

Инвариантные поверхности периодических систем с консервативным кубическим первым приближением

В. В. Басов, А. С. Жуков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Басов В. В., Жуков А. С. Инвариантные поверхности периодических систем с консервативным кубическим первым приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 376–393. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.303>

Исследуются два класса периодических по времени систем ОДУ с «быстрым» и «медленным» временем и малым параметром $\varepsilon \geq 0$, у которых соответствующая им консервативная невозмущенная система $\dot{x}_i = -\gamma_i y_i \varepsilon^\nu$, $\dot{y}_i = \gamma_i (x_i^3 - \eta_i x_i) \varepsilon^\nu$ ($i = \overline{1, n}$, $\nu = 0, 1$) имеет от одной до 3^n точек покоя. В явном виде приводятся: 1) условия на независимости от параметра возмущения, гарантирующие для исходных систем при всех достаточно малых значениях параметра наличие определенного количества инвариантных поверхностей размерности $n + 1$, гомеоморфных торам; 2) формулы этих поверхностей и их асимптотические разложения; 3) семейства систем, имеющих шесть инвариантных поверхностей.

Ключевые слова: инвариантная поверхность, бифуркация, усреднение, сепаратриса.

1. Введение. 1.1. Объекты изучения. Рассмотрим периодическую систему ОДУ размерности $2n$ ($n \geq 2$) с малым параметром

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\gamma_i y_i \varepsilon^\nu + X_i(t, x, y, \varepsilon) \varepsilon^{1+\nu}, \\ \dot{y}_i = \gamma_i (x_i^3 - \eta_i x_i) \varepsilon^\nu + Y_i(t, x, y, \varepsilon) \varepsilon^{1+\nu} \end{cases} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.1)$$

где $\nu = 0, 1$, $\gamma_i \in (0, +\infty)$, $\eta_i = -1, 0, 1$, малый параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$, векторы y, X, Y, γ, η записываются аналогично; функции X, Y — непрерывные и T -периодические по t класса $C_{x, y, \varepsilon}^3$ при $t \in \mathbb{R}$, $|x_i| < x^0$, $|y_i| < y^0$.

По существу, формула (1.1) задает две различные системы — систему с $\nu = 0$ и систему с $\nu = 1$, сравнивая которые можно сказать, что система с $\nu = 1$ имеет «быстрое» время, так как при сведении ее к системе с $\nu = 0$ получаем период $T\varepsilon$.

Замечание 1. К системе (1.1) линейной заменой $\tilde{x}_i = \lambda_i x_i$, $\tilde{y}_i = \mu_i y_i$ ($i = \overline{1, n}$) сводится система более общего вида

$$\dot{\tilde{x}}_i = -\tilde{a}_i \tilde{y}_i \varepsilon^\nu + \tilde{X}_i(t, \tilde{x}, \tilde{y}, \varepsilon) \varepsilon^{1+\nu}, \quad \dot{\tilde{y}}_i = (\tilde{b}_i \tilde{x}_i^3 + \tilde{c}_i \tilde{x}_i) \varepsilon^\nu + \tilde{Y}_i(t, \tilde{x}, \tilde{y}, \varepsilon) \varepsilon^{1+\nu} \quad (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i > 0).$$

В самом деле, а) если $\tilde{c}_i = 0$, то $\lambda_i = (\tilde{a}_i \tilde{b}_i)^{-1/2}$, $\mu_i = (\tilde{a}_i^3 \tilde{b}_i)^{-1/2}$ и в (1.1) $\gamma_i = 1$, $\eta_i = 0$; б) если $\tilde{c}_i \neq 0$, то $\lambda_i = \tilde{b}_i^{-1/2} |\tilde{c}_i|^{1/2}$, $\mu_i = (\tilde{a}_i \tilde{b}_i)^{-1/2} |\tilde{c}_i|$ и $\gamma_i = (\tilde{a}_i |\tilde{c}_i|)^{1/2}$, $\eta_i = -\text{sign } \tilde{c}_i$.

Системой первого приближения или невозмущенной по отношению к системе (1.1) естественно называть $2n$ -мерную автономную систему

$$\dot{x}_i = -\gamma_i y_i \varepsilon^\nu, \quad \dot{y}_i = \gamma_i (x_i^3 - \eta_i x_i) \varepsilon^\nu \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.2)$$

распадающуюся на n независимых консервативных двумерных систем с переменными (x_i, y_i) , каждая из которых имеет одну точку покоя $(0, 0)$ при $\eta_i = 0, -1$ или три точки покоя $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$ при $\eta_i = 1$.

Фазовые плоскости таких двумерных систем помимо указанных точек покоя заполнены замкнутыми траекториями и сепаратрисами, задаваемыми интегралами

$$x_i^4 - 2\eta_i x_i^2 + 2y_i^2 = a_i^2 - \eta_i^2 \quad \text{или} \quad (x_i^2 - \eta_i)^2 + 2y_i^2 = a_i^2 \quad (a_1, \dots, a_n \geq 0). \quad (1.3)$$

Таким образом, автономная система (1.2) имеет 3^ν ($\nu \in \{\overline{0, n}\}$) точек покоя в зависимости от значений η_1, \dots, η_n , а ее фазовое пространство размерности $2n$ заполнено n -мерными инвариантными торами, задаваемыми интегралами (1.3) при $a_1, \dots, a_n \neq 0, 1$, а также особыми точками, сепаратрисными поверхностями и торами меньших размерностей, задаваемыми интегралами (1.3) при других значениях констант a_1, \dots, a_n .

1.2. Постановка задачи и результаты. Цель работы заключается в нахождении у системы (1.1) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ определенного числа инвариантных поверхностей, гомеоморфных торам размерности $n+1$ в цилиндрическом фазовом пространстве системы (1.1), получаемом факторизацией времени по периоду. При этом проекции таких поверхностей на пространство переменных x, y находятся в малой окрестности некоторых n -мерных инвариантных торов невозмущенной системы (1.2), «сохраняющихся», тем самым, при малых периодических возмущениях.

Системы (1.1) при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ можно исследовать одновременно, так как для нахождения инвариантных торов применяется один и тот же метод, разработанный в работах [1, 2] и существенно модифицированный в работах [3–5].

В результате в явном виде выписаны зависящие от γ_i и η_i условия на функции $X_i(t, x, y, 0), Y_i(t, x, y, 0)$, при выполнении которых в возмущенной системе (1.1) указанные инвариантные поверхности имеются, приведены формулы установленных поверхностей и представлено асимптотическое разложение каждой по степеням ε .

Конструктивность разработанного метода подтверждает пример четырехмерной системы (1.1) с аналитическим при $\varepsilon = 0$ возмущением. Выбор его среднего значения позволяет найти шесть точек, через малую окрестность каждой из которых проходит своя трехмерная инвариантная поверхность, гомеоморфная тору, при выполнении условия Зигеля на периоды и условия диссипативности.

2. Параметризация траекторий невозмущенной системы. 2.1. Построение фазового портрета. Для любого $i = \overline{1, n}$ рассмотрим двумерную автономную систему

$$C_i'(\varphi_i) = -\gamma_i S_i(\varphi_i), \quad S_i'(\varphi_i) = \gamma_i (C_i^3(\varphi_i) - \eta_i C_i(\varphi_i)) \quad (\gamma_i > 0, \eta_i \in \{0, \pm 1\}), \quad (2.1)$$

интегралами которой являются функции

$$C_i^4 - 2\eta_i C_i^2 + 2S_i^2 = a_i^2 - \eta_i^2 \quad \text{или} \quad (C_i^2 - \eta_i)^2 + 2S_i^2 = a_i^2 \quad (a_i \geq 0). \quad (2.2)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\eta_i = 1$.

При $a_i = 0$ интеграл (2.2) в координатах C_i, S_i вырождается в две особые точки $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ системы (2.1).

При $a_i = 1$ интеграл (2.2) задает особую точку $(0, 0)$ системы (2.1) и прилегающие к ней сепаратрисы $\Gamma_{i,-1}, \Gamma_{i,1}$. Сепаратриса $\Gamma_{i,j}$ ($j = \pm 1$) проходит через экстремальные точки $(2^{1/2}j, 0), (j, \pm 2^{-1/2})$, а значит, на ней $jC_i \in (0, 2^{1/2}]$, $S_i \in [-2^{-1/2}, 2^{-1/2}]$.

При $a_i \in (0, 1)$ интеграл (2.2) задает две замкнутые траектории $l_{i,-1}$ и $l_{i,1}$ системы (2.1). Траектория $l_{i,j}$ ($j = \pm 1$) лежит внутри $\Gamma_{i,j}$, охватывая точку $(j, 0)$, и у нее $jC_i \in [(1 - a_i)^{1/2}, (1 + a_i)^{1/2}]$, где $(1 \mp a_i)^{1/2}$ — точки пересечения $l_{i,j}$ с осью абсцисс.

При $a_i > 1$ интеграл (2.2) задает замкнутую траекторию $l_{i,0}$ системы (2.1), охватывающую $\Gamma_{i,-1} \cup \Gamma_{i,1}$, и у нее $C_i \in [-(a_i + 1)^{1/2}, (a_i + 1)^{1/2}]$, где граничные значения — это точки пересечения $l_{i,0}$ с осью OC_i .

Рассмотрим теперь случай, когда $\eta_i = 0, -1$. Тогда система (2.1) имеет единственную точку покоя $(0, 0)$, в которую интеграл (2.2) вырождается при $a_i = |\eta_i|$.

Все остальные траектории $l_{i,0}$ — замкнутые, охватывают начало координат, задаются интегралами (2.2) с $a_i > |\eta_i|$ и у них $C_i \in [-(a_i - \eta_i)^{1/2}, (a_i - \eta_i)^{1/2}]$.

2.2. Параметризация замкнутых траекторий. Основываясь на полученных границах изменения координаты C_i любой замкнутой траектории l_{ik_i} ($k_i = 0, \pm 1$) системы (2.1), введем константы c_{ik_i} ($i = \overline{1, n}$):

$$c_{i0} \in (\sqrt{\eta_i(\eta_i + 1)}, +\infty) \text{ при } \eta_i = 0, \pm 1; \quad j c_{ij} \in (1, 2^{1/2}) \text{ (} j = \pm 1) \text{ при } \eta_i = 1. \quad (2.3)$$

Тогда траектории $l_{i,0}$ при $\eta_i = 0, \pm 1$ и $l_{i,1}, l_{i,-1}$ при $\eta_i = 1$ параметризуются решениями задачи Коши $C_i(\varphi_i) = C_i(\varphi_i, c_{ik_i}), S_i(\varphi_i) = S_i(\varphi_i, c_{ik_i})$ системы (2.1) с начальными данными

$$C_i(0) = c_{ik_i}, \quad S_i(0) = 0 \quad (k_i = 0, \pm 1). \quad (2.4)$$

Тем самым, геометрически каждое c_{ik_i} задает максимальное по модулю значение C_i на параметризуемой замкнутой траектории l_{ik_i} .

Решение системы (2.1) с начальными данными (2.4) является вещественно-аналитической $\omega(c_{ik_i})$ -периодической функцией φ_i . При этом $C_i(\varphi_i)$ — четная функция, а $S_i(\varphi_i)$ — нечетная, поскольку решение системы (2.1) $(C_i(-\varphi_i), -S_i(-\varphi_i))$ также удовлетворяет начальным данным (2.4).

Кроме того, $C_i'(0) = 0$, а $S_i'(0) = \gamma_i c_{ik_i} (c_{ik_i}^2 - \eta_i) > 0$ при всех c_{ik_i} из (2.3). Поэтому, стартуя из точки $(c_{ik_i}, 0)$ при $\varphi_i = 0$, обход любой траектории l_{ik_i} с ростом φ_i осуществляется против часовой стрелки.

Соглашение. Все вводимые в дальнейшем функции и константы так или иначе будут зависеть от начального данного c_{ik_i} ($k_i = 0, \pm 1$), поэтому в них при желании будем опускать второй индекс k_i , когда его конкретное значение не представляет интереса. Так, например, $c_i = c_{ik_i}$.

Пусть $b_i = b_{ik_i}$ — вторая точка пересечения траектории l_{ik_i} с осью OC_i .

В результате выбор начального данного c_{ik_i} из (2.3) фиксирует $b_i = b_{ik_i}$ и константу $a_i = a_{ik_i}$ из интеграла (2.2), а именно:

$$a_i = c_i^2 - \eta_i; \quad b_{i0} = -c_{i0}, \quad b_{ij} = j(2 - c_{ij}^2)^{1/2} \quad (j = \pm 1), \quad (2.5)$$

причем $0 < |b_{ij}| < 1 < |c_{ij}| < 2^{1/2}$ и $|c_{ij}| - 1 < 1 - |b_{ij}|$.

2.3. Вычисление периодов. Подсчитаем период $\omega(c_{ik_i})$ движения по выбранной замкнутой траектории l_{ik_i} системы (2.1). Существует число φ_i^* такое, что $C_i(\varphi_i^*) = b_i$, $S_i(\varphi_i^*) = 0$ ($0 < \varphi_i^* < \omega(c_i)$).

Пусть $\varphi_i \in [0, \varphi_i^*]$. Тогда, если $c_i > 0$, то $S_i(\varphi_i) > 0$, а если $c_i < 0$, то $S_i(\varphi_i) < 0$. Поэтому в интеграле (2.2) $S_i = \text{sign}(c_i)2^{-1/2}(a_i^2 - (C_i^2 - \eta_i)^2)^{1/2}$ и в системе (2.1) $d\varphi_i = -\text{sign}(c_i)2^{1/2}\gamma_i^{-1}(a_i^2 - (C_i^2(\varphi_i) - \eta_i)^2)^{-1/2} dC_i(\varphi_i)$. Интегрируя это равенство по φ_i от 0 до φ_i^* , получаем $\varphi_i^* = I_*$, где $I_* = \text{sign}(c_i) \frac{2^{1/2}}{\gamma_i} \int_{b_i}^{c_i} \frac{dC_i}{((c_i^2 - \eta_i)^2 - (C_i^2 - \eta_i)^2)^{1/2}}$.

Продолжим движение по траектории, рассматривая $\varphi_i \in [\varphi_i^*, \omega(c_{ik_i})]$. Тогда произведение $c_i S_i(\varphi_i) < 0$. Поэтому в правых частях формул для S_i и $d\varphi_i$ изменится знак, и после интегрирования последней по φ_i от φ_i^* до $\omega(c_i)$ получаем, что $\omega(c_i) - \varphi_i^* = I_*$.

В результате имеем $\varphi_i^* = \omega(c_i)/2$, $C_i(\omega(c_i)/2) = b_i$, $S_i(\omega(c_i)/2) = 0$ и

$$\omega(c_i) = \text{sign}(c_i) \frac{2^{3/2}}{\gamma_i} \int_{b_i}^{c_i} \frac{dC_i}{((c_i^2 - \eta_i)^2 - (C_i^2 - \eta_i)^2)^{1/2}} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.6)$$

2.4. Выбор порождающих инвариантных поверхностей. Положим $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $C(\varphi) = (C_1(\varphi_1), \dots, C_n(\varphi_n))$, $S(\varphi)$ — аналогично; $k = (k_1, \dots, k_n)$, $c^k = (c_{1k_1}, \dots, c_{nk_n})$, $\omega(c^k) = (\omega(c_{1k_1}), \dots, \omega(c_{nk_n}))$;

$$\int_0^{\omega(c^k)} v(\varphi) d\varphi = \int_0^{\omega(c_1)} \dots \int_0^{\omega(c_n)} v(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

Для системы (1.1) введем в рассмотрение определяющую систему уравнений

$$\int_0^T \int_0^{\omega(c^k)} (S'_i X_i(t, C, S, 0) - C'_i Y_i(t, C, S, 0)) d\varphi dt = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.7)$$

в которой $C_i = C_i(\varphi_i, c_{ik_i})$, $S_i = S_i(\varphi_i, c_{ik_i}) - \omega(c_{ik_i})$ -периодическое по φ_i решение задачи Коши системы (2.1) с начальными данными (2.4), удовлетворяющими условиям (2.3), C'_i, S'_i — производные этого решения по φ_i , а X_i, Y_i — T -периодические по t возмущения системы (1.1).

Вектор c^k , являющийся решением системы (2.7), будем называть допустимым.

Замечание 2. В дальнейшем интерес будут представлять системы (1.1) с непустым множеством допустимых векторов. Для таких систем будет доказано, что любой допустимый вектор c^k , удовлетворяющий двум дополнительным условиям, которые будут сформулированы для возмущений системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ в разделах 4.3 и 5.1, задает точку $(c^k, 0)$, через малую окрестность которой при всех достаточно малых ε проходит сохранившаяся в T -периодически возмущенной системе (1.1) $(n + 1)$ -мерная инвариантная поверхность.

3. Переход в окрестность выбранной инвариантной поверхности невозмущенной системы. **3.1. Сдвиги невозмущенной системы в особые точки.** Зафиксируем любой допустимый вектор c^k . Для всякого $i = \overline{1, n}$ он фиксирует решение системы (2.1), параметризующее замкнутую траекторию l_{ik_i} , охватывающую особую точку $(k_i, 0)$. Тем самым, выделена особая точка $(k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)$ невозмущенной системы (1.2) и охватывающая эту точку инвариантная поверхность $l_{1k_1} \times \dots \times l_{nk_n}$, в малой окрестности которой будет осуществлен поиск инвариантной поверхности системы (1.1).

В ходе дальнейших рассуждений выяснится, что при $\eta_i = 1$ начало координат в системе (2.1) придется сдвигать в особую точку $(k_i, 0)$. Поэтому наряду с системой (2.1) будем рассматривать еще две системы, получаемые из (2.1) сдвигом переменной C_i на единицу вправо или влево.

Иными словами, в системе (2.1) надо сделать замену

$$C_i = \check{C}_i + k_i, \quad S_i = \check{S}_i \quad (k_i = 0, \pm 1; i = \overline{1, n}), \quad (3.1)$$

в результате которой получим систему

$$\check{C}_i'(\varphi_i) = -\gamma_i \check{S}_i(\varphi_i), \quad \check{S}_i'(\varphi_i) = \gamma_i (\check{C}_i^3(\varphi_i) + 3k_i \check{C}_i^2(\varphi_i) + (3k_i^2 - \eta_i) \check{C}_i(\varphi_i)), \quad (3.2)$$

имеющую интегралы

$$((\check{C}_i + k_i)^2 - \eta_i)^2 + 2\check{S}_i^2 = \check{a}_i^2 \quad (\check{a}_i \geq 0). \quad (3.3)$$

Теперь любая замкнутая траектория l_{ik_i} может быть задана как интегралом (2.2), так и соответствующим интегралом (3.3), и параметризована решением задачи Коши $\check{C}_i(\varphi_i) = \check{C}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i})$, $\check{S}_i(\varphi_i) = \check{S}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i})$ системы (3.2) с начальными данными

$$\check{C}_i(0) = \check{c}_i, \quad \check{S}_i(0) = 0 \quad (k_i = 0, \pm 1), \quad (3.4)$$

где $\check{c}_i = \check{c}_{ik_i} = c_{ik_i} - k_i$, а значит, с учетом (2.3) $\check{c}_{i0} \in (\sqrt{\eta_i(\eta_i + 1)}, +\infty)$ при $\eta_i = 0, \pm 1$; $\check{c}_{i,-1} \in (1 - 2^{1/2}, 0)$ и $\check{c}_{i1} \in (0, 2^{1/2} - 1)$ при $\eta_i = 1$.

Выбор \check{c}_i фиксирует $\check{a}_i = \check{a}_{ik_i}$ в (3.3) и $\check{b}_i = \check{b}_{ik_i} = b_i - k_i$ — вторую точку пересечения траектории l_{ik_i} ($k_i = 0, \pm 1$) с осью $O\check{C}_i$, а именно:

$$\begin{aligned} \check{a}_{i0} &= a_{i0} (= c_{i0}^2 - \eta_i), \quad \check{b}_{i0} = b_{i0} (= -c_{i0}), \\ \check{a}_{ij} &= (\check{c}_{ij} + 2j)\check{c}_{ij}, \quad \check{b}_{ij} = j((2 - (\check{c}_{ij} + j)^2)^{1/2} - 1) \quad (j = \pm 1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

причем $\check{a}_{ij} \in (0, 1)$, $|\check{b}_{ij}| > |\check{c}_{ij}|$ и $j\check{C}_i(\varphi_i, \check{c}_{ij}) \in [\check{b}_{i1}, \check{c}_{i1}]$ при \check{c}_{ij} из (3.4).

Очевидно, что период решения системы (2.1), параметризующего произвольную замкнутую траекторию l_{ik_i} , не меняется при переходе к системе (3.2), т. е. для любого начального данного \check{c}_i из (3.4) верно равенство

$$\omega(\check{c}_{ik_i}) = \omega(c_{ik_i}) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.6)$$

3.2. Исследование монотонности угловой переменной. Для любого \check{c}_{ik_i} из (3.4) введем в рассмотрение функцию $\alpha_i(\check{C}_i) = \alpha_{ik_i}(\check{C}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i}))$:

$$\alpha_i(\check{C}_i) = \{ \check{a}_{i0}^2 - \eta_i^2 + \eta_i \check{C}_i^2 \quad (\eta_i = 0, \pm 1), \quad \check{a}_{ij}^2 - j \check{C}_i^3 - 2 \check{C}_i^2 \quad (\eta_i = 1, j = \pm 1) \}. \quad (3.7)$$

Тогда на решениях системы (3.2) с начальными данными $0, (\check{c}_{ik_i}, 0)$ будем иметь

$$\alpha_i = \gamma_i^{-1} (\check{C}_i \check{S}_i' - 2 \check{C}_i' \check{S}_i) \quad (k_i = 0, \pm 1). \quad (3.8)$$

В самом деле, подставляя в (3.8) вместо $\check{C}_i'(\varphi_i)$, $\check{S}_i'(\varphi_i)$ правые части системы (3.2) и используя формулу (3.3), получаем (3.7).

Покажем теперь, что для любого c_{ik_i} функция α_{ik_i} знакоположительна.

А. Пусть $k_i = 0$. Если $\eta_i = 0$, то $\alpha_{i0} = c_{i0}^4 > 0$; если $\eta_i = 1$, то $\alpha_{i0} = (c_{i0}^2 - 1)^2 - 1 + \check{C}_i^2 > 0$, так как $c_{i0}^2 > 2$; если $\eta_i = -1$, то $\alpha_{i0} = (c_{i0}^2 + 1)^2 - 1 - \check{C}_i^2 \geq 2c_{i0} > 0$, так как $|\check{C}_i| = |C_i| \leq |c_{i0}|$.

Б. Пусть $k_i = j$ ($\eta_i = 1$). Поскольку $\alpha'_{ij}(\check{C}_i) = -(3j\check{C}_i + 4)\check{C}_i$ и $|\check{C}_i(\varphi_i)| < 1$, то $\alpha_{ij}(\check{C}_i)$ возрастает при $\check{C}_i < 0$ и убывает при $\check{C}_i > 0$. Поэтому при помощи (3.5) достаточно проверить ее положительность на концах:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\check{c}_{ij}) &= (\check{c}_{ij} + 2j)^2 \check{c}_{ij}^2 - (j\check{c}_{ij} + 2)\check{c}_{ij}^2 = (j\check{c}_{ij} + 2)(j\check{c}_{ij} + 1)\check{c}_{ij}^2 > 0, \\ \alpha_{ij}(\check{b}_{ij}) &= (\check{c}_{ij} + 2j)^2 \check{c}_{ij}^2 - (j\check{b}_{ij} + 2)\check{b}_{ij}^2 = (\check{c}_{ij} + 2j)\check{c}_{ij}((2 - (\check{c}_{ij} + j)^2)^{1/2} - \\ &\quad - (2 - (\check{c}_{ij} + j)^2)) > 0, \text{ так как } 2 - (\check{c}_{ij} + j)^2 \in (0, 1). \end{aligned}$$

Замечание 3. Если при $\eta_i = 1$ параметризовать замкнутые траектории l_{ij} , лежащие внутри Γ_{ij} , решениями системы (2.1), т. е. не переходить к системе (3.2), и выбирать c_{ij} из (2.4), то вводимая на решениях системы (2.1) функция $\alpha_{ij}(C_i) = \gamma_i^{-1}(C_i S'_i - 2C'_i S_i)$ будет знакопеременной. Действительно, $\alpha_{ij}(c_{ij}) = (c_{ij}^2 - 1)c_{ij}^2 > 0$, $\alpha_{ij}(b_{ij}) = (c_{ij}^2 - 2)(c_{ij}^2 - 1) < 0$, так как $jc_{ij} \in (1, 2^{1/2})$.

Геометрически этот факт означает отсутствие монотонности по угловой переменной при обходе траекторий, лежащих внутри сепаратрис Γ_{ij} , и обуславливает необходимость сдвига (3.1), так как монотонность функций α_{ik_i} позволяет осуществить переход в окрестности таких траекторий.

3.3. Сдвиги в возмущенной системе. Перед тем, как осуществить переход в малую окрестность выбранной инвариантной поверхности $l_{1k_1} \times \dots \times l_{nk_n}$ возмущенной системы (1.2), сделаем в системе (1.1) в соответствии с имеющимися k_i сдвиг в точку $(k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)$, аналогичный сдвигу (3.1) для каждой из систем (2.1) ($i = \overline{1, n}$), т. е. сделаем замену

$$x_i = \check{x}_i + k_i, \quad y_i = \check{y}_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3.9)$$

где $k_i \in \{0, \pm 1\}$, если $\eta_i = 1$, и $k_i = 0$, если $\eta_i = -1, 0$.

В результате будет получена система

$$\begin{cases} \varepsilon^{-\nu} \dot{\check{x}}_i = -\gamma_i \check{y}_i + \check{X}_i(t, \check{x}, \check{y}, \varepsilon)\varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} \dot{\check{y}}_i = \gamma_i(\check{x}_i^3 + 3k_i \check{x}_i^2 - (\eta_i - 3k_i^2)\check{x}_i) + \check{Y}_i(t, \check{x}, \check{y}, \varepsilon)\varepsilon \quad (\nu \in \{0, 1\}), \end{cases} \quad (3.10)$$

в которой $\check{X}_i(t, \check{x}, \check{y}, \varepsilon) = X_i(t, \check{x} + k, \check{y}, \varepsilon)$, \check{Y}_i аналогична ($i = \overline{1, n}$).

Очевидно, что замкнутые траектории l_{ik_i} системы (3.10), в которой возмущения \check{X}_i и \check{Y}_i отсутствуют, параметризуются решениями n задач Коши $\check{C}_i(\varphi_i) = \check{C}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i})$, $\check{S}_i(\varphi_i) = \check{S}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i})$ системы (3.2) с \check{c}_{ik_i} из (3.4).

3.4. Ненормированная обобщенная полярная замена. Сделаем теперь в системе (3.10) ненормированную обобщенную полярную замену

$$\check{x}_i = \check{C}_i(\varphi_i)(1 + r_i), \quad \check{y}_i = \check{S}_i(\varphi_i)(1 + r_i)^2 \quad (|r_i| < r_0 \leq 1, i = \overline{1, n}), \quad (3.11)$$

где $\check{C}_i(\varphi_i)$, $\check{S}_i(\varphi_i)$ — это $\omega(\check{c}_i)$ -периодическое вещественно аналитическое решение задачи Коши системы (3.2) с начальными данными $0, (\check{c}_{ik_i}, 0)$, причем \check{c}_{ik_i} берется из (3.4), и выполняется равенство (3.6).

Введем для краткости следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s_i &= 1 + r_i; \quad v_i^\xi = \partial v_i(\xi, \varepsilon) / \partial \xi, \quad v_i^\varepsilon = \partial v_i(\xi, \varepsilon) / \partial \varepsilon; \\ (\kappa) &= (t, \check{C}_1 s_1, \dots, \check{C}_n s_n, \check{S}_1 s_1^2, \dots, \check{S}_n s_n^2, \varepsilon), \quad (\kappa_0) = (t, \check{C}, \check{S}, 0); \\ R_i(t, \varphi, r, \varepsilon) &= \gamma_i^{-1} (\check{S}'_i \check{X}_i(\kappa) - \check{C}'_i (1 + r_i)^{-1} \check{Y}_i(\kappa)), \\ \Phi_i(t, \varphi, r, \varepsilon) &= \gamma_i^{-1} \alpha_i^{-1} (1 + r_i)^{-1} (\check{C}'_i (1 + r_i)^{-1} \check{Y}_i(\kappa) - 2\check{S}'_i \check{X}_i(\kappa)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Продифференцируем замену (3.11) в силу системы (3.10):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\nu} (\check{C}'_i \dot{r}_i + \check{C}'_i s_i \dot{\varphi}_i) &= -\gamma_i \check{S}'_i s_i^2 + \check{X}_i(\kappa) \varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} (2\check{S}'_i s_i \dot{r}_i + \check{S}'_i s_i^2 \dot{\varphi}_i) &= \gamma_i (\check{C}_i^3 s_i^3 + 3k_i \check{C}_i^2 s_i^2 - (\eta_i - 3k_i^2) \check{C}_i s_i) + \check{Y}_i(\kappa) \varepsilon. \end{aligned}$$

Разрешим полученную систему относительно \dot{r}_i и $\dot{\varphi}_i$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\nu} (\check{C}'_i \check{S}'_i - 2\check{C}'_i \check{S}'_i) s_i \dot{r}_i &= \\ &= -\gamma_i s_i (\check{S}'_i \check{S}'_i s_i^2 + (\check{C}_i^3 s_i^2 + 3k_i \check{C}_i^2 s_i - (\eta_i - 3k_i^2) \check{C}_i) \check{C}'_i) + (\check{S}'_i s_i \check{X}_i - \check{C}'_i \check{Y}_i) \varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} (\check{C}'_i \check{S}'_i - 2\check{C}'_i \check{S}'_i) s_i^2 \dot{\varphi}_i &= \\ &= \gamma_i s_i (\check{C}_i^4 s_i^2 + 2\check{S}'_i s_i^2 + 3k_i \check{C}_i^3 s_i - (\eta_i - 3k_i^2) \check{C}_i^2) + (\check{C}_i \check{Y}_i - 2\check{S}'_i s_i \check{X}_i) \varepsilon. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.8), (3.12) и сокращая на $\gamma_i s_i$, получаем систему

$$\begin{cases} \varepsilon^{-\nu} \alpha_i \dot{r}_i = -\check{C}'_i \Theta_i(\check{C}_i, r_i) + R_i(t, \varphi, r, \varepsilon) \varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} \alpha_i \dot{\varphi}_i = \alpha_i s_i + \check{C}'_i s_i^{-1} \Theta_i(\check{C}_i, r_i) + \alpha_i \Phi_i(t, \varphi, r, \varepsilon) \varepsilon, \end{cases} \quad (3.13)$$

где $\Theta_i = (1 - s_i)(3k_i \check{C}_i s_i - (\eta_i - 3k_i^2)(s_i + 1)) \check{C}_i = \alpha'_i r_i + (\alpha'_i / 2 - 3k_i \check{C}_i^2 / 2) r_i^2$, поскольку в силу (3.7) $\alpha'_{i0}(\check{C}_i) = 2\eta_i \check{C}_i$, $\alpha'_{ij}(\check{C}_i) = -(3j \check{C}_i + 4) \check{C}_i$.

Для завершения замены (3.11) разделим уравнения системы (3.13) на знак-определенную при выбранных начальных данных $\check{c}_{1k_1}, \dots, \check{c}_{nk_n}$ функцию $\alpha_i(\check{C}_i(\varphi_i))$, попутно выделяя члены младших порядков по r_1, \dots, r_n и ε в возмущениях R_i и Φ_i системы (3.13), описанных в (3.12).

В результате после замены (3.11) система (3.10) с учетом (3.12) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^{-\nu} \dot{r}_i = -\frac{\check{C}'_i}{\alpha_i} (\alpha'_i r_i + \alpha_i^* r_i^2) + \alpha_i^{-1} \left(R_{i0} + \sum_{l=1}^n R_{i0}^{r_l} r_l + R_{i0}^\varepsilon \varepsilon + O(|r| + \varepsilon)^2 \right) \varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} \dot{\varphi}_i = 1 + \alpha_i \rho_i r_i + O(|r|^2) + (\Phi_{i0} + O(|r| + \varepsilon)) \varepsilon \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.14)$$

где $R_{i0}(t, \varphi) = R_i(t, \varphi, 0, 0) = \gamma_i^{-1} (\check{S}'_i \check{X}_i(\kappa_0) - \check{C}'_i \check{Y}_i(\kappa_0))$,
 $\Phi_{i0}(t, \varphi) = \Phi_i(t, \varphi, 0, 0) = \gamma_i^{-1} \alpha_i^{-1} (\check{C}_i \check{Y}_i(\kappa_0) - 2\check{S}'_i \check{X}_i(\kappa_0))$,
 $R_{i0}^{r_l}(t, \varphi) = \gamma_i^{-1} \check{S}'_i (\check{C}_l \check{X}_i^{x_l}(\kappa_0) + 2\check{S}_l \check{X}_i^{y_l}(\kappa_0)) - \gamma_i^{-1} \check{C}'_i (\check{C}_l \check{Y}_i^{x_l}(\kappa_0) + 2\check{S}_l \check{Y}_i^{y_l}(\kappa_0) - \sigma_{il} \check{Y}_i(\kappa_0))$,
 $R_{i0}^\varepsilon(t, \varphi) = \gamma_i^{-1} (\check{S}'_i \check{X}_i^\varepsilon(\kappa_0) - \check{C}'_i \check{Y}_i^\varepsilon(\kappa_0))$ (σ_{il} — символ Кронекера),
 $\alpha_i^*(\check{C}_i) = \alpha'_i / 2 - 3k_i \check{C}_i^2 / 2$ из Θ_i , $\rho_i(\check{C}_i) = \alpha_i^{-1} (1 + \alpha_i^{-1} \alpha'_i \check{C}_i)$ ($\alpha_i(\check{C}_i)$ из (3.7)).

4. Первичное усреднение в радиальных уравнениях системы. 4.1. Разложения дугепериодических функций. Для непрерывных функций $v^\nu(t, \varphi)$, T -периодических по t и $\omega(\check{c}_i) = \omega(c_i)$ -периодических по φ_i , будем использовать разложение, зависящее от параметра ν :

$$v^\nu(t, \varphi) = \bar{v}^\nu + \nu \delta^\nu(\varphi) + \tilde{v}^\nu(t, \varphi) \quad (\nu = 0, 1),$$

в котором $\bar{v}^\nu = \left(T \prod_{m=1}^n \omega(c_m) \right)^{-1} \int_0^T \int_0^{\omega(c^k)} v^\nu(t, \varphi) d\varphi dt$ — это среднее значение v^ν , $\hat{v}^1 = T^{-1} \int_0^T v^1(t, \varphi) dt - \bar{v}^1$. Поэтому $\tilde{v}^1 = v^1(t, \varphi) - T^{-1} \int_0^T v^1(t, \varphi) dt$ имеет нулевое среднее значение по t , что влечет за собой периодичность функции $\int_{t_0}^t \tilde{v}^1(\tau, \varphi) d\tau$, также имеющей нулевое среднее значение за счет выбора константы $t_0 \in [0, T]$.

Для единообразия записи последующих замен и систем введем функции

$$\check{v}^0 = \tilde{v}^0(t, \varphi), \quad \check{v}^1 = \hat{v}^1(\varphi).$$

4.2. Среднее значение R_{io} . Покажем сначала, что функции $R_{io}(t, \varphi)$ из системы (3.14) имеют нулевое среднее значение, т. е. что

$$\overline{R_{io}} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.1)$$

Равенство (4.1) выполняется за счет того, что был выбран допустимый вектор начальных данных c^k , по определению удовлетворяющий системе (2.7).

Действительно, имеем $\gamma_i R_{io} \stackrel{(3.14), (3.12)}{=} \check{S}'_i \check{X}_i(t, \check{C}, \check{S}, 0) - \check{C}'_i \check{Y}_i(t, \check{C}, \check{S}, 0) \stackrel{(3.10)}{=} S'_i X_i(t, \check{C} + k, \check{S}, 0) - C'_i Y_i(t, \check{C} + k, \check{S}, 0) \stackrel{(3.1)}{=} S'_i X_i(t, C, S, 0) - C'_i Y_i(t, C, S, 0)$, откуда $\overline{R_{io}} = \left(T \cdot \prod_{m=1}^n \omega(c_m) \right)^{-1} \int_0^T \int_0^{\omega(c^k)} R_{io}(t, \varphi) d\varphi dt = 0$ в силу (2.7).

Таким образом, $R_{io} = \tilde{R}_{io}$ при $\nu = 0$ и $R_{io} = \hat{R}_{io} + \tilde{R}_{io}$ при $\nu = 1$.

4.3. Подготовка функций для первичной усредняющей замены.

А. Для всякого $i = \overline{1, n}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \check{g}_i^\nu}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \check{g}_i^\nu}{\partial \varphi_m} = R_{io}(t, \varphi) \quad (\nu = 0, 1). \quad (4.2)$$

С учетом (4.1) оно распадается на следующие три уравнения:

$$\frac{\partial \check{g}_i^0}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \check{g}_i^0}{\partial \varphi_m} = \tilde{R}_{io}(t, \varphi), \quad \sum_{m=1}^n \frac{\partial \hat{g}_i^1}{\partial \varphi_m} = \hat{R}_{io}(\varphi), \quad \frac{\partial \check{g}_i^1}{\partial t} = \tilde{R}_{io}(t, \varphi). \quad (4.3)$$

Для разрешимости уравнений (4.3) достаточно, чтобы подсчитанные по формуле (2.6) периоды $\omega_i = \omega(c_{ik_i})$ указанных в (2.7) решений C_i, S_i и период T , если $\nu = 0$, удовлетворяли условию Зигеля:

$$|l_0 T(1 - \nu) + l_1 \omega_1 + \dots + l_n \omega_n| > K(|l_0|(1 - \nu) + |l_1| + \dots + |l_n|)^{-\tau}, \quad (4.4)$$

в котором $K > 0$, $\tau \geq 1$, l_0, l_i — целые; константы T, ν — из системы (1.1).

Тогда по лемме В.5 [6, стр. 17] уравнения (4.3) имеют решения $\check{g}_i^0(t, \varphi)$ и $\hat{g}_i^1(\varphi)$ той же гладкости, что и правые части, т. е. непрерывные, вещественно-аналитические и $\omega(c^k)$ -периодические по φ , а решение $\check{g}_i^0(t, \varphi)$ также T -периодическое по t . Эти решения однозначно определяются фиксацией у них нулевого среднего значения.

В частности, пусть $g_{io}^1(t, \varphi) = \int_{t_0}^t \tilde{R}_{io}(\tau, \varphi) d\tau$ — периодическая по t, φ функция с нулевым средним значением. Тогда $\tilde{g}_i^1 = g_{io}^1(t, \varphi) - \hat{g}_{io}^1(\varphi)$ — единственное периодическое решение уравнения (4.3з) с нулевым средним.

Решения уравнений (4.3) задают единственное решение уравнения (4.2).

Замечание 4. Условие Зигеля выполняется для почти всех векторов по мере Лебега.

В. Для всякого $k_i = 0, \pm 1$ введем вспомогательные константы $c_i^* = c_{ik_i}^*$:

$$c_{i0}^* = \check{c}_{i0}^2(\check{c}_{i0}^2 - 2\eta_i), \quad c_{ij}^* = \check{c}_{ij}^2(\check{c}_{ij} + 2j)^2 \quad (i = \overline{1, n}; j = \pm 1).$$

Функцию $\beta_i = \beta_{ik_i}(\check{C}_i)$ удобно задать как решение уравнения

$$\beta_i' = \alpha_i^{-2}(\alpha_i \alpha_i' \rho_i - \alpha_i^*). \quad (4.5)$$

Для удобства интегрирования уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$\beta_i' = \alpha_i^{-3} \alpha_i' (5\alpha_i/2 - 2c_i^*) + k_i \alpha_i^{-3} \check{C}_i^2 (3\alpha_i/2 - \alpha_i' \check{C}_i),$$

используя для этого функции $\alpha_i(\check{C}_i)$ из (3.7), $\alpha_i'(\check{C}_i)$, а также $\alpha_i^*(\check{C}_i), \rho_i(\check{C}_i)$ из (3.14) и константы из (3.5). Тогда

$$\beta_i(\check{C}_i) = c_i^* \alpha_i^{-2}(\check{C}_i) - 5/(2\alpha_i(\check{C}_i)) + k_i \beta_i^*(\check{C}_i) \quad (k_i = 0, \pm 1), \quad (4.6)$$

где $\beta_{ij}^* = \int_{\check{c}_i}^{\check{C}_i} \frac{\tau^2(3\alpha_{ij}(\tau) - 2\tau\alpha_{ij}'(\tau))}{2\alpha_{ij}^3(\tau)} d\tau = \int_{\check{c}_i}^{\check{C}_i} \frac{\tau^2(3c_{ij}^* + 3j\tau^3 + 2\tau^2)}{2(c_{ij}^* - j\tau^3 - 2\tau^2)^3} d\tau$ при $j = \pm 1$.

С. Используя полученное решение уравнения (4.2) и β_i' из уравнения (4.5), для любых $i, l = \overline{1, n}$ и $\nu = 0, 1$ введем периодические функции

$$\begin{aligned} V_{il}^\nu(t, \varphi) &= \alpha_l^{-1} R_{io}^{r_l} - \rho_l \frac{\partial \check{g}_i^\nu}{\partial \varphi_l} + \sigma_{il} \check{C}_i' (\alpha_i^{-1} \alpha_i' \Phi_{io} + 2\check{g}_i^\nu \beta_i'), \\ V_{i\varepsilon}^\nu(t, \varphi) &= R_{io}^\varepsilon + \sum_{l=1}^n r \alpha_l^{-1} R_{io}^{r_l} \check{g}_l^\nu + \check{C}_i' \check{g}_i^\nu (\alpha_i^{-1} \alpha_i' \Phi_{io} + \check{g}_i^\nu \beta_i') - \\ &- \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \check{g}_i^\nu}{\partial \varphi_m} \Phi_{m\varepsilon}^\nu + \nu \frac{\partial \check{g}_i^\nu}{\partial \varphi_m} \right), \quad \Phi_{i\varepsilon}^\nu(t, \varphi) = \Phi_{io} + \rho_i \check{g}_i^\nu. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Д. Наконец, при тех же i, l, ν рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \tilde{h}_{il}^\nu}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \tilde{h}_{il}^\nu}{\partial \varphi_m} = V_{il}^\nu - \bar{V}_{il}^\nu, \quad (4.8)$$

правая часть которого, очевидно, имеет нулевое среднее значение. Поэтому (4.8) аналогично уравнению (4.2), и входящие в его решение функции $\tilde{h}_{il}^\nu(t, \varphi)$ и $\hat{h}_{il}^1(\varphi)$ — непрерывные, вещественно-аналитические, $\omega(c^k)$ -периодические по φ и T -периодические по t , однозначно определяемые наличием у них нулевого среднего значения.

4.4. Первичная усредняющая замена радиальных переменных. Покажем теперь, что при выполнении условия (4.4) периодическая по φ, t усредняющая замена

$$r_i = \alpha_i^{-1} \left((1 + \beta_i v_i) v_i + (\check{g}'_i + \nu \check{g}'_i \varepsilon) \varepsilon + \sum_{l=1}^n (\check{h}'_{il} + \nu \check{h}'_{il} \varepsilon) v_l \varepsilon \right), \quad (4.9)$$

в которой α_i введены в (3.7), β_i — в (4.6), \hat{g}'_i, \check{g}'_i — решения уравнения (4.2), а $\hat{h}'_{il}, \check{h}'_{il}$ — (4.8), преобразует систему (3.14) в систему

$$\varepsilon^{-\nu} \dot{v}_i = \sum_{l=1}^n \bar{V}'_{il} v_l \varepsilon + V'_{i\varepsilon} \varepsilon^2 + O((|v| + \varepsilon)^3), \quad \varepsilon^{-\nu} \dot{\varphi}_i = 1 + \rho_i v_i + \Phi'_{i\varepsilon} \varepsilon + O((|v| + \varepsilon)^2), \quad (4.10)$$

где функции $\rho_i, V'_{il}, \Phi'_{i\varepsilon}, V'_{i\varepsilon}$ определены в (3.14) и (4.7) ($\nu = 0, 1; i = \overline{1, n}$).

Подставляя замену (4.9) в уравнения для $\dot{\varphi}_i$ системы (3.14), получаем с учетом (4.7₃) уравнения для угловых переменных системы (4.10).

Дифференцируя затем замену (4.9) в силу систем (3.14) и (4.10) и умножая на $\alpha_i \varepsilon^\nu$, для всякого $i = \overline{1, n}$ получаем тождество

$$\begin{aligned} & -\check{C}'_i \alpha'_i \alpha_i^{-1} \left(v_i + \beta_i v_i^2 + \check{g}'_i \varepsilon + \nu \check{g}'_i \varepsilon^2 + \sum_{l=1}^n \check{h}'_{il} v_l \varepsilon \right) - \check{C}'_i \alpha'_i \alpha_i^{-2} (v_i + \check{g}'_i \varepsilon)^2 + \\ & + \left(R_{io} + \sum_{l=1}^n R'_{io} \alpha_l^{-1} (v_l + \check{g}'_l \varepsilon) + R_{i\varepsilon} \varepsilon \right) \varepsilon + O((|v| + \varepsilon)^3) \equiv \\ & \equiv -\alpha_i^{-1} \alpha'_i \check{C}'_i (1 + \rho_i v_i + \Phi'_{i\varepsilon} \varepsilon) \left(v_i + \beta_i v_i^2 + \check{g}'_i \varepsilon + \nu \check{g}'_i \varepsilon^2 + \sum_{l=1}^n \check{h}'_{il} v_l \varepsilon \right) + \\ & + \sum_{l=1}^n \bar{V}'_{il} v_l \varepsilon + V'_{i\varepsilon} \varepsilon^2 + \beta'_i \check{C}'_i v_i^2 + \frac{\partial \check{g}'_i}{\partial t} \varepsilon + \frac{\partial \check{h}'_{il}}{\partial t} v_l \varepsilon + \\ & + \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \check{g}'_i}{\partial \varphi_m} \varepsilon + \nu \frac{\partial \check{g}'_i}{\partial \varphi_m} \varepsilon^2 + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \check{h}'_{il}}{\partial \varphi_m} v_l \varepsilon \right) (1 + \rho_m v_m + \Phi'_{m\varepsilon} \varepsilon). \end{aligned}$$

Приравняем в нем коэффициенты при различных степенях v_i и ε .

При v_i тождество вырождаются, а при ε возникает уравнение (4.2).

При v_i^2 получаем уравнение (4.5), его решение приведено в (4.6).

При ε^2 получаем формулу (4.7₂) для $V'_{i\varepsilon}$, так как в ней согласно (4.7₃) и (4.5) $\check{C}'_i \check{g}'_i (\alpha_i^{-1} \alpha'_i \Phi_{io} + \check{g}'_i \beta'_i) = \alpha_i^{-1} \alpha'_i \check{C}'_i \check{g}'_i \Phi'_{i\varepsilon} - \alpha_i^{-2} \alpha'_i \check{C}'_i (\check{g}'_i)^2$.

Наконец, при $v_l \varepsilon$ получаем уравнение (4.8), поскольку в V'_{il} из формулы (4.7₁) имеем $\sigma_{il} \check{C}'_i (\alpha_i^{-1} \alpha'_i \Phi_{io} + 2\check{g}'_i \beta'_i) = \sigma_{il} \alpha_i^{-2} \check{C}'_i (\alpha_i \alpha'_i (\rho_i \check{g}'_i + \Phi'_{i\varepsilon}) - 2\alpha'_i \check{g}'_i)$.

Следовательно, частично усредненная система (4.10) получена.

5. Завершающие усреднения при условии диссипативности. 5.1. Условие диссипативности. Для проведения последующих усреднений системы (3.14) наряду с уже используемыми условиями (2.7) и (4.4) необходимо еще одно предположение, которое можно назвать условием диссипативности. Оно заключается в том, что матрица \bar{V}' , составленная из средних значений функций $V'_{il}(t, \varphi)$, определенных в (4.7), не имеет собственных чисел с нулевыми вещественными частями.

Итак, будем предполагать, что в системе (4.10)

$$\bar{V}^\nu = \{\bar{V}_{il}^\nu\}_{i,l=1}^n \text{ — некритическая матрица.} \quad (5.1)$$

Замечание 5. Легко проверить, что в матрице V^ν из возмущенной части системы (1.1) используются только функции $X(t, x, y, 0)$ и $Y(t, x, y, 0)$.

Нарушение условия (5.1) безусловно является исключительным случаем, позволяющим продолжить поиск инвариантной поверхности, но уже большей размерности. Так, в работе [7] предложен процесс конструктивного построения классов вещественных автономных систем порядка 2^d ($d \geq 1$), в том числе полиномиальных, в которых при всех достаточно малых положительных значениях параметра происходит бифуркация рождения инвариантного тора коразмерности единица.

5.2. Вторичная усредняющая замена радиальных переменных. Предположение (5.1) позволяет аннулировать функции $V_{i\varepsilon}^\nu(t, \varphi)$ в радиальных уравнениях системы (4.10) посредством дупериодической замены

$$v_i = u_i + \bar{f}_i^\nu \varepsilon + \check{f}_i^\nu \varepsilon^2 + \nu \tilde{f}_i^\nu \varepsilon^3 \quad (\check{f}_i^0 = \check{f}_i^0(t, \varphi), \check{f}_i^1 = \check{f}_i^1(\varphi)), \quad (5.2)$$

преобразующей систему (4.10) в систему

$$\varepsilon^{-\nu} \dot{u}_i = \sum_{l=1}^n \bar{V}_{il}^\nu u_l \varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^3), \quad \varepsilon^{-\nu} \dot{\varphi}_i = 1 + \rho_i u_i + \Psi_{i\varepsilon}^\nu \varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^2) \quad (5.3)$$

с $\Psi_{i\varepsilon}^\nu(t, \varphi) = \Phi_{i\varepsilon}^\nu + \bar{f}_i^\nu \rho_i$ ($\nu = 0, 1$; $i = \overline{1, n}$).

Дифференцируя замену (5.2) в силу (4.10) и (5.3), получаем уравнение

$$\frac{\partial \check{f}_i^\nu}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \check{f}_i^\nu}{\partial \varphi_m} = \sum_{l=1}^n \bar{V}_{il}^\nu \bar{f}_l^\nu + V_{i\varepsilon}^\nu, \quad (5.4)$$

для разрешимости которого необходимо аннулировать среднее значение правой части, что легко сделать благодаря условию (5.1), положив

$$\bar{f}^\nu = -(\bar{V}^\nu)^{-1} \bar{V}_\varepsilon^\nu \quad (f^\nu = (f_1^\nu, \dots, f_n^\nu), V_\varepsilon^\nu = (V_{1\varepsilon}^\nu, \dots, V_{n\varepsilon}^\nu)). \quad (5.5)$$

После этого уравнение (5.4) принимает вид $\frac{\partial \check{f}_i^\nu}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \check{f}_i^\nu}{\partial \varphi_m} = \widehat{V}_{i\varepsilon}^\nu + \tilde{V}_{i\varepsilon}^\nu$, совпадающий с (4.2), что позволяет наряду с постоянным вектором \check{f}^ν из равенства (5.5) однозначно найти требуемые решения \check{f}_i^ν и \hat{f}_i^1 .

5.3. Усредняющая замена угловых переменных. Переходя к упрощению уравнений для угловых переменных системы (5.3), усредним в них функции $\Psi_{i\varepsilon}^\nu$, сделав периодическую замену угловых переменных

$$\varphi_i = \psi_i + \check{\xi}_i^\nu \varepsilon + \nu \tilde{\xi}_i^\nu \varepsilon^2 \quad (\check{\xi}_i^0 = \check{\xi}_i^0(t, \psi), \check{\xi}_i^1 = \check{\xi}_i^1(\psi)). \quad (5.6)$$

В результате замены (5.6) получим систему

$$\varepsilon^{-\nu} \dot{u}_i = \sum_{l=1}^n \bar{V}_{il}^\nu u_l \varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^3), \quad \varepsilon^{-\nu} \dot{\psi}_i = 1 + \bar{\Psi}_{i\varepsilon}^\nu \varepsilon + \rho_i u_i + O((|u| + \varepsilon)^2). \quad (5.7)$$

Действительно, дифференцируя замену (5.6) в силу (5.3) и (5.7) и учитывая, что $\Psi_{i\varepsilon}^\nu(t, \psi_i + \check{\xi}_i^\nu \varepsilon + \nu \check{\xi}_i^\nu \varepsilon^2) = \Psi_{i\varepsilon}^\nu(t, \psi_i) + O(\varepsilon)$, получаем аналогичное (4.2) уравнение

$$\frac{\partial \check{\xi}_i^\nu}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial \check{\xi}_i^\nu}{\partial \psi_m} = \Psi_{i\varepsilon}^\nu - \bar{\Psi}_{i\varepsilon}^\nu. \quad (5.8)$$

Отметим, что обратная к (5.6) замена может быть записана в виде

$$\psi_i = \varphi_i + \chi_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon, \quad (5.9)$$

где $\chi_i^\nu = -\check{\xi}_i^\nu + \left(\sum_{m=1}^n \check{\xi}_i^\nu \frac{\partial \check{\xi}_i^\nu}{\partial \varphi_m} - \nu \check{\xi}_i^\nu \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ — непрерывная, вещественно-аналитическая, $\omega(c^k)$ -периодическая по φ , T -периодическая по t функция, причем $\xi_i^\nu = \xi_i^\nu(t, \varphi)$ определяются из (5.8) ($\nu = 0, 1$; $i = \overline{1, n}$).

6. Инвариантные поверхности системы (1.1), их асимптотика. 6.1. Завершающая масштабирующая замена. Для удобства введем следующие векторы: $u = (u_1, \dots, u_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Сделаем в системе (5.7) дополнительно масштабирующую замену

$$u = w\varepsilon^{3/2}, \quad (6.1)$$

которая преобразует ее в записанную в векторной форме систему

$$\dot{w} = (\bar{V}^\nu w\varepsilon + W^\nu(t, \psi, w, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu, \quad \dot{\psi} = (1 + \bar{\Psi}_\varepsilon^\nu + \Xi^\nu(t, \psi, w, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu, \quad (6.2)$$

где W^ν, Ξ^ν — вещественные непрерывные вектор-функции своих аргументов в малой окрестности точки $w = 0$, $\varepsilon = 0$, непрерывно дифференцируемые по w, ψ , $\omega(c^k)$ -периодические по ψ , T -периодические по t .

Действительно, векторы $W^\nu(t, \psi, w, \varepsilon) = O((|w|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^3)\varepsilon^{-3}$, $\Xi^\nu(t, \psi, w, \varepsilon) = \text{diag} \{ \rho_1, \dots, \rho_n \} w + O((|w|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^2)\varepsilon^{-3/2}$, а функции $O((|w|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^2)$ — вещественно-аналитические по ψ и трижды непрерывно дифференцируемы в малой окрестности точки $w = 0$, $\varepsilon = 0$. Поэтому, в частности, в этой точке непрерывны $(W^\nu)'_w$ и $(\Xi^\nu)'_w$.

6.2. Применение леммы Хейла. Система (6.2) удовлетворяет условиям лемм Хейла 2.1, 2.2 [8], а значит, у нее при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует инвариантная поверхность

$$w = H^\nu(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon^{1/2}, \quad (6.3)$$

где H^ν — непрерывная, T -периодическая по t , непрерывно дифференцируемая и $\omega(c^k)$ -периодическая по ψ функция.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Система (4.10) при выполнении условия (5.1) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет непрерывную, T -периодическую по t , непрерывно дифференцируемую и $\omega(c^k)$ -периодическую по φ инвариантную поверхность

$$v = \Theta^\nu(t, \varphi, \varepsilon), \quad (6.4)$$

где $\Theta^\nu = \bar{f}^\nu \varepsilon + (\check{f}^\nu(t, \varphi) + H^\nu(t, \varphi + \chi^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon, \varepsilon))\varepsilon^2 + \nu \check{f}^\nu(t, \varphi)\varepsilon^3$, полученную подстановкой инвариантной поверхности (6.3) в композицию замен (5.2), (5.9), (6.1).

При этом функция f однозначно определяется из уравнений (5.4) и (5.5), а χ^ν — из (5.9).

Лемма 2. Система (3.14) при выполнении условий (4.4) и (5.1) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет непрерывную, T -периодическую по t , непрерывно дифференцируемую и $\omega(c^k)$ -периодическую по φ инвариантную поверхность

$$r_i = \Upsilon_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.5)$$

в которой $\Upsilon_i^\nu = \alpha_i^{-1}(\varphi_i) (\Theta_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + \check{g}_i^\nu(t, \varphi)\varepsilon + \beta_i(\varphi_i)(\Theta_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon))^2 + \nu\check{g}_i^\nu(t, \varphi)\varepsilon^2) + \alpha_i^{-1}(\varphi_i) \left(\sum_{l=1}^n (\check{h}_{il}^\nu(t, \varphi) + \nu\check{h}_{il}^\nu(t, \varphi)\varepsilon)\Theta_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon) \right)$, полученную подстановкой инвариантной поверхности (6.4) в замену (4.9). При этом функции α_i заданы формулами (3.7), β_i — (4.6), функции g_i однозначно определяются из уравнений (4.3), а h_i — из (4.8).

Следствие 1. Инвариантная поверхность (6.5) системы (3.14) имеет следующее асимптотическое разложение: $\Upsilon_i^\nu = \alpha_i^{-1}(\varphi_i) ((\bar{f}_i^\nu + \check{g}_i^\nu(t, \varphi))\varepsilon + (\check{f}_i^\nu(t, \varphi) + H_i^\nu(t, \varphi, 0) + (\bar{f}_i^\nu)^2\beta_i(\varphi_i) + \nu\check{g}_i^\nu(t, \varphi) + \sum_{l=1}^n \bar{f}_l^\nu\check{h}_{il}^\nu(t, \varphi))\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2)$.

6.3. Результаты исследования.

Теорема 1. Система (1.1) для всякого допустимого вектора c^k такого, что выполняются условия (4.4) и (5.1), при любом достаточно малом положительном ε имеет $(n+1)$ -мерную непрерывную, T -периодическую по t , непрерывно дифференцируемую и $\omega(c^k)$ -периодическую по φ инвариантную поверхность

$$x = \Gamma_x^\nu, \quad y = \Gamma_y^\nu, \quad (6.6)$$

в которой $\Gamma_{x,i}^\nu = k_i + \check{C}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i})(1 + \Upsilon_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon))$, $\Gamma_{y,i}^\nu = \check{S}_i(\varphi_i, \check{c}_{ik_i})(1 + \Upsilon_i^\nu(t, \varphi, \varepsilon))^2$ ($i = \overline{1, n}$), полученную подстановкой инвариантной поверхности (6.5) в композицию замен (3.9), (3.11). При этом инвариантная поверхность (6.6) проходит через малую окрестность точки $(c^k, 0)$ при $\varphi = 0$ и гомеоморфна тору размерности $n+1$, если факторизовать время t по периоду.

Следствие 2. С учетом следствия 1 инвариантная поверхность (6.6) имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} \Gamma_{x,i}^\nu &= k_i + \check{C}_i(\varphi_i) \left(1 + \alpha_i^{-1}(\varphi_i) \left((\bar{f}_i^\nu + \check{g}_i^\nu(t, \varphi))\varepsilon + \left(\check{f}_i^\nu(t, \varphi) + \Gamma_i^\nu(t, \varphi, 0) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (\bar{f}_i^\nu)^2\beta_i(\varphi_i) + \nu\check{g}_i^\nu(t, \varphi) + \sum_{l=1}^n \bar{f}_l^\nu\check{h}_{il}^\nu(t, \varphi) \right) \varepsilon^2 \right) \right) + o(\varepsilon^2), \\ \Gamma_{y,i}^\nu &= \check{S}_i(\varphi_i) \left(1 + 2\alpha_i^{-1}(\varphi_i) \left((\bar{f}_i^\nu + \check{g}_i^\nu(t, \varphi))\varepsilon + \left((2\alpha_i(\varphi_i))^{-1}(\bar{f}_i^\nu + \check{g}_i^\nu(t, \varphi))^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \check{f}_i^\nu(t, \varphi) + \Gamma_i^\nu(t, \varphi, 0) + (\bar{f}_i^\nu)^2\beta_i(\varphi_i) + \nu\check{g}_i^\nu(t, \varphi) + \sum_{l=1}^n \bar{f}_l^\nu\check{h}_{il}^\nu(t, \varphi) \right) \varepsilon^2 \right) \right) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Таким образом, если в некоторой системе (1.1) имеется m различных допустимых векторов, при которых выполняются условия (4.4) и (5.1), то (1.1) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет m инвариантных поверхностей, гомеоморфных $(n+1)$ -мерному тору и проходящих через малые окрестности соответствующих порождающих точек.

7. Определяющая система в аналитическом случае. 7.1. Структура определяющей системы. Изучим систему (2.7) в важном частном случае, когда в системе (1.1) функции $X_i(t, x, y, 0)$, $Y_i(t, x, y, 0)$ — непрерывные, T -периодические по t и аналитические по x_i, y_i в области $G = \{(t, x, y) : t \in \mathbb{R}, |x_1|, \dots, |x_n| < x_0, |y_1|, \dots, |y_n| < y_0\}$, причем $x_0 > 2^{1/2}, y_0 > 2^{-1/2}$.

Иными словами, будем считать, что в системе (1.1)

$$X_i(t, x, y, 0) = \sum_{p,q=0}^{\infty} X_i^{(p,q)}(t)x^p y^q, \quad Y_i(t, x, y, 0) = \sum_{p,q=0}^{\infty} Y_i^{(p,q)}(t)x^p y^q \quad (7.1)$$

— абсолютно равномерно относительно t сходящиеся в области G степенные ряды с вещественными, непрерывными, T -периодическими по t коэффициентами, векторы p, q имеют целые неотрицательные компоненты, $x^p = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}, y^q$ — аналогично.

В результате в i -м уравнении системы (2.7) под интегралом стоят ряды

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} (X_i^{(p,q)}(t)S'_i(\varphi_i) - Y_i^{(p,q)}(t)C'_i(\varphi_i))C^p(\varphi)S^q(\varphi),$$

абсолютно сходящиеся при любых вещественных $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ равномерно по t .

Так как интеграл по периоду от произведения четной функции $C_i(\varphi_i)$ и нечетной функции $S_i(\varphi_i)$ равен нулю, то система (2.7) принимает вид

$$\sum_{p=e^i}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \overline{X_i^{(p,2q)}} \int_0^{\omega(c^k)} S'_i C^p S^{2q} d\varphi + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=e^i}^{\infty} \overline{\gamma_i Y_i^{(p,2q-e^i)}} \int_0^{\omega(c^k)} C^p S^{2q} d\varphi = 0,$$

где черта сверху обозначает среднее значение по t , $e^i = (0, \dots, 1_{(i)}, \dots, 0)$.

Используя тождество $(2q_i + 1)C_i^{p_i} S_i^{2q_i} S'_i = (C_i^{p_i} S_i^{2q_i+1})' + \gamma_i p_i C_i^{p_i-1} S_i^{2q_i+2}$, сводим систему (2.7) к виду

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=e^i}^{\infty} \left(\frac{p_i + 1}{2q_i - 1} \overline{X_i^{(p+e^i, 2(q-e^i))}} + \overline{Y_i^{(p, 2q-e^i)}} \right) \prod_{l=1}^n \int_0^{\omega(c_l)} C_l^{p_l} S_l^{2q_l} d\varphi_l = 0.$$

Выражая $d\varphi_l$ из первого уравнения системы (2.1) и $S(\varphi_l)$ на полупериодах из интеграла (2.2), как в п. 2.3 с учетом (2.5) получаем

$$\int_0^{\omega(c_l)} C_l^{p_l} S_l^{2q_l} d\varphi_l = \text{sign}(c_l) \frac{2^{3/2-q_l}}{\gamma_l} \int_{b_l}^{c_l} C_l^{p_l} ((c_l^2 - \eta_l)^2 - (C_l^2 - \eta_l)^2)^{q_l-1/2} dC_l.$$

После сокращения на $\prod_{l=1}^n \text{sign}(c_l) \frac{2^{3/2}}{\gamma_l}$ система (2.7) принимает вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=e^i}^{\infty} d_i^{(p,q)} \prod_{l=1}^n \theta_{p_l, q_l}(c_l k_l) = 0 \quad (p_l, q_l \geq 0; k_l = 0, \pm 1; i = \overline{1, n}), \quad (7.2)$$

где $\theta_{p_l, q_l}(c_l) = \int_{b_l}^{c_l} \tau^{p_l} (c_l^2 - \eta_l)^2 - (\tau^2 - \eta_l)^2)^{q_l-1/2} d\tau$, $b_l = b_l(c_l)$ из формулы (2.5);

$d_i^{(p,q)} = 2^{-(q_1+\dots+q_n)} \left(\frac{p_i + 1}{2q_i - 1} \overline{X_i^{(p+e^i, 2(q-e^i))}} + \overline{Y_i^{(p, 2q-e^i)}} \right)$, $\overline{X_i^{(p,q)}}$, $\overline{Y_i^{(p,q)}}$ — средние значения коэффициентов из разложений (7.1).

Приведем более удобную для вычислений запись функций $\theta_{p_\nu, q_\nu}(c_{l_{k_\nu}})$:

$$\begin{aligned}\theta_{p_\nu, q_\nu}(c_{l_0}) &= c_{l_0}^{p_\nu+2q_\nu} \int_{-1}^1 \zeta^{p_\nu} ((c_{l_0}^2 \zeta^2 + c_{l_0}^2 - 2\eta_\nu)(1 - \zeta^2))^{q_\nu-1/2} d\zeta, \\ \theta_{p_\nu, q_\nu}(c_{l_j}) &= \frac{j^{p_\nu+1}(c_{l_j}^2 - 1)^{2q_\nu}}{2} \int_{-1}^1 ((c_{l_j}^2 - 1)\zeta + 1)^{(p_\nu-1)/2} (1 - \zeta^2)^{q_\nu-1/2} d\zeta,\end{aligned}\quad (7.3)$$

где согласно (2.3), если $k_\nu = 0$, то $c_{l_0} \in (\sqrt{\eta_\nu(\eta_\nu + 1)}, +\infty)$ ($\eta_\nu = 0, \pm 1$), а если $k_\nu = j$ ($j = \pm 1$), то $\eta_\nu = 1$, $j c_{l_j} \in (1, 2^{1/2})$.

В самом деле, если в (7.2) $k_\nu = 0$, то $b_{l_0} = -c_{l_0}$ и надо сделать замену $\tau = c_{l_0} \zeta$, а если $k_\nu = j$, то $b_{l_j} = j(2 - c_{l_j}^2)^{1/2}$ и надо сделать замену $\tau = j((c_{l_j}^2 - 1)\zeta + 1)^{1/2}$.

Отметим, что в (7.3) функции $\theta_{p_\nu, q_\nu}(c_{l_0}) = 0$ при нечетных p_ν .

Кроме того, через $\theta_{0,0}(c_{l_{k_\nu}})$ из (7.3) удобно записать и формулу (2.6) для периода $\omega(c_{l_{k_\nu}})$ движения по замкнутой траектории $l_{l_{k_\nu}}$ системы (2.1):

$$\omega(c_{l_{k_\nu}}) = \frac{2^{3/2}}{\gamma_\nu} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{(\zeta(c_\nu, c_{l_{k_\nu}})(1 - \zeta^2))^{1/2}} \quad (\nu = \overline{1, n}), \quad (7.4)$$

где функция $\zeta = \{c_{l_0}^2(1 + \zeta^2) - 2\eta_\nu$ при $k_\nu = 0$, $4(c_{l_j}^2 \zeta + 1 - \zeta)$ при $k_\nu = j$ ($j = \pm 1$).

7.2. Применение полученных результатов на практике. Пусть система (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

$$n = 2; \quad \eta_1 = -1, \eta_2 = 1; \quad \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2; \quad \text{выполняется (7.1);}$$

все коэффициенты $d_i^{(p,q)}$ ($i = 1, 2$) системы (7.2) равны нулю, кроме

$$\begin{aligned}d_1^{(\check{p}^1, \check{q}^1)} &= 1, \quad (\check{p}^1, \check{q}^1) = (0, 0; 3, 1); \quad d_1^{(\hat{p}^1, \hat{q}^1)} = -10, \quad (\hat{p}^1, \hat{q}^1) = (0, 0; 2, 1); \\ d_1^{(\check{p}^1, \check{q}^1)} &= 18, \quad (\check{p}^1, \check{q}^1) = (0, 0; 1, 1); \quad d_2^{(\check{p}^2, \check{q}^2)} = 20, \quad (\check{p}^2, \check{q}^2) = (0, 0; 1, 1); \\ d_2^{(\hat{p}^2, \hat{q}^2)} &= -22, \quad (\hat{p}^2, \hat{q}^2) = (0, 2; 1, 1); \quad d_2^{(\check{p}^2, \check{q}^2)} = 1, \quad (\check{p}^2, \check{q}^2) = (0, 1; 1, 1).\end{aligned}\quad (7.5)$$

Тогда невозмущенная по отношению к (1.1) система (1.2) имеет три точки покоя: $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$.

В свою очередь определяющая система (7.2) принимает вид

$$\begin{cases} (18\theta_{0,1}(c_1) - 10\theta_{0,2}(c_1) + \theta_{0,3}(c_1))\theta_{0,1}(c_2) = 0, \\ (20\theta_{0,1}(c_2) - 22\theta_{2,1}(c_2) + \theta_{1,1}(c_2))\theta_{0,1}(c_1) = 0, \end{cases}\quad (7.6)$$

где согласно (7.3) и в силу выбора η_1, η_2 имеем

$$\begin{aligned}c_1 &= c_{l_0} \in (0, +\infty) \quad (k_1 = 0), \\ c_2 &= \{c_{2,-1} \in (-2^{1/2}, -1), c_{21} \in (1, 2^{1/2}), c_{20} \in (2^{1/2}, +\infty)\} \quad (k_2 = 0, \pm 1); \\ \theta_{0,m}(c_{l_0}) &= c_{l_0}^{2m} \int_{-1}^1 ((c_{l_0}^2 \zeta^2 + c_{l_0}^2 + 2)(1 - \zeta^2))^{m-1/2} d\zeta \quad (m = 1, 2, 3), \\ \theta_{0,1}(c_{20}) &= c_{20}^2 \int_{-1}^1 ((c_{20}^2 \zeta^2 + c_{20}^2 - 2)(1 - \zeta^2))^{-1/2} d\zeta, \\ \theta_{1,1}(c_{20}) &= 0, \quad \theta_{1,1}(c_{2j}) = \frac{(c_{2j}^2 - 1)^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta = \frac{\pi}{4}(c_{2j}^2 - 1)^2, \\ \theta_{2,1}(c_{20}) &= c_{20}^4 \int_{-1}^1 \zeta^2 ((c_{l_0}^2 \zeta^2 + c_{l_0}^2 + 2)(1 - \zeta^2))^{1/2} d\zeta, \\ \theta_{2,1}(c_{2j}) &= \frac{j(c_{2j}^2 - 1)^2}{2} \int_{-1}^1 ((c_{2j}^2 - 1)\zeta + 1)^{1/2} (1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta \quad (j = \pm 1).\end{aligned}$$

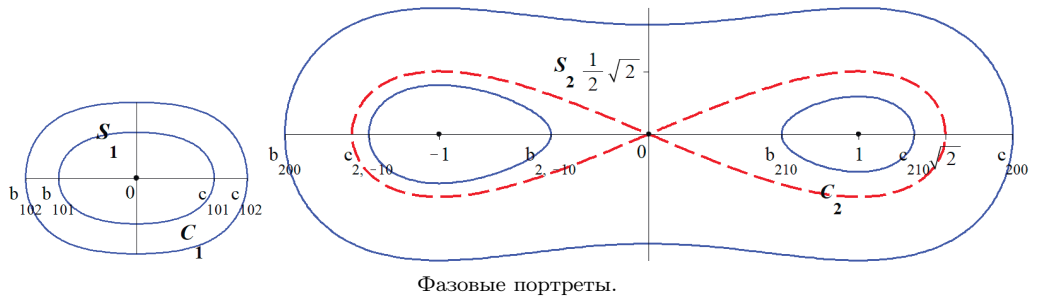
Пусть $L_1(c_{10}) = 18\theta_{0,1}(c_{10}) - 10\theta_{0,2}(c_{10}) + \theta_{0,3}(c_{10})$. Тогда находим $L_1(1.01) \approx 0.614$, $L_1(1.02) \approx -0.29$, $L_1(1.44) \approx -1.14$, $L_1(1.45) \approx 3.756$. Поэтому существуют такие $c_{101} \in (1.01, 1.02)$ и $c_{102} \in (1.44, 1.45)$, что $L_1(c_{101}) = L_1(c_{102}) = 0$.

Пусть теперь $L_{2k_2}(c_{2k_2}) = 20\theta_{0,1}(c_{2k_2}) - 22\theta_{2,1}(c_{2k_2}) + \theta_{1,1}(c_{2k_2})$. Имеем $L_{20}(1.73) \approx 0.43$, $L_{20}(1.74) \approx -0.14$, $L_{21}(1.26) \approx -0.001$, $L_{21}(1.27) \approx 0.015$, $L_{2,-1}(-1.34) \approx -0.03$, $L_{2,-1}(-1.33) \approx 0.02$. Поэтому существуют такие $c_{200} \in (1.73, 1.74)$, $c_{210} \in (1.26, 1.27)$ и $c_{2,-10} \in (-1.34, -1.33)$, что $L_{20}(c_{200}) = L_{21}(c_{210}) = L_{2,-1}(c_{2,-10}) = 0$.

В результате система (7.6) имеет шесть решений $(c_{10\iota}, c_{2k_2 0})$ ($\iota = 1, 2$; $k_2 = 0, \pm 1$).

Согласно формуле (7.4) решения задач Коши системы (2.1) с $i = 1$ имеют периоды $\omega(c_{101}) \approx 4.7$, $\omega(c_{102}) \approx 4.0$, а с $i = 2 - \omega(c_{200}) \approx 3.0$, $\omega(c_{210}) \approx 2.4$, $\omega(c_{2,-10}) \approx 2.6$.

По теореме 1 через малую окрестность каждой из шести точек $(c_{10\iota}, c_{2k_2 0}, 0, 0)$ при любом малом ε проходит трехмерный инвариантный тор в случае выполнения условия Зигеля (4.4) на периоды и условия диссипативности (5.1), которое при желании можно проверить непосредственными вычислениями.



На фазовых портретах (см. рисунок) построены траектории систем (2.1), попарные произведения которых задают шесть инвариантных поверхностей невозмущенной системы (1.2). В их малой окрестности сохраняются инвариантные поверхности любой системы (1.1) при условиях (7.5). При этом нарушение условий Зигеля и диссипативности, как уже отмечалось, является исключительным случаем. Поэтому малое изменение коэффициентов $d_{ik_i}^{(p,q)}$, влекущее малое непрерывное изменение допустимых решений определяющей системы, может привести к выполнению условий (4.4) и (5.1).

Литература

1. Бибигов Ю. Н. Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой колебаний // Матем. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 3. С. 323–335.
2. Бибигов Ю. Н. Бифуркация рождения инвариантных торов с бесконечно малой частотой // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. Вып. 2. С. 81–92.
3. Басов В. В. Бифуркация положения равновесия в критическом случае двух пар нулевых корней характеристического уравнения // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 45–60.

4. Басов В. В. Бифуркация положения равновесия в системах с нулевыми корнями характеристического уравнения // Матем. заметки. 2004. Т. 75. Вып. 3. С. 323–341.
5. Басов В. В. Инвариантные поверхности стандартных двумерных систем с консервативным первым приближением третьего порядка // Дифференц. уравнен. 2008. Т. 44, № 1. С. 3–18.
6. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
7. Басов В. В. Бифуркация инвариантного тора коразмерности единица // Матем. заметки. 2001. Т. 69. Вып. 1. С. 3–17.
8. Hale J. K. Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems // Ann. of Math. Second Series. 1961. Vol. 73, no 3. P. 496–531.

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2019 г.;
 после доработки 19 марта 2019 г.;
 рекомендована в печать 21 марта 2019 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент; vlvbasov@rambler.ru
Жуков Артем Сергеевич — аспирант; artzhukov1111@gmail.com

Invariant surfaces of periodic systems with conservative cubic first approximation

V. V. Basov, A. S. Zhukov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Zhukov A. S. Invariant surfaces of periodic systems with conservative cubic first approximation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 3, pp. 376–393. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.303> (In Russian)

We study simultaneously two classes of time periodic systems of ODEs with small parameter $\varepsilon \geq 0$: systems with “fast” and “slow” time. Their corresponding unperturbed systems $\dot{x}_i = -\gamma_i y_i \varepsilon^\nu$, $\dot{y}_i = \gamma_i (x_i^3 - \eta_i x_i) \varepsilon^\nu$ ($i = \overline{1, n}$, $\nu = 0, 1$) have from one to 3^n equilibrium points. We give explicit conditions on perturbations independent from parameter, which in both cases guarantee the existence of a certain number of invariant $(n + 1)$ -dimensional surfaces, which are homeomorphic to tori for all sufficiently small values of the parameter. We provide explicit formulae of these surfaces, their asymptotic expansions and collections of systems with six invariant surfaces.

Keywords: invariant surface, bifurcation, averaging, separatrix.

References

1. Bibikov Yu. N., “Bifurcation of the generation of invariant tori with infinitesimal frequency”, *Algebra i Analiz* **10**(2), 81–92 (1998). (In Russian)
2. Bibikov Yu. N., “Stability and bifurcation under periodic perturbations of the equilibrium position of an oscillator with an infinitely large or infinitely small oscillation frequency”, *Math. Notes* **65**(3), 269–279 (1999).
3. Basov V. V., “Bifurcation of the Equilibrium Point in the Critical Case of Two Pairs of Zero Characteristic Roots”, *Proceedings of the Steklov Inst. of Math.* **236**, 37–52 (2002).

4. Basov V. V., “Bifurcation of the Point of Equilibrium in Systems with Zero Roots of the Characteristic Equation”, *Mathematical Notes* **75**(3), 297–314 (2004).
5. Basov V. V., “Invariant Surfaces of Standard Two-Dimensional Systems with Conservative First Approximation of the Third Order”, *Differential Equations* **44**(1), 1–18 (2008).
6. Bibikov Yu. N., *Multifrequency nonlinear oscillations and its bifurcations* (Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1991). (In Russian)
7. Basov V. V., “Bifurcation of Invariant Tori of Codimension One”, *Math. Notes* **69**(1), 3–16 (2001).
8. Hale J. K., “Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems”, *Annals of Math. Second Series* **73**(3), 496–531 (1961).

Received: February 19, 2019

Revised: March 19, 2019

Accepted: March 21, 2019

Author's information:

Vladimir V. Basov — vlvbasov@rambler.ru

Artem S. Zhukov — artzhukov1111@gmail.com