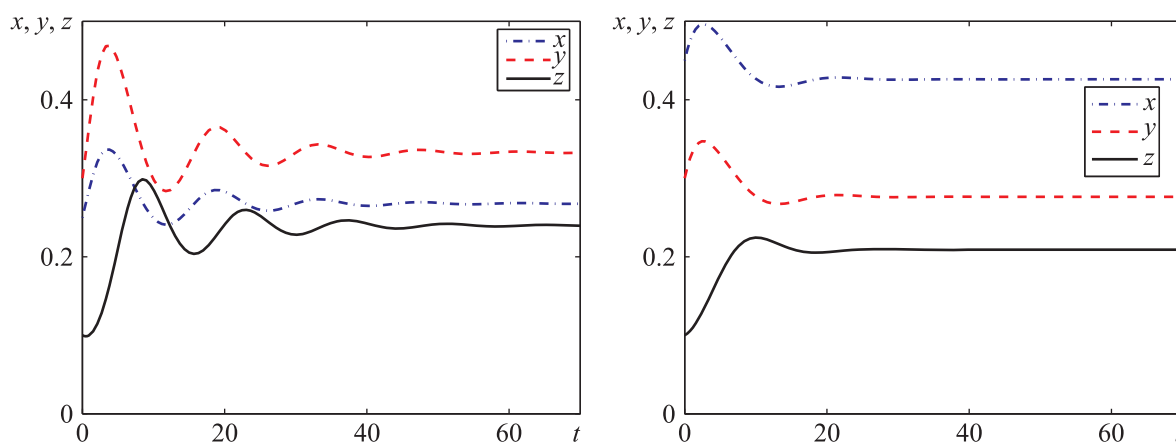


Рис. 2. Установление к равновесиям семейства (12) для различных начальных $x(0) = 0.25$ (слева), $x(0) = 0.45$ (справа); $y(0) = 0.3$, $z(0) = 0.1$

При малых стартовых долях партии x формируются предельные циклы (см., например, рис. 1), когда периодически меняются доли партий и уровень напряженности. Видно, что изменение долей партий x и y синхронизированы, а рост напряженности следует за достижением партийных максимумов. За этим происходит снижение партийных долей и увеличение числа беспартийных.

Для начальных значений x и y из некоторого бассейна также в результате установления происходит колебательный выход на стационарные режимы, принадлежащие семейству (12).

При малых начальных y , z и больших значениях x происходит снижение напряженности до нуля и происходит формирование стационарного состояния с преобладанием партии x , то есть реализуется одно из равновесий семейства (8).

Фазовые портреты трех циклов из семейства колебательных режимов приведены на рис. 3. Увеличение амплитуды колебаний отвечает уменьшению доли партии x .

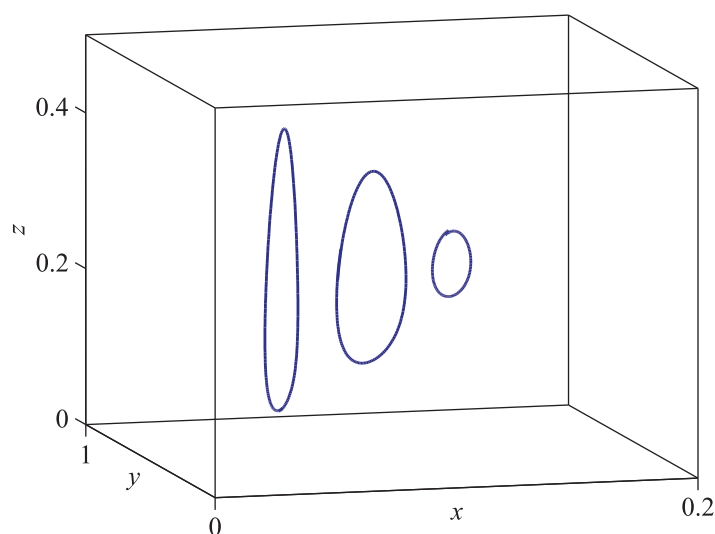


Рис. 3. Три предельных цикла из семейства; $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$

3. Решения при возможности партийных перетоков

Для исследования разрушения семейств равновесий используем построение косимметричного дефекта и селективной функции [Юдович, 2004]. При ненулевых перетоках ($m \neq 0$) получаем косимметричный дефект (произведение векторов правой части системы и косимметрии):

$$D = xy [m(ay + x) + (a - b)z]. \quad (15)$$

Для семейства (8) в качестве параметра выбирался x : тогда $y = 1 - x$, и из (15) получаем селективную функцию

$$S(x) = mx(1 - x)(a - ax + x). \quad (16)$$

Наличие перетоков приводит к тому, что при $a \neq 1$ селективная функция имеет три корня: два совпадают с равновесиями (10) и (11), соответствующими победе одной из партий при нулевой напряженности. Третье решение —

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = -\frac{1}{a-1}, \quad z = 0,$$

— не имеет смысла, так как дает численности партий разных знаков. Таким образом, при наличии партийных перетоков, независимо от их направления ($m \neq 0$), косимметрия разрушается.

Подстановкой параметрического представления семейства (12) —

$$y = \frac{c - d_1 x}{d_2}, \quad z = f(1 - x - y), \quad x \in \left[0, \frac{c}{d_1}\right],$$

— в косимметричный дефект (15) получается селективное уравнение относительно x . Его решениями являются $x = 0$ и $x = c/d_1$, а кроме того, возможно решение с ненулевыми x, y, z .

При фиксированных параметрах $a = 1.5, c = 0.6, d_1 = 0.5, d_2 = 1.4$ динамика системы анализировалась в зависимости от параметров m и $\delta = b - a$. На рис. 4 дана карта для параметров $m, \delta = b - a$. Цифрами отмечены некоторые значения, при которых реализуются различные режимы. Пунктирные линии соответствуют значениям параметров, при которых система является косимметричной: $m = 0$ и $\delta = 0$ ($b = a$). Между сплошной кривой и прямой $m = 0$ находится область значений параметров, при которых существуют равновесия с ненулевыми координатами x, y, z , т.е. имеется стационарное состояние с ненулевыми численностями обеих партий и напряженностью. Эти равновесия устойчивы при $m < 0$ и неустойчивы при $m > 0$. Например, цифре 2 ($m = -0.06, \delta = 0.3$) отвечает равновесие с координатами $(0.4936, 0.2523, 0.1744)$ и спектром устойчивости $(-0.0248, -0.2020 \pm i0.3189)$, а цифре 5 ($m = 0.08, \delta = -0.3$) отвечает равновесие $(0.4426, 0.2705, 0.2262)$ со спектром $(0.0290, [-0.1953 \pm i0.3590])$.

Для значений параметров из области, помеченной цифрой 5, наблюдается мультистабильность — в зависимости от начальных данных происходит установление либо к предельному циклу (см. рис. 5, слева), либо к устойчивому равновесию (рис. 5, справа). В эксперименте менялось начальное значение доли партии x добавлением ε : положительное ε отвечало единовременному увеличению партии x , а отрицательное — снижению. Это можно интерпретировать как возможность управления сценариями развития политической системы.

В том случае, когда значения параметров $m, \delta = b - a$ брались вне области 5, устойчивым оказывался один режим. Для значений параметров из области 6 (справа от 5) получалось равновесие $x = 1, y = z = 0$ — монополия одной партии. При отрицательных m реализовывался предельный цикл на плоскости $x = 0$ (колебания численности партии y и напряженности z).

При выходе параметров за область, помеченную цифрой 2, происходит трансформация устойчивого равновесия, отвечающего сосуществованию обеих партий с ненулевой напряженностью. Для параметров из области 1 получается предельный цикл на плоскости $x = 0$. На рис. 6 показано, что вне зависимости от начального возмущения численности партии x происходит

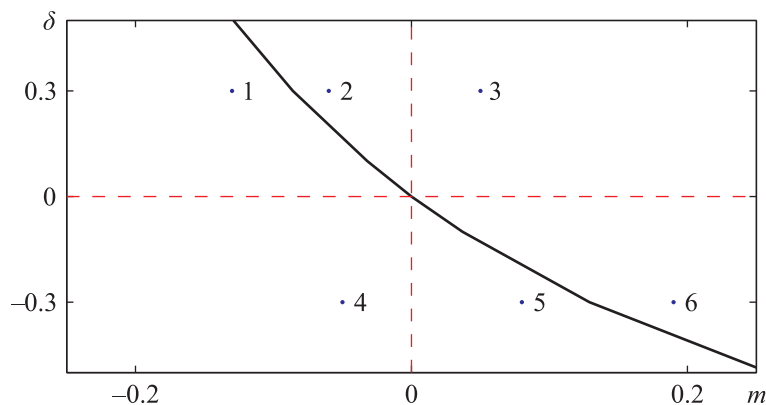


Рис. 4. Области реализации различных решений системы в зависимости от коэффициента интенсивности перетоков m и и разности параметров роста $\delta = b - a$, линии косимметрии (пунктир); 1, 4 — предельный цикл при отсутствии партии x ; 3, 6 — стационарное решение $x = 1$; 2 — равновесие с ненулевыми напряженностью и долями партий; 5 — реализация предельного цикла или равновесия в зависимости от начальных данных

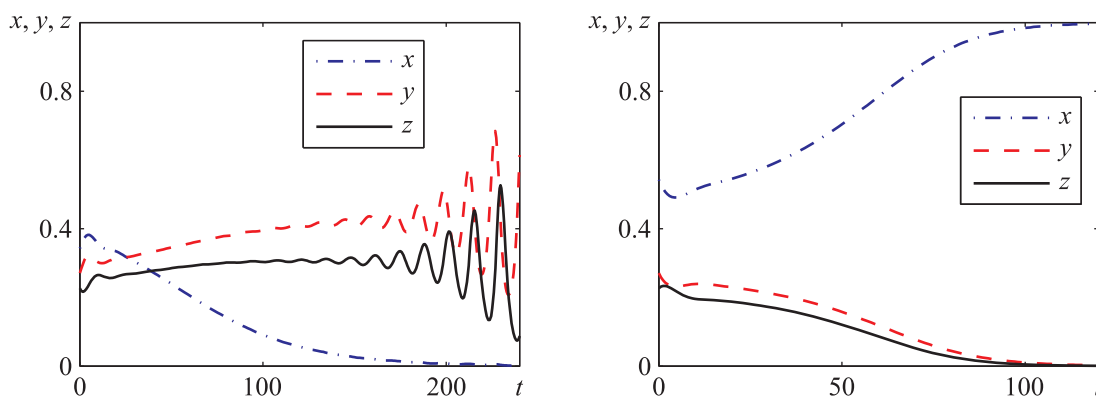


Рис. 5. Установление к предельному циклу системы в области мультистабильности (слева, $\varepsilon = -0.1$) и равновесию в этой же области (справа, $\varepsilon = 0.1$); в зависимости от начальных данных $m = 0.08$, $\delta = -0.3$, $x(0) = 0.4426 + \varepsilon$, $y(0) = 0.2705$, $z(0) = 0.2262$

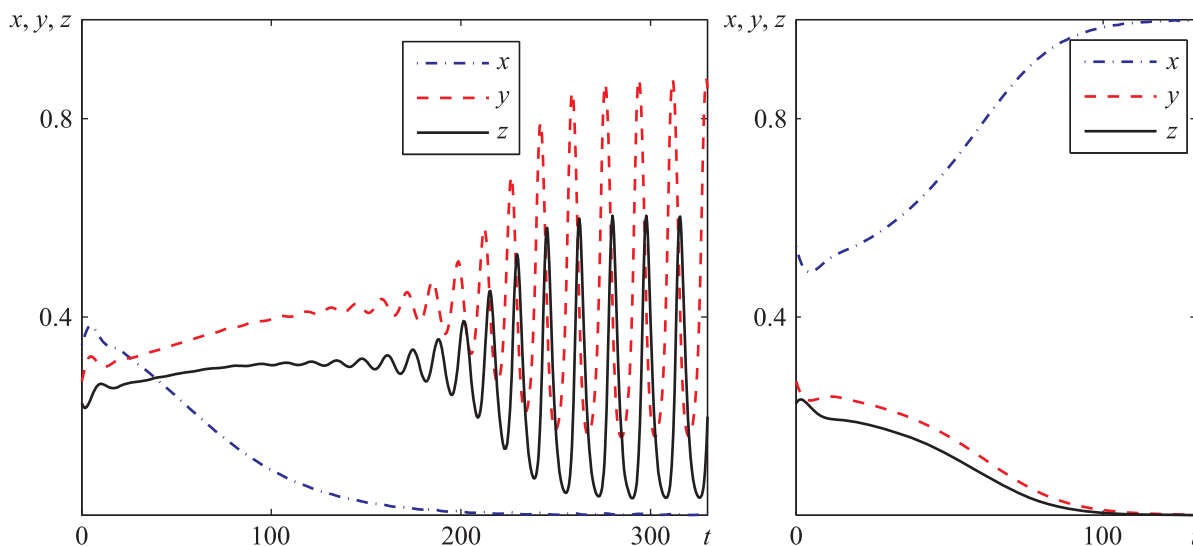


Рис. 6. Установление к предельному циклу системы вне области мультистабильности: $\varepsilon = -0.1$ (слева) и $\varepsilon = 0.1$ (справа); $m = -0.16$, $\delta = 0.3$, $x(0) = 0.4936 + \varepsilon$, $y(0) = 0.2523$, $z(0) = 0.1744$

установление, приводящее к колебаниям численности партии y и напряженности z . Одновременное увеличение доли партии x только отодвигает время ее гибели. Для других начальных данных установление может завершиться достаточно быстро. Из рис. 6 видно, что вначале траектория приближается к неустойчивому равновесию (фокусу), а затем уже происходит выход на периодические колебания доли партии $y(t)$ и напряженности $z(t)$. Здесь имеет место нестационарный процесс противоборства — одновременного существования двух партий, которое завершается исчезновением партии, из которой идет отток членов.

При положительных перетоках в m (область 3) реализуется равновесие, отвечающее монополии партии x . Так как $d_2 > d_1$, то переток из второй партии приводит к уменьшению основной базы напряженности, что в результате приводит к ликвидации самой партии y .

На рис. 7 представлены траектории, реализующиеся при разрушении семейства предельных циклов в случае ненулевых m . В зависимости от направления перетока (знак m) реализуется либо стремление к предельному циклу с угасанием партии x , либо выход на стационарное решение $x = 1$ и **нулевой напряженностью**. Из рис. 7 видно, что колебательный процесс проходит возле оболочки, которая может быть получена объединением траекторий циклов из семейства.

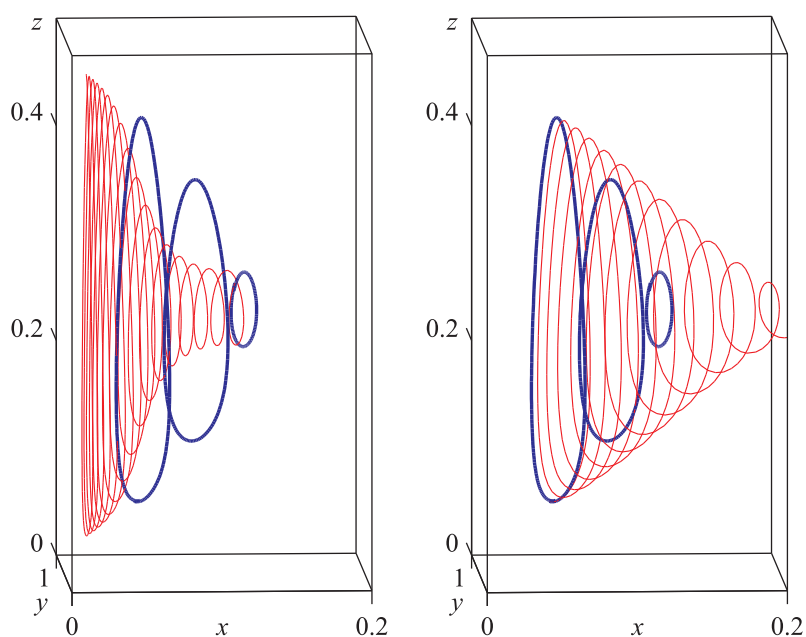


Рис. 7. Разрушение семейства предельных циклов при $m = 0.02$ (слева) и $m = 0.02$ (справа); $a = 1.5$, $c = 0.6$, $d_1 = 0.5$, $d_2 = 1.4$

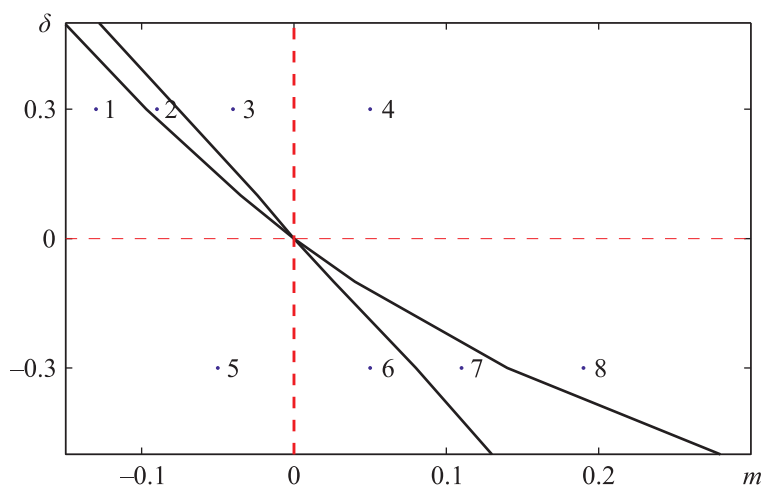


Рис. 8. Области реализации различных решений системы в зависимости от параметров m и $\delta = b - a$, линии косимметрии (пунктир) при $d_1 = 0.8$

При раскрутке к предельному циклу имеет место запаздывание по амплитуде, а при установлении к равновесию траектория реализуется поверх оболочки семейства предельных циклов.

Если увеличить значение параметра d_1 , чтобы $c < d_1 < 2c$, то в случае косимметрии ($m = 0$, $a = b$) среди сценариев не будет решений с одной ненулевой компонентой партии x (невозможна тотальная монополия и отсутствие напряженности). На рис. 8 приведена карта режимов, рассчитанная при $d_1 = 0.8$. Начальные данные были одинаковы (0.5, 0.2, 0.3) (преимущество одной партии над другой и заметная социальная напряженность).

Для значений параметров m и $\delta = b - a$ из областей 1, 5, 6 реализуется колебательный сценарий гибели партии x . Для областей 3, 4 характерно исчезновение партии y . Стационарное решение с сосуществующими партиями x , y и ненулевой напряженностью z получается для параметров из области 2.

Заключение

Получившие распространение при анализе экологических сценариев модели Лотки, Вольтерры, Колмогорова и др. естественно применить для описания процессов конкуренции и взаимодействия различных социальных групп. На функционирование политической системы влияют разные факторы, и это побуждает партии к изменению их конкурентных стратегий. В данной работе сделана попытка моделирования изменения партийных долей при помощи одной переменной величины («хищника») — социальной напряженности. При этом использованы простые предположения о росте или спаде социальной напряженности, характере влияния напряженности на изменение партийных пропорций. В известных нам работах не изучались совместно эволюции относительных численностей партий и социальной напряженности в обществе.

Новизна подхода состоит в определении параметров, при которых задача становится косимметричной и в ней появляются семейства решений, а затем можно изучать рассматриваемую модель как возмущенную по отношению к задаче с косимметрией. При этом появляются возможности анализа диапазонов изменения параметров системы, характеризующих различные сценарии. Исследование показало, что даже при существенном отклонении параметров от косимметричной ситуации динамический процесс представляет собой последовательную реализацию состояний, близких к членам семейства решений системы с косимметрией.

Представленные результаты получены при параметрах, не зависящих от времени. Понятно, что конкурирующие политические силы могут в некоторой степени корректировать развитие неблагоприятного сценария. В частности, для сокращающейся партии можно предпринять усилия для изменения величины перетока (параметр m) или коэффициента убыли за счет напряженности (параметр b). Для оценки корректировки могут быть использованы диаграммы, подобные приведенным на рис. 4 и рис. 8. Это означает, что с помощью данной системы можно моделировать межпартийную борьбу во время предвыборной кампании, анализировать равновесия и динамические режимы. При этом конкуренция не сводится к статическим сценариям, характерным для задач, возникающих при описании электоральных сценариев на основе модели Хотеллинга – Даунса [Brusco et al., 2012].

Данная модель может быть применена также для описания противостояния правительства и одной или нескольких экстремистских групп, например для описания событий в Германии в 20-х годах (борьба коммунистов и фашистов) и в Египте во время арабской весны (борьба прозападных групп и фундаменталистов против правительства) [Хосаева, 2015].

Список литературы (References)

Александров П. Н., Ахременко А. С. Математическое моделирование политических процессов // Вестник Московского университета. Сер. 12. Политические науки. — 2011. — № 3. — С. 24–31.

Aleksandrov P. N., Ahrimenko A. S. Mathematical modeling of political processes // Vestnik MSU. Ser. 12. Political processes. — 2011. — No. 3. — P. 24–31 (in Russian).

Вайдлих В. Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках. — М.: Едиториал, УРСС, 2005. — 480 с.

Weidlich W. Sociodynamics — a systematic approach to mathematical modelling in the social sciences. — Harwood Academic Publishers: Amsterdam, 2000.

Епифанов А. В., Цибулин В. Г. О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 5. — С. 799–813.

Epifanov A. V., Tsybulin V. G. Regarding the dynamics of cosymmetric predator–prey systems // Computer research and modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 5. — P. 799–813 (in Russian).

- Малинецкий Г. Г., Потанов А. Б.* Руслы и джокеры: нейросетевой взгляд на сложную динамику // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1998. — Т. 6, № 4. — С. 18–30.
Malinetsky G. G. Rusla and Jokers: A Neuroet Network Look At A Complex Dynamics // *Izvestiya vuz. Applied Nonlinear Dynamics.* — 1998. — Т. 6, No. 4. — P. 18–30 (in Russian).
- Методология моделирования и прогнозирования современного мира / под ред. Т. В. Карадже. — М.: Прометей, 2012. — 280 с.
Methodology of modeling and forecasting of the modern world / edited by T. V. Karadge. — Moscow: Prometei, 2012. — 280 p. (in Russian).
- Михайлов А. П.* Моделирование системы «власть – общество». — М.: Физматлит, 2006. — 144 с.
Mikhailov A. P. Modeling of the system «rule – society». — Moscow: Fizmatlit, 2006. — 144 p. (in Russian).
- Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О. Г., Маревцева Н. А.* Модель информационного противоборства в социуме при периодическом дестабилизирующем воздействии // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 23–32.
Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A. A Model of Information Warfare in a Society Under a Periodic Destabilizing Effect // *Mathematical Models and Computer Simulations.* — 2017. — Vol. 9 (5). — P. 580–586.
- Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
Samarskii A. A., Mikhailov A. P. Principles of Mathematical Modelling. Ideas, Methods, Examples. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 320 p. (in Russian).
- Хосаева З. Х.* Математическая модель протестных акций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 6. — С. 1333–1343.
Khosaeva Z. H. Mathematical model of protest actions // *CR & M.* — 2015. — Vol. 7, No. 6. — P. 1333–1343 (in Russian).
- Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 5. — С. 142–148.
Yudovich V. I. Cosymmetry, degeneracy of the solutions of operator equations and the onset of filtrational convection // *Math. Notes.* — 1991. — Vol. 49. — P. 540–545.
- Юдович В. И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН. — 2004. — Т. 398, № 1. — С. 57–61.
Yudovich V. I. Bifurcations under perturbations violating cosymmetry // *Physics-Doklady.* — 2004. — Vol. 49. — P. 522–526.
- Шведовский В. А., Петрова М. А.* Математическое моделирование динамики напряженности этно-политического конфликта // Социология: 4М. — 2001. — № 14. — С. 151–175.
Shvedovskii V. A. Mathematical modeling of the dynamics of the stress of the ethno-political conflict // *Sociology: 4M.* — 2001. — No. 14. — P. 151–175 (in Russian).
- Berestycki H., Rossi L., Rodriguez N.* Periodic cycles of social outbursts of activity // *J. Differential Equations.* — 2018. — Vol. 264. — P. 163–196.
- Bosse T., Hoogendoorn M., Klein M. C. A., Treur J., van der Wal C. N., van Wissen A.* Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // *Autonomous Agents and Multi-Agent Syst.* — 2013. — Vol. 27. — P. 52–84. — DOI: 10.1007/s10458-012-9201-1
- Brusco S., Dziubinski M., Roy J.* The Hotelling-Downs model with runoff voting // *Games and Economic Behavior.* — 2012. — Vol. 74. — P. 447–469. — DOI: 10.1016/j.geb.2011.08.004
- Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete & Continuous Dynamical Systems — B.* — 2019. — Vol. 24. — P. 547–561.
- Comissiong D. M. G., Sooknanan J.* A review of the use of optimal control in social models // *Internat. J. of Dynamics and Control.* — 2018. — Vol. 6 (4). — P. 1841–1846.
- Dominioni G., Marasco A., Romano A.* A mathematical approach to study and forecast racial groups interactions: deterministic modeling and scenario method // *Qual. Quant.* — 2018. — Vol. 52. — P. 1929–1956. — doi.org/10.1007/s11135-017-0581-9

- Frischmuth K., Kovaleva E. S., Tsybulin V. G.* Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. — 2011. — Vol. 12. — P. 145–155.
- Misra A. K.* A simple mathematical model for the spread of two political parties // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. — 2012. — Vol. 17, No. 3. — P. 343–354.
- Nyabadza F., Alasse T. Y., Muchatibaya G.* Modelling the dynamics of two political parties in the presence of switching // *SpringerPlus*. — 2016. — 5:1018. — doi.org/10.1186/s40064-016-2483-z
- Reding I., Kelley M., Rowell J. T., Rychtar J.* A continuous ideal free distribution approach to the dynamics of selfish, cooperative and kleptoparasitic populations // *R. Soc. opensci*. — 2016. — 3:160788. — dx.doi.org/10.1098/rsos.160788
- Rinaldi S., Della Rossa F.* Conflicts among N armed groups: scenarios from a new descriptive model // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 92, No. 3. — P. 3–12. — doi.org/10.1007/s11071-017-3446-9
- Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. — 1995. — Vol. 5. — P. 402–411.