Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

П. Н. Иевлев

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$-i\,\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\Delta u,\quad u(0,x)=\varphi(x), \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$.

В работе [1] в случае $d=1$ был предложен способ вероятностного представления решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера (1), основанный на использовании известного вероятностного представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Именно, на одномерное уравнение Шрёдингера предлагалось смотреть как на уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{2}$$

но с комплексным $\sigma=e^{\frac{i\pi}{4}}$.

В случае вещественного σ для решения задачи Коши $u(0,x)=\varphi(x)$ для уравнения (2) справедливо вероятностное представление

$$u(t,x)=\mathbf{E}\,\varphi\big(x+\sigma\,w(t)\big), \tag{3}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

В случае комплексного σ такое представление решения в общем случае невозможно ввиду того, что функции φ – функция вещественной переменной, и поэтому невозможно без дополнительных предположений подставить в нее комплексную переменную.

В [1] было замечено, что для $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ (а именно этот класс функций представляет наибольший интерес для уравнения Шрёдингера)

Ключевые слова: предельные теоремы, уравнение Шрёдингера, мера Фейнмана, эволюционные уравнения.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 17-11-01136).

представление (3) может быть переписано как

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi\big(x + \sigma\, w(t)\big) = \frac{1}{2\pi}\,\mathbf{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\, e^{-i\sigma w(t)}\, \widehat{\varphi}(p)\, dp. \qquad (4)$$

Если подставить в (4) $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$, то для произвольной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ интеграл в (4), вообще говоря, разойдется, что, в частности, означает, что для $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ проблема "неаналитичности" сводится к проблеме регуляризации расходящегося интеграла.

В [1] был предложен способ регуляризации расходящегося интеграла (4), основанный на разложении начальной функции в сумму двух функций одна из которых аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а другая в нижнюю, с одновременной аппроксимацией винеровского процесса ограниченными снизу случайными процессами. Таких аппроксимаций было предложено две. В первом случае винеровский процесс аппроксимировался стохастическими интегралами по пуассоновской случайной мере с интенсивностью специального вида, а во втором случае винеровский процесс аппроксимировался процессами, построенными по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным четвертым моментом.

В настоящей работе мы обобщим результаты [1] на случай произвольной размерности $d \geqslant 1$. Более того, будет показано, что в случае аппроксимации винеровского процесса процессами, построенными по суммам независимых случайных величин требование конечности четвертого момента в [1] является излишним, достаточно конечности третьего.

Далее, для упрощения изложения в [1] использовалось понятие "обобщенной случайной величины", хотя подчеркивалось, что никакого строгого математического смысла этому понятию не придается. В настоящей работе мы придадим этому понятию точный математический смысл. Именно, как оказалось, "обобщенную случайную величину" в смысле [1] можно рассматривать как вариант случайного функционала, см., например, [2], гл. 3, §1 или [4], гл. 3, §31. Соответствующая теория в [2] была построена с использованием идеологии теории обобщенных функций. Мы также используем в настоящей работе понятие случайного функционала, но в отличие от определения, данного в [2], в данной работе вводится иное пространство пробных (основных) функций для функционалов, так как класс C_0^∞, используемый в [2], не подходит для наших целей.

В следующем параграфе мы вводим понятие случайного функционала и определяем необходимые операции над ними. На случайные функционалы в работе обобщаются обычные понятия теории вероятностей (случайный вектор, независимость, характеристическая функция). При этом оказывается, что многие утверждения, связанные с обычными случайными величинами, имеют точные аналоги для случайных функционалов. Такой подход дал возможность в следующих параграфах рассматривать одномерный и многомерный случай практически одинаково.

Автор выражает благодарность Н. В. Смородиной и И. А. Ибрагимову за внимание и поддержку в работе.

§2. Случайные функционалы и операции над ними.

По аналогии с пространством $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$, рассмотренном в [3], гл. 2, §1, введем пространство $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ функций

$$\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

являющихся обратными преобразованиями Фурье зарядов конечной полной вариации с финитным носителем

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(p,\,x)}\, \widehat{\Phi}(dp). \tag{5}$$

В случае, когда преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ функции φ является суммируемой на $\mathbb{R}^d$ функцией, заряд $\widehat{\Phi}$ будет абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d$, причем

$$\widehat{\Phi}(A) = \int\limits_A \widehat{\varphi}(p)\, dp.$$

Ниже преобразованием Фурье функции класса $\mathcal{Z}_0$ будем называть как функцию $\widehat{\varphi}(p)$, так и заряд $\widehat{\Phi}(A)$.

Элементы пространства $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ являются целыми аналитическими функциями d переменных, ограниченными на $\mathbb{R}^d$.

Топологию на $\mathcal{Z}_0$ зададим следующим образом: будем говорить, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{Z}_0} 0$, если для всех непрерывных ограниченных g

$$\int g\, d\widehat{\Phi}_n \to 0.$$

Пусть $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathcal{P})$ – вероятностное пространство. Через $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать множество случайных величин на этом вероятностном пространстве со значениями в $\mathbb{R}^d$. Под сходимостью в $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ будем понимать сходимость по распределению.

Далее нам понадобятся определения случайного функционала и обобщенной случайной функции, введенное в ([2], с. 302 и [4], с. 123), однако нам удобно выбрать в качестве класса пробных функций класс $\mathcal{Z}_0$.

Линейные отображения $\xi\colon \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{RV}(\mathbb{R})$ будем называть случайными функционалами. Действие ξ на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ обозначаем через $\xi[\varphi]$. Обобщенной случайной функцией будем называть непрерывный случайный функционал. Множество обобщенных случайных функций будем обозначать $\mathcal{GRV}$.

Заметим, что множество $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ обычных случайных величин естественно вкладывается в $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ обобщенных случайных функций, а именно: каждой $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ мы поставим в соответствие $\tilde{\xi} \in \mathcal{GRV}$, действующую на $\varphi \in \mathcal{Z}_0$ по правилу

$$\tilde{\xi}[\varphi] = \varphi(-\xi). \tag{6}$$

Для простоты обозначений мы будем опускать волну над ξ.

Далее нам понадобится определить ряд операций над обобщенными случайными функциями. В силу специфики нашей задачи они не всегда будут совпадать с определениями из [2].

Под $\alpha\xi$ для вещественных α и $\xi \in \mathcal{GRV}$ будем понимать обобщенную случайную функцию, действующую по правилу

$$(\alpha\xi)[\varphi] = \xi[\varphi_\alpha], \tag{7}$$

где $\varphi_\alpha(x) = \varphi(\alpha x)$.

Обобщенным математическим ожиданием $\xi \in \mathcal{GRV}$ будем называть линейный функционал $\mathbf{E}\,\xi\colon \mathcal{Z}_0 \to \mathbb{C}$, действующий по правилу

$$(\mathbf{E}\,\xi)[\varphi] = \mathbf{E}\,\xi[\varphi]. \tag{8}$$

В [2] этот объект называется средним значением обобщенной случайной функции.

Характеристической функцией обобщенной случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ будем называть функцию $f_\xi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$f_\xi(p) = \mathbf{E}\,\xi[e^{-i(p,\,x)}],$$

где под скобками в экспоненте понимается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, а функционал действует по переменной x.

Для обычной случайной величины $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ обобщенная характеристическая функция совпадает с обычной.

Далее будем говорить, что ξ и η из $\mathcal{GRV}$ независимы, если при всех φ, $\psi \in \mathcal{Z}_0$ обычные случайные величины $\xi[\varphi]$ и $\eta[\psi]$ независимы. Аналогично определим независимость набора $\{\xi_k\} \subset \mathcal{GRV}$.

Проекцией случайного функционала ξ на k-ую координатную ось будем называть случайный функционал $\xi_k \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^1)$, действующий на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$\xi_k[\varphi] = \xi[\varphi_k]. \tag{9}$$

В правой части под $\varphi_k(x) = \varphi(x_k)$ мы понимаем функцию $\varphi_k \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$, зависящую только от переменной x_k.

Определим теперь обратную операцию. Паре обобщенных случайных функций ξ, $\eta \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ сопоставим обобщенную случайную функцию $(\xi,\,\eta) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^2)$, которая действует на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^2)$ по правилу

$$(\xi,\,\eta)[\varphi(x,\,y)] = \xi[\eta[\varphi(x,\,y)]].$$

Аналогичным образом определим обобщенную случайную величину $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$, действующую на $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_d)$.

Таким образом, обобщенная случайная величина $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ может быть записана в виде $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, где под ξ_k понимается k-ая проекция.

Лемма 2.1. *Пусть обобщенные случайные функции $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \mathcal{GRV}$ независимы. Тогда*

$$f_{(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_d)}(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_d) = \prod_{k=1}^{d} f_{\xi_k}(p_k).$$

Доказательство. Докажем утверждение в случае $n = 2$.

$$\begin{aligned} f_{(\xi,\,\eta)}(p_1,\,p_2) &= \mathbf{E}\,(\xi,\,\eta)[e^{-ipx}e^{-ipy}] = \mathbf{E}\,\xi[\eta[e^{-ipy}e^{-ipx}]] \\ &= \mathbf{E}\,\xi[e^{-ipx}]\eta[e^{-ipy}] = \mathbf{E}\,\xi[e^{-ipx}]\,\mathbf{E}\,\eta[e^{-ipy}] = f_\xi(p_1)\,f_\eta(p_2). \quad \square \end{aligned}$$

Далее мы будем использовать стандартные обозначения для оператора инверсии I

$$\mathrm{I}\varphi(x) = \varphi(-x) \tag{10}$$

и оператора сдвига T_x на $x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{T}_x\varphi(y) = \varphi(y + x).$$

С каждой обобщенной случайной функцией ξ свяжем оператор Q_ξ, действующий по правилу

$$Q_\xi\varphi(x) = \mathbf{E}\,\xi[\mathrm{T}_x\varphi]. \tag{11}$$

Лемма 2.2. *Оператор Q_ξ действует на функции из $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ как псевдодифференциальный с символом $f_\xi(p)$.*

Доказательство. Имеем

$$Q_\xi\varphi(x) = \mathbf{E}\,\xi[\mathrm{T}_x\varphi] = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-i(p,\,x)}\mathbf{E}\,\xi[e^{-i(p,\,y)}]\,\widehat{\Phi}(dp)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-i(p,\,x)} f_\xi(p)\,\widehat{\Phi}(dp). \quad \square$$

Пусть характеристическая функция $\xi \in \mathcal{GRV}$ имеет непрерывные производные по всем переменным вплоть до порядка $|\beta|$. Обобщенными семиинвариантами ξ будем называть коэффициенты s^α, $|\alpha| \leqslant |\beta|$ (здесь $|\alpha|$, $|\beta|$ – модули мультииндексов α, β) в формуле

$$\ln f_\xi(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \sum_{|\alpha|=1}^{|\beta|} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}\, p^\alpha + O(|p|^{|\beta|+1}).$$

Пусть семиинварианты $\xi \in \mathcal{GRV}$ корректно определены. Положим

$$\widehat{B}(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \exp\left(-\sum_{|\alpha|=1,\,3} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!} p^\alpha\right).$$

В этом случае вторым центрированием ξ будем называть случайный функционал $\xi^{(2)}$, определяемый равенством

$$\xi^{(2)}[\varphi] = \xi[\varphi * B],$$

где B – обратное преобразование Фурье функции $\widehat{B}$. Нетрудно показать, что семиинварианты первого и третьего порядка случайного функционала $\xi^{(2)}$ равны нулю.

Классом $\mathcal{Z}_{0+}$ будем называть множество функций $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$, таких что $\operatorname{supp}\widehat{\Phi} \subset (-\infty, 0]$. Аналогично определяется $\mathcal{Z}_{0-}$. Функции класса $\mathcal{Z}_{0+}$ ограничены в верхней полуплоскости, а функции класса $\mathcal{Z}_{0-}$ – в нижней.

Далее, проекторы Рисса $P_\pm$ – это операторы, действующие на $\psi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$P_\pm \psi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\, \theta(\pm p)\, \widehat{\Psi}(dx),$$

где θ – стандартная функция Хевисайда. Для удобства читателя напомним, что функция Хевисайда $\theta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x > 0$. Проекторы Рисса "разбивают" функцию $\psi \in \mathcal{Z}_0$ на $\psi_+ \in \mathcal{Z}_{0+}$ и $\psi_- \in \mathcal{Z}_{0-}$.

Для $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^1)$ определим обобщенную случайную функцию $\xi^\pm$, действующую на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$\xi^\pm[\varphi] = \xi[(\mathrm{I}P_+ + P_-)\varphi],$$

где I – это оператор инверсии (10). Для обычных случайных величин $\xi \in \mathcal{RV}$ последнее равенство может быть переписано как

$$\xi^\pm[\varphi] = \varphi_+(\xi) + \varphi_-(-\xi).$$

Следующим шагом обобщим операцию $\pm$ на класс $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$. Обобщенной случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ поставим в соответствие $\xi^\pm$ из того же класса, действующую по правилу

$$\xi^\pm = (\xi_1^\pm, \ldots, \xi_d^\pm),$$

где ξ_k – проекция ξ на k-ую ось, определенная формулой (9).

Введем еще одно обозначение. Если $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, то через

$$x^\pm = (|x_1|, \ldots, |x_d|) \tag{12}$$

будем обозначать набор чисел, составленный из модулей координат вектора x.

Лемма 2.3. *Обобщенные характеристические функции ξ, $\xi^\pm \in \mathcal{GRV}$ $(\mathbb{R}^d)$ связаны соотношением*

$$f_{\xi^\pm}(p) = f_\xi(p^\pm).$$

Утверждение леммы проверяется прямым вычислением.

Ясно, что если $\xi \in \mathcal{RV}$, то $f_{\xi^\pm}(p)$ в окрестности $p = 0$ не имеет непрерывных производных и, соответственно, для нее формально не определены ни семиинварианты, ни второе центрирование. Тем не менее, в некоторых частных случаях такое определение можно дать.

Именно, дополнительно предположим, что семиинварианты s^α обобщенной случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ корректно определены и положим

$$\widehat{B}(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \exp\bigg(- \sum_{|\alpha|=1,3} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}(p^\pm)^\alpha \bigg).$$

В этом случае вторым центрированием $\xi^\pm$ будем называть обобщенную случайную функцию $\xi^{\pm,(2)}$, определяемую равенством

$$\xi^{\pm,(2)}[\varphi] = \xi^\pm[\varphi * B],$$

где B – обратное преобразование Фурье функции $\widehat{B}$.

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.4. *Пусть вектор $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ имеет диагональную матрицу ковариации. Тогда*

$$\xi^{(2)} = \big(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_d^{(2)}\big).$$

В данном случае под матрицей ковариации $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ мы понимаем матрицу, составленную из обобщенных семиинвариантов ξ второго порядка. В частности, утверждение справедливо для векторов с независимыми компонентами.

§3. Аппроксимация решения задачи Коши математическими ожиданиями функционалов от процессов, построенных по пуассоновской случайной мере.

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $(0, \infty)^2$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt, dx) = \frac{dt\,dx}{x^3}\,.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс, полагая

$$\xi_1^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x\,\nu(ds,\,dx).$$

Известно, что (см. [5], с. 42) характеристическая функция случайной величины $\xi_1^\varepsilon(t)$ равна

$$f_{\xi_1^\varepsilon(t)}(p) = \exp\left(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\left(e^{ipx}-1\right)\,\frac{dx}{x^3}\right).$$

Пусть $\xi_k^\varepsilon(t),\ k = 2,\,\ldots,\,d,$ – независимые копии $\xi_1^\varepsilon(t)$. Как и выше, положим $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$. При фиксированных $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ определим обобщенную случайную функцию $\eta^\varepsilon(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^\varepsilon(t) = \left(\sigma\xi_1^\varepsilon(t),\,\sigma\xi_2^\varepsilon(t),\,\ldots,\,\sigma\xi_d^\varepsilon(t)\right)^{\pm,\,(2)}$$

Аналогично тому, как это было сделано в [1], можно показать, что в данном случае операция второго центрирования корректно определена.

В силу независимости набора $\{\xi_k^\varepsilon(t)\}$, последнее равенство можно переписать как

$$\eta^\varepsilon(t) = \left((\sigma\xi_1^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)},\,(\sigma\xi_2^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)},\ldots,(\sigma\xi_d^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)}\right).$$

Заметим, что ни операция второго центрирования, ни операция $\pm$, не влияют на независимость (они сводятся к подмене пробной функции). Поэтому характеристическая функция $\eta^\varepsilon(t)$ распадается в произведение

$$f_{\eta^\varepsilon(t)}(p_1,\ldots,p_d) = \prod_{k=1}^d f_{(\sigma\xi_k^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)}}(p_k).$$

Характеристические функции внутри произведения легко пересчитываются через характеристическую функцию $\xi_1^\varepsilon(t)$

$$\begin{aligned} f_{(\sigma\xi_k^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)}}(p_k) &= f_{(\sigma\xi_1^\varepsilon(t))^{(2)}}(|p_k|) \\ &= \exp\biggl(-\frac{i\,t\,p_k^2}{2} + t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Bigl(e^{i|p_k|\sigma x} - 1 - i\,|p_k|\,\sigma\,x \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{2}\left(i\,|p_k|\,\sigma\,x\right)^2 - \frac{1}{6}\left(i\,|p_k|\,\sigma\,x\right)^3\Bigr)\,\frac{dx}{x^3}\biggr). \end{aligned}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, полагая

$$P_\varepsilon^t = Q_{\eta^\varepsilon(t)},$$

где $Q_{\eta^\varepsilon(t)}$ – оператор, задаваемый формулой (11), соответствующий $\xi = \eta^\varepsilon(t)$. При каждом t этот оператор действует как псевдодифференциальный с символом $f_{\eta^\varepsilon(t)}$, и, следовательно, распадается в произведение коммутирующих операторов, каждый из которых обладает полугрупповым свойством по t.

Далее, обозначим через P^t полугруппу

$$P^t = e^{\frac{it}{2}\Delta},$$

где Δ – оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$ как оператор Лапласа. Полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\,\cdot)$ уравнения Шрёдингера (1) (см., например, [7], X.8.).

Нам понадобится одно техническое утверждение, которое легко проверить непосредственным вычислением.

Лемма 3.1. *Пусть*

$$g(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\,.$$

Тогда при всех $z \in \mathbb{C}$, *удовлетворяющих условию* $\arg z \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, *справедливо неравенство* $|g(z)| \leqslant |z|^3$.

Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 3.2. *Существует постоянная* $C > 0$, *такая что для любой* $\varphi \in W_2^3(\mathbb{R}^d)$ *и всех* $t > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|P_\varepsilon^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant Ct\varepsilon^2\|\varphi\|_{W_2^3}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1 параграфа 4 статьи [1] и использует формулу Дюамеля ([6], гл. IX, §2 п. 1)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)(A+B)}\,B\,e^{\tau A}\,d\tau.$$

Введем обозначения

$$A = \frac{i}{2}\,\Delta, \qquad B = G_\varepsilon - A,$$

где G_ε – генератор полугруппы P_ε^t.

Отметим, что при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^3 \to W_2^3} \leqslant 1,$$

а из леммы 1 работы [1] следует справедливость неравенства

$$\|e^{t(A+B)}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant 1.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^3 \to L_2}$.

Так как генератор произведения коммутирующих полугрупп есть сумма генераторов, оператор B является псевдодифференциальным, а его символ $\widehat{\beta}$ распадается в сумму

$$\widehat{\beta}(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \sum_{k=1}^{d} \widehat{b}(p_k), \tag{13}$$

где

$$\widehat{b}(p) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i\,|p|\,\sigma\,x - \frac{1}{2}\big(i\,|p|\,\sigma\,x\big)^2 - \frac{1}{6}\big(i\,|p|\,\sigma\,x\big)^3 \Big) \,\frac{dx}{x^3}. \tag{14}$$

Заметим, что для некоторой константы $C > 0$ справедливо неравенство $|\widehat{b}(p)|^2 \leqslant C\,|p|^6\,\varepsilon^2$. Из этого неравенства следует, что для некоторой константы $\widetilde{C} > 0$ справедливо

$$\begin{aligned} \|B\varphi\|_{L_2}^2 &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^d \int |\widehat{\beta}(p)|^2\,|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp \\ &\leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^d \int \sum_{k=1}^{d} \big|\widehat{b}(p_k)\big|^2\,|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp \\ &\leqslant \tilde{C}\varepsilon^2 \int \sum_{k=1}^{d} |p_k|^6\,|\,\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp = \tilde{C}\,\varepsilon^2\,\|\varphi\|_{W_2^3}. \end{aligned} \tag{15}$$

Из последней оценки следует утверждение теоремы. □

§4. Аппроксимация решения задачи Коши математическими ожиданиями функционалов от процессов, построенных по суммами независимых случайных векторов

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных d-мерных векторов с общим распределением $\mathcal{P}$, сосредоточенном на $\mathbb{R}^d_+$. Будем предполагать, что случайный вектор ξ_1 имеет единичную матрицу ковариаций и конечные моменты третьего порядка. Пусть $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Определим последовательность $\{\zeta^n\}_{n=1}^{\infty}$ сложных пуассоновских процессов, полагая

$$\zeta^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

При каждом $t > 0$ характеристическая функция случайного вектора $\zeta^n(t)$ равна

$$f_{\zeta^n}(p_1, \ldots, p_d) = \exp\left(nt \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \left(\exp\left(\frac{i(p,y)}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) \mathcal{P}(dy)\right).$$

Как и ранее, положим $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$ и определим при каждом фиксированном t обобщенную случайную функцию $\eta^n(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^n(t) = \big(\sigma\zeta^n_1(t), \sigma\zeta^n_2(t), \ldots, \sigma\zeta^n_d(t)\big)^{\pm,(2)}.$$

Нетрудно показать, что операция второго центрирования в данном случае определена корректно.

Далее, так как матрица ковариации обобщенной случайной функции $\eta^n(t)$ диагональна, то, в силу леммы 2.4, справедливо

$$\eta^n(t) = \big((\sigma\zeta^n_1(t))^{\pm,(2)}, (\sigma\zeta^n_2(t))^{\pm,(2)}, \ldots, (\sigma\zeta^n_d(t))^{\pm,(2)}\big).$$

Обобщенная характеристическая функция $\eta^n(t)$ имеет вид

$$f_{\eta^n(t)}(p_1, \ldots, p_d) = -\frac{i(p,p)}{2} + n \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \left(e^{\frac{i\sigma(p^\pm, y)}{\sqrt{n}}} - 1 \right.$$
$$\left. - \left(\frac{i\sigma(p^\pm, y)}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{i\sigma(p^\pm, y)}{\sqrt{n}}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{i\sigma(p^\pm, y)}{\sqrt{n}}\right)^3\right) \mathcal{P}(dy). \quad (16)$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, полагая

$$P_n^t = Q_{\eta^n(t)},$$

где $Q_{\eta^n(t)}$ – оператор, задаваемый формулой (11), соответствующий $\xi = \eta^n(t)$. При каждом t этот оператор действует как псевдодифференциальный с символом $f_{\eta^n(t)}$.

Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 4.1. *Существует постоянная $C > 0$, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^3(\mathbb{R}^d)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant \frac{C\,t}{\sqrt{n}}\,\|\varphi\|_{W_2^3}, \tag{17}$$

где, как и выше,

$$P^t = e^{\frac{it}{2}\Delta}. \tag{18}$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения также основано на использовании формулы Дюамеля (3). Обозначим

$$A = \frac{i}{2}\Delta, \qquad B = G_n - A, \tag{19}$$

где G_n – генератор полугруппы P_n^t.

Как и выше, достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^3\to L_2}$. Заметим, что величина $(p^{\pm}, y)$ в подынтегральном выражении формулы (16) всегда неотрицательна. Из леммы 3.1 следует неравенство

$$\Big|g\Big(\frac{i\sigma(p^{\pm}, y)}{\sqrt{2n}}\Big)\Big| \leqslant \Big(\frac{(p^{\pm}, y)}{\sqrt{2n}}\Big)^3 \leqslant \Big(\frac{\|\,p^{\pm}\,\|\cdot\|y\|}{\sqrt{2n}}\Big)^3.$$

Таким образом,

$$|\widehat{b}_n(p_1, \dots, p_d)| \leqslant \frac{\|\,p^{\pm}\,\|^3}{2^{3/2}\sqrt{n}}\int \|y\|^3\,\mathcal{P}(dy).$$

Последний интеграл конечен в силу условия на моменты третьего порядка.

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\|B\varphi\|_{L_2}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int |\widehat{\varphi}(p)|^2\,|\widehat{b}_n(p)|^2\,dp\\ &\leqslant \frac{C}{n}\int |\widehat{\varphi}(p)|^2\,\|\,p^{\pm}\,\|^6\,dp \leqslant \frac{\tilde{C}}{n}\,\|\varphi\|_{W_2^3}^2.\end{aligned}$$

Из последней оценки следует утверждение теоремы. □

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–176.
2. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые приложения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.* — Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1961.
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобженные функции и действия над ними.* — Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1958.
4. К. Ито, *Вероятностные процессы.* — Издательство иностранной литературы, М., 1960.
5. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* — Издательство МЦНМО, М., 2007.
6. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* — Мир, М., 1972.
7. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* — Мир, М., **2** 1978.

Ievlev P. N. Probabilistic representation of the Cauchy problem solution for the multidimensional Shrödinger equation.

We construct a probabilistic representation of the Cauchy problem solution for the Shrödinger equation $2i\partial_t u = -\Delta u$. The result is an extension to a mulidimensional case of the previous results by I. Ibragimov, N. Smorodina and M. Faddeev.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия

Поступило 31 октября 2017 г.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская наб. 7/9
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: ievlev.pn@gmail.com