

ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 6 (64)
Выпуск 1

2019
Март

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАН В АВГУСТЕ 1946 ГОДА

ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК СПбГУ. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ» ВЫХОДИТ В СВЕТ С МАРТА 1956 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Борзых А. Н.</i> Улучшение одной из оценок скорости сходимости метода Зейделя	185
<i>Ильин Ю. А.</i> Об интегрировании в явном виде дифференциальных неравенств специальных типов	196
<i>Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.</i> Об одноранговой аппроксимации положительных матриц с помощью методов тропической оптимизации	208
<i>Лунев И. С., Некруткин В. В.</i> Замечание о некоторых классических критериях математической статистики	221
<i>Малоземов В. Н., Плоткин А. В.</i> Строгое полиномиальное отделение двух множеств	232
<i>Никитин Я. Ю., Рагозин И. А.</i> Критерии согласия, основанные на характеристике логистического распределения	241
<i>Фролов А. Н.</i> Об оценках для вероятностей комбинаций событий, формуле Жордана и неравенствах Бонферрони	253
<i>Danchev P. V.</i> Weakly Exchange Rings Whose Units are Sums of Two Idempotents	266



© Санкт-Петербургский
государственный
университет, 2019

МЕХАНИКА

<i>Александров А. Ю., Тихонов А. А.</i> Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями	271
<i>Архипова И. М.</i> О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры произвольной частоты	282
<i>Береславский Э. Н., Дудина Л. М.</i> Задача фильтрации в прямоугольной перемычке с частично непроницаемой вертикальной стенкой	289
<i>Величко В. Е.</i> К расчету зеркала оптического телескопа	299
<i>Герасименко П. В., Ходаковский В. А.</i> Численный алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек железнодорожных цистерн	309
<i>Даль Ю. М.</i> О напряжениях в полосе, загруженной на продольных кромках сосредоточенными усилиями	319
<i>Забавникова Т. А., Помыткин С. П.</i> Особенности решения задачи тройного сдвига по эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации	330
<i>Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Товстик П. Е.</i> Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной	339

ХРОНИКА

Памяти Людмилы Яковлевны Адриановой	348
О Девятой международной конференции по моделированию	350
Заседания секции теоретической механики им. Н. Н. Поляхова Дома ученых РАН	
28 ноября 2018 года	308
12 декабря 2018 года	338
Contents	351

На наш журнал можно подписаться по каталогу «Пресса России». Подписной индекс 36313
Свидетельство о регистрации СМИ № ФС77-73527 от 24 августа 2018 г. (Роскомнадзор)

Учредитель: Санкт-Петербургский государственный университет

Редактор Ю. Н. Ворошилова • Корректор Ю. Н. Ворошилова • Комп. верстка А. М. Вейшторт

Подписано в печать 00.00.2019. Формат 70 × 100¹/₁₆. Усл. печ. л. 00,0. Уч.-изд. л. 00,0.

Печать по заказу. 1-й завод — 00 экз. Заказ № . Цена свободная.

Адрес Издательства СПбГУ: 199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11. Тел./факс +7 (812) 328-44-22

Типография Издательства СПбГУ. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной*

Н. Ф. Морозов, Б. Н. Семенов, П. Е. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Товстик П. Е. Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 000–000. <https://doi.org/>

Рассматривается прямолинейная трещина в тонкой упругой пластине. При растяжении пластины в направлении, перпендикулярном трещине, в окрестности трещины появляются сжимающие напряжения, которые при определенном уровне растяжения приводят к потере устойчивости плоской формы равновесия пластины. Целью исследования является выяснение вопроса о том, способствует ли потеря устойчивости росту трещины или приводит к стабилизации деформаций. В работе исследуется напряженное состояние пластины в начальной послекритической стадии. Предложено приближенное аналитическое решение. Методом конечных элементов построено решение задачи растяжения пластинки после потери устойчивости. Оценено влияние потери плоской формы деформирования при растяжении пластины с центральной трещиной на уровень напряженного состояния в окрестности вершины трещины. Анализ напряженного состояния в окрестности вершины центральной трещины при одноосном растяжении дает основания утверждать, что при возможной локальной потере устойчивости вблизи трещины происходит повышение уровня растягивающих напряжений в окрестности кончика трещины, и, как следствие, снижается нагрузка, приводящая к разрушению.

Ключевые слова: потеря плоской формы деформирования, пластина, метод конечных элементов.

1. Введение. Тонкостенные элементы находят широкое применение в различных конструкциях. При анализе их несущей способности необходимо учитывать не только нагрузки, приводящие к их разрушению, но и нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости. Следует отметить, что потеря устойчивости может происходить как при сжатии этих элементов, так и при растяжении при наличии в них дефектов типа вырезов, разрезов и включений, так как в окрестности этих дефектов возникают области сжимающих напряжений, которые могут приводить к локальной потере устойчивости (выпучиванию). Потеря плоской формы деформирования пластины, ослабленной трещиной, при одноосном растяжении исследовалась в ряде работ [1–9]. Однако вопрос о деформировании после потери устойчивости и влиянии на разрушение не получил окончательного ответа. В этой связи можно

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00580, 16-51-52025, 18-01-00884) и СПбГУ (грант № 26520317).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

указать на работу [8], в которой на основании экспериментальных результатов, полученных для растяжения бумажных листов с центральной трещиной, утверждается, что после выпучивания пластины в окрестности трещины происходит снижение интенсивности напряжений, т. е. для разрушения требуется большее растягивающее напряжение, чем для листа, сохранившего плоскую форму деформирования. В то же время эксперименты по растяжению металлических листов с центральной трещиной показывают, что локальное выпучивание в окрестности трещины приводит к увеличению концентрации напряжений в окрестности вершин трещины, т. е. к снижению разрушающей нагрузки [7].

2. Аналитическое решение. Рассматривается разрез длиной $2a$ в упругой изотропной однородной бесконечной пластине толщиной $h \ll a$. Пластина равномерно растянута усилием $T > 0$ в направлении, перпендикулярном разрезу. В окрестности разреза в линейном приближении возникает напряженно-деформированное состояние с напряжениями σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} , определяемыми по формулам [10]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= T(\operatorname{Re}(Z_1) - y\operatorname{Im}(Z_1')), \\ \sigma_{yy} &= T(\operatorname{Re}(Z_1) + y\operatorname{Im}(Z_1') + 1), \\ \sigma_{xy} &= -Ty\operatorname{Re}(Z_1'), \\ Z_1 &= z(z^2 - a^2)^{-1/2} - 1, \quad Z_1' = -a^2(z^2 - a^2)^{-3/2}, \quad z = x + iy.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь начало декартовой системы координат xOy расположено в середине разреза, а ось Ox направлена вдоль него. Приведем формулы (2.1) в развернутом виде [11]:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xx}}{T} &= \frac{x\sqrt{r-b} + y\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r} - \frac{a^2y(r-2b)\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r^3} - 1, \\ \frac{\sigma_{yy}}{T} &= \frac{x\sqrt{r-b} + y\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r} + \frac{a^2y(r-2b)\sqrt{r+b}}{\sqrt{2}r^3}, \\ \frac{\sigma_{xy}}{T} &= -\frac{a^2y(r+2b)\sqrt{r-b}}{\sqrt{2}r^3},\end{aligned}\tag{2.2}$$

где

$$b = a^2 - x^2 + y^2, \quad r = \sqrt{x^4 + 2x^2(y^2 - a^2) + (y^2 + a^2)^2},\tag{2.3}$$

причем в формулах (2.2) и (2.3) под знаком радикала стоят неотрицательные числа.

В окрестности разреза возникает продольное сжатие, в результате которого пластина может потерять устойчивость. Нетрудно проверить, что на разрезе имеем

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0, \quad -a < x < a, \quad y = \pm 0.\tag{2.4}$$

Безразмерные напряжения $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}/T$ при $a = 1$ в окрестности конца трещины $x = 1$, $y = 0$ (при $0 \leq x \leq 2$ и значениях $y = 0.05k$, $k = 1, \dots, 6$) показаны на рис. 1.

В рамках классической модели Кирхгофа – Лява устойчивость плоской формы равновесия пластины описывается уравнением

$$D\Delta^2 w - T\left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\tag{2.5}$$

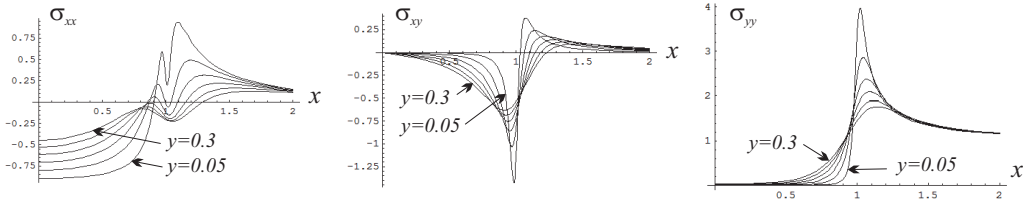


Рис. 1. Напряжения $\sigma_{xx}^0(x, y), \sigma_{yy}^0(x, y), \sigma_{xy}^0(x, y)$ при $0 \leq x \leq 2, y = 0.05k, k = 1, \dots, 6$.

где $w(x, y)$ — прогиб, Δ — оператор Лапласа, $\sigma_{ij} = T\sigma_{ij}^0$.

На разрезе $-a < x < a, y = 0$ в общем случае выполнены граничные условия

$$D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

однако в силу формул (2.4) в (2.6) следует считать $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$.

Критическое значение T^* усилия T может быть найдено также из вариационной задачи [12]:

$$T^* = \min_w \frac{\Pi_b}{\Pi_{uw}}, \quad (2.7)$$

где Π_b — энергия изгиба при потере устойчивости, Π_{uw} — дополнительная энергия растяжения:

$$\begin{aligned} \Pi_b &= \frac{D}{2} \iint (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1 - \nu)\tau^2) dx dy, \\ \Pi_{uw}^0 &= \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx}^0 w_x^2 + 2\sigma_{xy}^0 w_x w_y + \sigma_{yy}^0 w_y^2) dx dy. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\kappa_1 = w_{xx}, \kappa_2 = w_{yy}, \tau = w_{xy}$ — кривизны и кручение срединной плоскости. Здесь и в дальнейшем интегрирование проводится по четверти плоскости $0 \leq x, y < \infty$, ибо форма потери устойчивости симметрична по x и по y . Граничные условия (2.6) являются естественными для задачи (2.7). Поэтому при выборе координатных функций метода Ритца их можно игнорировать. Для четной формы имеем

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \quad |x - a| > 0, \quad y = 0, \quad (2.9)$$

а для нечетной формы —

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad |x - a| > 0, \quad y = 0. \quad (2.10)$$

Кроме того, выполнено условие затухания $w \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Критической нагрузке соответствует четная форма, ибо условия (2.10) более жесткие, чем (2.9).

Рассмотрим прогиб пластины в линейном приближении при наличии малых неправильностей формы $w^0(x, y)$. Полный прогиб $W = w_0 + w$ складывается из начального прогиба w_0 и дополнительного прогиба w , порожденного действием растяжения T , а уравнение равновесия имеет вид

$$D\Delta^2 w + T \left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Рассмотрим краевую задачу бифуркации плоской формы:

$$D\Delta^2 w_k + T_k \left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.12)$$

где T_k и $w_k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$, — собственные значения и собственные функции, причем $T_1 < T_2 \leq T_3 \leq \dots$.

Начальный и дополнительный прогибы разложим в ряды Фурье по собственным функциям задачи (2.12):

$$w^0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 w_k(x, y), \quad w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x, y). \quad (2.13)$$

Подстановка рядов (2.13) в уравнение (2.11) с учетом ортогональности собственных функций позволяет найти коэффициенты $c_k = T c_k^0 / (T - T_k)$, и дополнительный прогиб имеет вид

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T c_k^0 w_k(x, y)}{T - T_k}. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что при $T \approx T_1$ существенным является только первый член ряда (2.14) и при последующем нелинейном анализе можно ограничиться одночленным приближением.

3. Начальная послекритическая деформация. Из (2.14) следует, что при $T = T_1$ будет $w = \infty$. Для получения конечных значений прогиба обратимся к геометрически нелинейной постановке, при которой тангенциальные деформации имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + w_x^2/2, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + w_y^2/2, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + w_x w_y, \quad (3.1)$$

где ε_{ij}^0 — линейная часть деформаций ($\varepsilon_{11}^0 = u_x$, $\varepsilon_{22}^0 = v_y$, $\varepsilon_{12}^0 = u_y + v_x$) и $u(x, y)$, $v(x, y)$ — проекции перемещения.

Найдем уточненное выражение потенциальной энергии деформации:

$$\Pi = \Pi_\varepsilon + \Pi_b, \quad (3.2)$$

где Π_ε и Π_b — энергии деформации растяжения и изгиба, причем

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon &= \frac{1}{2} \iint (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) dx dy, \\ \sigma_{11} &= \frac{Eh(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})}{1 - \nu^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{Eh(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})}{1 - \nu^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{Eh \varepsilon_{12}}{2(1 + \nu)}, \\ \varepsilon_{11}^0 &= \frac{T(\sigma_{11}^0 - \nu \sigma_{22}^0)}{Eh}, \quad \varepsilon_{22}^0 = \frac{T(\sigma_{22}^0 - \nu \sigma_{11}^0)}{Eh}, \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{2T(1 + \nu)\sigma_{12}^0}{Eh}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь σ_{ij}^0 — решение плоской задачи при $T = 1$ (см. рис. 1).

Ограничиваясь одномодовым приближением, положим $W = (c^0 + c)w$, где $w = w_1(x, y)$ — собственная функция задачи (2.12) при $T_k = T_1$ (считаем, что $w_1(0, 0) = 1$), $c^0 = c_1^0$ — заданная малая амплитуда начальной неправильности по форме w_1 , $c = c_1$ — искомая амплитуда дополнительного прогиба.

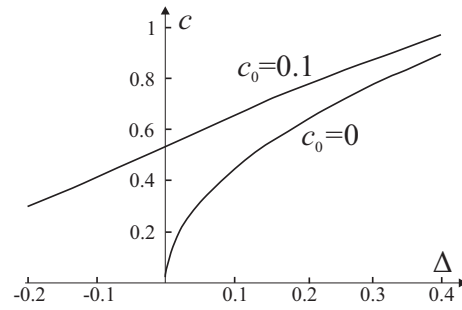


Рис. 2. Амплитуда дополнительного прогиба.

Перепишем выражение для энергии (3.2) в виде

$$\Pi = \Pi_u - \Pi_{uw} + \Pi_w + \Pi_b = \frac{T^2}{2Eh} \Pi_u^0 - \frac{T(c^0 + c)^2}{2} \Pi_{uw}^0 + \frac{Ehc^2(c^0 + c)^2}{8(1 - \nu^2)} \Pi_w^0 + \frac{Dc^2}{2} \Pi_b^0, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_u^0 &= \iint ((\sigma_{11}^0)^2 - \nu\sigma_{11}^0\sigma_{22}^0 + (\sigma_{22}^0)^2 + 2(1 + \nu)(\sigma_{12}^0)^2) dx dy, \\ \Pi_{uw}^0 &= \iint (\sigma_{11}^0(w_x^0)^2 + 2\sigma_{12}^0w_x^0w_y^0 + \sigma_{22}^0(w_y^0)^2) dx dy, \\ \Pi_w^0 &= \iint ((w_x^0)^2 + (w_y^0)^2)^2 dx dy, \\ \Pi_b^0 &= \iint ((\Delta w^0)^2 + 2(1 - \nu)(w_{xy}^0)^2 - w_{xx}^0w_{yy}^0) dx dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Множитель $c^2(c + c_0)^2$ в выражении для Π_w связан с тем, что в первом сомножителе произведения $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ начальные неправильности не входят, а во втором — входят. Также они не входят в выражение для энергии Π_b изгибной деформации.

Положим $T = T_1(1 + \Delta)$, где $T_1 = D\Pi_b^0/(a^2\Pi_{uw}^0)$ — критическая нагрузка (2.7).

Минимизация энергии (3.4) по амплитуде c приводит к кубическому уравнению

$$(1 + \Delta)(c + c_0) = c + \frac{g}{h^2}c(c + c_0)(2c + c_0), \quad g = \frac{3\Pi_b^0}{\Pi_w^0}. \quad (3.6)$$

Или, вычисляя прогибы в долях толщины ($c = h\hat{c}$, $c_0 = h\hat{c}_0$), получим

$$(1 + \Delta)(\hat{c} + \hat{c}_0) = \hat{c} + g\hat{c}(\hat{c} + \hat{c}_0)(2\hat{c} + \hat{c}_0). \quad (3.7)$$

В частности, при отсутствии неправильности ($c_0 = 0$) имеем $c = h\sqrt{\Delta/(2g)}$.

На рис. 2 при $g = 0.25$ показан график зависимости $c(\Delta)$ при $c_0 = 0.1$ и при отсутствии вмятины $c_0 = 0$.

В силу формул (3.3), (3.1) напряжение σ_{yy} при нелинейном подходе определяется как

$$\sigma_{yy} = T\sigma_{yy}^0 + \frac{Ehc^2}{2(1 - \nu^2)}(\nu w_x^2 + w_y^2). \quad (3.8)$$

В связи с тем, что второе слагаемое в формуле (3.8) положительно, напряжение σ_{yy} , растягивающее трещину, после потери устойчивости больше, чем до нее. Следовательно, потеря устойчивости повышает уровень растягивающих напряжений в кончике трещины и способствует росту трещины.

4. Конечно-элементное моделирование послекритической деформации. При помощи пакета ANSYS проводится конечно-элементный нелинейный анализ послекритической деформации пластины с трещиной при одноосном растяжении. В качестве расчетной модели выбрана пластинка из материала с модулем Юнга $E = 70290$ МПа, а коэффициент Пуассона $\nu = 0.345$. Размеры пластины таковы: высота $2H = 8$ мм, ширина $2L = 8$ мм, толщина $h = 0.01$ мм. Пластина ослаблена центральной прямолинейной трещиной длиной $2a = 0.5$ мм ($-a < x < a, y = 0$). Для обеспечения необходимой точности вычислений в окрестности концов трещины производится сгущение сетки с минимальным линейным размером элемента 0.005 мм. При растяжении пластины равномерно распределенным усилием, приложенным к верхней и нижней сторонам пластины ($-L < x < L, y = \pm H$), при достижении критической нагрузки происходит ее выпучивание (потеря плоской формы деформирования).

В табл. 1 приведены критические нагрузки для первых трех форм потери устойчивости, найденные по линейной теории устойчивости.

Таблица 1. Критические нагрузки для первых форм потери устойчивости

Номер формы	Критическая нагрузка N/mm
1	1.6707
2	2.3344
3	5.9132

Для оценки напряженно-деформированного состояния пластинки в послекритическом состоянии задача решается в нелинейно-упругой постановке.

Следуя алгоритму построения решения задачи нелинейного выпучивания, задаются начальные несовершенства пластины, пропорциональные сумме перемещений w по трем первым формам и равные 5% толщины пластины, растягивающая на-

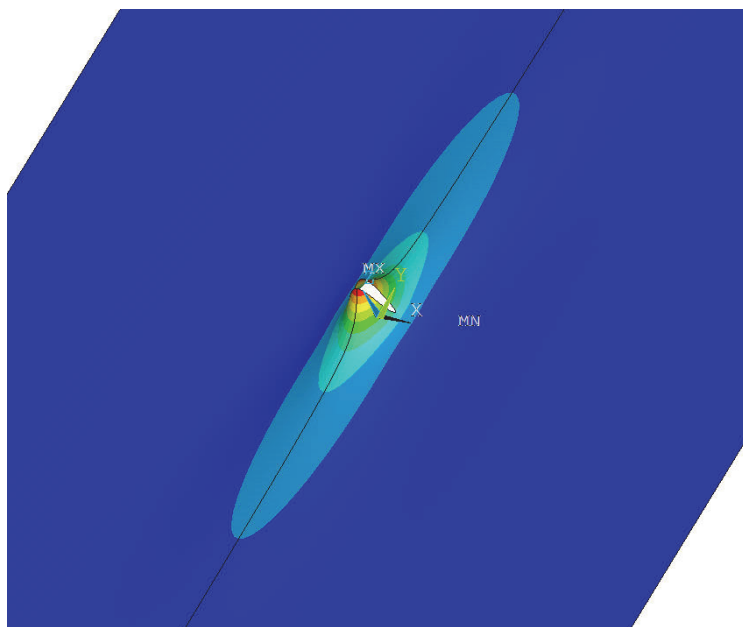


Рис. 3. Выпучивание пластины при растягивающем усилии $2N/mm$.

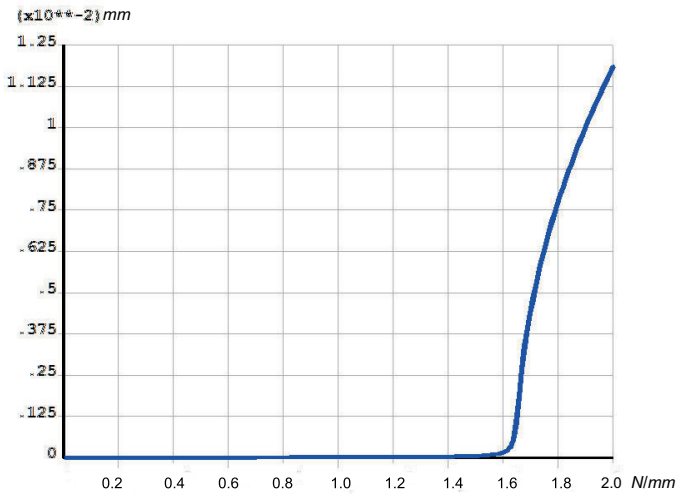


Рис. 4. Перемещение w центральной точки верхнего берега трещины ($x = 0, y = +0$) при растягивающей нагрузке от 0 до 2 N/mm .

грузки меняется от 0 до 2 N/mm , что несколько превышает первую критическую нагрузку, полученную по линейной теории устойчивости. На рис. 3 представлено выпучивание пластины в окрестности трещины при нагрузке 2.0 N/mm , т. е. за пределом устойчивости. Выход пластинки из плоскости соответствует первой форме потери устойчивости, полученной для задачи в линейной постановке.

Для иллюстрации нелинейного деформирования пластинки с начальными несовершенствами на рис. 4 представлено перемещение центральной точки трещины в зависимости от приложенной нагрузки.

Как следует из рис. 4, при наличии начальных несовершенств заметный рост прогибов наблюдается при нагрузке 1.6 N/mm , меньшей первой критической нагрузки по линейной теории, что подтверждается и аналитическим решением (см. рис. 2).

Анализ послекритического состояния пластины в нелинейной постановке дает возможность оценить уровень напряжений в кончике трещины. В табл. 2 приведены максимальные растягивающие напряжения на элементе, примыкающем к вершине трещины при растягивающем усилии 2 N/mm на расстоянии 0.00125 mm от вершины. Для сравнения приведены напряжения в случае линейного деформирования пластины равномерно распределенным усилием 2 N/mm без возможного выпучивания, в случае решения задачи в нелинейно-упругой постановке без возможного выпучивания, а также в случае решения задачи в нелинейно-упругой постановке при выпучивании.

Таблица 2. Максимальные растягивающие напряжения на расстоянии 0.00125 mm от вершины

	Линейное решение	Нелинейное решение (плоская форма)	Нелинейное решение (выпучивание)
Напряжение $\sigma_{yy}(N/mm^2)$	3278	3379	3619

5. Заключение. Таким образом, проведенный анализ напряженного состояния в окрестности вершины центральной трещины при одноосном растяжении дает основания утверждать, что при возможной локальной потере устойчивости вблизи трещины происходит повышение уровня растягивающих напряжений в окрестности кончика трещины, и, как следствие, снижается нагрузка, приводящая к разрушению. Это подтверждается экспериментальными результатами Гузя А. М. и Дышеля М. Ш. [5, 7]. Несоответствие результатов приведенного анализа с экспериментальными результатами работы [8] может быть, по-видимому, объяснено тем, что материал, использовавшийся в экспериментах (бумага), имеет более сложную реологию.

Литература

1. *Cherepanov G. P.* On the buckling under tension of a membrane containing holes // *J. Appl. Math. Mech.* 1963. Vol. 27, no. 2. P. 405–420.
2. *Dixon J. R., Stranningan J. S.* Stress distribution and buckling in thin sheets with central slits // *Proc. 2nd Int. Conf. on Fracture.* Brighton, 1969. London: Chapman and Hall, 1969.
3. *Даль Ю. М.* О местном изгибе растянутой пластины с трещиной // *Механика твердого тела.* 1978. № 4. С. 135–141.
4. *Markström K., Störåkers B.* Buckling of cracked members under tension // *Int. J. Solids Structures.* 1980. Vol. 16. P. 217–229.
5. *Гузъ А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г., Милованова О. Б.* Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев.: Наукова думка, 1981.
6. *Sih G. C., Lee Y. D.* Tensile and compressive buckling of plates weakened by cracks // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 1986. Vol. 6. P. 129–138.
7. *Dyshel M. S.* Stability and fracture of plates with a central and an edge crack under tension // *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38. P. 472–476.
8. *Li Ch., Espinosa R., Stehle P.* Fracture mechanics for membranes // *Proc. XVth European Conf. on Fracture (ECF15), 2004, Stockholm.* 2004
9. *Kopecki T.* Numerical and experimental analysis of post-critical deformation states in a tensioned plate weakened by a crack // *J. Theor. and Appl. Mechanics (Warsaw).* 2010. Vol. 48, no. 1. P. 45–70.
10. *Мухомлишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
11. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 28 октября 2018 г.;
после доработки 14 декабря 2018 г.;
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — академик, д-р физ.-мат. наук, проф.; n.morozov@spbu.ru
Семенов Борис Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; semenov@bs1892.spb.edu
Товстик Петр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, проф., peter.tovstik@mail.ru

On the estimation of the level of performance of a stretchable plate weakened by a transverse crack

N. F. Morozov, B. N. Semenov, P. E. Tovstik

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Morozov N. F., Semenov B. N., Tovstik P. E. On the estimation of the level of performance of a stretchable plate weakened by a transverse crack. *Vestnik of Saint Peters-*

A rectilinear crack in a thin elastic plate is considered. At tension of the plate in the perpendicular crack direction in the vicinity of the crack appear compressive stresses, which at a certain level of tension lead to loss of stability of the plane form of equilibrium plates. The purpose of the study is to clarify the issue of whether buckling promotes crack growth or leads to the stabilization of deformations. The stress state of the plate in the initial postcritical stage is investigated. The approximate analytical solution is suggested. The finite element method is used to solve the problem of stretching a plate after loss of stability. The effect of the loss of a plane form of deformation under tension of a plate with a central crack on the level of the stress state in the vicinity of the crack tip is estimated. An analysis of the stress state in the vicinity of the tip of the central crack under uniaxial tension shows that with possible local stability loss near the crack an increase in tensile stresses in the vicinity of the crack tip is observed, and, as a result, load leading to destruction should be reduced.

Keywords: stability loss, plates, finite element method.

References

1. Cherepanov G. P., “On the buckling under tension of a membrane containing holes”, *J. Appl. Math. Mech.* **27**(2), 405–420 (1963).
2. Dixon J. R., Stranning J. S., “Stress distribution and buckling in thin sheets with central slits”, *Proc. 2nd Int. Conf. on Fracture. Brighton, 1969* (Chapman and Hall, London, 1969).
3. Dahl Yu. M., “On the local bending of an elongated plate with a crack”, *Izvestia Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela* (4), 135–141 (1978).
4. Markström K., Storåkers B., “Buckling of cracked members under tension”, *Int. J. Solids Structures* **16**, 217–229 (1980).
5. Guz A. N., Dyshel M. Sh., Guliyev G. G., Milovanova O. B., *The destruction and ustojchivaost thin bodies* (Naukova Dumka Publ., Kiev, 1981). (In Russian)
6. Sih G. C., Lee Y. D., “Tensile and compressive buckling of plates weakened by cracks”, *Theor. Appl. Fract. Mech.* **6**, 129–138 (1986).
7. Dyshel M. S., “Stability and fracture of plates with a central and an edge crack under tension”, *Int. Appl. Mech.* **38**, 472–476 (2002).
8. Li Ch., Espinosa R., Stehle P., “Fracture mechanics for membranes”, *Proc. XVth European Conf. on Fracture (ECF15), 2004, Stockholm* (2004).
9. Kopecki T., “Numerical and experimental analysis of post-critical deformation states in a tensioned plate weakened by a crack”, *J. Theor. and Appl. Mechanics (Warsaw)* **48**(1), 45–70 (2010).
10. Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Basic equations, the plane theory of elasticity, torsion and bending* (5th ed., revised and enlarged, Nauka Publ., Moscow, 1966). (In Russian)
11. Morozov N. F., *Mathematical problems of crack theory* (Nauka Publ., Moscow, 1984).
12. Timoshenko S. P., Goodier J. N., *Theory of elasticity* (MacGraw Hill Book Company, 1951).

Received: October 28, 2018

Revised: December 14, 2018

Accepted: December 20, 2018

Author's information:

Morozov Nikina F. — n.morozov@spbu.ru

Semenov Boris N. — semenov@bs1892.spb.edu

Tovstik Petr E. — peter.tovstik@mail.ru

ХРОНИКА

Памяти Людмилы Яковлевны Адриановой
(1935–2018)

16 ноября 2018 года ушла из жизни Людмила Яковлевна Адрианова.

Людмила Яковлевна родилась 9 мая 1935 года в Москве (ее отец Яков Стефанович Адрианов — генерал-лейтенант, заведующий кафедрой конструкции авиадвигателей Ленинградской Краснознаменной военно-воздушной инженерной академии имени А. Ф. Можайского, мать Зоя Евстигнеевна Мироевская — врач). После окончания средней школы в 1952 году Людмила Яковлевна поступила в Ленинградский (ныне Санкт-Петербургский) государственный университет. С тех пор вся жизнь Людмилы Яковлевны в течение более 60 лет была связана с математико-механическим факультетом.

После окончания университета она поступила в аспирантуру и занималась изучением приближенных методов теории дифференциальных уравнений под руководством профессора С. М. Лозинского. В 1958 году Людмила Яковлевна была принята на кафедру дифференциальных уравнений в должности лекционного ассистента, а после защиты в 1969 году кандидатской диссертации «Исследования по оценкам погрешности метода Штермера» заняла должность доцента, в которой работала вплоть до ухода из университета в 2012 году.

Научную деятельность Л. Я. Адрианова начала ярко, получив результаты по очень трудной (ввиду проблемы малых знаменателей) задаче о приводимости линейных систем с квазипериодическими коэффициентами. Эта работа, опубликованная в 1962 году в журнале «Вестник Ленинградского университета», сразу получила широкое признание специалистов и постоянно цитируется. После защиты кандидатской диссертации областью научных исследований Людмилы Яковлевны стала восходящая к Ляпунову теория линейных систем дифференциальных уравнений. В этом направлении Людмила Яковлевна получила выдающиеся результаты, с которыми она неоднократно успешно выступала на всесоюзных, всероссийских и международных конференциях.

Людмила Яковлевна была прекрасным педагогом. Кроме лекций и практических занятий она руководила работой аспирантов, курсовыми и дипломными работами студентов; многие ее ученики продолжают начатые под ее руководством исследования, защитили диссертации, преподают в вузах. Ее внимание к студентам далеко выходило за рамки обычных обязанностей преподавателя, она всегда готова была прийти им на помощь. В течение 13 лет она была общественным заместителем декана (куратором), и про студентов «своих» курсов знала все, активно участвовала в их жизни и была им надежной поддержкой.

Более 40 лет Людмила Яковлевна читала разработанный ею специальный курс лекций по теории линейных систем. Этот курс составил основу выдающегося по содержательности и простоте изложения учебного пособия «Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений», вышедшего в издательстве Санкт-Петербургского университета в 1992 году и переведенного на английский язык Американским математическим обществом в 1995 году.

Людмила Яковлевна была членом Санкт-Петербургского математического общества и Американского математического общества, активным участником Городского семинара по обыкновенным дифференциальным уравнениям, более 30 лет исполняла обязанности ученого секретаря кафедры дифференциальных уравнений, участвовала в работе многих экспертных комиссий, в том числе министерских.

Людмила Яковлевна была незаурядным человеком большого ума и бесконечно обаяния, наделенным чувством юмора и внешней красотой. Для многих поколений матмеховцев она была одним из символов факультета.

Светлый образ Людмилы Яковлевны Адриановой навсегда останется в сердцах знавших ее людей.

*Е. С. Анитова, А. А. Архипова, В. В. Басов, Н. А. Бегун, Ю. Н. Бибиков,
Е. В. Васильева, А. М. Вершик, В. А. Гаген-Торн, Е. В. Дыбкова,
Т. Е. Звягинцева, Б. Ф. Иванов, Н. А. Изобов, Ю. А. Ильин, Т. А. Лезина,
А. А. Лодкин, С. А. Мазаник, С. К. Матвеев, А. И. Назаров, В. Б. Невзоров,
С. Ю. Пиллюгин, В. А. Плисс, А. И. Разов, А. А. Родионова, Н. Х. Розов,
И. В. Романовский, А. Г. Савельева, П. Е. Товстик, Т. М. Товстик,
Н. Н. Уральцева, К. В. Холшевников, Ю. В. Чурин*

Девятая Международная конференция по моделированию (Ninth International Workshop on Simulation)

Девятая Международная конференция по моделированию проходила в Барселоне (Испания) с 25 по 29 июня 2018 года. Она была организована отделением статистики и исследования операций Политехнического университета Каталонии, отделением статистики университета Барселоны и кафедрой статистического моделирования Санкт-Петербургского государственного университета в сотрудничестве с Обществом моделирования INFORMS (США).

Эта конференция продолжила традиции, заложенные в нашем университете четверть века назад руководителем кафедры статистического моделирования профессором С. М. Ермаковым и сотрудниками кафедры. Шесть первых конференций прошли в Санкт-Петербурге (1994, 1996, 1998, 2001, 2005 и 2009). Седьмая конференция была проведена в 2013 году в Римини (Италия). Восьмую организовали коллеги из Австрии (2015).

В девятой конференции приняли участие 106 специалистов из разных стран, в том числе 30 из России (в основном, из Москвы, Санкт-Петербурга и Новосибирска). Было организовано 26 специальных секций, что позволило отразить значительную часть современных тенденций математической и прикладной статистики.

Всего программа включала 98 секционных докладов. Приглашенный пленарный доклад, посвященный методологии моделирования больших систем, был мастерски прочитан профессором Дж. Вайнером (G. Wainer, Канада). Санкт-Петербургский государственный университет представляли профессора В. Б. Мелас и П. Е. Товстик, доцент Т. М. Товстик и несколько студентов кафедры статистического моделирования. Конференция прошла на высоком научном и организационном уровне, в теплой и доброжелательной атмосфере. Следует отметить превосходную работу местного оргкомитета и его со-руководителей профессоров Хосеп Казановас и Пау Фонсека (Josep Casanovas, Pau Fonseca, Испания). Очень уютная обстановка под тентом на университетском дворе во время кофе-брейков и ланчей весьма способствовала личному общению и всестороннему обсуждению заслушанных докладов.

Многие участники воспользовались свободным временем для посещения замечательных музеев Барселоны. Поразительно чистый воздух, замечательная солнечная, но не слишком жаркая погода и красивая архитектура надолго останутся приятным воспоминанием. Следующую (уже десятую по счету) из данного цикла конференций планируется провести в Зальцбурге (Австрия) в сентябре 2019 года.

Подробную информацию о девятой конференции можно найти на сайте <http://ssa.cf.ac.uk/iws2018/>

Сопредседатель программного комитета *В. Б. Мелас*
Член оргкомитета конференции *В. Б. Невзоров*

CONTENTS

Vestnik of Saint Petersburg University.
Mathematics. Mechanics. Astronomy. Volume 6 (64). Issue 2. 2019

MATHEMATICS

<i>Borzykh A. N.</i> Enhancing an estimate of the rate of the Seidel method convergence	185
<i>Iljin Yu. A.</i> On integration of special types of differential inequalities in explicit form	196
<i>Krivulin N. K., Romanova E. Yu.</i> On rank-one approximation of positive matrices using methods of tropical optimization	208
<i>Lunev I. S., Nekrutkin V. V.</i> A remark on certain classical criteria of mathematical statistics . . .	221
<i>Malozemov V. N., Plotkin A. V.</i> Strict polynomial separation of two sets	232
<i>Nikitin Ya. Yu., Ragozin I. A.</i> Goodness-of-fit tests based on a characterization of logistic distribution	241
<i>Frolov A. N.</i> On estimates for probabilities of combinations of events, the Jordan formula and the Bonferroni inequalities	253
<i>Danchev P. V.</i> Weakly Exchange Rings Whose Units are Sums of Two Idempotents	266

MECHANICS

<i>Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.</i> Monoaxial attitude stabilization of a rigid body in conditions of nonstationary perturbations with zero mean values	271
<i>Arkipova I. M.</i> On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency	282
<i>Bereslavskii E. N., Dudina L. M.</i> Problem of filtration in a rectangular web with a partially impenetrable vertical wall	289
<i>Velichko V. E.</i> Calculating of the optical telescope mirror	299
<i>Gerasimenko P. V., Khodakovskiy V. A.</i> Numerical algorithm of investigation of stress-strain state of cylindrical shells of railway tank	309
<i>Dahl Yu. M.</i> About stresses in elastic stripe under normal forces on longitudinal borders	319
<i>Zabavnikova T. A., Pomytkin S. P.</i> The features of solving the problem of triple shear in endochronic theory of inelasticity taking account large deformations	330
<i>Morozov N. F., Semenov B. N., Tovstik P. E.</i> On the estimation of the level of performance of a stretchable plate weakened by a transverse crack	339

CHRONICLE

In memoriam of Lyudmila Yakovlevna Adrianova	348
Ninth International Workshop on Simulation	350
Sessions of Section of the House of scientists of the Russian Academy of Sciences on the theoretical mechanics of prof. N. N. Poljakhov	
November 28, 2018	308
December 12, 2018	338