

## КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Г. Т. Дзедзисашвили

*Санкт-Петербургский государственный университет*

### 1. Введение.

Рассматриваются свободные колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением. Такая оболочка может служить моделью коробчатых тонкостенных конструкций, применяемых в строительстве, машиностроении, химической промышленности и других технических областях. К таким конструкциям, например, относятся кабины (лифтовые, звукоизоляционные и пр.).

Задача в данной постановке является развитием рассмотренной в [1], [3] задачи о колебаниях цилиндрической оболочки с квадратным поперечным сечением. В работе [4] были рассмотрены колебания шарнирно опертой оболочки с прямоугольным поперечным сечением, а в работах [2] и [5] — устойчивость оболочки при различных граничных условиях. При наличии квадратного сечения можно получить приближенное аналитическое решение путем решения трансцендентного уравнения, получаемого в ходе разделения переменных в уравнении Лагранжа–Жермен, а в случае шарнирно опертых краев имеется явная формула для частот. Однако для случая прямоугольного сечения такие возможности отсутствуют. При этом все еще возможно исследование колебаний с помощью численных методов, в частности метода Рэлея и метода конечных элементов, что и является целью данной работы.

С помощью метода конечных элементов исследуется поведение частот и форм колебаний оболочки при отклонении формы сечения от квадратной. При разных граничных условиях анализируется точность решений, полученных по методу Рэлея. Рассматривается асимптотическое поведение низшей частоты жестко заделанной на обоих краях оболочки при стремлении поперечного размера сечения к нулю. В последнем разделе работы сравниваются частоты и формы колебаний оболочки без пластины, и оболочки, сопряженной с пластиной.

### 2. Основные предположения.

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку с прямоугольным поперечным сечением, образованную сопряжением четырех прямоугольных пластин (рис. 1). Прогиб  $k$ -й пластины описывается уравнением Лагранжа–Жермен [6]:

$$D\Delta\Delta w^{(k)} - \rho t w^{(k)} \omega^2 = 0, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

где  $w^{(k)} = w^{(k)}(x, y)$  — прогиб  $k$ -й пластины, зависящий от локальных координат  $x$  и  $y$   $k$ -й пластины (рис. 2);  $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ ;  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность пластины;  $t$  — толщина пластины;  $\omega$  — собственная частота пластины.

Будем предполагать, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, изгибающие моменты в местах пересечения равны, а углы между сопряженными пластинами остаются прямыми при изгибах. Эти предположения равносильны следующим

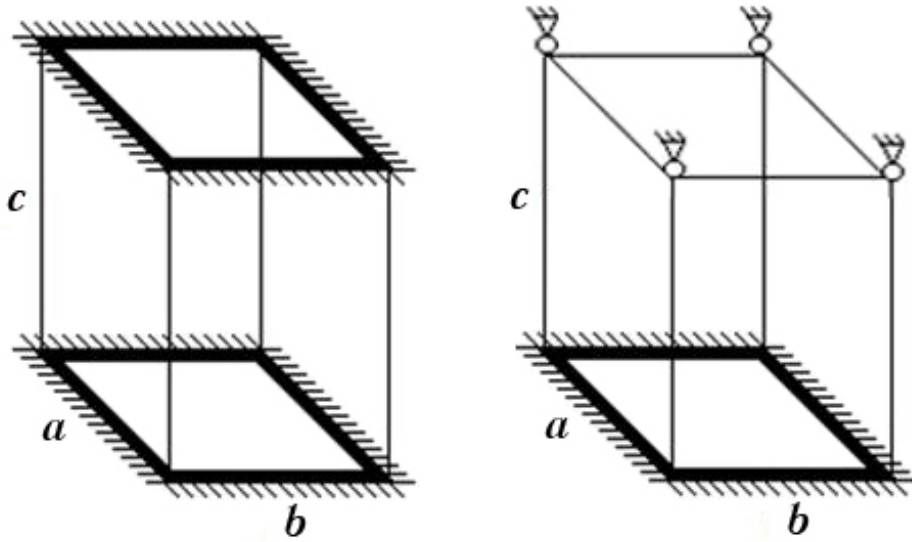


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка с прямоугольным поперечным сечением при разных граничных условиях ( $a, b, c$  - размеры).

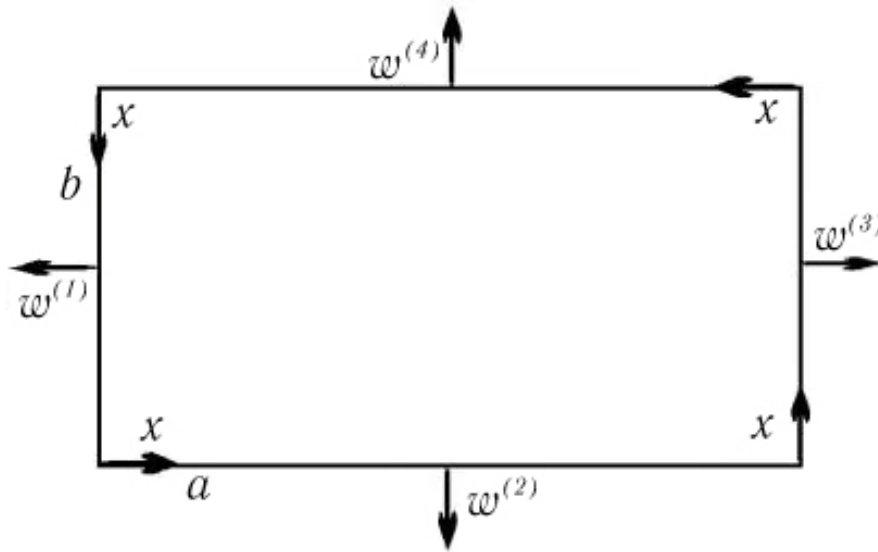


Рис. 2. Локальные координаты стенок оболочки (вид сверху).

граничным условиям для (1):

$$\begin{aligned}
 w^{(k)}(0, y) &= w^{(k)}(\chi, y) = 0, \\
 w_x^{(k)}(\chi, y) &= w_x^{(k+1)}(0, y), \\
 w_{xx}^{(k)}(\chi, y) &= w_{xx}^{(k+1)}(0, y),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $k = \overline{1, 4}$  — номер пластины, при этом  $k + 1 = 1$  при  $k = 4$ ,  $\chi = a$  при четных  $k$  (либо  $b$  при нечетных  $k$ ).

В случае квадратного сечения, т. е. когда  $a = b$ , решение в виде

$$w^{(k)}(x, y) = (-1)^k W^{(k)}(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3)$$

где  $m = 1, 2, \dots$  — число волн по ширине пластины, удовлетворяет условиям (2).

Для прямоугольного сечения разделение переменных невозможно. Однако можно использовать метод конечных элементов и метод Рэлея для приближенного нахождения частот и форм колебаний. Далее будем использовать частотный параметр  $f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ , где  $\tilde{\nu} = \frac{\omega}{2\pi}$ .

### 3. Анализ методом конечных элементов.

Найдем частоты колебаний оболочки с прямоугольным поперечным сечением, используя метод конечных элементов.

Для вычислений использовался пакет ANSYS. Оболочка моделировалась элементами SHELL63 с разбиением 400 элементов/м<sup>2</sup>. При увеличении разбиения в 2 раза значения частот изменялись после третьей значащей цифры. Толщина стенок предполагалась равной  $t = 0,015$  м.

При одновременном изменении  $a, b, c, t$  в  $k$  раз  $f$  меняется обратно пропорционально изменению  $k$  (рис. 3). Если зафиксировать  $t$ , зависимость  $f$  от  $k$  будет близка к обратной квадратичной.

Анализ высших частот показывает, что в случае квадратного сечения вторая и третья частоты являются кратными. При отклонении формы сечения от квадратной с сохранением периметра наблюдается расщепление этих частот на две, причем с увеличением параметра  $\varepsilon = \frac{M}{m} - 1$  (здесь  $M$  — большая из сторон сечения,  $m$  — меньшая) вторая частота убывает, а третья — растет. Форма колебаний второй частоты характеризуется тем, что более длинные пластины имеют одну волну и прогибаются сонаправленно, а короткие имеют две волны и прогибаются противоположно друг другу, при этом их прогиб меньше, чем у длинных. Для третьей частоты вид формы колебаний аналогичен, при этом короткие и длинные пластины меняются местами (рис. 4).

На рис. 5 приведены примеры расщепления частот при различных значениях параметра  $\varepsilon$ . Аналогичное расщепление происходит и при изменении формы сечения с сохранением его площади.

Таким образом, при малом отклонении формы сечения оболочки от квадратной вторая и третья частоты приближенно равны.

Исходя из характера графиков, можно предположить, что для оболочек квадратного сечения существуют  $c_1, c_2, \varepsilon$  такие, что вторая частота оболочки длиной  $c_1$  равна третьей частоте оболочки длиной  $c_2$ . Однако вопрос их нахождения в явном виде в данной работе не рассматривается.

### 4. Получение приближенных формул методом Рэлея.

Выведем приближенные формулы для первой частоты оболочки при разных граничных условиях методом Рэлея [7].

Если оболочка сопряжена с пластиной, сильно отличающейся по толщине от стенок оболочки, то можно заменить пластину граничными условиями жесткой заделки («заделка-заделка») или шарнирного опирания («заделка-шарнир»).

Условия «заделка-заделка» имеют вид:

$$\begin{aligned} W^{(k)}(0) &= W^{(k)}(c) = 0, \\ \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}(0) &= \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}(c) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

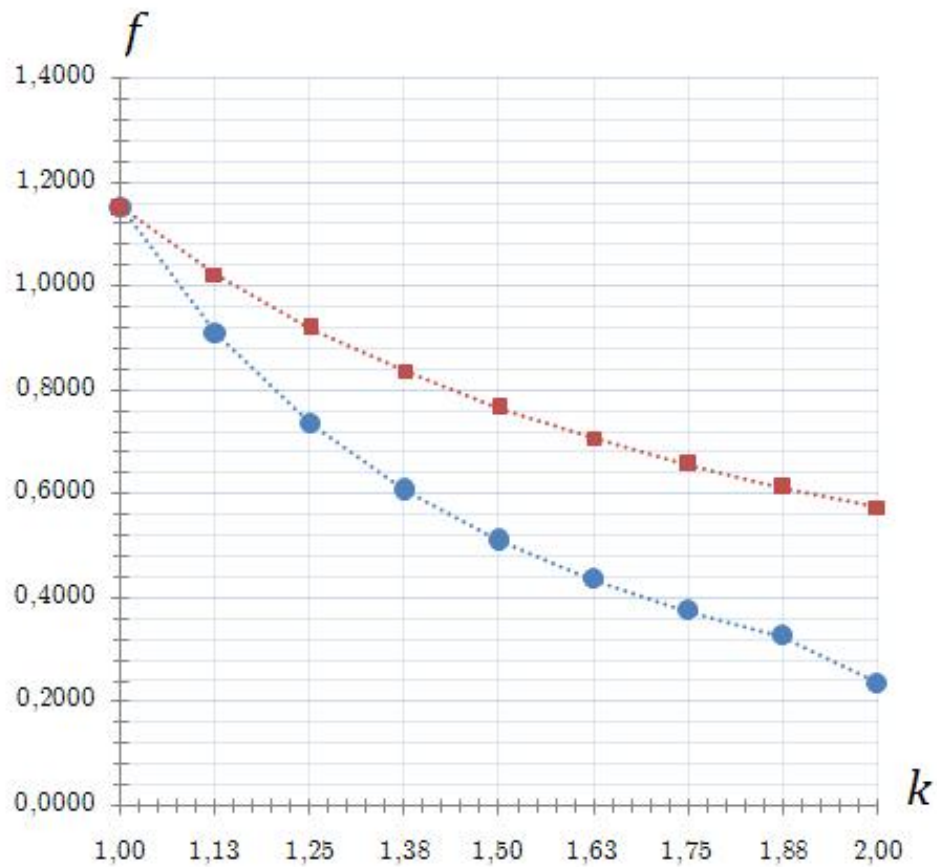


Рис. 3. Примеры зависимости  $f$  от  $k$  при начальных размерах  $a = b = c = 2$ ,  $t = 0,015$ .  
 График красного цвета соответствует изменению всех размеров оболочки в  $k$  раз,  
 график синего цвета - изменению всех размеров, кроме  $t$ , в  $k$  раз.

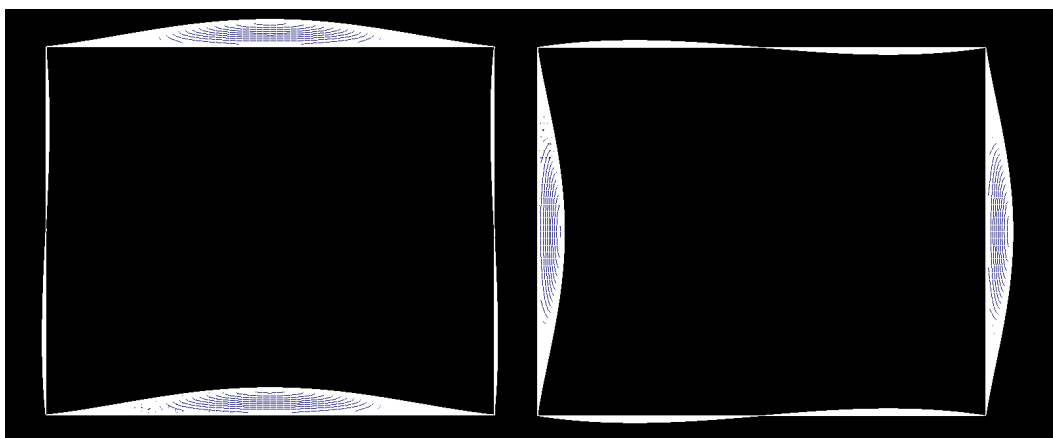


Рис. 4. Вторая и третья формы колебаний при  $\varepsilon = 0,3$ .

Условия «заделка-шарнир» имеют вид:

$$\begin{aligned} W^{(k)}(0) = W^{(k)}(c) = 0, \\ \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}(0) = \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y^2}(c) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

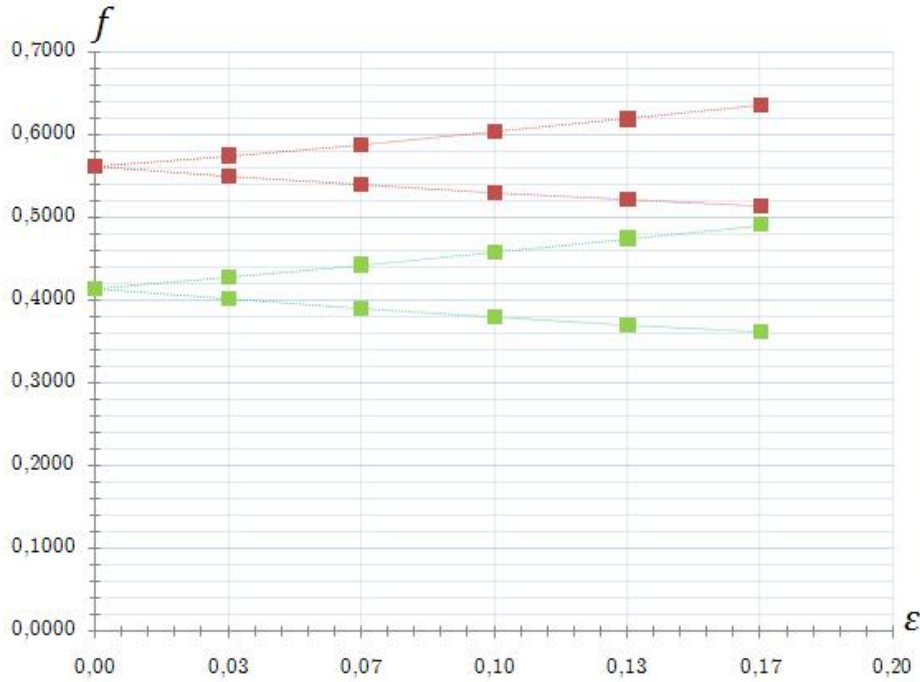


Рис. 5. Расщепление второй и третьей частот при увеличении  $\varepsilon$ .

Точки красного цвета соответствуют расщеплению частот оболочки с начальными размерами  $a = 3, b = 3, c = 3$ , зеленого - с размерами  $a = 3, b = 3, c = 4$ . В обоих случаях  $a$  зафиксировано.

В силу симметрии оболочки достаточно рассмотреть две смежные стенки. При этом будем в зависимости от размера стенки выбирать разные координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Сравним приближения тригонометрической функцией и многочленом, умноженными на поправочный коэффициент  $\chi_i^\alpha$ . Степень коэффициента  $\alpha$  выбирается так, чтобы обеспечить минимальную погрешность.

Вначале рассмотрим для случая «заделка-заделка» приближение, полученное с помощью тригонометрической функции. Введем координатные функции

$$W_{\chi_i} = C \chi_i^{\frac{11}{10}} \sin \frac{\pi x}{\chi_i} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{c} \right), \quad (6)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\chi_i = a$  при  $i = 1$  и  $\chi_i = b$  при  $i = 2$ .

Вычислим потенциальную энергию деформации и максимальную кинетическую энергию по формулам

$$\Pi = \int_0^c \left( \int_{-\chi_i}^0 \Pi_{\chi_i} dx + \int_0^{\chi_{i+1}} \Pi_{\chi_{i+1}} dx \right) dy, \quad (7)$$

$$T = \int_0^c \left( \int_{-\chi_i}^0 T_{\chi_i} dx + \int_0^{\chi_{i+1}} T_{\chi_{i+1}} dx \right) dy, \quad (8)$$

где

$$\Pi_{\chi_i} = D \left( \left( \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dx^2} + \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dy^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left( \left( \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dx dy} \right)^2 - \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dx^2} \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dy^2} \right) \right), \quad (9)$$

$$T_{\chi_i} = \rho t W_{\chi_i}^2, \quad (10)$$

и подставим полученные результаты в выражение для определения частоты

$$f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t}{D}} = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho t}{D}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\Pi \rho t}{T D}}, \quad (11)$$

в результате чего получим

$$f = \frac{\pi\sqrt{3}}{6a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^2} \sqrt{\frac{3a^{\frac{4}{5}}c^4 + 3b^{\frac{4}{5}}c^4 + 8a^2b^{\frac{4}{5}}c^2 + 8a^{\frac{4}{5}}b^2c^2 + 16a^{\frac{4}{5}}b^4 + 16a^4b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{16}{5}} + b^{\frac{16}{5}}}}. \quad (12)$$

Относительная погрешность метода Рэлея

$$J = \frac{f_R - f_N}{f_N}, \quad (13)$$

где  $f_R$  - частота по методу Рэлея,  $f_N$  - соответствующая частота по МКЭ, при использовании координатных функций вида (6) меняется в пределах от 2,1 % до 9,9 %.

Рассмотрим для случая «заделка-заделка» приближение, полученное с помощью многочлена. Введем координатные функции вида

$$W_{\chi_i} = C \chi_i^{\frac{5}{4}} \sin \frac{\pi x}{\chi_i} (y^4 - 2cy^3 + c^2y^2), \quad (14)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\chi_i = a$  при  $i = 1$  и  $\chi_i = b$  при  $i = 2$ .

Проведя вычисления по формулам (7)-(11), получим, что

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt[4]{abc^2}} \sqrt{\frac{-(A_1 + A_2)}{B}} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi^4 c^4 + 24a^{\frac{3}{2}}\pi^2\sqrt{bc^2} - 24\pi^2 abc^2 + 24b^{\frac{3}{2}}\pi^2\sqrt{ac^2}, \\ A_2 &= 504a^{\frac{7}{2}}\sqrt{b} + 504a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}} - 504a^3b - 504a^2b^2 - 504ab^3 + 504a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}} + 504\sqrt{ab^{\frac{7}{2}}}, \\ B &= a^{\frac{5}{2}}\sqrt{b} + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} + \sqrt{ab^{\frac{5}{2}}} - a^3 - a^2b - ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Относительная погрешность метода Рэлея с использованием координатных функций вида (14) меняется в пределах от 0,1 % до 3,4 %.

При выборе многочлена как координатной функции результат получается более точным, чем при выборе тригонометрической функции, однако формула для частоты оказывается весьма громоздкой.

Для случая «заделка-шарнир» сравним приближения, полученные с помощью многочленов, отличающихся поправочными коэффициентами. Введем координатные функции вида

$$W_{\chi_i} = C \chi_i \sin \frac{\pi x}{\chi_i} \left( y^4 - \frac{5c}{2}y^3 + \frac{3c^2}{2}y^2 \right), \quad (16)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\chi_i = a$  при  $i = 1$  и  $\chi_i = b$  при  $i = 2$ .

Проведем вычисления с помощью (7)-(11) и получим, что:

$$f = \frac{\sqrt{19}}{38\pi c^2} \sqrt{\frac{19\pi^4 c^4 + 432\pi^2 abc^2 + 4536a^3b - 4536a^2b^2 + 4536ab^3}{ab(a^2 - ab + b^2)}}. \quad (17)$$

Относительная погрешность метода Рэлея с использованием координатных функций вида (16) меняется в пределах от 0,1 % до 15,7 %.

Рассмотрим приближение, полученное с помощью координатных функций вида

$$W_{\chi_i} = C\chi_i^{\frac{5}{4}} \sin \frac{\pi x}{\chi_i} \left( y^4 - \frac{5c}{2}y^3 + \frac{3c^2}{2}y^2 \right), \quad (18)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\chi_i = a$  при  $i = 1$  и  $\chi_i = b$  при  $i = 2$ .

Проведем вычисления по формулам (7)-(11), получим, что:

$$f = \frac{\sqrt{19}}{38\pi^4 \sqrt{abc^2}} \sqrt{\frac{-(A_1 + A_2)}{B}}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 19\pi^4 c^4 + 432\pi^2 a^{\frac{3}{2}} \sqrt{bc^2} - 432\pi^2 abc^2 + 432\pi^2 \sqrt{ab^{\frac{3}{2}} c^2}, \\ A_2 &= 4536a^{\frac{7}{2}} \sqrt{b} - 4536a^3 b + 4536a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{3}{2}} - 4536a^2 b^2 + 4536a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}} - 4536ab^3 + 4536\sqrt{ab^{\frac{7}{2}}}, \\ B &= a^{\frac{5}{2}} \sqrt{b} + a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} + \sqrt{ab^{\frac{5}{2}}} - a^3 - a^2 b - ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Относительная погрешность метода Рэлея с использованием координатных функций вида (18) меняется в пределах от 0,1 % до 3,7 %.

Подбор координатных функций способен существенно влиять на точность результатов и удобство их использования.

### 5. Предельный переход при $b \rightarrow 0$ для оболочки с заделанными краями.

Рассмотрим предельный переход при  $b \rightarrow 0$ . В частности, попробуем выяснить, при каких  $b$  достигается приближенное совпадение частоты оболочки с заделанными краями с частотой заделанной пластины.

Вначале найдем по методу Рэлея приближенную формулу для вычисления частоты пластины, используя координатную функцию вида  $W = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{c} \right)$ :

$$f = \frac{2\pi}{3a^2 c^2} \sqrt{3a^4 + 3c^4 + 2a^2 c^2}. \quad (20)$$

Далее, считая, что  $a$  и  $c$  зафиксированы, приравняем друг к другу частоты, найденные по формулам (20) и (12), и тем самым получим уравнение для определения значения  $b$ , при котором приближенное значение частоты оболочки совпадает с таковым у пластины:

$$b^4 - A_1 b^2 + A_2 b^{\frac{4}{5}} - A_3 = 0 \quad (21)$$

где

$$A_1 = \frac{24a^{\frac{24}{5}}}{D}, A_2 = \frac{39a^4 c^2 + 8a^6}{D}, A_3 = \frac{9a^{\frac{24}{5}} c^2}{D}, D = 48a^{\frac{4}{5}} c^2 + 32a^{\frac{14}{5}}.$$

Полученное уравнение можно решить численно. Его корни при разных значениях  $a$  и  $c$  приведены в таблице 1.

Таблица 1. Корни уравнения (21).

		с			
		1	2	3	4
а	2	0.1525	0.2676	0.3243	0.3299
	3	0.1562	0.2949	0.4015	0.4680
	4	0.1576	0.3051	0.4334	0.5353

Из полученных результатов видно, что для рассматриваемого диапазона значений  $a$  и  $c$  при достаточно малых  $b$  (примерно в 6-8 раз меньше минимума из  $a$  и  $c$ ) низшая частота оболочки сравнима с таковой для пластины. Прогиб узких стенок такой оболочки незначителен в сравнении с прогибом широких (рис. 6).

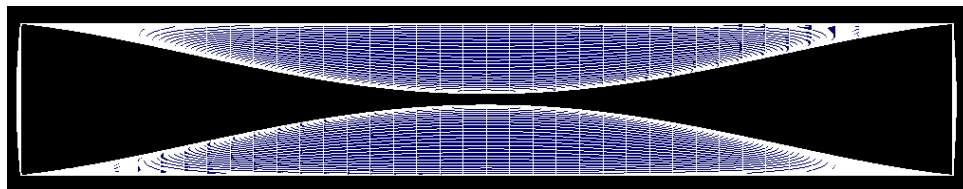


Рис. 6. Форма колебаний оболочки с двумя узкими стенками (вид сверху).

## 6. Колебания оболочки с жесткой заделкой на нижнем крае, имеющей сопряжение с пластиной на верхнем крае.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с прямоугольным поперечным сечением, у которой нижний край заделан, а верхний сопряжен с пластиной толщиной  $t_c$ . Вычисление частот колебаний такой оболочки может быть проведено по методу конечных элементов. Пример расчета для размеров  $a = 2, b = 3, c = 3$  и толщины  $t = 0,015$  представлен в таблице 2.

Таблица 2. Частоты для оболочки, сопряженной с пластиной толщиной  $t_c$ .

$t_c$	$5t$	$2t$	$t$	$0,5t$	$0,3t$	$0,2t$
$f_1$	0,542	0,531	0,492	0,444	0,315	0,213
$f_2$	0,572	0,565	0,536	0,500	0,460	0,330
$f_3$	0,789	0,784	0,766	0,526	0,491	0,456
$f_c$	5,548	2,219	1,110	0,555	0,333	0,222
$f_{fixed}$	0,543					
$f_{free}$	0,455					

Здесь  $f_1, f_2, f_3$  — первые частоты колебаний оболочки, сопряженной с пластиной,  $f_{fixed}$  — частота оболочки с заделанными краями,  $f_{free}$  — частота оболочки с заделанным и шарнирным краями,  $f_c$  — частота пластины с заделанными краями по методу Рэлея, вычисляемая по формуле (20) с учетом разницы толщин стенок оболочки и пластины:

$$f_c = f \frac{t_c}{t} = \frac{2\pi}{3a^2b^2} \frac{t_c}{t} \sqrt{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2}. \quad (22)$$



При  $t_c = 5t$  (толстая пластина) частота  $f_1$  близка к частоте  $f_{fixed} = 0,543$  колебаний оболочки с заделанным верхним краем. При  $t_c = 0,2t$  частота  $f_1$  мало отличается от частоты  $f_c = 0,222$ . Отметим также близость частот  $f_2$  при  $t_c = 0,3t$  и  $f_3$  при  $t_c = 0,2t$  к частоте  $f_{free} = 0,455$  колебаний оболочки с заделанным и шарнирным краями.

Аналогичные особенности поведения частот имеются и при других размерах оболочки. Это позволяет для случая толстой пластины находить приближенное значение первой частоты  $f_1$  по формулам (12) или (15), а для случая тонкой пластины вычислять  $f_1$  по приближенной вариационной формуле (22). Формулы (17) и (19) могут использоваться для приближенного определения частот для оболочки, сопряженной с тонкой пластиной.

Первые формы колебаний, соответствующие разным значениям  $t_c$ , приведены на рис. 7. Толстой пластине соответствует форма, при которой прогиб пластины мал по сравнению с прогибами стенок оболочки. Для тонкой пластины, наоборот, прогибы стенок малы по сравнению с прогибом пластины.

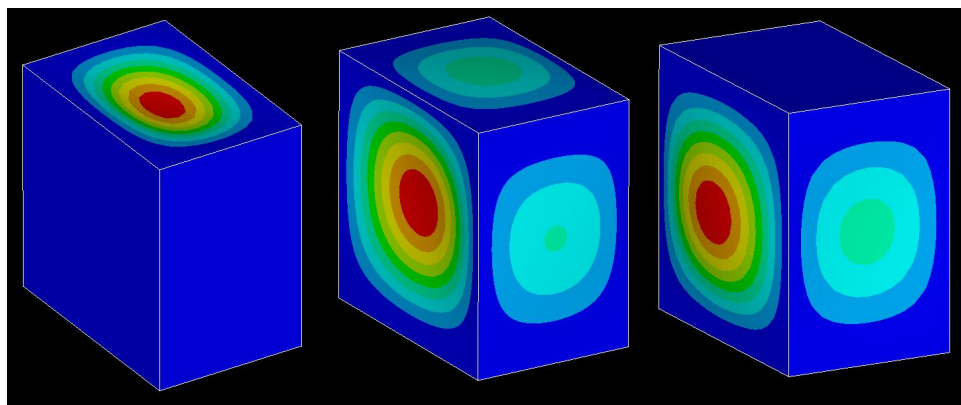


Рис. 7. Изменение первой формы колебаний оболочки при увеличении толщины пластины.

## 6. Заключение.

Методом конечных элементов исследовано поведение частот оболочки с прямоугольным поперечным сечением. Изучено расщепление второй и третьей частот при отклонении формы сечения от квадрата.

При разных граничных условиях проведено сравнение точности метода Рэлея для вычисления первой частоты с использованием разных координатных функций, при этом для улучшения точности использованы поправочные коэффициенты. В зависимости от поправочного коэффициента и вида координатной функции может меняться точность и удобство использования получаемой приближенной формулы.

Проведено сравнение частот и форм колебаний оболочки без пластины, и оболочки, сопряженной с пластиной. Установлено, что для оболочки, имеющей **на одном крае сопряжение с пластиной**, толщина которой значительно отличается от стенок оболочки, частота может быть найдена по приближенным вариационным формулам.

Для оболочки с заделанными краями получено уравнение для нахождения ширины оболочки, при которой ее первая частота мало отличается от частоты заделанной пластины.

## Литература

1. *Sergei B. Filippov, Eliza M. Haseganu, Andrei L. Smirnov.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mechanics Research Communications*, Volume 27, Issue 4, 2000, P. 457-464.
2. *S. B. Filippov, E. M. Haseganu, A. L. Smirnov.* Buckling analysis of axially compressed square elastic tubes with weakly supported edges. // *Technische Mechanik*, Band 20, Heft 1, 2000. S. 13-20.
3. **Дзедзисашвили Г. Т.** Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017-2018 г. — Издательство СПбГУ, 2019. — с. 13-29.
4. *Амосов А. С.* Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением. // *Вестник СПбГУ, Сер. 1*, 2004, вып. 1 (1). — с. 67-72.
5. *Кликушина М. В., Филиппов С. Б.* Устойчивость цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением со свободными краями. // *Вестник СПбГУ, Сер. 1*. 2004. Вып. 2. — с. 91-96.
6. *Биргер И. А., Пановко. Я. Г.* Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Том 3. — Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — 567 с.
7. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 636 с.

Сведения об авторе

*Дзедзисашвили Георгий Тамазович* — магистр II курса кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ; d-g-t@bk.ru, +79215714243.

Научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ Сергей Борисович Филиппов.