Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. М. Мешкова, Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме при учете корректора, *Алгебра и анализ*, 2019, том 31, выпуск 4, 137–197

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 131.220.107.25
11 сентября 2019 г., 20:03:14

Алгебра и анализ
Том 31 (2019), №4

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО $L_2(\mathbb{R}^d)$-НОРМЕ ПРИ УЧЕТЕ КОРРЕКТОРА

© Ю. М. МЕШКОВА

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, второго порядка. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме, оператор включает члены первого и нулевого порядков. Оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ положительно определен, его коэффициенты периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. В работе изучается поведение в пределе малого периода операторной экспоненты $e^{-\mathcal{B}_\varepsilon t}$, $t\geqslant 0$. Для нее получена аппроксимация по $(L_2\to L_2)$-операторной норме с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$. В этой аппроксимации учтен корректор. Результаты применяются к усреднению решений задачи Коши для параболических систем.

Введение

Исследование относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения посвящена обширная литература; см., например, книги [BaPa, BeLP, ZhKO, Sa]. Мы опираемся на спектральный подход к задачам усреднения, основанный на теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений и развитый в цикле работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4, BSu5]. Значительная часть построений проводится в абстрактных теоретико-операторных терминах.

0.1. Постановка задачи. Изучается усреднение в пределе малого периода решений задачи Коши для параболических систем вида

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}/\varepsilon)\partial_s\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)=-\mathcal{B}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ s>0;\\ G(\mathbf{x}/\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{B}_\varepsilon$ — матричный эллиптический ДО второго порядка, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Измеримая $(n\times n)$-матрица-функция $G(\mathbf{x})$

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, параболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035.

предполагается ограниченной, равномерно положительно определенной и периодической относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ — Γ-периодические функции, зависящие от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Для всякой измеримой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, будем пользоваться обозначением $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Старшая часть $\mathcal{A}_\varepsilon$ оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ задана в факторизованной форме

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.2}$$

где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная матрица-функция в $\mathbb{R}^d$. (Точные условия на коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ приведены ниже в §4.) Оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ включает члены первого и нулевого порядков:

$$\mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u} = \mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j \mathbf{u} + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \mathbf{u} \right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}. \tag{0.3}$$

Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции из подходящего пространства L_ϱ на ячейке Ω решетки Γ. Потенциал $\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})$ — вообще говоря, обобщенная функция со значениями в классе эрмитовых матриц, порожденная некоторой быстро осциллирующей мерой. (Так как коэффициенты не предполагаются гладкими, строгое определение оператора (0.3) дается через квадратичную форму.) Постоянная λ выбирается так, чтобы оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ был положительно определен. Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Старший член аппроксимации решения задачи (0.1) при малом ε получен в [M]:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 \varepsilon (s + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-C_2 s} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad s \geqslant 0. \tag{0.4}$$

Здесь $\mathbf{u}_0$ — решение “усредненной” задачи

$$\begin{cases} \overline{G} \partial_s \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) = -\mathcal{B}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad s > 0; \\ \overline{G} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

где $\mathcal{B}^0$ — *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами, $\overline{G}$ — среднее значение матрицы G по ячейке периодов: $\overline{G} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega G(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. В случае, когда $G(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$, оценка (0.4) допускает очевидную запись в операторных терминах:

$$\|e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{B}^0 s}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 \varepsilon (s + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-C_2 s}.$$

Поэтому результаты такого сорта принято называть *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. (В общем случае приходится иметь дело с "окаймленной" экспонентой $f^\varepsilon e^{-(f^\varepsilon)^*\mathcal{B}_\varepsilon f^\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*$, где $G^{-1} = ff^*$, причем матрица-функция f предполагается Γ-периодической.)

Цель работы — уточнить аппроксимацию (0.4) за счет введения *корректора*. Иными словами, при фиксированном времени $s > 0$ приблизить решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s)$ задачи (0.1) по $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$-норме с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$.

0.2. Основные результаты. Во введении ограничимся обсуждением случая $G(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$. *Основной результат работы* — оценка

$$\|e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{B}^0 s} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3\varepsilon^2(s+\varepsilon^2)^{-1}e^{-C_2 s}, \quad s > 0. \quad (0.5)$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon, s)$ — корректор. Оказывается, что он является суммой трех членов, причем два члена корректора взаимно сопряжены и содержат быстро осциллирующие множители. Третье слагаемое не содержит переменных коэффициентов.

0.3. Операторные оценки погрешности: обзор. Интерес к операторным оценкам погрешности возник в связи с работой М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1], где для резольвенты оператора (0.2) была установлена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \quad (0.6)$$

Здесь $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор, g^0 — постоянная эффективная матрица. Аппроксимация оператора $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при учете корректора найдена в [BSu4]:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \quad (0.7)$$

Приближение резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по энергетической норме получено в [BSu5]:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \quad (0.8)$$

Здесь $K_1(\varepsilon)$ соответствует традиционному корректору в теории усреднения. Этот оператор содержит быстро осциллирующие множители, поэтому $\varepsilon\|K_1(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$. Отметим, что корректор в (0.7) имеет вид $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^* + K_3$, причем K_3 от ε не зависит. Впоследствии оценки (0.6)–(0.8) были обобщены Т. А. Суслиной [Su4, Su7] на более широкий класс операторов (0.3).

К параболическим системам спектральный метод применялся в работах Т. А. Суслиной [Su1, Su2], где был найден старший член аппроксимации оператора $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s}$, Е. С. Василевской [V], где установлено приближение при учете корректора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также в [Su3], где получено приближение экспоненты по энергетической норме:

$$\|e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s}-e^{-\mathcal{A}^0 s}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon(s+\varepsilon^2)^{-1/2},\quad s\geqslant 0; \tag{0.9}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s}-e^{-\mathcal{A}^0 s}-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon^2(s+\varepsilon^2)^{-1},\quad s\geqslant 0; \tag{0.10}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s}-e^{-\mathcal{A}^0 s}-\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon(s^{-1/2}+s^{-1}),\quad s\geqslant \varepsilon^2. \tag{0.11}$$

В этих оценках нет экспоненциального убывания по времени, поскольку операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$ имеют краем спектра точку нуль. Обобщение оценок (0.9) и (0.11) на оператор (0.3) получено в работе автора [M]. Обобщение оценки (0.10) — основной результат настоящей работы.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым [Zh] и развит им совместно с С. Е. Пастуховой [ZhPas1, ZhPas2]. Метод, названный авторами “*методом сдвига*” или “*модифицированным методом первого приближения*”, основан на введении в задачу дополнительного параметра — сдвига на вектор из $\mathbb{R}^d$, тщательном анализе первого приближения к решению и последующем интегрировании по параметру сдвига. Важную роль играет использование сглаживания по Стеклову. В работах [Zh, ZhPas1] получены аналоги оценок (0.6), (0.8) для операторов акустики и теории упругости. К параболическим задачам метод сдвига применялся в [ZhPas2], где установлены аналоги неравенств (0.9) и (0.11). Изложение дальнейших результатов В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой и их учеников можно найти в обзоре [ZhPas3].

До сих пор обсуждались операторные оценки погрешности для операторов, действующих во всем пространстве $\mathbb{R}^d$. Для полноты изложения отметим, что изучение операторов, действующих в ограниченной области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$, более традиционно для теории усреднения. Операторные оценки погрешности для таких задач изучались многими авторами. Выделим, в частности, работы [MoVo, Gr1, Gr2, ZhPas1, KeLiS, Su6, Xu, GeS]. (Более подробный обзор результатов по операторным оценкам погрешности для задач в ограниченной области можно найти во введении к работе [MSu].)

0.4. Метод исследования. Обсудим случай $G=\mathbf{1}_n$. Используя масштабное преобразование, мы сводим доказательство оценки (0.5) к доказательству аналогичной оценки для операторной экспоненты $e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)\varepsilon^{-2}s}$, где $\mathcal{B}(\varepsilon)$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}(\varepsilon)=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})+\varepsilon\sum_{j=1}^d(a_j(\mathbf{x})D_j+D_ja_j(\mathbf{x})^*)+\varepsilon^2\mathcal{Q}(\mathbf{x})+\varepsilon^2\lambda I.$$

Таким образом, от изучения экспоненты от оператора с быстро осциллирующими коэффициентами мы переходим к изучению поведения при больших значениях времени экспоненты от оператора, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$, а не от $\mathbf{x}/\varepsilon$.

С помощью теории Флоке–Блоха оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$, действующих в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и зависящих от параметра $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$ (квазиимпульса). Формально оператор $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задан выражением

$$\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\sum_{j=1}^{d}\bigl(a_j(\mathbf{x})(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j(\mathbf{x})^*\bigr) + \varepsilon^2\mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2\lambda I$$

с периодическими граничными условиями. Спектр операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ дискретен. В соответствии с [Su4, Su7], мы выделяем одномерный параметр $\tau = (|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$ и изучаем семейство $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ методами аналитической теории возмущений по параметру τ.

0.5. Структура работы. Работа состоит из введения и трех глав. В главе 1 (§§1–3) излагается абстрактная теоретико-операторная схема. В главе 2 (§§4–9) изучаются периодические ДО. Получена аппроксимация "окаймленной" операторной экспоненты (в §9). Глава 3 (§§10–12) посвящена усреднению решений задачи Коши для параболических систем. В §10 из результатов §9 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы — оценка (0.5). В §11 результаты в операторных терминах применяются к усреднению решений параболических систем. В §12 рассматривается пример — скалярный эллиптический оператор.

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символами $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначим скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символом $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ обозначим норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и $|\cdot|$ обозначим соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, через $\mathbf{1}_n$ – единичную $(n\times n)$-матрицу. Если a — $(m\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Используем обозначения $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Символ $L_p((0,T);\mathfrak{H})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, означает L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$.

Различные постоянные в оценках обозначаются символами $c, C, \mathfrak{C}, \mathscr{C}$ (возможно, с индексами и значками).

0.7. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за постановку задачи и внимательное чтение рукописи и администрации лаборатории им. П. Л. Чебышева, стимулировавшей завершение данного исследования.

Глава 1. Абстрактная схема

§1. Предварительные сведения

Материал пунктов 1.1–1.9 заимствован из [Su4, Su5].

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $X_0 \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определенный замкнутый оператор, и пусть оператор $X_1 \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ ограничен. На области определения $\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$ зададим оператор

$$X(t) := X_0 + tX_1 \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Рассмотрим семейство самосопряженных в $\mathfrak{H}$ неотрицательных операторов

$$A(t) := X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

отвечающих замкнутым в $\mathfrak{H}$ квадратичным формам

$$\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.$$

Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$. Положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0, \quad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Через P обозначим ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, а через P_* — ортопроектор $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$.

Наложим следующее условие.

Условие 1.1. *Точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0, причем*

$$0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty.$$

Через d^0 обозначим расстояние от точки нуль до остального спектра оператора A_0.

1.2. Операторы $Y(t)$ и Y_2. Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор такой, что $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$, а $Y_1 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный линейный оператор. Положим $Y(t) := Y_0 + tY_1$, $\operatorname{Dom} Y(t) = \operatorname{Dom} Y_0$. Будем считать выполненным следующее условие.

Условие 1.2. *Найдется постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что*

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Из оценки (1.3) при $t = 0$ вытекает, что $\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} Y_0$, то есть $Y_0 P = 0$.

Пусть $Y_2 \colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор, причем $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Предположим, что справедливо следующее условие.

Условие 1.3. *Для любого* $\nu > 0$ *существует число* $C(\nu) > 0$ *такое, что*

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.3. Форма $\mathfrak{q}$. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана плотно определенная эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u, v]$, причем $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} \mathfrak{q}$. Наложим следующее условие.

Условие 1.4. 1°. *Существуют такие постоянные* $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$, *что*

$$|\mathfrak{q}[u, v]| \leqslant (c_2 \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3 \|u\|^2_{\mathfrak{H}})^{1/2} (c_2 \|X(t)v\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3 \|v\|^2_{\mathfrak{H}})^{1/2},$$
$$u, v \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2°. *Существуют такие постоянные* $0 < \kappa \leqslant 1$ *и* $c_0 \in \mathbb{R}$, *что*

$$\mathfrak{q}[u, u] \geqslant -(1 - \kappa)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.4. Оператор $B(t, \varepsilon)$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим эрмитову полуторалинейную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, v] = (X(t)u, X(t)v)_{\mathfrak{H}_*} + \varepsilon \Big((Y(t)u, Y_2 v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 u, Y(t)v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \Big) \\ + \varepsilon^2 \mathfrak{q}[u, v], \quad u, v \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Используя условия 1.2, 1.3, 1.4, легко установить оценки

$$\mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, u] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + (C(1) + c_3)\varepsilon^2 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,$$

$$\mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, u] \geqslant \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - (c_0 + c_4)\varepsilon^2 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0. \tag{1.5}$$

Здесь

$$c_4 = 4\kappa^{-1} c_1^2 C(\nu) \quad \text{при} \quad \nu = \kappa^2 (16 c_1^2)^{-1}. \tag{1.6}$$

Подробный вывод этих неравенств можно найти в [Su4, п. 1.4]. Таким образом, форма $\mathfrak{b}(t, \varepsilon)$ замкнута и полуограничена снизу.

Самосопряженный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, отвечающий форме (1.4), обозначим через $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. Формально,

$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q.$$

Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем в этой записи форме $\mathfrak{q}$.

Пусть $Q_0\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — ограниченный положительно определенный оператор. Добавляя величину λQ_0 к Q, будем считать, что оператор

$$B(t,\varepsilon) := \mathfrak{B}(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0 = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2(Q + \lambda Q_0), \quad (1.7)$$

отвечающий форме

$$b(t,\varepsilon)[u,v] := \mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,v] + \lambda\varepsilon^2 (Q_0 u, v)_{\mathfrak{H}}, \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0, \quad (1.8)$$

положительно определен. Для этого наложим на λ ограничение

$$\begin{aligned} &\lambda > \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ &\lambda > \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условие (1.9) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda (Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}} \geqslant (c_0 + c_4 + \beta)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathfrak{H}, \quad (1.10)$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\beta = \lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ &\beta = \lambda\|Q_0\| - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.5) и (1.10) вытекает оценка снизу для формы (1.8):

$$b(t,\varepsilon)[u,u] \geqslant \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \beta\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, $B(t,\varepsilon) > 0$. Оператор $B(t,\varepsilon)$ — основной объект исследования в главе 1.

1.5. Переход к параметрам τ, ϑ. Семейство $B(t,\varepsilon)$ представляет собой аналитическое операторное семейство относительно параметров t и ε. Если $t = \varepsilon = 0$, то оператор $B(0,0)$ совпадает с A_0 и в силу условия 1.1 имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n. Хочется воспользоваться аналитической теорией возмущений. Однако при $n > 1$ мы имеем дело с кратным собственным значением и двумерным параметром. Аналитическая теория возмущений непосредственно неприменима. Поэтому мы выделяем одномерный параметр $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$. При этом приходится следить за зависимостью от дополнительных параметров $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$ и $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$. Отметим, что вектор $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ принадлежит единичной окружности. Оператор $B(t,\varepsilon)$ будем теперь обозначать через $B(\tau;\vartheta)$, а соответствующую форму $b(t,\varepsilon)$ через $b(\tau;\vartheta)$. Согласно (1.4) и (1.8) эта форма имеет вид

$$\begin{aligned} b(\tau;\vartheta)[u,v] &= (X_0u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_1\left((X_0u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*}\right) \\ &+ \tau^2\vartheta_1^2(X_1u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_2\left((Y_0u, Y_2v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2u, Y_0v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\right) \\ &+ \tau^2\vartheta_1\vartheta_2\left((Y_1u, Y_2v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2u, Y_1v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\right) \\ &+ \tau^2\vartheta_2^2\left(\mathfrak{q}[u,v] + \lambda(Q_0u,v)_{\mathfrak{H}}\right), \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned}$$

Формально,

$$\begin{aligned} B(\tau;\vartheta) = X_0^*X_0 + \tau\vartheta_1(X_0^*X_1 + X_1^*X_0) + \tau^2\vartheta_1^2X_1^*X_1 + \tau\vartheta_2(Y_2^*Y_0 + Y_0^*Y_2) \\ + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0). \end{aligned}$$

Пусть $F(\tau;\vartheta;\mu)$ — спектральный проектор оператора $B(\tau;\vartheta)$, отвечающий отрезку $[0,\mu]$. Фиксируем постоянную $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$, а затем выберем число $\tau_0 > 0$ такое, что

$$\tau_0 \leqslant \delta^{1/2}\left((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\right)^{-1/2}. \tag{1.13}$$

Как проверено в [Su4, предложение 1.5], при $|\tau| \leqslant \tau_0$ выполнено

$$F(\tau;\vartheta;\delta) = F(\tau;\vartheta;3\delta), \quad \operatorname{rank} F(\tau;\vartheta;\delta) = n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0.$$

В дальнейшем мы часто будем писать $F(\tau;\vartheta)$ вместо $F(\tau;\vartheta;\delta)$.

На протяжении главы 1 мы будем следить за зависимостью оценочных постоянных от следующего множества “данных”

$$\kappa^{1/2}, \kappa^{-1/2}, \delta, \delta^{-1/2}, \tau_0, c_1, c_2^{1/2}, c_3^{1/2}, C(1)^{1/2}, |\lambda|, \|X_1\|, \|Y_1\|, \|Q_0\| \tag{1.14}$$

(а также от постоянной $\check{c}_*^{-1}$, которая будет введена ниже в п. 2.1). Для применения результатов настоящей главы к дифференциальным операторам важно, что оценочные постоянные (возможно, после завышения) зависят от этих величин полиномиально, причем коэффициенты соответствующих многочленов — некоторые положительные абсолютные постоянные.

1.6. Операторы Z и $\widetilde{Z}$. В этом и следующем пунктах определяются операторы, возникающие при рассмотрениях в духе теории возмущений.

Положим $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Поскольку точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0, форма $(X_0\phi, X_0\psi)_{\mathfrak{H}_*}$, $\phi,\psi \in \mathcal{D}$, задает в $\mathcal{D}$ скалярное произведение, превращая $\mathcal{D}$ в гильбертово пространство. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим уравнение на элемент $\phi \in \mathcal{D}$ (ср. [BSu2, глава 1, (1.7)]):

$$X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0, \tag{1.15}$$

которое понимается в слабом смысле. Иными словами, $\phi \in \mathcal{D}$ удовлетворяет тождеству

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \tag{1.16}$$

Поскольку правая часть в (1.16) есть антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$, из теоремы Рисса следует, что уравнение (1.15) имеет единственное решение $\phi(\omega)$. Очевидно, $\|X_0\phi\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}$. Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ равенствами

$$Z\omega = \phi(\omega), \quad \omega \in \mathfrak{N}; \quad Zx = 0, \quad x \in \mathfrak{N}^{\perp}.$$

Очевидно,

$$ZP = Z, \quad PZ = 0, \quad PZ^* = Z^*, \quad Z^*P = 0. \tag{1.17}$$

Несложно проверить (см. [Su5, (1.21)]), что

$$\|Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|. \tag{1.18}$$

Аналогично для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$ рассмотрим уравнение

$$X_0^*X_0\psi + Y_0^*Y_2\omega = 0 \tag{1.19}$$

на элемент $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в смысле тождества

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2\omega, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

В силу условия 1.2 правая часть является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$. По теореме Рисса решение $\psi(\omega)$ существует и единственно. Определим ограниченный оператор $\widetilde{Z} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ равенствами

$$\widetilde{Z}\omega = \psi(\omega), \quad \omega \in \mathfrak{N}; \quad \widetilde{Z}x = 0, \quad x \in \mathfrak{N}^{\perp}.$$

Отметим, что $\widetilde{Z}$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^{\perp}$, а $\mathfrak{N}^{\perp}$ в $\{0\}$. Таким образом,

$$\widetilde{Z}P = \widetilde{Z}, \quad P\widetilde{Z} = 0, \quad P\widetilde{Z}^* = \widetilde{Z}^*, \quad \widetilde{Z}^*P = 0. \tag{1.20}$$

Нам потребуется оценка (см. [Su5, (1.25)]):

$$\|\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant c_1\kappa^{1/2}C(1)^{1/2}(13\delta)^{-1/2}. \tag{1.21}$$

1.7. Операторы R и S. Определим теперь оператор $R\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ (см. [BSu2, глава 1, п. 1.2]) следующим образом: $R\omega = X_0\psi(\omega) + X_1\omega \in \mathfrak{N}_*$. Другое описание оператора R дается формулой $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

Спектральным ростком операторного семейства (1.2) при $t=0$ называется (см. [BSu2, глава 1, п. 1.3]) самосопряженный оператор $S = R^*R\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, для которого также справедливо представление $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

1.8. Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $B(\tau;\vartheta)$. В соответствии с аналитической теорией возмущений (см. [Ka]), при $|\tau| \leqslant \tau_0$ найдутся такие вещественно-аналитические функции $\lambda_l(\tau;\vartheta)$ и вещественно-аналитические (по параметру τ) $\mathfrak{H}$-значные функции $\phi_l(\tau;\vartheta)$, что

$$B(\tau;\vartheta)\phi_l(\tau;\vartheta) = \lambda_l(\tau;\vartheta)\phi_l(\tau;\vartheta), \quad l = 1,\dots,n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \tag{1.22}$$

причем $\phi_l(\tau;\vartheta)$, $l = 1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F(\tau;\vartheta)\mathfrak{H}$. При достаточно малом $\tau_*(\vartheta)$ ($\leqslant \tau_0$) и $|\tau| \leqslant \tau_*(\vartheta)$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(\tau;\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3 + \dots, \quad \gamma_l(\vartheta) \geqslant 0, \quad l = 1,\dots,n; \tag{1.23}$$

$$\phi_l(\tau;\vartheta) = \omega_l(\vartheta) + \tau\phi_l^{(1)}(\vartheta) + \tau^2\phi_l^{(2)}(\vartheta) + \dots, \quad l = 1,\dots,n.$$

Элементы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

В [Su4, (1.32), (1.33)] установлено, что для элементов

$$\widetilde{\omega}_l(\vartheta) := \phi_l^{(1)}(\vartheta) - \vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) - \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta), \quad l = 1,\dots,n,$$

справедливо тождество

$$(\widetilde{\omega}_k(\vartheta), \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} + (\omega_k(\vartheta), \widetilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k,l = 1,\dots,n. \tag{1.24}$$

В соответствии с [Su4, п. 1.8] *спектральным ростком операторного семейства $B(\tau;\vartheta)$ при $\tau = 0$* называется оператор в $\mathfrak{N}$, заданный выражением

$$\begin{aligned} S(\vartheta) = \vartheta_1^2 S + \vartheta_1\vartheta_2(-(X_0Z)^*X_0\widetilde{Z} - (X_0\widetilde{Z})^*X_0Z + P(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2))\Big|_{\mathfrak{N}} \\ + \vartheta_2^2\left(-(X_0\widetilde{Z})^*X_0\widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}\right). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{N}$, порожденный формой $\mathfrak{q}[\omega,\omega]$, $\omega \in \mathfrak{N}$, и $Q_{0\mathfrak{N}} := PQ_0|_{\mathfrak{N}}$.

В [Su4, предложение 1.6] установлено, что числа $\gamma_l(\vartheta)$ и элементы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1,\dots,n$, являются собственными для оператора $S(\vartheta)$:

$$S(\vartheta)\omega_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\omega_l(\vartheta), \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.26}$$

Величины $\gamma_l(\vartheta)$ и $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1,\dots,n$, называют *пороговыми характеристиками на краю спектра* для операторного семейства $B(\tau;\vartheta)$.

1.9. Пороговые аппроксимации. Как показано в [Su5, теорема 3.1],

$$F(\tau;\vartheta) - P = \Phi(\tau;\vartheta), \quad \|\Phi(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1|\tau|, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.27}$$

Кроме (1.27) нам потребуется более точная аппроксимация спектрального проектора, полученная в [Su5, теорема 3.1]:

$$F(\tau;\vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau;\vartheta), \quad \|F_2(\tau;\vartheta)\| \leqslant C_2\tau^2, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.28}$$

Согласно [Su5, (1.41)] оператор $F_1(\vartheta)$ имеет вид

$$F_1(\vartheta) = \vartheta_1(Z + Z^*) + \vartheta_2(\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^*). \tag{1.29}$$

Из (1.17), (1.20) и (1.29) следует, что

$$F_1(\vartheta)P = \vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z}, \quad PF_1(\vartheta) = \vartheta_1 Z^* + \vartheta_2\widetilde{Z}^*. \tag{1.30}$$

Из (1.18), (1.21) и (1.29) вытекает оценка

$$\|F_1(\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{F_1} = 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}(\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2}). \tag{1.31}$$

Нам потребуется аппроксимация, установленная в [Su4, теорема 2.2]:

$$\begin{aligned} &B(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) - \tau^2 S(\vartheta)P = \Phi_1(\tau;\vartheta), \\ &\qquad \|\Phi_1(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_3|\tau|^3, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Уточнение аппроксимации (1.32) получено в [Su5, теорема 3.3]:

$$B(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = \tau^2 S(\vartheta)P + \tau^3 K(\vartheta) + \Phi_2(\tau;\vartheta), \tag{1.33}$$

$$\|\Phi_2(\tau;\vartheta)\| \leqslant C_4\tau^4, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.34}$$

В соответствии с [Su5, (3.18)–(3.20)] имеем $K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta)$, где

$$\begin{aligned} K_0(\vartheta) &= \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)\Big((\,\cdot\,, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} (\vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta)) \\ &\qquad + (\,\cdot\,, \vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\Big), \\ N(\vartheta) &= N_0(\vartheta) + N_*(\vartheta), \\ N_0(\vartheta) &= \sum_{l=1}^{n} \mu_l(\vartheta)(\,\cdot\,, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta), \\ N_*(\vartheta) &= \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)\big((\,\cdot\,, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\widetilde{\omega}_l(\vartheta) + (\,\cdot\,, \widetilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\big). \end{aligned} \tag{1.35}$$

В базисе $\{\omega_l(\vartheta)\}_{l=1}^n$ операторы $N(\vartheta)$, $N_0(\vartheta)$ и $N_*(\vartheta)$ (суженные на $\mathfrak{N}$) представляются $(n\times n)$-матрицами. Оператор $N_0(\vartheta)$ диагонален: $(N_0(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) = \mu_j(\vartheta)\delta_{jl}$, $j,l = 1,\dots,n$. С учетом (1.24) матричные элементы оператора $N_*(\vartheta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (N_*(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) &= \gamma_l(\vartheta)\,(\omega_j(\vartheta), \widetilde{\omega}_l(\vartheta)) + \gamma_j(\vartheta)\,(\widetilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) \\ &= (\gamma_j(\vartheta) - \gamma_l(\vartheta))\,(\widetilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta))\,, \end{aligned} \tag{1.36}$$

$j,l=1,\dots,n$. Следовательно, диагональные элементы $N_*(\vartheta)$ равны нулю. Более того, $(N_*(\vartheta)\omega_j(\vartheta),\omega_l(\vartheta))=0$, если $\gamma_j(\vartheta)=\gamma_l(\vartheta)$. В случае, когда $n=1$, имеем $N_*(\vartheta)=0$, то есть $N(\vartheta)=N_0(\vartheta)$.

Инвариантное представление для операторов $K_0(\vartheta)$ и $N(\vartheta)$ найдено в [Su5, (3.21), (3.30)–(3.34)]:

$$K_0(\vartheta)=\vartheta_1\left(ZS(\vartheta)P+S(\vartheta)PZ^*\right)+\vartheta_2\left(\widetilde{Z}S(\vartheta)P+S(\vartheta)P\widetilde{Z}^*\right), \tag{1.37}$$

$$N(\vartheta)=\vartheta_1^3N_{11}+\vartheta_1^2\vartheta_2N_{12}+\vartheta_1\vartheta_2^2N_{21}+\vartheta_2^3N_{22}. \tag{1.38}$$

Здесь

$$N_{11}=(X_1Z)^*RP+(RP)^*X_1Z, \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}N_{12}&=(X_1\widetilde{Z})^*RP+(RP)^*X_1\widetilde{Z}+(X_1Z)^*X_0\widetilde{Z}\\&+(X_0\widetilde{Z})^*X_1Z+(Y_2Z)^*Y_0Z+(Y_0Z)^*Y_2Z\\&+(Y_2Z)^*Y_1P+(Y_1P)^*Y_2Z+(Y_2P)^*Y_1Z+(Y_1Z)^*Y_2P,\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}N_{21}&=(X_0\widetilde{Z})^*X_1\widetilde{Z}+(X_1\widetilde{Z})^*X_0\widetilde{Z}+(Y_2Z)^*Y_0\widetilde{Z}\\&+(Y_0\widetilde{Z})^*Y_2Z+(Y_2\widetilde{Z})^*Y_0Z+(Y_0Z)^*Y_2\widetilde{Z}+(Y_2\widetilde{Z})^*Y_1P\\&+(Y_1P)^*Y_2\widetilde{Z}+(Y_1\widetilde{Z})^*Y_2P+(Y_2P)^*Y_1\widetilde{Z}\\&+Z^*QP+PQZ+\lambda(Z^*Q_0P+PQ_0Z),\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}N_{22}&=(Y_0\widetilde{Z})^*Y_2\widetilde{Z}+(Y_2\widetilde{Z})^*Y_0\widetilde{Z}+\widetilde{Z}^*QP+PQ\widetilde{Z}\\&+\lambda(\widetilde{Z}^*Q_0P+PQ_0\widetilde{Z}).\end{aligned} \tag{1.42}$$

Поясним, что в (1.41) под формальной записью $Z^*QP+PQZ$ подразумевается ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, порожденный формой $\mathfrak{q}[Pu,Zu]+\mathfrak{q}[Zu,Pu]$, $u\in\mathfrak{H}$. Аналогично в (1.42) под $\widetilde{Z}^*QP+PQ\widetilde{Z}$ понимается ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, отвечающий форме $\mathfrak{q}[Pu,\widetilde{Z}u]+\mathfrak{q}[\widetilde{Z}u,Pu]$, $u\in\mathfrak{H}$.

Отметим, что в силу (1.17), (1.20) и (1.37)–(1.42) для оператора $K(\vartheta)=K_0(\vartheta)+N(\vartheta)$ справедливо тождество

$$PK(\vartheta)P=PN(\vartheta)P=N(\vartheta). \tag{1.43}$$

Нам потребуются следующие оценки, установленные в [Su5, (3.35), (3.36), (3.44)–(3.49)]:

$$\|N(\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C_N, \tag{1.44}$$

$$\|K(\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C_K. \tag{1.45}$$

Замечание 1.5. Введенные выше постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 и C_{F_1} зависят от данных (1.14) полиномиально. Соответствующие многочлены имеют постоянные положительные коэффициенты. Константы C_N и C_K оцениваются через полиномы с постоянными положительными коэффициентами от данных (1.14). Зависимость постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_N и C_K от данных (1.14) прослежена в [Su4, Su5].

§2. Аппроксимация оператора $e^{-B(t,\varepsilon)s}$ с учетом корректора

2.1. Аппроксимация оператора $e^{-B(\tau;\vartheta)s}$**.** *Будем предполагать, что при некотором* $c_* > 0$ *выполнено*

$$A(t) \geqslant c_* t^2 I, \quad c_* > 0, \quad |t| \leqslant \tau_0. \tag{2.1}$$

Тогда с учетом (1.12) справедливо неравенство

$$B(\tau;\vartheta) \geqslant \check{c}_* \tau^2 I, \quad |\tau| \leqslant \tau_0; \quad \check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*; 2\beta\}. \tag{2.2}$$

Отсюда и из (1.22) следует, что собственные значения $\lambda_l(\tau;\vartheta)$ оператора $B(\tau;\vartheta)$ удовлетворяют оценкам

$$\lambda_l(\tau;\vartheta) \geqslant \check{c}_* \tau^2, \quad l = 1,\dots,n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.3}$$

Сопоставляя (1.23) и (2.3), находим, что $\gamma_l(\vartheta) \geqslant \check{c}_*$, $l = 1,\dots,n$, а тогда (см. (1.26))

$$S(\vartheta) \geqslant \check{c}_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{2.4}$$

Пусть $|\tau| \leqslant \tau_0$. Запишем оператор $e^{-B(\tau;\vartheta)s}$, $s \geqslant 0$, в виде

$$e^{-B(\tau;\vartheta)s} = e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta)^\perp + e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta). \tag{2.5}$$

Пусть $s > 0$. Согласно (2.2) первое слагаемое в правой части (2.5) допускает оценку

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-\delta s/2} e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2} \leqslant 2(\delta s)^{-1} e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}. \tag{2.6}$$

Второе слагаемое представим в виде

$$e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) = P e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) + P^\perp e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta). \tag{2.7}$$

В силу (1.28)

$$\begin{aligned}
&P^\perp e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) = (I-P) e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) \\
&= (\tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau;\vartheta)) e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) \\
&= (\tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau;\vartheta)) \left((e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P) + e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P \right).
\end{aligned}$$

Положим

$$\Pi(\tau;\vartheta;s) := e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P^{\perp}e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) = \tau F_1(\vartheta)e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P + \tau F_1(\vartheta)\Pi(\tau;\vartheta;s) \\ + F_2(\tau;\vartheta)e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Нам потребуется оценка, полученная в [M, п. 2.2]:

$$\|\Pi(\tau;\vartheta;s)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant (2C_1|\tau| + C_3|\tau|^3 s)e^{-\check{c}_*\tau^2 s}. \tag{2.10}$$

Отсюда и из (1.31) следует, что

$$\|\tau F_1(\vartheta)\Pi(\tau;\vartheta;s)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{F_1}(2C_1\tau^2 + C_3\tau^4 s)e^{-\check{c}_*\tau^2 s}.$$

Вводя параметр $\alpha = \tau^2 s$, приходим к неравенству

$$\|\tau F_1(\vartheta)\Pi(\tau;\vartheta;s)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{F_1}(2C_1\alpha + C_3\alpha^2)e^{-\check{c}_*\alpha}s^{-1}. \tag{2.11}$$

Третье слагаемое в правой части (2.9) оценим с помощью (1.28) и (2.2):

$$\|F_2(\tau;\vartheta)e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2\tau^2 e^{-\check{c}_*\tau^2 s} = C_2\alpha e^{-\check{c}_*\alpha}s^{-1}. \tag{2.12}$$

Объединяя (2.9), (2.11) и (2.12), находим

$$\|P^{\perp}e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - \tau F_1(\vartheta)e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \phi(\alpha)s^{-1}, \quad s > 0, \tag{2.13}$$

где

$$\phi(\alpha) = C_{F_1}(2C_1\alpha + C_3\alpha^2)e^{-\check{c}_*\alpha} + C_2\alpha e^{-\check{c}_*\alpha}. \tag{2.14}$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в правой части (2.7):

$$Pe^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) = e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P + \Upsilon(\tau;\vartheta;s), \tag{2.15}$$

где $\Upsilon(\tau;\vartheta;s) := Pe^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P$. В [M, п. 2.2] получено представление

$$\Upsilon(\tau;\vartheta;s) = e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\Phi(\tau;\vartheta) - \mathcal{J}(\tau;\vartheta;s),$$

$$\mathcal{J}(\tau;\vartheta;s) := \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}P\Phi_1(\tau;\vartheta)e^{-B(\tau;\vartheta)\widetilde{s}}F(\tau;\vartheta)\,d\widetilde{s}.$$

Здесь операторы $\Phi(\tau;\vartheta)$ и $\Phi_1(\tau;\vartheta)$ определены в (1.27), (1.32). Учитывая (1.27) и (1.28), представим оператор $\Upsilon(\tau;\vartheta;s)$ в виде

$$\Upsilon(\tau;\vartheta;s) = e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}P\tau F_1(\vartheta) + e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}PF_2(\tau;\vartheta) - \mathcal{J}(\tau;\vartheta;s). \tag{2.16}$$

Второе слагаемое в правой части (2.16) оценим с помощью (1.28) и (2.4):

$$\|e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}PF_2(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2\tau^2 e^{-\tau^2\check{c}_* s} = C_2\alpha e^{-\check{c}_*\alpha}s^{-1}. \tag{2.17}$$

Третье слагаемое в правой части (2.16) преобразуем на основании (1.32), (1.33), (1.43) и (2.8):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\tau;\vartheta;s)\\
&=\int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}P(\tau^3 K(\vartheta)+\Phi_2(\tau;\vartheta))e^{-B(\tau;\vartheta)\widetilde{s}}F(\tau;\vartheta)\,d\widetilde{s}\\
&=\int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}P(\tau^3 K(\vartheta)+\Phi_2(\tau;\vartheta))\Big(\Pi(\tau;\vartheta;\widetilde{s})+e^{-\tau^2 S(\vartheta)\widetilde{s}}P\Big)\,d\widetilde{s}\\
&=\mathcal{J}_1(\tau;\vartheta;s)+\mathcal{J}_2(\tau;\vartheta;s)+\mathcal{J}_3(\tau;\vartheta;s).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Здесь

$$
\mathcal{J}_1(\tau;\vartheta;s):=\tau^3\int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}PN(\vartheta)Pe^{-\tau^2 S(\vartheta)\widetilde{s}}P\,d\widetilde{s},
$$

$$
\mathcal{J}_2(\tau;\vartheta;s):=\tau^3\int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}PK(\vartheta)\Pi(\tau;\vartheta;\widetilde{s})\,d\widetilde{s},
$$

$$
\mathcal{J}_3(\tau;\vartheta;s):=\int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}P\Phi_2(\tau;\vartheta)e^{-B(\tau;\vartheta)\widetilde{s}}F(\tau;\vartheta)\,d\widetilde{s}.
$$

Оценим член $\mathcal{J}_2(\tau;\vartheta;s)$ с помощью (1.45), (2.4) и (2.10):

$$
\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{J}_2(\tau;\vartheta;s)\Big\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &\leqslant |\tau|^3\int_0^s e^{-\check{c}_*\tau^2(s-\widetilde{s})}C_K(2C_1|\tau|+C_3|\tau|^3\widetilde{s})e^{-\check{c}_*\tau^2\widetilde{s}}\,d\widetilde{s}\\
&=|\tau|^3 e^{-\check{c}_*\tau^2 s}C_K\int_0^s(2C_1|\tau|+C_3|\tau|^3\widetilde{s})\,d\widetilde{s}\\
&=e^{-\check{c}_*\tau^2 s}C_K(2C_1\tau^4 s+2^{-1}C_3\tau^6 s^2)\\
&=C_K e^{-\check{c}_*\alpha}(2C_1\alpha^2+2^{-1}C_3\alpha^3)s^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Используя (1.34), (2.2) и (2.4), оценим $\mathcal{J}_3(\tau;\vartheta;s)$:

$$
\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{J}_3(\tau;\vartheta;s)\Big\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &\leqslant \int_0^s e^{-\check{c}_*\tau^2(s-\widetilde{s})}C_4\tau^4 e^{-\check{c}_*\tau^2\widetilde{s}}\,d\widetilde{s}\\
&=e^{-\check{c}_*\tau^2 s}C_4\tau^4 s=C_4e^{-\check{c}_*\alpha}\alpha^2 s^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Подведем итоги. В силу (2.15)–(2.20) выполнена оценка

$$\begin{aligned} \Big\| Pe^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P - \tau e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}PF_1(\vartheta) + \tau^3\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s)\Big\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ \leqslant \big(C_2\alpha + 2C_1C_K\alpha^2 + 2^{-1}C_3C_K\alpha^3 + C_4\alpha^2\big)e^{-\check{c}_*\alpha}s^{-1}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s) := \int\limits_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})}PN(\vartheta)Pe^{-\tau^2 S(\vartheta)P\widetilde{s}}\,d\widetilde{s}. \tag{2.22}$$

Теперь из (1.30), (2.5)–(2.7), (2.13), (2.14), (2.21) и (2.22) вытекает тождество

$$\begin{aligned} e^{-B(\tau;\vartheta)s} &= e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z})e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P \\ &+ e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\tau(\vartheta_1 Z^* + \vartheta_2\widetilde{Z}^*) - \tau^3\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s) + \mathcal{R}(\tau;\vartheta;s), \end{aligned} \tag{2.23}$$

где остаточный член $\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)$ подчинен оценке

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_5 s^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}, \quad s>0; \\ C_5 = 2\delta^{-1} + \max_{\alpha\geqslant 0}\check{\phi}(\alpha)e^{-\check{c}_*\alpha/2}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь введено обозначение

$$\check{\phi}(\alpha) = 2(C_1C_{F_1} + C_2)\alpha + (C_3C_{F_1} + 2C_1C_K + C_4)\alpha^2 + 2^{-1}C_3C_K\alpha^3.$$

Делая замену переменной $\check{c}_*\alpha/2 =: \alpha$, можно показать, что постоянная C_5 контролируется через многочлен от $\check{c}_*^{-1}$ и данных (1.14).

Очевидно, при $s\geqslant 1$ выполнено $s^{-1}\leqslant 2(s+1)^{-1}$, а потому $\|\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant 2C_5(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}$. При $0\leqslant s<1$ из (1.44), (2.22) следует, что для $|\tau|\leqslant\tau_0$ имеет место неравенство $|\tau|^3\|\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant\tau_0^3 C_N e^{-\check{c}_*\tau^2 s}$. Поэтому, используя (1.18), (1.21), (2.2) и (2.4), из (2.23) получаем

$$\|\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant C_6(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}, \quad 0\leqslant s<1,$$

где $C_6 = 4 + 4\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\tau_0(\|X_1\| + c_1C(1)^{1/2}) + 2\tau_0^3 C_N$.

Учитывая замечание 1.5, приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. *При $|\tau|\leqslant\tau_0$, $s\geqslant 0$ выполнено тождество (2.23), где оператор $\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s)$ определен в (2.22), а для оператора $\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)$ верны оценки*

$$\|\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant C_7(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}, \quad s\geqslant 0;$$

$$\|\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant C_5 s^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}, \quad s>0.$$

Постоянная C_5 определена в (2.24). Постоянные C_5 и $C_7 = \max\{2C_5; C_6\}$ контролируются через многочлены от $\check{c}_*^{-1}$ и данных (1.14).

2.2. Вычисление матричных элементов оператора $\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s)$. Рассмотрим подробнее оператор (2.22). В силу (1.35) выполнено

$$\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s) = \mathcal{M}_0(\tau;\vartheta;s) + \mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s), \tag{2.25}$$

где

$$\mathcal{M}_0(\tau;\vartheta;s) := \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})} P N_0(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\widetilde{s}}\, d\widetilde{s},$$

$$\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s) := \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})} P N_*(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\widetilde{s}}\, d\widetilde{s}.$$

Операторы $S(\vartheta)$ и $N_0(\vartheta)$ диагональны в базисе $\{\omega_l(\vartheta)\}_{l=1}^n$, поэтому $N_0(\vartheta)S(\vartheta) = S(\vartheta)N_0(\vartheta)$ и

$$\mathcal{M}_0(\tau;\vartheta;s) = N_0(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps} Ps. \tag{2.26}$$

Вычислим теперь матричные элементы оператора $\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)$ в базисе $\{\omega_l(\vartheta)\}_{l=1}^n$. В соответствии с (1.26) имеем $e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}\omega_j(\vartheta) = e^{-\tau^2\gamma_j(\vartheta)s}\omega_j(\vartheta)$. Поэтому матричные элементы оператора $\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\Big) \\
&= \int_0^s \Big(e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\widetilde{s})} N_*(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\widetilde{s}}\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\Big)\, d\widetilde{s} \\
&= \big(N_*(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\big) e^{-\tau^2\gamma_k(\vartheta)s} \int_0^s e^{-\tau^2(\gamma_j(\vartheta)-\gamma_k(\vartheta))\widetilde{s}}\, d\widetilde{s}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.36) видно, что при $\gamma_j(\vartheta) = \gamma_k(\vartheta)$ выполнено

$$\big(\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\big) = 0.$$

Пусть теперь $\gamma_j(\vartheta) \neq \gamma_k(\vartheta)$. В силу (1.24) и (1.36)

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\Big) \\
&\quad= \left(N_*(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\right) e^{-\tau^2\gamma_k(\vartheta)s} \frac{e^{-\tau^2(\gamma_j(\vartheta)-\gamma_k(\vartheta))s} - 1}{(\gamma_k(\vartheta) - \gamma_j(\vartheta))\tau^2} \\
&\quad= \frac{e^{-\tau^2\gamma_j(\vartheta)s} - e^{-\tau^2\gamma_k(\vartheta)s}}{\tau^2} \left(\omega_j(\vartheta), \widetilde{\omega}_k(\vartheta)\right) \\
&\quad= \frac{e^{-\tau^2\gamma_j(\vartheta)s}}{\tau^2} \left(\omega_j(\vartheta), \widetilde{\omega}_k(\vartheta)\right) + \frac{e^{-\tau^2\gamma_k(\vartheta)s}}{\tau^2} \left(\widetilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)\right).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)\omega_j(\vartheta),\omega_k(\vartheta)\Big)\\ =\tau^{-2}\Big(\big(e^{-\tau^2\gamma_j(\vartheta)s}\omega_j(\vartheta),\widetilde{\omega}_k(\vartheta)\big)+\big(\widetilde{\omega}_j(\vartheta),e^{-\tau^2\gamma_k(\vartheta)s}\omega_k(\vartheta)\big)\Big).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Согласно (1.24), при $\gamma_j(\vartheta)=\gamma_k(\vartheta)$ правая часть в (2.27) равна нулю, поэтому равенство (2.27) сохраняет силу и в этом случае. Из (2.27) с учетом тождеств (1.24) получаем представление

$$\mathcal{M}_*(\tau;\vartheta;s)=-\tau^{-2}\sum_{l=1}^{n}e^{-\tau^2\gamma_l(\vartheta)s}\Big(\big(\,\cdot\,,\widetilde{\omega}_l(\vartheta)\big)\omega_l(\vartheta)+\big(\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta)\big)\widetilde{\omega}_l(\vartheta)\Big).\tag{2.28}$$

Объединяя (2.25), (2.26) и (2.28), находим

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\tau;\vartheta;s)&=N_0(\vartheta)e^{-\tau^2S(\vartheta)Ps}Ps\\ &-\tau^{-2}\sum_{l=1}^{n}e^{-\tau^2\gamma_l(\vartheta)s}\Big(\big(\,\cdot\,,\widetilde{\omega}_l(\vartheta)\big)\omega_l(\vartheta)+\big(\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta)\big)\widetilde{\omega}_l(\vartheta)\Big).\end{aligned}$$

Отметим, наконец, что формула (2.23) упрощается, если $N(\vartheta)=0$ или $N_*(\vartheta)=0$.

Предложение 2.2. *Пусть $N(\vartheta)=0$. Тогда в условиях теоремы* 2.1 *выполнено*

$$\begin{aligned}e^{-B(\tau;\vartheta)s}&=e^{-\tau^2S(\vartheta)s}P+\tau(\vartheta_1Z+\vartheta_2\widetilde{Z})e^{-\tau^2S(\vartheta)s}P\\ &+e^{-\tau^2S(\vartheta)s}P\tau(\vartheta_1Z^*+\vartheta_2\widetilde{Z}^*)+\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s).\end{aligned}$$

Предложение 2.3. *Пусть в условиях теоремы* 2.1 $N_*(\vartheta)=0$. *Тогда*

$$\begin{aligned}e^{-B(\tau;\vartheta)s}&=e^{-\tau^2S(\vartheta)s}P+\tau(\vartheta_1Z+\vartheta_2\widetilde{Z})e^{-\tau^2S(\vartheta)s}P+e^{-\tau^2S(\vartheta)s}P\tau(\vartheta_1Z^*+\vartheta_2\widetilde{Z}^*)\\ &-\tau^3N_0(\vartheta)e^{-\tau^2S(\vartheta)Ps}Ps+\mathcal{R}(\tau;\vartheta;s).\end{aligned}$$

2.3. Возвращение к параметрам t и ε. Вернемся к исходным параметрам t,ε, вспоминая, что $t=\tau\vartheta_1$, $\varepsilon=\tau\vartheta_2$. В силу (1.25) оператор $\tau^2S(\vartheta)=:L(t,\varepsilon)$ задается выражением

$$\begin{aligned}L(t,\varepsilon)=t^2S+t\varepsilon\Big(-(X_0Z)^*X_0\widetilde{Z}-(X_0\widetilde{Z})^*X_0Z+P(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)\Big)\Big|_{\mathfrak{N}}\\ +\varepsilon^2\Big(-(X_0\widetilde{Z})^*X_0\widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}}+Q_{\mathfrak{N}}+\lambda Q_{0\mathfrak{N}}\Big).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Отметим оценку, вытекающую из (2.4):

$$L(t,\varepsilon)\geqslant\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)I_{\mathfrak{N}},\quad t\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant1.\tag{2.30}$$

В силу (1.38) оператор $\tau^3 N(\vartheta) =: N(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$N(t,\varepsilon) = t^3 N_{11} + t^2\varepsilon N_{12} + t\varepsilon^2 N_{21} + \varepsilon^3 N_{22}. \tag{2.31}$$

Согласно (1.44) выполнено

$$\|N(t,\varepsilon)\| \leqslant C_N (t^2+\varepsilon^2)^{3/2}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{2.32}$$

Записывая (2.23) в терминах исходных параметров, дадим равносильную формулировку теоремы 2.1, удобную для дальнейших применений к дифференциальным операторам. Назовем *корректором* оператор

$$\begin{aligned} K(t,\varepsilon,s) := \big(tZ+\varepsilon\widetilde{Z}\big)e^{-L(t,\varepsilon)s}P + e^{-L(t,\varepsilon)s}P(tZ^*+\varepsilon\widetilde{Z}^*) \\ -\int_0^s e^{-L(t,\varepsilon)(s-\widetilde{s})}PN(t,\varepsilon)e^{-L(t,\varepsilon)\widetilde{s}}P\,d\widetilde{s}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

В силу (2.30) и (2.32) выполнено

$$\begin{aligned} \|K(t,\varepsilon,s)\| \leqslant 2\max\{\|Z\|;\|\widetilde{Z}\|\}(t+\varepsilon)e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s} \\ +C_N s(t^2+\varepsilon^2)^{3/2}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Объединяя (1.18), (1.21), (2.34) и используя элементарные неравенства $e^{-\alpha}\leqslant\alpha^{-1}e^{-\alpha/2}$ и $e^{-\alpha}\leqslant 3\alpha^{-2}e^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$, находим

$$\|K(t,\varepsilon,s)\| \leqslant C_8 s^{-1}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s>0; \tag{2.35}$$

$$C_8 = 2^{3/2}\check{c}_*^{-1}\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\max\{\|X_1\|;c_1C(1)^{1/2}\} + 3\check{c}_*^{-2}C_N.$$

При $s\geqslant 0$ оценка более громоздкая: теперь для экспонент используем неравенства вида $e^{-\alpha}\leqslant 2(1+\alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$ и $e^{-\alpha}\alpha\leqslant 4(1+\alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$, где $\alpha\geqslant 0$. В результате получаем, что

$$\|K(t,\varepsilon,s)\| \leqslant C_9(t^2+\varepsilon^2)^{1/2}(1+\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s\geqslant 0; \tag{2.36}$$

$$C_9 = 2^{5/2}\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\max\{\|X_1\|;c_1C(1)^{1/2}\} + 4\check{c}_*^{-1}C_N.$$

Теорема 2.4. *Справедливо представление*

$$e^{-B(t,\varepsilon)s} = e^{-L(t,\varepsilon)s}P + K(t,\varepsilon,s) + \mathcal{R}(t,\varepsilon,s), \tag{2.37}$$

где операторы $B(t,\varepsilon)$, $L(t,\varepsilon)$ и $K(t,\varepsilon,s)$ определены в (1.7), (2.29) *и* (2.33) *соответственно. Для оператора $K(t,\varepsilon,s)$ справедливы оценки* (2.35) *и* (2.36). *Оператор $\mathcal{R}(t,\varepsilon,s) := \mathcal{R}(\tau;\vartheta;s)$ при $t^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$ подчинен неравенствам*

$$\|\mathcal{R}(t,\varepsilon,s)\| \leqslant C_7(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s\geqslant 0; \tag{2.38}$$

$$\|\mathcal{R}(t,\varepsilon,s)\| \leqslant C_5 s^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s>0. \tag{2.39}$$

Постоянные C_5, C_7, C_8 *и* C_9 *контролируются через полиномы с абсолютными положительными коэффициентами от* $\check{c}_*^{-1}$ *и от данных* (1.14).

§3. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

3.1. Операторное семейство $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$**.** Пусть $\widehat{\mathfrak{H}}$ — еще одно гильбертово пространство, и пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0(t) + t\widehat{X}_1(t)\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство вида (1.1), удовлетворяющее условиям п. 1.1. Подчеркнем, что при этом пространство $\mathfrak{H}_*$ не изменилось. *Все объекты, связанные с* $\widehat{X}(t)$, *будем помечать значком* "$\widehat{\ }$". Пусть $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм и

$$M \operatorname{Dom} X_0 = \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \tag{3.1}$$

$X(t) = \widehat{X}(t)M\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$; $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. Тогда $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$, где $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$. Положим

$$G = (MM^*)^{-1}\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{3.2}$$

Пусть $G_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора G в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$: $G_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}G|_{\widehat{\mathfrak{N}}}\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$. Очевидно, что $G_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Пусть $\widehat{S} = \widehat{R}^*\widehat{R}\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток операторного семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$. В соответствии с [BSu2, глава 1, п. 1.5] выполнено

$$R = \widehat{R}M|_{\mathfrak{N}}, \quad \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} \widehat{R}, \tag{3.3}$$

и $S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}$.

3.2. Операторное семейство $B(t,\varepsilon) = M^*\widehat{B}(t,\varepsilon)M$**.** Предположим, что для оператора $\widehat{Y}_0\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ справедливы условия п. 1.2. Подчеркнем, что пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$ не изменилось. Положим $Y_0 := \widehat{Y}_0 M$, $M \operatorname{Dom} Y_0 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$. В силу (3.1) и условия $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$ имеет место включение $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. Пусть $\widehat{Y}_1\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный оператор, пусть $Y_1 = \widehat{Y}_1 M :$ $\mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$. Положим $\widehat{Y}(t) := \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, $\operatorname{Dom} \widehat{Y}(t) = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$. Пусть $Y(t) = \widehat{Y}(t)M = Y_0 + tY_1 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, $\operatorname{Dom} Y(t) = \operatorname{Dom} Y_0$. На операторы $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}(t)$ наложим условие 1.2 с некоторой постоянной $\widehat{c}_1$. Тогда автоматически выполнено $\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$, где $c_1 = \widehat{c}_1$.

Пусть оператор $\widehat{Y}_2\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ удовлетворяет условиям п. 1.2. Положим $Y_2 := \widehat{Y}_2 M\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, $M \operatorname{Dom} Y_2 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2$. Так как M — изоморфизм, а оператор $\widehat{Y}_2$ плотно определен, оператор Y_2 также плотно определен. В силу (3.1) справедливо включение $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Предположим, что операторы $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}_2$ подчинены условию 1.3 с некоторыми постоянными $\widehat{C}(\nu) > 0$. Тогда автоматически для любого $\nu > 0$ найдется постоянная

$C(\nu) = \widehat{C}(\nu)\|M\|^2 > 0$ такая, что при $u \in \operatorname{Dom} X_0$, $t \in \mathbb{R}$, выполнена оценка $\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}$.

Положим $Q_0 := M^* M$. Тогда Q_0 — непрерывный положительно определенный оператор в $\mathfrak{H}$. (Роль $\widehat{Q}_0$ играет тождественный оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$.)

Пусть в пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ задана форма $\widehat{\mathfrak{q}}$, удовлетворяющая условиям п. 1.3. Определим форму $\mathfrak{q}$, действующую по правилу $\mathfrak{q}[u,v] = \widehat{\mathfrak{q}}[Mu, Mv]$, $u, v \in \operatorname{Dom}\mathfrak{q}$, $M\operatorname{Dom}\mathfrak{q} = \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{q}}$. Формально, $Q = M^*\widehat{Q}M$. Пусть для оператора $\widehat{X}(t)$ и формы $\widehat{\mathfrak{q}}$ выполнено условие 1.4 с некоторыми постоянными κ, $\widehat{c}_0$, $\widehat{c}_2$ и $\widehat{c}_3$. Учитывая (3.1), можно проверить, что тогда оператор $X(t) = \widehat{X}(t)M$ и форма $\mathfrak{q}$ удовлетворяют условию 1.4 с постоянными

$$c_0 = \|M\|^2 \widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 \geqslant 0, \quad c_0 = \|M^{-1}\|^{-2}\widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 < 0, \tag{3.4}$$

$c_2 = \widehat{c}_2$, $c_3 = \|M\|^2 \widehat{c}_3$ и прежней константой κ. Из (1.6) видно, что постоянные c_4 и $\widehat{c}_4 = 4\kappa^{-1}\widehat{c}_1^2 \widehat{C}(\nu)$ при $\nu = \kappa^2(16\widehat{c}_1^2)^{-1}$ связаны равенством

$$c_4 = \|M\|^2 \widehat{c}_4. \tag{3.5}$$

При сделанных предположениях операторный пучок

$$\widehat{B}(t,\varepsilon) = \widehat{A}(t) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}(t) + \widehat{Y}(t)^* \widehat{Y}_2) + \varepsilon^2 \widehat{Q} + \lambda \varepsilon^2 I \tag{3.6}$$

связан с пучком (1.7) соотношением

$$B(t,\varepsilon) = M^* \widehat{B}(t,\varepsilon) M. \tag{3.7}$$

Постоянная λ выбирается из условия (1.9) для оператора (1.7). Используя соотношения (3.4), (3.5) и равенство $Q_0 = M^* M$, находим, что при таком выборе λ условие (1.9) для оператора (3.6) также выполнено.

Отметим, что для оператора (3.6) оба варианта соотношений (1.11) принимают вид $\widehat{\beta} = \lambda - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4$. Отсюда и из (1.11), (3.4), (3.5) вытекает оценка

$$\beta \leqslant \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{\beta}. \tag{3.8}$$

3.3. Связь спектральных ростков $S(\vartheta)$ и $\widehat{S}(\vartheta)$. В выражениях для операторов $B(t,\varepsilon)$ и $\widehat{B}(t,\varepsilon)$ перейдем к параметрам τ, ϑ. Рассмотрим спектральный росток (1.25) и аналогичный росток для семейства (3.6):

$$\begin{aligned}\widehat{S}(\vartheta) = \vartheta_1^2 \widehat{S} - \vartheta_1\vartheta_2 (\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* (\widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}})|_{\widehat{\mathfrak{N}}} - \vartheta_1\vartheta_2 (\widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}})^* (\widehat{X}_0 \widehat{Z})|_{\widehat{\mathfrak{N}}} \\ - \vartheta_2^2 (\widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}})^* (\widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}})|_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \vartheta_1\vartheta_2 \widehat{P}(\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^* \widehat{Y}_2)|_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \vartheta_2^2 (\widehat{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \lambda I_{\widehat{\mathfrak{N}}}).\end{aligned} \tag{3.9}$$

В [M, предложение 1.8] установлена связь операторов (1.25) и (3.9):

$$S(\vartheta) = P M^* \widehat{S}(\vartheta) M|_{\mathfrak{N}}. \tag{3.10}$$

Вернемся к параметрам t, ε. Оператор $\tau^2\widehat{S}(\vartheta) =: \widehat{L}(t,\varepsilon)$ задается выражением

$$\begin{aligned}\widehat{L}(t,\varepsilon) = t^2\widehat{S} + t\varepsilon\Big(-(\widehat{X}_0\widehat{Z})^*\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}} - (\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}})^*\widehat{X}_0\widehat{Z} + \widehat{P}(\widehat{Y}_2^*\widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^*\widehat{Y}_2)\Big)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}} \\ + \varepsilon^2\Big(-(\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}})^*\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}}|_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \widehat{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \lambda I_{\widehat{\mathfrak{N}}}\Big).\end{aligned} \tag{3.11}$$

В силу (3.10) имеем $L(t,\varepsilon) = PM^*\widehat{L}(t,\varepsilon)M|_{\mathfrak{N}}$. Здесь $L(t,\varepsilon)$ — оператор (2.29).

3.4. Операторы $\widehat{Z}_G$ и $\widehat{\widetilde{Z}}_G$. Введем $\widehat{Z}_G$ — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, переводящий элемент $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ в (единственное) решение $\widehat{\phi}_G$ уравнения

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_G + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad G\widehat{\phi}_G \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Уравнение понимается в слабом смысле (ср. (1.16)). Тогда, как показано в [BSu3, лемма 6.1],

$$\widehat{Z}_G = MZM^{-1}\widehat{P}. \tag{3.12}$$

Аналогично введем $\widehat{\widetilde{Z}}_G$ — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ (единственное) решение $\widehat{\psi}_G$ уравнения

$$\widehat{X}_0^*\widehat{X}_0\widehat{\psi}_G + \widehat{Y}_0^*\widehat{Y}_2\widehat{\omega} = 0, \quad G\widehat{\psi}_G \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Уравнение понимается в слабом смысле. Производя пересчет в уравнении (1.19), с учетом тождеств $M\mathfrak{N} = \widehat{\mathfrak{N}}$, (3.1) и (3.2), находим

$$\widehat{\widetilde{Z}}_G = M\widetilde{Z}M^{-1}\widehat{P}. \tag{3.13}$$

3.5. Оператор $\widehat{N}_G(t,\varepsilon)$. Используя связь операторов X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2 и Q с соответствующими операторами со “шляпкой”, равенства $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $Q_0 = M^*M$, (1.39)–(1.42), (2.31), (3.3), (3.12) и (3.13), заключаем, что оператор

$$\widehat{N}_G(t,\varepsilon) := \widehat{P}(M^*)^{-1}N(t,\varepsilon)M^{-1}\widehat{P} \tag{3.14}$$

имеет вид

$$\widehat{N}_G(t,\varepsilon) = t^3\widehat{N}_{G,11} + t^2\varepsilon\widehat{N}_{G,12} + t\varepsilon^2\widehat{N}_{G,21} + \varepsilon^3\widehat{N}_{G,22}, \tag{3.15}$$

где

$$\widehat{N}_{G,11} = (\widehat{X}_1 \widehat{Z}_G)^* \widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^* \widehat{X}_1 \widehat{Z}_G, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{G,12} &= (\widehat{X}_1 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^* \widehat{X}_1 \widehat{\widehat{Z}}_G + (\widehat{X}_1 \widehat{Z}_G)^* \widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G \\ &+ (\widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{X}_1 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G \\ &+ (\widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_1 \widehat{P} + (\widehat{Y}_1 \widehat{P})^* \widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{P})^* \widehat{Y}_1 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_1 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{P},\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{G,21} &= (\widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{X}_1 \widehat{\widehat{Z}}_G + (\widehat{X}_1 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{X}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G \\ &+ (\widehat{Y}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widehat{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{Y}_1 \widehat{P} \\ &+ (\widehat{Y}_1 \widehat{P})^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widehat{Z}}_G + (\widehat{Y}_1 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{P} + (\widehat{Y}_2 \widehat{P})^* \widehat{Y}_1 \widehat{\widehat{Z}}_G \\ &+ \widehat{Z}_G^* \widehat{Q}\widehat{P} + \widehat{P}\widehat{Q}\widehat{Z}_G + \lambda(\widehat{Z}_G^* \widehat{P} + \widehat{P}\widehat{Z}_G),\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{G,22} &= (\widehat{Y}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widehat{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widehat{Z}}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{\widehat{Z}}_G + \big(\widehat{\widehat{Z}}_G\big)^* \widehat{Q}\widehat{P} + \widehat{P}\widehat{Q}\widehat{\widehat{Z}}_G \\ &+ \lambda\Big(\big(\widehat{\widehat{Z}}_G\big)^* \widehat{P} + \widehat{P}\widehat{\widehat{Z}}_G\Big).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Отметим оценку, вытекающую из (2.32) и (3.14):

$$\|\widehat{N}_G(t,\varepsilon)\| \leqslant C_G (t^2+\varepsilon^2)^{3/2}; \quad C_G = C_N \|M^{-1}\|^2. \tag{3.20}$$

В соответствии с замечанием 1.5 справедливо следующее наблюдение.

Замечание 3.1. Постоянная C_G контролируется через полином с положительными коэффициентами от $\|M^{-1}\|$ и от данных (1.14).

3.6. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты. Наша цель в этом пункте — для оператора вида (3.7) найти аппроксимацию операторной экспоненты $e^{-B(t,\varepsilon)s}$ в терминах изоморфизма M и пороговых характеристик оператора $\widehat{B}(t,\varepsilon)$.

Пусть для оператора $A(t)$ справедливо неравенство (2.1) с некоторой постоянной $c_* > 0$: $A(t) \geqslant c_* t^2 I$, $|t| \leqslant \tau_0$. Здесь τ_0 подчинено условию (1.13) для оператора $B(t,\varepsilon)$. Тогда для $B(t,\varepsilon)$ выполнена оценка (2.2).

Итак, оператор $B(t,\varepsilon)$ вида (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.4. Применяя ее и умножая равенство (2.37) на оператор M слева и на M^* справа, находим

$$Me^{-B(t,\varepsilon)s}M^* = Me^{-L(t,\varepsilon)s}PM^* + MK(t,\varepsilon,s)M^* + M\mathcal{R}(t,\varepsilon,s)M^*. \tag{3.21}$$

Согласно (2.33)

$$
\begin{aligned}
MK(t,\varepsilon,s)M^* = {} & M(tZ+\varepsilon\widetilde{Z})e^{-L(t,\varepsilon)s}PM^* \\
& + Me^{-L(t,\varepsilon)s}P(tZ^*+\varepsilon\widetilde{Z}^*)M^* \\
& - \int\limits_0^s Me^{-L(t,\varepsilon)(s-\widetilde{s})}PN(t,\varepsilon)Pe^{-L(t,\varepsilon)\widetilde{s}}PM^*\,d\widetilde{s}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Учтем тождество, установленное в [М, предложение 3.1]:

$$
Me^{-L(t,\varepsilon)s}PM^* = M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0 s}M_0\widehat{P}. \tag{3.23}
$$

Здесь $L(t,\varepsilon)$ и $\widehat{L}(t,\varepsilon)$ — операторы (2.29) и (3.11) соответственно,

$$
M_0 := (G_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}. \tag{3.24}
$$

Обозначим $K_G(t,\varepsilon,s) := MK(t,\varepsilon,s)M^*$. Отметим сразу оценки, вытекающие из (2.35) и (2.36):

$$
\|K_G(t,\varepsilon,s)\| \leqslant C_8\|M\|^2 s^{-1}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s>0; \tag{3.25}
$$

$$
\|K_G(t,\varepsilon,s)\| \leqslant C_9\|M\|^2(t^2+\varepsilon^2)^{1/2}\bigl(1+\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s\bigr)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s \geqslant 0. \tag{3.26}
$$

В силу (3.12)–(3.14), (3.22) и (3.23) для оператора $K_G(t,\varepsilon,s)$ справедливо представление

$$
\begin{aligned}
K_G(t,\varepsilon,s) = {} & \bigl(t\widehat{Z}_G+\varepsilon\widehat{\widetilde{Z}}_G\bigr)M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0 s}M_0\widehat{P} \\
& + M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0 s}M_0\widehat{P}\Bigl(t\widehat{Z}_G^* + \varepsilon\bigl(\widehat{\widetilde{Z}}_G\bigr)^*\Bigr) \\
& - \int\limits_0^s M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0(s-\widetilde{s})}M_0\widehat{N}_G(t,\varepsilon)M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0\widetilde{s}}M_0\widehat{P}\,d\widetilde{s}.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Объединяя (2.38), (2.39), (3.21), (3.23) и (3.27), получаем следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия п.* 3.1 *и* 3.2. *Пусть для оператора* $A(t)$ *справедливо неравенство* (2.1). *Пусть оператор* $\widehat{L}(t,\varepsilon)$ *определен в* (3.11). *Пусть* M_0 *— оператор* (3.24). *Тогда справедливо представление*

$$
Me^{-B(t,\varepsilon)s}M^* = M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0 s}M_0\widehat{P} + K_G(t,\varepsilon,s) + M\mathcal{R}(t,\varepsilon,s)M^*.
$$

Здесь $K_G(t,\varepsilon,s)$ — *оператор* (3.27), *удовлетворяющий оценкам* (3.25), (3.26), *а для остаточного члена выполнены неравенства*

$$\|M\mathcal{R}(t,\varepsilon,s)M^*\| \leqslant C_7\|M\|^2(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s \geqslant 0;$$
$$\|M\mathcal{R}(t,\varepsilon,s)M^*\| \leqslant C_5\|M\|^2 s^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0.$$

Постоянные C_5, C_7, C_8, C_9 *контролируются через полиномы от* $\check{c}_*^{-1}$ *и данных* (1.14), *коэффициенты которых — абсолютные положительные постоянные.*

Глава 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

§4. Предварительные сведения

4.1. Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$: $\Gamma = \{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d :\ \mathbf{a}=\sum_{j=1}^d n^j\mathbf{a}_j,\ n^j\in\mathbb{Z}\}$. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ: $\Omega = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d :\ \mathbf{x}=\sum_{j=1}^d \xi^j\mathbf{a}_j,\ 0<\xi^j<1\}$. Базис $\mathbf{b}^1,\dots,\mathbf{b}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle\mathbf{b}^l,\mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_j^l$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ. За $\widetilde{\Omega}$ обозначим *зону Бриллюэна* решетки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d :\ |\mathbf{k}|<|\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\}.$$

Область $\widetilde{\Omega}$ является фундаментальной для $\widetilde{\Gamma}$. Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$. Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, и пусть $2r_1 = \operatorname{diam}\widetilde{\Omega}$.

Если $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, положим

$$\overline{\Phi} := |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \qquad \underline{\Phi} := \left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\right)^{-1}. \tag{4.1}$$

Здесь при определении $\overline{\Phi}$ предполагается, что $\Phi\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{\Phi}$ считается, что матрица Φ квадратная и неособая, причем $\Phi^{-1}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

4.2. Факторизованные операторы второго порядка. (См. [BSu2].) Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ — ДО первого порядка. Здесь b_l — постоянные $(m\times n)$-матрицы. *Считаем, что* $m\geqslant n$. Относительно символа $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l\xi_l$ *предположим, что* $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0\neq\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$. Тогда при некоторых α_0, $\alpha_1>0$ выполнено

$$\alpha_0\mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^*b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1\mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad 0<\alpha_0\leqslant\alpha_1<\infty. \tag{4.2}$$

Пусть $(n \times n)$-матрица-функция $f(\mathbf{x})$ и $(m \times m)$-матрица-функция $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — ограничены и ограниченно обратимы:

$$f,\ f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h,\ h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{4.3}$$

Функции f и h предполагаются Γ-периодическими. Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X} := hb(\mathbf{D})f : \ L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \tag{4.4}$$

$$\operatorname{Dom}\mathcal{X} := \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\}. \tag{4.5}$$

Оператор (4.4) замкнут на области определения (4.5). Рассмотрим самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A} := \mathcal{X}^*\mathcal{X}$, отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{4.6}$$

Формально можно записать $\mathcal{A} = f^*b(\mathbf{D})^*gb(\mathbf{D})f$, где $g = h^*h$. Используя преобразование Фурье и (4.2), (4.3), легко проверить, что при $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ справедливы оценки

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.7}$$

4.3. Операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$. Перейдем к описанию младших членов. Введем оператор $\mathcal{Y} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$, действующий по правилу

$$\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \operatorname{col}\{D_1(f\mathbf{u}),\dots,D_d(f\mathbf{u})\}, \quad \operatorname{Dom}\mathcal{Y} = \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{4.8}$$

Нижняя оценка (4.7) означает, что

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}; \quad c_1 = \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{4.9}$$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ заданы Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, такие, что

$$a_j \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1,\dots,d. \tag{4.10}$$

Пусть оператор $\mathcal{Y}_2 \colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$ действует на области определения $\operatorname{Dom}\mathcal{Y}_2 = \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ по правилу $\mathcal{Y}_2\mathbf{u} = \operatorname{col}\{a_1^*f\mathbf{u},\dots,a_d^*f\mathbf{u}\}$. Формально, $(\mathcal{Y}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^*\mathcal{Y}_2)\mathbf{u} = \sum_{j=1}^d \Big(f^*a_jD_j(f\mathbf{u}) + f^*D_j(a_j^*f\mathbf{u})\Big)$.

Используя неравенство Гёльдера, условия (4.3), (4.10) и компактность вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ при $p = 2\varrho/(\varrho-2)$, можно показать (ср. [Su4, п. 5.2]), что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{4.11}$$

При фиксированном ν постоянная $C(\nu)$ зависит от норм $\|a_j\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $j = 1,\dots,d$, от $\|f\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, d, ϱ и от параметров решетки Γ.

Используя (4.9) и (4.11), несложно получить неравенство

$$2\varepsilon|\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant \frac{\kappa}{2}\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_4\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad (4.12)$$
$$\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}; \quad c_4 = 4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu) \text{ при } \nu=\kappa^2(16c_1^2)^{-1}.$$

4.4. Оператор $\mathcal{Q}_0$, форма $q[\mathbf{u},\mathbf{u}]$. Пусть $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, действующий как умножение на Γ-периодическую положительно определенную ограниченную матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})^*f(\mathbf{x})$.

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана Γ-периодическая борелевская σ-конечная мера $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, $j,l = 1,\dots,n$, со значениями в классе эрмитовых $(n\times n)$-матриц. Иначе говоря, $d\mu_{jl}(\mathbf{x})$ — комплексная Γ-периодическая мера в $\mathbb{R}^d$ и $d\mu_{jl} = d\mu^*_{lj}$. Предположим, что мера $d\mu$ такова, что функция $|v(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой мере $d\mu_{jl}$ для любой функции $v\in H^1(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим форму

$$q[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\langle d\mu(\mathbf{x})f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.$$

Наложим на меру $d\mu$ следующее ограничение.

Условие 4.1. 1°. *Существуют постоянные $\widetilde{c}_2\geqslant 0$ и $\widehat{c}_3\geqslant 0$ такие, что при любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ выполнена оценка*

$$\left|\int\limits_{\Omega}\langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\right| \leqslant \left(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} + \widehat{c}_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} \times \left(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + \widehat{c}_3\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

2°. *Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}\langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geqslant -\widetilde{c}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} - \widehat{c}_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n),$$

с некоторыми постоянными $\widehat{c}_0\in\mathbb{R}$ и $\widetilde{c}$ такой, что $0\leqslant\widetilde{c}<\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

Заметим, что из условия 4.1 вытекают оценки

$$\left|\int\limits_{\Omega}\langle d\mu(\mathbf{x})f\mathbf{u}, f\mathbf{v}\rangle\right| \leqslant \left(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} \times \left(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}(f\mathbf{v})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}, \qquad (4.13)$$

$$\int\limits_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle \geqslant -\widetilde{c}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{4.14}$$

$f\mathbf{u}, f\mathbf{v} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, с постоянными $c_0 = \widehat{c}_0\|f\|^2_{L_\infty}$, если $\widehat{c}_0 \geqslant 0$, $c_0 = \widehat{c}_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}$, если $\widehat{c}_0 < 0$; $c_3 = \|f\|^2_{L_\infty}\widehat{c}_3$.

При $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ запишем неравенства (4.13), (4.14) по сдвинутым ячейкам $\Omega + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Gamma$, и просуммируем. Получим

$$\begin{aligned} |q[\mathbf{u},\mathbf{v}]| &\leqslant \Big(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2} \\ &\times \Big(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}(f\mathbf{v})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2}, \\ q[\mathbf{u},\mathbf{u}] &\geqslant -\widetilde{c}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

С учетом (4.7) отсюда следуют оценки

$$\begin{aligned} |q[\mathbf{u},\mathbf{v}]| &\leqslant \Big(c_2\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2} \\ &\times \Big(c_2\|\mathcal{X}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$q[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant -(1-\kappa)\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.16}$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Здесь $c_2 = \widetilde{c}_2\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\kappa = 1 - \widetilde{c}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $0 < \kappa \leqslant 1$.

Примеры мер $d\mu$, удовлетворяющих условию 4.1, приведены в [Su4, п. 5.5]. Выпишем только основной пример.

Пример 4.2. Пусть мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега: $d\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(n \times n)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, причем

$$\mathcal{Q} \in L_\sigma(\Omega), \quad \sigma = 1 \text{ при } d = 1; \quad \sigma > d/2 \text{ при } d \geqslant 2. \tag{4.17}$$

Тогда

$$q[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{Q}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}.$$

В силу теорем вложения при условии (4.17) для любого $\nu > 0$ существует положительная постоянная $C_Q(\nu)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} |\mathcal{Q}(\mathbf{x})||\mathbf{v}|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \nu \int\limits_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{v}|^2\,d\mathbf{x} + C_Q(\nu)\int\limits_{\Omega} |\mathbf{v}|^2\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n).$$

При фиксированном ν постоянная $C_Q(\nu)$ контролируется через d, σ, норму $\|\mathcal{Q}\|_{L_\sigma(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. Итак, условие 4.1 выполнено, причем постоянные можно выбрать следующим образом: $\widetilde{c}_2 = 1$, $\widehat{c}_3 = C_Q(1)$, $\widetilde{c} = \nu$ и $\widehat{c}_0 = C_Q(\nu)$ при $2\nu = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

4.5. Оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[\mathbf{u},\mathbf{u}] \\ + \lambda\varepsilon^2(\mathcal{Q}_0\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in \operatorname{Dom}\mathcal{X},\end{aligned} \tag{4.18}$$

где $0<\varepsilon\leqslant 1$, и *параметр* $\lambda\in\mathbb{R}$ *удовлетворяет следующему условию*:

$$\begin{aligned}&\lambda > \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}(c_0+c_4), \text{ если } \lambda\geqslant 0,\\ &\lambda > \|\mathcal{Q}_0\|^{-1}_{L_\infty}(c_0+c_4), \text{ если } \lambda< 0 \text{ (и } c_0+c_4<0).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Оценим форму (4.18) снизу. Пусть $\beta>0$ определено равенством

$$\begin{aligned}&\beta = \lambda\|\mathcal{Q}_0^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda\geqslant 0,\\ &\beta = \lambda\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda< 0 \text{ (и } c_0+c_4<0).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Комбинируя (4.12), (4.16), (4.19) и (4.20), имеем

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \varepsilon^2\beta\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.21}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}(\varepsilon)$ положительно определена. Объединяя (4.9), (4.11) при $\nu=1$ и оценку (4.15) для квадратичной формы $q[\mathbf{u},\mathbf{u}]$, находим

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \\ + \varepsilon^2(C(1) + c_3 + |\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty})\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Из неравенств (4.21) и (4.22) следует, что форма $\mathfrak{b}(\varepsilon)$ замкнута. *Отвечающий ей положительно определенный оператор в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *обозначим через* $\mathcal{B}(\varepsilon)$. Формально можно записать

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\varepsilon) &= \mathcal{A} + \varepsilon(\mathcal{Y}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^*\mathcal{Y}_2) + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \varepsilon^2\lambda\mathcal{Q}_0\\ &= f^*b(\mathbf{D})^*gb(\mathbf{D})f + \varepsilon\sum_{j=1}^d f^*\left(a_jD_j + D_ja_j^*\right)f + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \varepsilon^2\lambda\mathcal{Q}_0,\end{aligned} \tag{4.23}$$

где $\mathcal{Q}$ следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой $d\mu$.

Для удобства дальнейших ссылок назовем "исходными данными" набор величин

$$\begin{aligned}&d,\ m,\ n,\ \varrho;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|f\|_{L_\infty},\ \|f^{-1}\|_{L_\infty},\ \|a_j\|_{L_\varrho(\Omega)},\\ &j=1,\dots,d;\ \widetilde{c},\ \widehat{c}_0,\ \widetilde{c}_2,\ \widehat{c}_3 \text{ из условия 4.1; } \lambda;\ \text{параметры решетки } \Gamma.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Мы будем следить за зависимостью постоянных в оценках от этих данных. Постоянные c_1, $C(1)$, κ, c_2, c_3, c_4, c_0, β полностью определяются исходными данными (4.24).

§5. Разложение оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ в прямой интеграл

5.1. Преобразование Гельфанда. Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ первоначально задается на функциях класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \exp(-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle)\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.$$

При этом $\int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\Omega} |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}$, а потому $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{U} \ : \ L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{H}.$$

Через $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ *обозначим подпространство тех функций из* $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-*периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит классу*

$$H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \,\cdot\,) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$$

при п. в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\Omega} \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 \right) \, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую матрицу-функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{H}$. Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \,\cdot\,) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

5.2. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. (См. [BSu2, п. 2.2.1].) Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m), \quad \widetilde{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^{dn}) \tag{5.1}$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, задаваемый соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d, \tag{5.2}$$

$$\mathfrak{d} := \operatorname{Dom}\mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u}\in\mathfrak{H} \ : \ f\mathbf{u}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)\}. \tag{5.3}$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) := \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Из (4.2) и (4.3) вытекают оценки

$$\begin{gathered}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ \mathbf{v} = f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n).\end{gathered} \tag{5.4}$$

Из (5.4) и компактности вложения $\widetilde{H}^1(\Omega;\,\mathbb{C}^n)$ в $\mathfrak{H}$ следует, что спектр оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker}\mathcal{X}(0)$. Из неравенств (5.4) при $\mathbf{k} = 0$ вытекает, что

$$\mathfrak{N} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\ :\ f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim\mathfrak{N} = n. \tag{5.5}$$

Как показано в [BSu2, (2.2.11), (2.2.12)], справедлива оценка

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}; \quad c_* = \alpha_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{5.6}$$

В соответствии с [BSu2, (2.2.14)] расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ допускает оценку

$$d^0 \geqslant 4c_* r_0^2. \tag{5.7}$$

5.3. Операторы $\mathcal{Y}(\mathbf{k})$ и Y_2. Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, действующий на области определения $\operatorname{Dom}\mathcal{Y}(\mathbf{k}) = \mathfrak{d}$ по правилу

$$\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u} = (\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u} = \operatorname{col}\{(D_1+k_1)f\mathbf{u},\dots,(D_d+k_d)f\mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{5.8}$$

Из нижней оценки (5.4) вытекает, что

$$\|\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant c_1\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \tag{5.9}$$

где постоянная c_1 определена в (4.9).

Рассмотрим оператор $Y_2 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, заданный соотношением

$$Y_2\mathbf{u} = \operatorname{col}\{a_1^* f\mathbf{u},\dots,a_d^* f\mathbf{u}\}, \quad \operatorname{Dom} Y_2 = \mathfrak{d}. \tag{5.10}$$

Как показано в [Su4, п. 5.7], для любого $\nu > 0$ найдутся постоянные $C_j(\nu) > 0$, $j = 1,\dots,d$, такие, что при $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\|a_j^*\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \nu\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + C_j(\nu)\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)},\ \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ j = 1,\dots,d.$$

Пусть $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Тогда, суммируя указанные неравенства по j и учитывая (4.3), (5.4), получаем, что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ (та же, что и в (4.11)) такая, что

$$\|Y_2\mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d},\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.11}$$

5.4. Оператор $\mathcal{Q}_0$, форма $q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{u}]$. Пусть $\mathcal{Q}_0$ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, действующий как умножение на матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^* f(\mathbf{x})$.

В $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим форму

$$q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{d}.$$

Заменяя в (4.13), (4.14) функцию $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\exp(i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle)$ (эти функции принадлежат пространству $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ одновременно), а $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})\exp(i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle)$ и используя (5.4), получаем, что

$$|q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]| \leqslant \left(c_2\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}\left(c_2\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}, \tag{5.12}$$

$$q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant -(1-\kappa)\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}; \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathfrak{d}, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{5.13}$$

Здесь постоянные κ, c_0, c_2, c_3 те же, что и в (4.15), (4.16).

5.5. Операторный пучок $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}, Y_2\mathbf{u})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \varepsilon^2 q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \lambda\varepsilon^2(\mathcal{Q}_0\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{d}.$$

Из (4.19), (4.20), (5.9), (5.11) и (5.13) вытекает оценка

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{d}. \tag{5.14}$$

Далее, из (5.9), (5.11) при $\nu = 1$ и (5.12) получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] &\leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}]\\ &\quad + (C(1) + c_3 + |\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{d}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Неравенства (5.14), (5.15) показывают, что форма $\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)$ замкнута на области определения (5.3) и положительно определена. Порожденный этой формой самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Формально можно записать

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) &= \mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon(Y_2^*\mathcal{Y}(\mathbf{k}) + \mathcal{Y}(\mathbf{k})^* Y_2) + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \lambda\varepsilon^2\mathcal{Q}_0\\ &= f^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f + \varepsilon\sum_{j=1}^d f^*\big(a_j(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j^*\big) f\\ &\quad + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \lambda\varepsilon^2 f^* f.\end{aligned} \tag{5.16}$$

5.6. Разложение в прямой интеграл для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$. Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ оператор (4.23), действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, раскладывается в прямой интеграл операторов (5.16), действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}(\varepsilon)\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k}.$$

Сказанное означает следующее. Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{b}(\varepsilon) = \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\,\cdot\,) \in \mathfrak{d} \text{ при п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{5.17}$$

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\,\cdot\,),\, \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\,\cdot\,)]\, d\mathbf{k}. \tag{5.18}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}$ выполнено (5.17) и интеграл в (5.18) конечен, то $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{b}(\varepsilon) = \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ и выполнено (5.18).

§6. Включение операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ в абстрактную схему

Содержимое пп. 6.1–7.5 заимствовано из [Su7].

6.1. При $d > 1$ операторы $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [BSu2, гл. 2], выделим одномерный параметр t, полагая $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Будем применять схему главы 1. При этом возникающие объекты будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta}$, и необходимо следить за равномерностью по $\boldsymbol{\theta}$ построений и оценок. Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ определены в (5.1). Положим $X(t) = X(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. В соответствии с (5.2) имеем $X(t;\boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$X_0 = \mathcal{X}(0) = hb(\mathbf{D})f, \quad \operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}; \quad X_1(\boldsymbol{\theta}) = hb(\boldsymbol{\theta})f. \tag{6.1}$$

Далее, положим $A(t) = A(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. В соответствии с (5.5) ядро $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0)$ n-мерно. Условие 1.1 выполнено. Величина d^0 допускает оценку (5.7). Как показано в [BSu2, гл. 2, §3], условие $n \leqslant n_* = \dim\operatorname{Ker} X_0^*$ также выполнено. Оценка (5.6) соответствует неравенству (2.1).

Далее, роль $Y(t)$ играет оператор $Y(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{Y}(t\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.8) справедливо равенство $Y(t;\boldsymbol{\theta}) = Y_0 + tY_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\begin{aligned} &Y_0\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \operatorname{col}\{D_1 f\mathbf{u},\dots,D_d f\mathbf{u}\}, \quad \operatorname{Dom} Y_0 = \mathfrak{d};\\ &Y_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = \operatorname{col}\{\theta_1 f\mathbf{u},\dots,\theta_d f\mathbf{u}\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Условие 1.2 выполнено за счет оценки (5.9). Оператор Y_2 определен в (5.10). Условие 1.3 выполнено в силу (5.11). Роль формы $\mathfrak{q}$ из п. 1.3

играет форма q_Ω. Условие 1.4 выполнено в силу (5.12), (5.13). Роль оператора Q_0 из п. 1.4 играет оператор умножения на матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$. Ограничение (1.9) на параметр λ выполнено в силу (4.19).

Наконец, в качестве операторного пучка $B(t,\varepsilon)$ (см. п. 1.4) выступает операторное семейство (5.16): $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$.

Таким образом, все предположения абстрактной схемы выполнены.

6.2. В соответствии с п. 1.5 надлежит фиксировать положительное число δ такое, что $\delta < \kappa d^0/13$. Учитывая (5.6) и (5.7), положим

$$\delta = \frac{1}{4}\kappa c_* r_0^2 = \frac{1}{4}\kappa\alpha_0\|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} r_0^2.$$

Заметим, что из (4.2), (4.3), (6.1) и (6.2) вытекают соотношения

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}, \quad \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\| = \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{6.3}$$

Теперь правая часть в оценке (1.13) принимает вид

$$\delta^{1/2}((2+c_1^2+c_2)\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|f\|_{L_\infty}^2)^{-1/2}$$

и зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Выберем следующее значение постоянной τ_0, подходящее при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$:

$$\tau_0 = \delta^{1/2}((2+c_1^2+c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|f\|_{L_\infty}^2)^{-1/2}. \tag{6.4}$$

С учетом (5.6) и (5.14) для оператора $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ справедливо условие вида (2.2):

$$\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) = B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) \geqslant \check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)I, \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}\in\widetilde{\Omega}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1; \tag{6.5}$$

$$\check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*; 2\beta\}. \tag{6.6}$$

6.3. Случай $f = \mathbf{1}_n$. *Все объекты, относящиеся к случаю $f = \mathbf{1}_n$, далее помечаются верхним значком* “ $\widehat{\ }$ ”. Имеем $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. В соответствии с п. 6.1 выполнено $\widehat{X}(t;\boldsymbol{\theta}) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\widehat{X}_0 = hb(\mathbf{D}), \quad \operatorname{Dom}\widehat{X}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{6.7}$$

и $\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) = hb(\boldsymbol{\theta}). \tag{6.8}$$

Формально $\widehat{A}(t;\boldsymbol{\theta}) = \widehat{X}(t;\boldsymbol{\theta})^*\widehat{X}(t;\boldsymbol{\theta})$. В случае $f = \mathbf{1}_n$ ядро (5.5) совпадает с подпространством констант $\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u}\in\mathfrak{H} \,:\, \mathbf{u} = \mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\}$. Ортогональный проектор $\widehat{P}$ пространства $\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathbb{C}^n$ — это оператор усреднения по ячейке Ω:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{6.9}$$

Далее, $\widehat{Y}(t;\boldsymbol{\theta}) = \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, где

$$\widehat{Y}_0\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \operatorname{col}\{D_1\mathbf{u},\dots,D_d\mathbf{u}\}, \quad \operatorname{Dom}\widehat{Y}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{6.10}$$

$$\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = \operatorname{col}\{\theta_1\mathbf{u},\dots,\theta_d\mathbf{u}\}. \tag{6.11}$$

Оператор $\widehat{Y}_2 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ действует по правилу

$$\widehat{Y}_2\mathbf{u} = \operatorname{col}\{a_1^*\mathbf{u},\dots,a_d^*\mathbf{u}\}, \quad \operatorname{Dom}\widehat{Y}_2 = \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{6.12}$$

Роль формы $\widehat{\mathfrak{q}}[\mathbf{u},\mathbf{u}]$ играет форма $\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle$, $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$. В роли оператора $\widehat{Q}_0$ выступает тождественный оператор I.

Операторный пучок $\widehat{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ формально дается выражением

$$\widehat{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = \widehat{A}(t;\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^*\widehat{Y}(t;\boldsymbol{\theta}) + \widehat{Y}(t;\boldsymbol{\theta})^*\widehat{Y}_2) + \varepsilon^2\mathcal{Q} + \lambda\varepsilon^2 I.$$

(Подчеркнем, что формальный объект $\mathcal{Q}$ не изменился.)

6.4. Случай $f \neq \mathbf{1}_n$. Реализация условий §3. Вернемся к рассмотрению операторов $\mathcal{B}(\varepsilon)$ общего вида (4.23) и соответствующих семейств $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$, описанных в п. 6.1. Верхний значок “ $\widehat{\ }$ ” удерживается для обозначения объектов, отвечающих $f = \mathbf{1}_n$ при сохранении тех же $b(\mathbf{D})$, g, a_j, $j = 1,\dots,d$, λ и $d\mu$.

Поймем, что для операторных семейств $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ справедливы условия §3 абстрактной схемы. Действительно, тождество (3.7) соответствует очевидному равенству $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = f^*\widehat{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})f$. Роль изоморфизма M сейчас играет оператор умножения на матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$. Тогда в качестве оператора G (см. (3.2)) выступает оператор умножения на матрицу-функцию $(f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок G в ядре $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathbb{C}^n$ — оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{G} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}\,d\mathbf{x}$. Роль оператора M_0 (см. (3.24)) играет оператор умножения на матрицу

$$f_0 := (\overline{G})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{6.13}$$

Заметим, что

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{6.14}$$

6.5. Об оценочных постоянных. Мы нацелены на применение результатов главы 1 к оператору $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$, который зависит от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta}$. Чтобы реализовать абстрактную схему, требуется сделать все оценки главы 1 в применении к этому оператору равномерными по $\boldsymbol{\theta}$, то есть для каждой постоянной выбрать значение, подходящее при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В главе 1 было прослежено (см. замечания 1.5 и 3.1 и теорему 3.2), что постоянные C_N, C_5, C_7, C_8 и C_9 контролируются через полиномы с абсолютными положительными коэффициентами от данных (1.14) и $\check{c}_*^{-1}$, а постоянная C_G зависит от тех же величин и от $\|M^{-1}\|$. В рассматриваемом случае $\|M^{-1}\| = \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}^{1/2}$, данные (1.14) сводятся к набору величин $\delta, \delta^{-1/2}$, τ_0, $\kappa^{1/2}$, $\kappa^{-1/2}$, c_1, $c_2^{1/2}$, $c_3^{1/2}$, $C(1)^{1/2}$, $|\lambda|$, $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$, $\|Y_1(\boldsymbol{\theta})\|$ и $\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}$. Величины $\delta, \delta^{-1/2}$, $\kappa^{1/2}$, $\kappa^{-1/2}$, c_1, $c_2^{1/2}$, $c_3^{1/2}$, $C(1)^{1/2}$ от $\boldsymbol{\theta}$ не зависят и допускают контроль через исходные данные (4.24); число τ_0 уже выбрано не зависящим от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (6.4)). Используя (6.3), вместо $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно взять $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$, а вместо $\|Y_1(\boldsymbol{\theta})\|$ — норму $\|f\|_{L_\infty}$. Таким образом, справедливо следующее наблюдение.

Замечание 6.1. Значения постоянных C_G, C_5, C_7, C_8 и C_9 для оператора $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ можно выбрать не зависящими от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

§7. Эффективные характеристики

7.1. Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{\widetilde{Z}}$ и $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$. Оператор $\widehat{Z}$, определенный в п. 1.6, сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Введем Γ-периодическую $(n\times m)$-матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$, являющуюся слабым решением уравнения

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{7.1}$$

Как проверено в [Su4, п. 6.3], оператор $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ определяется равенством

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{7.2}$$

где $\widehat{P}$ — проектор (6.9).

В соответствии с [Su4, п. 6.3]

$$\widehat{\widetilde{Z}} = \widetilde{\Lambda}\widehat{P}, \tag{7.3}$$

где $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое $(n \times n)$-матричное решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{7.4}$$

Оператор $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{N}_*$ действует как умножение на матрицу-функцию

$$\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) = h(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)b(\boldsymbol{\theta}). \tag{7.5}$$

7.2. Оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Эффективная матрица. Спектральный росток $\widehat{S}$, введенный в п. 1.7, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно [BSu2, гл. 3, §1] оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ действует как оператор умножения на матрицу $b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Здесь g^0 — постоянная $(m \times m)$-матрица, называемая *эффективной матрицей* и заданная выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{7.6}$$

Нам потребуются следующие свойства эффективной матрицы, см. [BSu2, гл. 3, §1].

Предложение 7.1. *Эффективная матрица g^0 подчинена оценкам*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}.$$

(*Здесь $\underline{g}$ и $\overline{g}$ определены согласно* (4.1).) *При $m = n$ выполнено $g^0 = \underline{g}$.*

Предложение 7.2. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{7.7}$$

для столбцов $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 7.3. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ эквивалентно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m,$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

7.3. Оператор $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$. Оператор $\widehat{L}(t, \varepsilon)$, определенный согласно (2.29) и действующий в пространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Оказывается (см. [Su4, (7.2), (7.3), (7.8)]), справедливо представление

$$\widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k})$$
$$- \varepsilon(b(\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{k})) + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) k_j + \varepsilon^2(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I),$$

где постоянные матрицы $(\overline{a_j + a_j^*})$ определены согласно (4.1),

$$V := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{7.8}$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{7.9}$$

$$\overline{\mathcal{Q}} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} d\mu(\mathbf{x}). \tag{7.10}$$

В соответствии с (5.6) выполнено неравенство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 I$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, где $\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$. Отметим, что постоянные c_* и $\widehat{c}_*$ связаны равенством $c_* = \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \widehat{c}_*$. Согласно (3.8) $\beta \leqslant \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \widehat{\beta}$. В силу (6.6) имеем $\check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*; 2\beta\}$, $\widehat{\check{c}}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa \widehat{c}_*; 2\widehat{\beta}\}$. Следовательно, $\check{c}_* \leqslant \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \widehat{\check{c}}_*$. В соответствии с (2.30) $\widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) \geqslant \widehat{\check{c}}_* (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)\mathbf{1}_n$. С учетом (6.14) отсюда вытекает оценка

$$f_0 \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0 \geqslant \check{c}_* (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)\mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{7.11}$$

Положим

$$\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}), \quad \widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k}) = -b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* V + \sum_{j=1}^d \overline{a_j}(D_j + k_j),$$

$$\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon(\widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k}) + \widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k})^*) + \varepsilon^2(\overline{\mathcal{Q}} - W + \lambda I). \tag{7.12}$$

Тогда

$$\widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{P} = \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{P}. \tag{7.13}$$

Обозначим

$$\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) := f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0, \tag{7.14}$$

где $\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ — оператор (7.12). Так как символ оператора $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ подчинен оценке (7.11), используя разложение в ряд Фурье, несложно проверить, что

$$\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) \geqslant \check{c}_* (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) I, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{7.15}$$

7.4. Случай $f \neq \mathbf{1}_n$. Операторы $\widehat{Z}_G(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\widehat{Z}}_G$. Вернемся к рассмотрению общего случая $f \neq \mathbf{1}_n$. Реализуем операторы из п. 3.4. Определим Γ-периодическую $(n \times m)$-матрицу-функцию $\Lambda_G(\mathbf{x})$ как (слабое) решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda_G(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right) = 0, \quad \int_{\Omega} G(\mathbf{x})\Lambda_G(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{7.16}$$

Ср. [BSu4, §5]. Очевидно, $\Lambda_G(\mathbf{x})$ отличается от решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (7.1) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_G(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_G^0, \quad \Lambda_G^0 = -\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\overline{G\Lambda}\right). \tag{7.17}$$

В [BSu4, п. 7.3] установлена следующая оценка:

$$|\Lambda_G^0| \leqslant \mathfrak{C}_G = m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}^2\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2. \tag{7.18}$$

Согласно [BSu4, §5] роль оператора $\widehat{Z}_G$ из п. 3.4 играет оператор

$$\widehat{Z}_G(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_G b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}. \tag{7.19}$$

С учетом $b(\mathbf{D})\widehat{P} = 0$ имеем $t\widehat{Z}_G(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_G b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

Далее, аналогично (7.4) рассмотрим Γ-периодическое $(n \times n)$-матричное решение $\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega G(\mathbf{x})\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{7.20}$$

Заметим, что

$$\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \widetilde{\Lambda}_G^0, \quad \widetilde{\Lambda}_G^0 = -\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\overline{G\widetilde{\Lambda}}\right). \tag{7.21}$$

В [M, (7.12)] установлена оценка

$$|\widetilde{\Lambda}_G^0| \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_G = (2r_0)^{-1} C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^2\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2|\Omega|^{-1/2}. \tag{7.22}$$

Здесь $C_a^2 = \sum_{j=1}^d \int_\Omega |a_j(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}$. Из определений оператора $\widehat{\widetilde{Z}}_G$ и матрицы-функции $\widetilde{\Lambda}_G$ вытекает тождество

$$\widehat{\widetilde{Z}}_G = \widetilde{\Lambda}_G\widehat{P}. \tag{7.23}$$

7.5. Оператор $\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon)$**.** Оператор $\widehat{N}_G(t,\varepsilon)$, определенный согласно (3.15)–(3.19), теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$ и представляется в виде

$$\widehat{N}_G(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = t^3\widehat{N}_{G,11}(\boldsymbol{\theta}) + t^2\varepsilon\widehat{N}_{G,12}(\boldsymbol{\theta}) + t\varepsilon^2\widehat{N}_{G,21}(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon^3\widehat{N}_{G,22}, \tag{7.24}$$

где операторы $\widehat{N}_{G,jl}(\boldsymbol{\theta})$ определены соотношениями (3.16)–(3.19), в которых операторы $\widehat{X}_1$, $\widehat{Z}_G$, $\widehat{R}$, $\widehat{Y}_1$ зависят от $\boldsymbol{\theta}$. (Ясно, что $\widehat{N}_{G,22}$ от $\boldsymbol{\theta}$ не зависит.)

Используя равенства (6.8), (6.9), (7.5) и (7.19), можно показать (ср. [BSu4, п. 5.3]), что первое слагаемое в правой части (7.24) имеет вид

$$\widehat{N}_{G,11}(\mathbf{k}) := t^3\widehat{N}_{G,11}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* M_G(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})\widehat{P},$$

где $M_G(\mathbf{k}) = \overline{\Lambda_G^* b(\mathbf{k})^*\widetilde{g} + \widetilde{g}^* b(\mathbf{k})\Lambda_G}$. Отметим, что $M_G(\mathbf{k})$ — эрмитова $(m \times m)$-матрица-функция, однородная первой степени по $\mathbf{k}$. Таким образом, $M_G(\mathbf{k})$ является символом самосопряженного ДО $M_G(\mathbf{D})$ первого порядка с постоянными коэффициентами.

Положим $\widehat{N}_{G,12}(\mathbf{k}) := t^2\widehat{N}_{G,12}(\boldsymbol{\theta})$. Используя равенства (6.7)–(6.12), (7.5), (7.19) и (7.23) и рассуждая по аналогии с [Su7, п. 5.2], можно проверить, что

$$\varepsilon\widehat{N}_{G,12}(\mathbf{k}) = \varepsilon\big(b(\mathbf{k})^* T_{G,0} b(\mathbf{k}) + M_{G,1}(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})^* M_{G,1}(\mathbf{k})^*\big)\widehat{P},$$

где

$$M_{G,1}(\mathbf{k}) = \overline{\widetilde{\Lambda}_G^* b(\mathbf{k})^* \widetilde{g}} + \overline{(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_G)^* g b(\mathbf{k})\Lambda_G} + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)\Lambda_G} k_j,$$

$$T_{G,0} = 2\sum_{j=1}^d \operatorname{Re}\overline{\Lambda_G^* a_j D_j \Lambda_G}.$$

Пусть $\widehat{N}_{G,21}(\mathbf{k}) := t\widehat{N}_{G,21}(\boldsymbol{\theta})$. Рассуждая по аналогии с [Su7, п. 5.2], несложно установить, что

$$\varepsilon^2\widehat{N}_{G,21}(\mathbf{k}) = \varepsilon^2\big(M_{G,2}(\mathbf{k}) + M_{G,2}(\mathbf{k})^* + T_G^* b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})^* T_G\big)\widehat{P} + 2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Re}\overline{(a_j + a_j^*)\widetilde{\Lambda}_G} k_j \widehat{P},$$

где

$$M_{G,2}(\mathbf{k}) = \overline{(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_G)^* g b(\mathbf{k})\widetilde{\Lambda}_G},$$

$$T_G = \sum_{j=1}^d \Big(\overline{\Lambda_G^* a_j (D_j\widetilde{\Lambda}_G)} + \overline{(D_j\Lambda_G)^* a_j^* \widetilde{\Lambda}_G}\Big) + \overline{\Lambda_G^*\mathcal{Q}} + \lambda\overline{\Lambda_G^*}.$$

Здесь $\overline{\Lambda_G^*\mathcal{Q}} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Lambda_G(\mathbf{x})^*\, d\mu(\mathbf{x})$.

Наконец, по аналогии с [Su7, (5.30), (5.31)] $\widehat{N}_{G,22} = (\widetilde{T}_G + \widetilde{T}_G^*)\widehat{P}$. Здесь

$$\widetilde{T}_G = \sum_{j=1}^d \overline{\widetilde{\Lambda}_G^* a_j (D_j\widetilde{\Lambda}_G)} + \overline{\widetilde{\Lambda}_G^*\mathcal{Q}} + \lambda\overline{\widetilde{\Lambda}_G^*},$$

где $\overline{\widetilde{\Lambda}_G^*\mathcal{Q}} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x})^*\, d\mu(\mathbf{x})$.

В итоге оператор $\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{N}_G(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$, определенный в (7.24), представляется в виде

$$\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{N}_{G,11}(\mathbf{k}) + \varepsilon\widehat{N}_{G,12}(\mathbf{k}) + \varepsilon^2\widehat{N}_{G,21}(\mathbf{k}) + \varepsilon^3\widehat{N}_{G,22}.$$

В соответствии с замечанием 6.1, для оператора $\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon)$ выполнена оценка вида (3.20), в которой постоянную C_G можно выбрать не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Таким образом, при $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем

$$\|\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = |\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon)| \leqslant C_G(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{3/2}. \tag{7.25}$$

(Мы учли, что для оператора умножения на постоянную матрицу операторная норма в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ совпадает с матричной нормой.)

Так как в выражениях, определяющих операторы $\widehat{N}_{G,11}(\mathbf{k})$, $\widehat{N}_{G,12}(\mathbf{k})$ и $\widehat{N}_{G,21}(\mathbf{k})$, присутствует проектор $\widehat{P}$, в них можно заменить $\mathbf{k}$ на $\mathbf{D}+\mathbf{k}$: $\widehat{N}_G(\mathbf{k},\varepsilon) = \mathcal{N}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}$, где $\mathcal{N}(\mathbf{k},\varepsilon)$ — самосопряженный ДО третьего порядка:

$$\mathcal{N}(\mathbf{k},\varepsilon) = \mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon^2\mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon^3\mathcal{N}_{22}.$$

Здесь слагаемые в правой части — ДО третьего, второго, первого и нулевого порядков, соответственно, заданные соотношениями

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) &= b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* M_G(\mathbf{D}+\mathbf{k}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}),\\
\mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) &= b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* T_{G,0} b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + M_{G,1}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\\
&\quad + b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* M_{G,1}(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*,\\
\mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) &= M_{G,2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + M_{G,2}(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* + T_G^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* T_G\\
&\quad + 2\sum_{j=1}^d \operatorname{Re}\overline{(a_j+a_j^*)\widetilde{\Lambda}_G}(D_j+k_j),\\
\mathcal{N}_{22} &= \widetilde{T}_G + \widetilde{T}_G^*.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Замечание 7.4. Если Г-периодические решения задач (7.16) и (7.20) обращаются в нуль: $\Lambda_G = 0$, $\widetilde{\Lambda}_G = 0$, то по построению $\mathcal{N}(\mathbf{k},\varepsilon) = 0$.

§8. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*$

8.1. Применим теорему 3.2 к оператору $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Учитывая равенства (7.2), (7.3), (7.13) и (7.14), на основании теоремы 3.2 при $|\tau| = (|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2} \leqslant \tau_0$ имеем

$$fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* = f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)s} f_0 \widehat{P} + \mathcal{K}(\mathbf{k},\varepsilon,s) + f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*. \tag{8.1}$$

Здесь оператор $\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)$ определен в (7.14),

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{k},\varepsilon,s) := &\left(\Lambda_G b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_G\right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)s} f_0 \widehat{P}\\
&+ f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)s} f_0 \widehat{P}\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*\Lambda_G^* + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_G^*\right)\\
&- \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)(s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N}(\mathbf{k},\varepsilon) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)\widetilde{s}} f_0 \widehat{P}\, d\widetilde{s},
\end{aligned} \tag{8.2}$$

а для остаточного члена $f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*$ при $(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}\leqslant\tau_0$ справедливы оценки

$$\|f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_7\|f\|^2_{L_\infty}(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2},\quad s\geqslant 0; \tag{8.3}$$

$$\|f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_5\|f\|^2_{L_\infty}s^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2},\quad s>0. \tag{8.4}$$

8.2. Оценки при $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$. Если $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ и $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$, достаточно оценить каждый оператор в (8.1) по отдельности. Используя (6.5) и элементарные неравенства $e^{-\alpha}\leqslant\alpha^{-1}e^{-\alpha/2}$ при $\alpha>0$ и $e^{-\alpha}\leqslant 2(1+\alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$ при $\alpha\geqslant 0$, находим, что при $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$, $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$ выполнено

$$\begin{aligned}\|fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant\|f\|^2_{L_\infty}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s}\\&\leqslant\tau_0^{-2}\check{c}_*^{-1}s^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}\|f\|^2_{L_\infty},\quad s>0;\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}\|fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant 2\max\{1;\check{c}_*^{-1}\tau_0^{-2}\}\\&\times(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}\|f\|^2_{L_\infty},\quad s\geqslant 0.\end{aligned} \tag{8.6}$$

Аналогично, на основании (6.14) и (7.15) при $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$, $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$ имеем

$$\|f_0e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)s}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\tau_0^{-2}\check{c}_*^{-1}s^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}\|f\|^2_{L_\infty},\quad s>0; \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}\|f_0e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)s}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant 2\max\{1;\check{c}_*^{-1}\tau_0^{-2}\}\\&\times(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}\|f\|^2_{L_\infty},\quad s\geqslant 0.\end{aligned} \tag{8.8}$$

В силу (3.25), (3.26) и замечания 6.1 для корректора справедливы оценки с постоянными, не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{K}(\mathbf{k},\varepsilon,s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_8\|f\|^2_{L_\infty}s^{-1}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}\\&\quad\leqslant C_8\tau_0^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}s^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2},\\&\quad s>0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\quad|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2;\end{aligned} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{K}(\mathbf{k},\varepsilon,s)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\&\quad\leqslant C_9\|f\|^2_{L_\infty}(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}\left(1+\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s\right)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}\\&\quad\leqslant C_9\|f\|^2_{L_\infty}(r_1^2+1)^{1/2}\max\{1;\check{c}_*^{-1}\tau_0^{-2}\}(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2},\\&\quad s\geqslant 0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\quad|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2.\end{aligned} \tag{8.10}$$

Объединяя (8.4), (8.5), (8.7) и (8.9), заключаем, что для $s>0$ при всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедливо представление (8.1) с оценкой остатка

$$\|f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_{10}s^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2},\quad s>0,\quad\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{8.11}$$

Здесь $C_{10} = \max\{C_5; 2\tau_0^{-2}\check{c}_*^{-1} + C_8\tau_0^{-1}\}\|f\|^2_{L_\infty}$.

В силу (8.3), (8.6), (8.8) и (8.10) для остаточного члена в (8.1) при $s \geqslant 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{11}(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{8.12}$$

с постоянной $C_{11} = \max\left\{C_7; (4 + C_9(1+r_1^2)^{1/2})\max\{1; \check{c}_*^{-1}\tau_0^{-2}\}\right\}\|f\|^2_{L_\infty}$.

Мы получили следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть* $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ *и* $\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)$ — *операторы* (5.16) *и* (7.14) *соответственно, пусть* $\mathcal{K}(\mathbf{k},\varepsilon,s)$ — *корректор* (8.2). *Тогда при* $s \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *справедливо представление* (8.1), *причем для остаточного члена верны оценки* (8.11) *и* (8.12), *где постоянные* C_{10} *и* C_{11} *контролируются через исходные данные* (4.24).

§9. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s}f^*$

9.1. Вернемся к рассмотрению оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и определенного в п. 4.5. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты $fe^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s}f^*$ выводится из теоремы 8.1 с помощью разложения в прямой интеграл.

Введем эффективный оператор с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^0(\varepsilon) &:= f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \\ &\quad + \varepsilon f_0\Big(-b(\mathbf{D})^*V - V^*b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)}D_j\Big)f_0 \\ &\quad + \varepsilon^2 f_0(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I)f_0.\end{aligned} \tag{9.1}$$

Символом оператора (9.1) является матрица $f_0\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)f_0$ (см. п. 7.3).

Определим ДО третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}) + \varepsilon\mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}) + \varepsilon^2\mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}) + \varepsilon^3\mathcal{N}_{22}, \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}) &= b(\mathbf{D})^* M_G(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}), \\ \mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}) &= b(\mathbf{D})^* T_{G,0} b(\mathbf{D}) + M_{G,1}(\mathbf{D})b(\mathbf{D}) + b(\mathbf{D})^* M_{G,1}(\mathbf{D})^*, \\ \mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}) &= M_{G,2}(\mathbf{D}) + M_{G,2}(\mathbf{D})^* + T_G^* b(\mathbf{D}) + b(\mathbf{D})^* T_G \\ &\quad + 2\sum_{j=1}^d \operatorname{Re}\overline{(a_j + a_j^*)\widetilde{\Lambda}_G} D_j.\end{aligned}$$

(Напомним, что матрица $\mathcal{N}_{22}$ определена в (7.26).)

Используем разложение для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ в прямой интеграл, см. п. 5.6. Тогда для операторной экспоненты справедливо представление

$$e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} = \mathcal{U}^{-1}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}\,d\mathbf{k}\Big)\mathcal{U}.$$

Аналогичное тождество имеет место и для $e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s}$. Оператор

$$\Lambda_G b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_G$$

раскладывается в прямой интеграл со слоями $\Lambda_G b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_G$. Для оператора $\mathcal{N}(\varepsilon)$ справедливо разложение в прямой интеграл по операторам $\mathcal{N}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Поэтому из замечания 7.4 вытекает следующее наблюдение.

Замечание 9.1. Если $\Lambda_G = 0$ и $\widetilde{\Lambda}_G = 0$, то $\mathcal{N}(\varepsilon) = 0$.

Определим ограниченный оператор Π в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ соотношением

$$\Pi = \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U},$$

где $[\widehat{P}]$ — оператор в пространстве $\mathcal{H} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k}$, действующий послойно как оператор усреднения по ячейке $\widehat{P}$. Как выяснено в [BSu4, п. 6.1], оператор Π представим в виде

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}(\mathcal{F}\mathbf{u})(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}, \tag{9.3}$$

где $(\mathcal{F}\mathbf{u})(\,\cdot\,)$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}$. Таким образом, Π — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$. Этот оператор является сглаживающим. Отметим, что Π коммутирует с дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.

Из теоремы 8.1 вытекает тождество

$$f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* = f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \Pi + \mathcal{K}(\varepsilon,s) + \mathcal{R}(\varepsilon,s). \tag{9.4}$$

Здесь корректор $\mathcal{K}(\varepsilon,s) = \mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{K}(\mathbf{k},\varepsilon,s)\,d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\varepsilon,s) = {}& \Big(\Lambda_G b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_G\Big) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \Pi \\ & + f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \Pi \Big(b(\mathbf{D})^*\Lambda_G^* + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_G^*\Big) \\ & - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)(s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N}(\varepsilon) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\widetilde{s}} f_0 \Pi\, d\widetilde{s},\end{aligned} \tag{9.5}$$

а для оператора $\mathcal{R}(\varepsilon,s)=\mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*\,d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&=\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|f\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon,s)f^*\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\&\leqslant C_{10}s^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s>0;\\\|\mathcal{R}(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant C_{11}(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s\geqslant 0.\end{aligned}$$

9.2. Устранение оператора Π. Обсудим возможность устранения сглаживающего оператора из аппроксимации (9.4). Положим

$$\Xi(\varepsilon,s):=f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s}f_0(I-\Pi).\tag{9.6}$$

Так как матрица $f_0\widehat{L}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)f_0$ — символ оператора $\mathcal{B}^0(\varepsilon)$, а Π — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, в силу (6.14), (7.11) и элементарного неравенства $e^{-\alpha}\leqslant 2(1+\alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$, $\alpha\geqslant 0$, при $s\geqslant 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\leqslant\|f\|^2_{L_\infty}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}|e^{-f_0\widehat{L}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)f_0s}|(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))\\&\leqslant\|f\|^2_{L_\infty}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,\,|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}e^{-\check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)s}\\&\leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}\max\{1;\check{c}_*^{-1}r_0^{-2}\}(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2}.\end{aligned}$$

Таким образом, из старшего члена аппроксимации (9.4) сглаживатель Π всегда может быть устранен.

Также при $s>0$ можно заменить Π на I в третьем члене корректора (9.5). Отметим, что $\mathcal{N}(\varepsilon)$ — ДО с символом $\widehat{N}_G(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$ (см. п. 7.5), для которого справедлива оценка (7.25). Отсюда, учитывая (6.14) и оценку (7.11) для символа оператора $\mathcal{B}^0(\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^s f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)(s-\widetilde{s})}f_0\mathcal{N}(\varepsilon)f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\widetilde{s}}f_0(I-\Pi)\,d\widetilde{s}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant\|f\|^4_{L_\infty}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}\int_0^s|e^{-f_0\widehat{L}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)f_0(s-\widetilde{s})}||\widehat{N}_G(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)||e^{-f_0\widehat{L}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)f_0\widetilde{s}}|\,d\widetilde{s}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))\\&\leqslant\|f\|^4_{L_\infty}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}se^{-\check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)s}C_G(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{3/2}\\&\leqslant 3\check{c}_*^{-2}r_0^{-1}C_G\|f\|^4_{L_\infty}s^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s>0.\end{aligned}$$

(Мы использовали элементарное неравенство $e^{-\alpha}\leqslant 3\alpha^{-2}e^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$.)

Обсудим возможность устранения оператора Π из остальных членов корректора. Так как матрицы-функции Λ_G и Λ, $\widetilde{\Lambda}_G$ и $\widetilde{\Lambda}$ отличаются на постоянные слагаемые (см. (7.17) и (7.21)), нам потребуются мультипликаторные свойства матриц-функций Λ и $\widetilde{\Lambda}$, чтобы устранить сглаживающий оператор в членах корректора, содержащих Λ_G и $\widetilde{\Lambda}_G$. Следующий результат установлен в [BSu4, предложение 6.8] при $d \leqslant 4$ и [V, (7.19) и (7.20)] при $d > 4$.

Лемма 9.2. *Пусть Λ — Γ-периодическое $(n \times m)$-матричное решение задачи* (7.1). *Пусть $l = 1$ при $d \leqslant 4$ и $l = d/2 - 1$ при $d > 4$. Тогда оператор $[\Lambda]$ умножения на матрицу-функцию Λ непрерывно переводит $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и справедлива оценка*

$$\|[\Lambda]\|_{H^l(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ контролируется через m, n, d, α_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ.

При $d \leqslant 6$ будем пользоваться предложением 6.9 из [Su7], а при $d > 6$ — леммой 6.5(1°) из [MSu].

Лемма 9.3. *Пусть $\widetilde{\Lambda}$ — Γ-периодическое $(n \times n)$-матричное решение задачи* (7.4). *Положим $\sigma = 2$ при $d \leqslant 6$ и $\sigma = d/2 - 1$ при $d > 6$. Тогда оператор $[\widetilde{\Lambda}]$ умножения на матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}$ непрерывно переводит $H^\sigma(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и справедлива оценка*

$$\|[\widetilde{\Lambda}]\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ контролируется через исходные данные (4.24).

Следующий результат получен в [M, предложение 8.3].

Предложение 9.4. *Пусть $\Xi(\varepsilon, s)$ — оператор* (9.6). *Тогда при $s > 0$ и всех $l > 0$ операторы $b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)$ и $\varepsilon\Xi(\varepsilon, s)$ ограничены из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и*

$$\|b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \mathscr{C}(l) s^{-(l+1)/2} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \tag{9.7}$$

$$\varepsilon \|\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathscr{C}(l) s^{-(l+1)/2} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}. \tag{9.8}$$

Постоянная $\mathscr{C}(l)$ зависит только от l и исходных данных (4.24).

Теперь мы можем рассмотреть первое слагаемое в (9.5). (Второе слагаемое является сопряженным к первому и дополнительного исследования не требует.) В силу (7.17)

$$\Lambda_G b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s) = \Lambda b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s) + \Lambda_G^0 b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s). \tag{9.9}$$

Объединяя (4.2), (6.14), (7.11), (7.18), (9.6), находим

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_G^0 b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant \mathfrak{C}_G\|f\|^2_{L_\infty}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}|b(\boldsymbol{\xi})|e^{-\check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)s}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))\\
&\qquad\leqslant \alpha_1^{1/2}\check{c}_*^{-1}r_0^{-1}\mathfrak{C}_G\|f\|^2_{L_\infty}s^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s>0.
\end{aligned}\tag{9.10}$$

В дальнейшем нас будут интересовать большие значения s, поэтому сейчас достаточно рассматривать $s\geqslant 1$. Из леммы 9.2 и оценки (9.7) следует, что

$$\|\Lambda b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{12}s^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s\geqslant 1.\tag{9.11}$$

Здесь $C_{12}=\mathfrak{C}_\Lambda\alpha_1^{1/2}\mathscr{C}(l)$, где $l=1$ при $d\leqslant 4$ и $l=d/2-1$ при $d>4$. Объединяя (9.9)–(9.11), получаем

$$\|\Lambda_G b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{13}s^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s\geqslant 1,$$

где $C_{13}=\alpha_1^{1/2}\check{c}_*^{-1}r_0^{-1}\mathfrak{C}_G\|f\|^2_{L_\infty}+C_{12}$.

Аналогично, на основании леммы 9.3 и (7.21), (7.22), (9.8), приходим к оценке

$$\|\varepsilon\widetilde{\Lambda}_G\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{14}s^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2},\quad s\geqslant 1,$$

с постоянной $C_{14}=\check{c}_*^{-1}r_0^{-1}\widetilde{\mathfrak{C}}_G\|f\|^2_{L_\infty}+\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}\mathscr{C}(\sigma)$, где $\sigma=2$ при $d\leqslant 6$ и $\sigma=d/2-1$ при $d>6$. Тем самым мы показали, что при $s\geqslant 1$ сглаживающий оператор Π может быть устранен из всех членов корректора (9.5).

Теорема 9.5. *Пусть* $\mathcal{B}(\varepsilon)$ *и* $\mathcal{B}^0(\varepsilon)$ *— операторы* (4.23) *и* (9.1) *соответственно.*
1°*. Пусть* $\mathcal{K}(\varepsilon,s)$ *— оператор* (9.5)*. Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $s\geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\|fe^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s}f^*-f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s}f_0-\mathcal{K}(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{15}(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*\varepsilon^2 s/2}\tag{9.12}$$

с постоянной $C_{15}=C_{11}+2\|f\|^2_{L_\infty}\max\{1;\check{c}_*^{-1}r_0^{-2}\}$.
2°*. Положим*

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^0(\varepsilon,s):=&\left(\Lambda_G b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}_G\right)f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s}f_0\\
&+f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s}f_0\left(b(\mathbf{D})^*\Lambda_G^*+\varepsilon\widetilde{\Lambda}_G^*\right)\\
&-\int_0^s f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)(s-\widetilde{s})}f_0\mathcal{N}(\varepsilon)f_0e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\widetilde{s}}f_0\,d\widetilde{s}.
\end{aligned}\tag{9.13}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $s \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\| f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 - \mathcal{K}^0(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{16} s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad (9.14)$$

где $C_{16} = C_{10} + 2\|f\|^2_{L_\infty} \max\{1; \check{c}_*^{-1} r_0^{-2}\} + 3\check{c}_*^{-2} r_0^{-1} C_G \|f\|^4_{L_\infty} + 2C_{13} + 2C_{14}$.

Глава 3. Задача усреднения для параболических систем

§10. Усреднение оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*$

10.1. Постановка задачи. Для всякой Г-периодической функции $\phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, будем пользоваться обозначением $\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \phi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x} \quad (10.1)$$

на области определения $\mathfrak{d}_\varepsilon = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) : f^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\}$. Для формы (10.1) справедливы оценки, аналогичные неравенствам (4.7):

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f^\varepsilon \mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f^\varepsilon \mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (10.2)$$

Далее, пусть $\mathcal{Y}_\varepsilon : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$ — оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{Y}_\varepsilon \mathbf{u} = \mathbf{D}(f^\varepsilon \mathbf{u}) = \operatorname{col}\{D_1(f^\varepsilon \mathbf{u}), \dots, D_d(f^\varepsilon \mathbf{u})\}, \quad \operatorname{Dom} \mathcal{Y}_\varepsilon = \mathfrak{d}_\varepsilon,$$

и пусть $\mathcal{Y}_{2,\varepsilon} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$ — оператор умножения на $(dn \times d)$-матрицу, составленную из блоков $a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* f^\varepsilon(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$:

$$\mathcal{Y}_{2,\varepsilon} \mathbf{u} = \operatorname{col}\{(a_1^\varepsilon)^* f^\varepsilon \mathbf{u}, \dots, (a_d^\varepsilon)^* f^\varepsilon \mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon.$$

Пусть $d\mu$ — матричнозначная мера на $\mathbb{R}^d$, определенная в п. 4.4. Построим по ней меру $d\mu^\varepsilon$ следующим образом. Для любого борелевского множества $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим множество $\varepsilon^{-1}\Delta = \{\mathbf{y} = \varepsilon^{-1}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Delta\}$ и положим $\mu^\varepsilon(\Delta) = \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}\Delta)$. Квадратичную форму q_ε определим равенством

$$q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu^\varepsilon(\mathbf{x})(f^\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}), (f^\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})\rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon.$$

Все условия из п. 4.2–4.4 предполагаем выполненными. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\operatorname{Re}(\mathcal{Y}_\varepsilon \mathbf{u}, \mathcal{Y}_{2,\varepsilon} \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon. \quad (10.3)$$

Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования:

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0. \tag{10.4}$$

Для форм (4.6) и (10.1), (4.18) и (10.3) справедливы очевидные тождества

$$\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}\mathfrak{a}[T_\varepsilon\mathbf{u}, T_\varepsilon\mathbf{u}], \quad \mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}\mathfrak{b}(\varepsilon)[T_\varepsilon\mathbf{u}, T_\varepsilon\mathbf{u}], \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{d}_\varepsilon.$$

Отсюда и из оценок (4.21), (4.22) следует, что при $\mathbf{u}\in\mathfrak{d}_\varepsilon$ выполнено

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \beta\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{10.5}$$

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + (C(1) + c_3 + |\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty})\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{10.6}$$

Из (10.2), (10.5) и (10.6) вытекает, что форма $\mathfrak{b}_\varepsilon$ замкнута и положительно определена. Через $\mathcal{B}_\varepsilon$ обозначим отвечающий ей самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Формально,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\varepsilon &= \mathcal{A}_\varepsilon + (\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}^*\mathcal{Y}_\varepsilon + \mathcal{Y}_\varepsilon^*\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}) + (f^\varepsilon)^*\mathcal{Q}^\varepsilon f^\varepsilon + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon \\
&= (f^\varepsilon)^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon + \sum_{j=1}^d (f^\varepsilon)^*\left(a_j^\varepsilon D_j + D_j(a_j^\varepsilon)^*\right) f^\varepsilon \\
&+ (f^\varepsilon)^*\mathcal{Q}^\varepsilon f^\varepsilon + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon,
\end{aligned} \tag{10.7}$$

где $\mathcal{Q}^\varepsilon$ следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный быстро осциллирующей мерой $d\mu^\varepsilon$.

10.2. Старший член аппроксимации оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*$. Аппроксимация в старшем порядке найдена в [M, п. 9.3]. Чтобы сформулировать результат, выпишем эффективный оператор:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^0 &= f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \\
&+ f_0\Big(- b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j\Big) f_0 \\
&+ f_0(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I) f_0.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Здесь постоянные матрицы f_0, g^0, V, W, $\overline{(a_j + a_j^*)}$ и $\overline{\mathcal{Q}}$ определены согласно (6.13), (7.6), (7.8), (7.9), (4.1), (7.10). Символом оператора (10.8) является матрица $f_0\widehat{L}(\boldsymbol{\xi},1)f_0$ (см. п. 7.3). Поэтому из оценки (7.11) вытекает положительная определенность оператора $\mathcal{B}^0$: $\mathcal{B}^0 \geqslant \check{c}_* I$.

В [M, теорема 9.1] установлен следующий результат.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия п.* 4.2–4.4. *Пусть* $\mathcal{B}_\varepsilon$ — *оператор* (10.7), *и пусть* $\mathcal{B}^0$ — *эффективный оператор* (10.8). *Тогда при* $s \geqslant 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{17}\varepsilon(s+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Постоянная C_{17} *зависит только от исходных данных* (4.24).

10.3. Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*$ при учете корректора. Установим теперь более точную аппроксимацию операторной экспоненты на основании результатов §9 с помощью масштабного преобразования (10.4). Для операторов (10.7) и (4.23), (10.8) и (9.1) справедливы тождества $\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*\mathcal{B}(\varepsilon)T_\varepsilon$ и $\mathcal{B}^0 = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*\mathcal{B}^0(\varepsilon)T_\varepsilon$. Следовательно,

$$f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^* = T_\varepsilon^* f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)\varepsilon^{-2}s} f^* T_\varepsilon, \tag{10.9}$$

$$f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 = T_\varepsilon^* f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\varepsilon^{-2}s} f_0 T_\varepsilon. \tag{10.10}$$

Далее, через Π_ε обозначим ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, символ которого — характеристическая функция $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$:

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}(\mathcal{F}\mathbf{f})(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{10.11}$$

Операторы (9.3) и (10.11) связаны равенством

$$\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^*\Pi T_\varepsilon. \tag{10.12}$$

Обозначим

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}) + \mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}) + \mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}) + \mathcal{N}_{22}.$$

Тогда

$$\mathcal{N} = \varepsilon^{-3}T_\varepsilon^*\mathcal{N}(\varepsilon)T_\varepsilon, \tag{10.13}$$

где оператор $\mathcal{N}(\varepsilon)$ определен в (9.2).

Отметим тождества

$$[\Lambda_G^\varepsilon]b(\mathbf{D}) = \varepsilon^{-1}T_\varepsilon^*[\Lambda_G]b(\mathbf{D})T_\varepsilon, \quad [\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\widetilde{\Lambda}_G]T_\varepsilon. \tag{10.14}$$

Введем корректоры:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\varepsilon(s) :=& \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon\right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \Pi_\varepsilon \\ &+ f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \Pi_\varepsilon \left(b(\mathbf{D})^*(\Lambda_G^\varepsilon)^* + (\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon)^*\right) \\ &- \int\limits_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N} f_0 e^{-\mathcal{B}^0\widetilde{s}} f_0 \Pi_\varepsilon\,d\widetilde{s},\end{aligned} \tag{10.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\varepsilon^0(s) :&= \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon\right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \\ &+ f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \left(b(\mathbf{D})^* (\Lambda_G^\varepsilon)^* + (\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon)^*\right) \\ &- \int\limits_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0 (s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N} f_0 e^{-\mathcal{B}^0 \widetilde{s}} f_0 \, d\widetilde{s}.\end{aligned} \tag{10.16}$$

Объединяя (10.9), (10.10) и (10.12)–(10.14), заключаем, что операторы (9.5) и (10.15) связаны равенством

$$\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon(s) = T_\varepsilon^* \mathcal{K}(\varepsilon, \varepsilon^{-2} s) T_\varepsilon. \tag{10.17}$$

Для операторов (9.13) и (10.16) справедливо аналогичное тождество. Теперь из (9.12), (9.14), (10.9), (10.10) и (10.17) вытекает следующий результат.

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.1. *Пусть* $\mathcal{K}_\varepsilon(s)$ *и* $\mathcal{K}_\varepsilon^0(s)$ *— операторы* (10.15) *и* (10.16) *соответственно. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $s \geqslant 0$ *справедлива аппроксимация*

$$\begin{aligned}\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon(s) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant C_{15} \varepsilon^2 (s + \varepsilon^2)^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}.\end{aligned} \tag{10.18}$$

При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $s \geqslant \varepsilon^2$ *выполнено*

$$\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon^0(s) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{16} \varepsilon^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Постоянные C_{15}, C_{16} *и* $\check{c}_*$ *зависят только от исходных данных* (4.24).

10.4. Случай нулевого корректора. Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, то есть верны соотношения (7.7). Тогда Γ-периодические решения задач (7.1), (7.16) равны нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda_G(\mathbf{x}) = 0$. Предположим дополнительно, что $\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0$. Тогда Γ-периодические решения задач (7.4), (7.20) также равны нулю: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому из (7.8), (7.9) следует, что $V = 0$ и $W = 0$. Эффективный оператор (10.8) принимает вид

$$\mathcal{B}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 + f_0 \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j f_0 + f_0 (\overline{\mathcal{Q}} + \lambda I) f_0. \tag{10.19}$$

На основании (10.13) и замечания 9.1 получаем, что в рассматриваемом случае $\mathcal{N} = 0$. Таким образом, все члены корректора (10.15) обращаются в нуль и из (10.18) вытекает следующий результат.

Предложение 10.3. *Пусть в условиях теоремы* 10.2 *справедливы соотношения* (7.7) *и* $\sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $s \geqslant 0$ *имеем*

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{15}\varepsilon^2(s+\varepsilon^2)^{-1}e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Здесь $\mathcal{B}^0$ *— оператор* (10.19).

§11. Усреднение решений задачи Коши для параболических систем

11.1. Применение к задаче Коши для однородного уравнения. Пусть $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ — оператор вида (10.7) в случае, когда $f = \mathbf{1}_n$:

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon D_j + D_j(a_j^\varepsilon)^*\right) + \mathcal{Q}^\varepsilon + \lambda I.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$G^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s), \quad s>0; \quad G^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{11.1}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а Γ-периодическая $(n\times n)$-матрица-функция G предполагается ограниченной и положительно определенной. Запишем $G(\mathbf{x})$ в факторизованном виде: $G(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*$, где $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция. Положим $\mathbf{v}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{u}_\varepsilon$. Тогда $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s)$ — решение задачи

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = -(f^\varepsilon)^*\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s), \quad s>0; \quad \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}).$$

Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^*\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon$. Тогда $\mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) = e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\phi}$. Отсюда вытекает, что решение $\mathbf{u}_\varepsilon = f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$ задачи (11.1) допускает представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) = f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\phi}. \tag{11.2}$$

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\overline{G}\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}^0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},s), \quad s>0; \quad \overline{G}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{11.3}$$

Здесь

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d}\overline{(a_j + a_j^*)}D_j - W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I.$$

Положим $f_0 = (\overline{G})^{-1/2}$ и $\mathcal{B}^0 = f_0\widehat{\mathcal{B}}^0 f_0$. Тогда

$$\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s) = f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\boldsymbol{\phi}. \tag{11.4}$$

Из (11.2), (11.4) и теоремы 10.2 вытекает следующий результат.

Теорема 11.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ — *решения задач* (11.1) *и* (11.3), *соответственно. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $s \geqslant \varepsilon^2$ *справедлива аппроксимация*

$$\begin{aligned} \Big\| \mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s) - \varepsilon\Big(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s) + \widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s) \\ + f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\big((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}))^* + (\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon)^*\big)\boldsymbol{\phi} \\ - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N}\mathbf{u}_0(\,\cdot\,, \widetilde{s})\, d\widetilde{s}\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant C_{16}\varepsilon^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Отметим, что третий член корректора в (11.5) — функция

$$\mathbf{v}^{(3)}(\,\cdot\,, s) := \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N}\mathbf{u}_0(\,\cdot\,, \widetilde{s})\, d\widetilde{s}$$

— является решением задачи

$$\overline{G}\frac{\partial \mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{x}, s) + \mathcal{N}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s), \quad s > 0; \quad \overline{G}\mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

11.2. Задача Коши для неоднородного уравнения. Рассмотрим теперь более общую задачу Коши

$$\begin{aligned} G^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} &= -\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \quad s \in (0, T); \\ G^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{11.6}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $s \in (0, T)$, $T > 0$. Пусть

$$\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{F} \in L_p((0, T); L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)) =: \mathcal{H}_p$$

при некотором $1 < p \leqslant \infty$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение "усредненной" задачи

$$\overline{G}\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \quad s \in (0, T); \quad \overline{G}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{11.7}$$

Действуя по аналогии с выводом представления (11.2), можно показать, что

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) = f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\phi} + \int_0^s f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon(s-\widetilde{s})}(f^\varepsilon)^*\mathbf{F}(\,\cdot\,, \widetilde{s})\, d\widetilde{s}, \tag{11.8}$$

$$\mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s) = f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \boldsymbol{\phi} + \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})} f_0 \mathbf{F}(\,\cdot\,, \widetilde{s})\, d\widetilde{s}. \tag{11.9}$$

Аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в старшем порядке получена в [M, теорема 10.1]:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)-\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{17}\varepsilon(s+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-\check{c}_* s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ + C_{18}\theta_1(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p},\end{aligned}\tag{11.10}$$

где постоянная C_{18} зависит только от p и исходных данных (4.24),

$$\theta_1(\varepsilon,p)=\begin{cases}\varepsilon^{2-2/p}, & 1<p<2,\\ \varepsilon(1+|\ln\varepsilon|)^{1/2}, & p=2,\\ \varepsilon, & 2<p\leqslant\infty.\end{cases}\tag{11.11}$$

Повторяя рассуждения [V, п. 10.1], на основании теоремы 10.2 и представлений (11.8), (11.9) можно получить следующий результат.

Теорема 11.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (11.6) *и* (11.9), *соответственно, где* $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in\mathcal{H}_p$. *Тогда при* $0<s<T$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $2<p\leqslant\infty$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) &= \mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)+\varepsilon\Big(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)+\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\\ &\quad+f_0e^{-\mathcal{B}^0 s}f_0\big((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)^*+(\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon\Pi_\varepsilon)^*\big)\boldsymbol{\phi}\Big)\\ &\quad-\varepsilon\int_0^s f_0e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})}f_0\mathcal{N}\Pi_\varepsilon f_0e^{-\mathcal{B}^0\widetilde{s}}f_0\boldsymbol{\phi}\,d\widetilde{s}\\ &\quad+\varepsilon\int_0^s f_0e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})}f_0\Big((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)^*+(\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon\Pi_\varepsilon)^*\Big)\mathbf{F}(\,\cdot\,,\widetilde{s})\,d\widetilde{s}\\ &\quad-\varepsilon\int_0^s d\widetilde{s}\int_0^{s-\widetilde{s}} ds'\,f_0e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s}-s')}f_0\mathcal{N}\Pi_\varepsilon f_0e^{-\mathcal{B}^0 s'}f_0\mathbf{F}(\,\cdot\,,\widetilde{s})+\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\,\cdot\,,s),\end{aligned}$$

где остаточный член $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)$ *допускает оценку*

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{15}\varepsilon^2(s+\varepsilon^2)^{-1}e^{-\check{c}_* s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+C_{19}\varepsilon^{2/p'}\theta_2(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p},$$

$p^{-1}+(p')^{-1}=1$. *Здесь постоянная* C_{19} *зависит только от* p *и исходных данных* (4.24), $\theta_2(\varepsilon,p)=1$ *при* $p<\infty$ *и* $\theta_2(\varepsilon,p)=1+|\ln\varepsilon|$ *при* $p=\infty$.

При $0 < s < T$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $1 < p \leqslant 2$ *справедливо представление*

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) = \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s) + \varepsilon\Big(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\boldsymbol{\phi} + \widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\boldsymbol{\phi}$$
$$+ f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\big((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)^* + (\widetilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon)^*\big)\boldsymbol{\phi}\Big)$$
$$- \varepsilon \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0 (s-\widetilde{s})} f_0 \mathcal{N} \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 \widetilde{s}} f_0 \boldsymbol{\phi}\, d\widetilde{s} + \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\,\cdot\,, s),$$

причем

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\,\cdot\,, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{15}\varepsilon^2 (s+\varepsilon^2)^{-1} e^{-\check{c}_* s/2} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_{18}\theta_1(\varepsilon, p)\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p}.$$

Здесь $\theta_1(\varepsilon, p)$ *— величина* (11.11).

Замечание 11.3. Разные аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ при разных условиях на p в теореме 11.2 обусловлены тем, что учет корректора в первом слагаемом в правой части (11.8) приводит к уточнению аппроксимации по сравнению с (11.10) при любом $1 < p \leqslant \infty$, а учет корректора во втором слагаемом — только при $2 < p \leqslant \infty$.

§12. Пример применения общей схемы: скалярный эллиптический оператор

В настоящем параграфе мы рассмотрим один из примеров применения общей схемы. Ранее для эллиптических задач этот пример изучался в [Su4, Su7]. Там же могут быть найдены другие примеры.

12.1. Скалярный эллиптический оператор. Рассмотрим случай, когда $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица с *вещественными элементами*, ограниченная и положительно определенная. Тогда оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет вид

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla.$$

Очевидно, в данном случае $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$; см. (4.2).

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1, \dots, d.$$

Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции такие, что

$$v, \mathcal{V} \in L_\sigma(\Omega), \quad \sigma = 1 \text{ при } d = 1, \quad \sigma > \frac{d}{2} \text{ при } d \geqslant 2; \quad \int_\Omega v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{12.1}$$

Точное определение оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(\langle g^\varepsilon(\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon)u, (\mathbf{D}-\mathbf{A}^\varepsilon)u\rangle + (\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon)|u|^2 \Big)\, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Оператор (12.1) можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, содержащим “сингулярное” первое слагаемое.

В [Su4, п. 13.1] показано, что оператор (12.1) можно записать в требуемом виде

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \sum_{j=1}^d \big(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \big) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Вещественная функция $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ определена следующим образом:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle. \tag{12.2}$$

Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\zeta_j(\mathbf{x}), \tag{12.3}$$

где $\eta_j(\mathbf{x})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$, а функции $\zeta_j(\mathbf{x})$ определены через Γ-периодическое решение уравнения $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ соотношением $\zeta_j(\mathbf{x}) = -\partial_j\Phi(\mathbf{x})$. При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^d \partial_j \zeta_j(\mathbf{x}). \tag{12.4}$$

Нетрудно убедиться, что функции (12.3) удовлетворяют требованию (4.10) с подходящим показателем $\widetilde{\varrho}$ (зависящим от ϱ и σ); при этом нормы $\|a_j\|_{L_{\widetilde{\varrho}}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_\sigma(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. Функция (12.2) удовлетворяет условию (4.17) с подходящим показателем $\widetilde{\sigma} = \min\{\sigma; \varrho/2\}$. Таким образом, сейчас реализуется пример 4.2.

Выберем параметр λ из условия (4.19), в котором c_0 и c_4 отвечают оператору (12.1). Обозначим $\mathcal{B}_\varepsilon := \mathfrak{B}_\varepsilon + \lambda I$. Нас интересует аппроксимация экспоненты от этого оператора. В рассматриваемом случае исходные данные (4.24) сводятся к следующему набору:

$$\begin{gathered} d, \varrho, \sigma; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|v\|_{L_\sigma(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_\sigma(\Omega)}, \lambda; \\ \text{параметры решетки } \Gamma. \end{gathered} \tag{12.5}$$

12.2. Эффективный оператор. Выпишем эффективный оператор. В нашем случае Г-периодическое решение задачи (7.1) является матрицей-строкой: $\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}))$, где $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, d$, — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Ясно, что функции $\psi_j(\mathbf{x})$ вещественнозначные, а элементы матрицы-строки $\Lambda(\mathbf{x})$ чисто мнимые. Согласно (7.6) столбцами $(d \times d)$-матрицы-функции $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ служат вектор-функции $g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определена в соответствии с (7.6): $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Ясно, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 имеют вещественные элементы.

В соответствии с (12.3), (12.4) периодическое решение задачи (7.4) представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Г-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0;$$

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Матрица-столбец V (см. (7.8)) имеет вид $V = V_1 + iV_2$, V_1, V_2 — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$V_1 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

$$V_2 = -|\Omega|^{-1} \int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Согласно (7.9) постоянная W запишется в виде

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \Big(\langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}), \nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\rangle + \langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}), \nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\rangle \Big)\, d\mathbf{x}.$$

Эффективный оператор для $\mathcal{B}_\varepsilon$ действует по правилу

$$\mathcal{B}^0 u = -\operatorname{div} g^0\nabla u + 2i\langle\nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}}\rangle + (-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda)u, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Соответствующее дифференциальное выражение допускает запись в виде

$$\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + \lambda,$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1}(V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 = \overline{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle} - \langle g^0\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0\rangle - W.$$

12.3. Оператор $\mathcal{N}$. Вид оператора $\mathcal{N}$ в рассматриваемом случае найден в [Su7, (9.12)–(9.15)]. Выпишем результат:

$$\mathcal{N} = \sum_{k,l=1}^{d} \mathcal{N}_{12,kl} D_k D_l + \sum_{k=1}^{d} \mathcal{N}_{21,k} D_k + \mathcal{N}_{22},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{12,kl} &= 2\overline{\widetilde{\Lambda}_1 \widetilde{g}_{kl}} + \overline{v\psi_k\psi_l} - \sum_{j=1}^{d} \overline{(g_{jl}\psi_k + g_{jk}\psi_l)\partial_j \widetilde{\Lambda}_1},\\
\mathcal{N}_{21,k} &= 2\sum_{j=1}^{d} \overline{g_{jk}\Big(\widetilde{\Lambda}_1 \partial_j \widetilde{\Lambda}_2 - \widetilde{\Lambda}_2 \partial_j \widetilde{\Lambda}_1\Big)}\\
&\quad + 2\overline{\psi_k \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \widetilde{\Lambda}_1\rangle} - 2\overline{\widetilde{\Lambda}_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \psi_k\rangle} + 2\overline{v\widetilde{\Lambda}_2\psi_k} - 4\overline{\eta_k \widetilde{\Lambda}_1},\\
\mathcal{N}_{22} &= 2\overline{\widetilde{\Lambda}_2 \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \widetilde{\Lambda}_1\rangle} - 2\overline{\widetilde{\Lambda}_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \widetilde{\Lambda}_2\rangle} + \overline{v\Big(\widetilde{\Lambda}_1^2 + \widetilde{\Lambda}_2^2\Big)} + 2\overline{\widetilde{\Lambda}_1(\mathcal{Q} + \lambda)}.
\end{aligned}$$

12.4. Аппроксимация экспоненты. В силу равенства $\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x})$ оператор (10.16) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\varepsilon^0(s) &= (\Psi^\varepsilon \nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) e^{-\mathcal{B}^0 s} + e^{-\mathcal{B}^0 s}(\Psi^\varepsilon \nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)^* - \int_0^s e^{-\mathcal{B}^0(s-\widetilde{s})} \mathcal{N} e^{-\mathcal{B}^0 \widetilde{s}}\, d\widetilde{s}\\
&= (\Psi^\varepsilon \nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) e^{-\mathcal{B}^0 s} + e^{-\mathcal{B}^0 s}(\Psi^\varepsilon \nabla + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)^* - s\mathcal{N} e^{-\mathcal{B}^0 s}.
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Мы учли, что в нашем случае скалярный дифференциальный оператор $\mathcal{N}$ коммутирует с экспонентой от эффективного оператора $\mathcal{B}^0$ с постоянными коэффициентами.

Из теоремы 10.2 выводим следующий результат.

Теорема 12.1. *Пусть операторы $\mathcal{B}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}^0$ определены в п.* 12.1 *и* 12.2 *соответственно, пусть $\mathcal{K}_\varepsilon^0(s)$ — корректор* (12.6). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $s > 0$ справедлива аппроксимация*

$$\| e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{B}^0 s} - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon^0(s) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{16} \varepsilon^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Постоянные C_{16} и $\check{c}_*$ зависят только от исходных данных (12.5).

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publ. Co., Amsterdam–New York, 1978.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 69–90.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 3–60.

[GeS] Geng J., Shen Zh., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 5, 2092–2113.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), №3, 305–308.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), №3, 27–122.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Zh., *Convergence rates in* L^2 *for elliptic homogenization problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[M] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 125–177.

[MSu] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности*, Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 99–158.

[MoVo] Moskow Sh., Vogelius M., *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1263–1299.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анал. и его прил. **38** (2004), №4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Nonlinear equations and spectral theory, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 201–233.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

[Su5] Суслина Т. А., *Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра*, Алгебра и анализ **25** (2013), №5, 221–251.

[Su6] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems*: L_2*-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su7] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *с учетом корректора,* Алгебра и анализ **26** (2014), №4, 195–263.

[Xu] Xu Q., *Convergence rates for general elliptic homogenization problems in Lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), no. 6, 3742–3788.

С.-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
199178, 14 линия ВО, 29Б,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: y.meshkova@spbu.ru

Поступило 9 сентября 2018 г.