# ВЕСТНИК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 4 (62) Выпуск 3 | 2017 Сентябрь | МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАН В АВГУСТЕ 1946 ГОДА

ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК СПбГУ. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ» ВЫХОДИТ В СВЕТ С МАРТА 1956 ГОДА


## СОДЕРЖАНИЕ

**На наш журнал можно подписаться по каталогу «Пресса России». Подписной индекс 36313**
**Свидетельство о регистрации СМИ № ФС77-35996 от 22 апреля 2009 г. (Роскомнадзор)**
**Учредитель: Санкт-Петербургский государственный университет**

Редактор *Ю. Н. Ворошилова* • Корректор *Ю. Н. Ворошилова* • Комп. верстка *А. М. Вейшторт*

Подписано в печать 00.00.2017. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Усл. печ. л. 00,00. Уч.-изд. л. 00,00.
Печать по заказу. 1-й завод — 000 экз. Заказ № . Цена свободная.
Адрес Издательства СПбГУ: 199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11. Тел./факс +7(812) 328-44-22

Типография Издательства СПбГУ. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3
MSC 34C20

# ДВУМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КЛАССИФИКАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — IV

*В. В. Басов, А. С. Чермных*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Данная статья является четвертой в цикле работ, посвященном двумерным однородным кубическим системам. В ней рассматривается случай, когда однородный векторный многочлен в правой части системы имеет квадратичный общий множитель с комплексными нулями. Множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых на основании определенным образом введенных структурных и нормировочных принципов выделяется простейшая система — нормальная форма третьего порядка. Фактически, нормальная форма задается матрицей коэффициентов своей правой части, которая называется канонической формой (КФ). Каждая КФ имеет свою структуру расположения ненулевых элементов, их определенную нормировку и каноническое множество допустимых значений для ненормированных элементов, относящее КФ к выбранному классу эквивалентности. Помимо классификации для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные неособые замены, преобразующие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, c) получаемые значения ненормированных элементов КФ. Библиогр. 9 назв.

*Ключевые слова*: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

**Введение.** Статья посвящена нахождению канонических форм вещественных однородных кубических систем, имеющих общий множитель второй степени с комплексными нулями, и состоит из пяти разделов.

В первом разделе правая часть исходной системы, определяемая восемью коэффициентами, однозначно раскладывается в произведение общего множителя $P_0^2(x)$ с отрицательным дискриминантом $D_0$ и вектора $Hx$, где $H$ — некая неособая матрица, дискриминант характеристического полинома которой обозначается через $D$. При этом в [1] была установлена инвариантность знаков $D_0$ и $D$. Приводится список нормированных структурных форм и канонических форм со своими множествами допустимых значений параметров, соответствующих случаю $D_0 < 0$.

Во втором и третьем разделах рассматриваются случаи $D \geq 0$ и $D < 0$ соответственно. Для каждого из этих случаев приводятся списки канонических форм со своими каноническими множествами допустимых значений параметров, введенными в [2]. Доказываются теоремы, подтверждающие линейную неэквивалентность приведенных КФ и демонстрирующие для каждой КФ в явном виде: a) все системы, относящиеся к классу линейной эквивалентности, порожденному данной КФ, b) линейную замену, сводящую любую такую систему к выбранной КФ, c) получаемые в результате замены значения параметров КФ из ее канонического множества.

В четвертом разделе выделяются минимальные канонические множества, введенные в [2], а в пятом — приведен единый список канонических форм и канонических множеств для систем с общим множителем второй степени, что являет собой суммарный результат работы [3] и данной статьи.

Дополнение освещает классификации систем с иными невозмущенными частями.

Эта работа является непосредственным продолжением работ [1–3], поэтому в ней



 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.302

сохраняются все введенные ранее обозначения. В связи с большим количеством ссылок на формулы, полученные в [1–3], будем для краткости отмечать их номера верхним индексом. Например, систему (2.1) из [1] будем обозначать $(2.1)^1$.

**1. Выделение $CF^{m,2}$ при отрицательном дискриминанте $P_0^2$.** Система $(1.1)^3$, полученная после вынесения из правой части системы $(2.1)^1$ $\dot{x} = A\,q^{[3]}(x)$ общего множителя $P_0^2(x)$, при условии $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma < 0$ имеет вид

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{array}{l} P_0^2 = x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \\ D_0 = \beta^2 - \gamma < 0 \ \ (\alpha = 1), \end{array} \quad H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \ \ \delta_{pq} = \det H \neq 0. \qquad (1.1^<)$$

Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы до $SF_2^{7,2}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 2$, $D_0 < 0$ (см. [2, определение 1.2]) и нормируем их согласно введенным НП в [2, разд. 1.2], попутно выделяя общий множитель $P_0^2$ с $\alpha = 1$, имеющий в силу $(2.19)^1$ дискриминант $D_0 < 0$, а также матрицу $H$ с дискриминантом $D$ ее характеристического многочлена и допустимые множества (см. [2, определение 1.8]). Кроме того, установим, какие из $NSF^{m,2,<}$ являются каноническими формами.

**Список 1.1.** Семнадцать $NSF^{m,2,<}$ и $CF^{m,2,<}$ до $CF_2^{7,2,<}$ включительно, для каждой указаны $(1, 2\beta, \gamma)$, $H$, $D_0$, $D$ и нетривиальные $ps^{m,2,<}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$CF_{8,+1}^{4,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -1, \\ (u-1)^2; \end{array}$

$CF_{34,+1}^{4,2,<,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -1, \\ 4u; \end{array}$

$CF_{7}^{5,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (1,-1,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -3/4, \\ (u-1)^2; \end{array}$

$CF_{22}^{5,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (1,-1,1), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -3/4, \\ 4u+1; \end{array}$

$CF_{1}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{array}$

$CF_{3}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & -uv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{array}$

$CF_{4,+1}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -1, \\ (u-1)^2; \end{array}$

$CF_{6}^{6,2,<,\substack{\leqslant\\=\\>}} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}, (1,-v,v^{-1}), \sigma \begin{pmatrix} u & uv^{-2} \\ 1 & v \end{pmatrix}, \begin{array}{c} (v^3/4-1)v^{-1}, \\ (u-v)^2+4uv^{-2}; \end{array}$

$CF_{7}^{6,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (1,-1,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & u+v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -3/4, \\ (u+1)^2+4v; \end{array}$

$CF_{11,+1}^{6,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -1, \\ u^2+4v; \end{array}$

$CF_{2}^{7,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}, (1,-v,v^{-1}), \sigma \begin{pmatrix} u & uv+w \\ 1 & v \end{pmatrix}, \begin{array}{c} (v^3/4-1)v^{-1}, \\ (u+v)^2+4w; \end{array}$

$NSF_{5}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u(v-1) & -uv \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{array}$

$NSF_{12}^{6,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv & u & -uv^2 \\ 1 & 0 & v-v^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \ (1,v^{-1},v), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv \\ 1 & v^{-1} \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} (1/4-v^3)v^{-2}, \\ v^{-2}-4uv; \end{array}$

$NSF_{13}^{6,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}, \ (1,-v,v^2+v), \ \sigma \begin{pmatrix} u & uv \\ 1 & 1+v \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -v(3v+4)/4, \\ (u+v+1)^2-4u; \end{array}$

$NSF_{15}^{6,2,<,\substack{\geqslant\\=\\<}} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & uv & uv(v-1) \\ 1 & 1 & 0 & -v(v-1)^2 \end{pmatrix}, \ (1,v,v^2-v), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1-v \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} -v(3v-4)/4, \\ (v-1)^2+4u; \end{array}$

$NSF_{16}^{6,2,<,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & uv \\ 1 & 1 & v & 0 \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} 1/4-v, \\ 4u; \end{array}$

$$NSF_1^{7,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & w & uv-u+w & v(w-u) \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix},\ (1,1,v),\ \sigma\begin{pmatrix} u & w-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$ps_1^{6,2,<} = \{v > 1/4\}$, $ps_3^{6,2,<} = \{v > 1/4,\ v \neq 1\}$, $ps_5^{6,2,<} = \{v > 1/4,\ v \neq 1\}$,
$ps_6^{6,2,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1\}$, $ps_7^{6,2,<} = \{v \neq -u\}$, $ps_{12}^{6,2,<} = \{v > 4^{-1/3}, v \neq 1\}$,
$ps_{13}^{6,2,<} = \{v \notin [-4/3, 0]\}$, $ps_{15}^{6,2,<} = \{v \notin [0, 4/3]\}$, $ps_{16}^{6,2,<} = \{v > 1/4\}$,
$ps_1^{7,2,<} = \{v > 1/4,\ w \neq u, u(1-v)\}$,
$ps_2^{7,2,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1,\ w \neq -uv, -u(v - v^{-2})\}$.

Отметим, что в списке 1.1 только $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ и $CF_1^{6,2,<}$ имеют диагональную матрицу $H$. Кроме того, канонические множества $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ имеют вид $cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\}$ и $cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\}$, так как предшествующие формы с $D_0 < 0$ у нее отсутствуют.

**2. Случай $D \geq 0$.** Итак, будем предполагать сначала, что в системе $(1.1^<)$ матрица $H$ имеет вещественные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2$.

**Набор 2.1.** Константы и замены, используемые далее в разделе 2:

$\psi_1(u) = (u^2 - 3u + 3)^{1/2}(u-3)^{-1}$, $\psi_2(u) = (3u^2 - 3u + 1)(3u-1)^{-2}$,
$\psi_3(u) = (u^2 + 3u + 3)(3u^2 + 3u + 1)(3u^2 + 8u + 3)^{-2}$; $\psi_4 = \tilde v(\tilde v - (\tilde v^2 - 1)^{1/2})/2$;
$L_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}\}$;
$L_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{r_1 = -v^{1/2} r_2,\ s_1 = (v(4v-1))^{1/4}(2v^{1/2}+1)^{-1},\ r_2 = (v(4v-1))^{-1/4}$, $s_2 = v^{-1/2} s_1\}$;
$L1_7^{5,2,<,>} = \{r_1 = (\tilde u^2 - 3\tilde u + 3)^{1/2}(1-\tilde u)^{-1},\ s_1 = 0,\ r_2 = (1-\tilde u)^{-1} s_2,\ s_2 = \psi_1^{-1}(\tilde u)\}$;
$L2_7^{5,2,<,>} = \{r_1 = \tilde u^{1/3}|\tilde u|^{1/6}(\tilde u - 1)^{-1},\ s_1 = |\tilde u|^{-1/2},\ r_2 = (3\tilde u - 1)\tilde u^{-1} r_1,\ s_2 = 0\}$;
$L_{22}^{5,2,<,>} = \{r_1 = -(\tilde u^2 + 3\tilde u + 3)^{1/2}(\tilde u - 1)^{-1}|\tilde u + 1|^{-1/2},\ s_1 = \tilde u(\tilde u + 1)^{-1} r_1$, $r_2 = -(3\tilde u^2 + 8\tilde u + 3)(\tilde u^2 + 3\tilde u + 3)^{-1} r_1,\ s_2 = (\tilde u + 1)^{-1} r_2\}$;
$L_1^{6,2,<,>} = \{r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = \tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1} r_1\}$;
$L_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{r_1 = -\beta r_2,\ s_1 = |p_1|^{-1/2},\ r_2 = |p_1|^{-1/2}(\gamma - \beta^2)^{-1/2},\ s_2 = 0\}$;
$L_7^{5,2,<,=} = \{r_1 = 1/2,\ s_1 = -1,\ r_2 = \mp\sqrt{3}/2,\ s_2 = 0\}$;
$L_{22}^{5,2,<,=} = \{r_1 = \pm\sqrt{14}/7,\ s_1 = \mp 5\sqrt{14}/28,\ r_2 = \sqrt{42}/14,\ s_2 = \sqrt{42}/28\}$;
$L_3^{6,2,<,=} = \{r_1 = 1,\ s_1 = 1/2,\ r_2 = 0,\ s_2 = -(\tilde v + (\tilde v^2 - 1)^{1/2})/2\}$;
$L_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde\gamma^{1/2}|\nu|^{-1/2}\tilde\varsigma^{-1},\ r_2 = |\tilde\gamma\nu|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1} s_1\}$.

В [3] из системы $(1.1^<)$ с $\gamma - \beta^2 > 0$ при $D > 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sigma_0\sqrt{D} \neq 0)$ заменой $J_1^2$ (см. набор $(1.1)^3$) получена система $(1.5)^3$, в которой согласно $(2.18)^1$ и $(2.19)^1$ $\tilde\alpha, \tilde\gamma > 0$ и $\tilde\varsigma = (\tilde\alpha\tilde\gamma - \tilde\beta^2)^{1/2} > 0$, а при $D = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1 + q_2)/2 \neq 0)$ и $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\ p_2 \neq 0]$ заменой $[J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2]$ получена система $(1.6)^3$ с $\tilde\alpha, \tilde\gamma, \tilde\varsigma > 0$. Наконец, система $(1.1^<)$ с $\gamma - \beta^2 > 0$ при $D = 0$ и $q_1, p_2 = 0$ сразу имеет вид $(1.5)^3$, но с $\lambda_1, \lambda_2 = \nu$, так как в этом случае $H$ диагональна и в ней $p_1, q_2 = \nu \neq 0$.

**Лемма 2.1.** 1) *Система* $(1.5)^3$ *при* $\tilde\beta = 0$ *заменой* $L_{8,+1}^{4,2,<,>}$ *сводится к* $CF_{8,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, *а при* $\tilde\beta \neq 0$ *заменой* $L_1^{6,2,<,>}$ — *к* $NSF_1^{6,2,<,>}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}, v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$.

2) *Система* $(1.6)^3$ *заменой* $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$, $v = \tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$.

3) *Система* $(1.1^<)$ *при* $D, q_1, p_2 = 0$ *заменой* $L_{8,+1}^{4,2,<,=}$ *сводится к* $CF_{8,+1}^{4,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,p_1$.

**Следствие 2.1.** *Все шесть* $NSF^{m,2,<}$ *из списка 1.1 при* $D > 0$ *и* $D = 0$ *каноническими формами не являются.*

**Утверждение 2.1.** *Следующие формы из списка 1.1 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП (см. в* [2, разд. 1.1]) $SF_i^{m,2}$ :

1) $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $ps_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0\}$ *при* $u = 1$ *заменой* $(2.2)^1$ $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$ $(\det L \neq 0)$ *с* $s_1 = s_2$, $r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;

2) $NSF_7^{5,2,<,>}$ *с* $ps_7^{5,2,<,>} = \{u \neq 1\}$ :
*a) при* $u = 3$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = 2s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;
*b) при* $u = -1$ *заменой с* $s_1 = s_2(1+\sqrt{7})/3$, $r_2 = -r_1(1+\sqrt{7})/2$ *сводится к* $SF_{34}^{4,2}$;

3) $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ *с* $ps_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4\}$ :
*a) при* $u = 3/2$ *заменой с* $r_1 = -r_2(\sqrt{7}+1)/2$, $s_1 = s_2(\sqrt{7}-1)/2$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;
*b) при* $u = [\,6 \vee 4 \mp \sqrt{13}\,]$ *заменой с* $r_1 = [\,4r_2/3 \vee (-1 \pm \sqrt{13})r_2/6\,]$, $s_2 = [\,-3s_1 \vee (-1 \mp \sqrt{13})s_1/6\,]$ *сводится к* $SF_7^{5,2}$;

4) $NSF_1^{6,2,<,>}(\tilde\sigma, \tilde u, v)$ *с* $ps_1^{6,2,<,>} = \{\tilde u \neq 1,\ v > 1/4\}$ :
*a) при* $\tilde u = -1$ *заменой* $L_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *сводится к* $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = (2v^{1/2}-1)(2v^{1/2}+1)^{-1}$;
*b) при* $\tilde u \neq -1, [3 \vee 1/3]$, $v = [\psi_1^2(\tilde u) \vee \psi_2(\tilde u)]$ *заменой* $[L1_7^{5,2,<,>} \vee L2_7^{5,2,<,>}]$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,>}$ *с* $\sigma = [\tilde\sigma \vee \tilde\sigma \operatorname{sign} \tilde u]$, $u = [\tilde u \vee \tilde u^{-1}]$;
*c) при* $\tilde u \neq -1$, $v = \psi_3(\tilde u)$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,>}$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma \operatorname{sign}(\tilde u + 1)$, $u = -\tilde u(\tilde u + 1)^{-2}$;

5) $NSF_3^{6,2,<,=}$ *с* $ps_3^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1\}$ :
*a) при* $v = 1/3$ *заменой с* $r_2 = -3r_1$, $s_2 = 0$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,=}$;
*b) при* $v = (49 \mp 7\sqrt{46})/6$ *заменой с* $r_1 = r_2(11 \mp 2\sqrt{46})/6$, $s_1 = s_2(-38 \pm 5\sqrt{46})/6$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,=}$;

6) $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}(\tilde\sigma, 1, \tilde v)$ *с* $ps_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1\}$ :
*a) при* $v = \pm 2/\sqrt{3}$ *заменой* $L_7^{5,2,<,=}$ *сводится к* $CF_7^{5,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$;
*b) при* $v = \mp 7/\sqrt{3}$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,=}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,=}$ $(u = -1/4)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$;
*c) при* $|\tilde v| \geq 1$ *заменой* $L_3^{6,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_3^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $v = \psi_4(\tilde v)$.

(См. [4, прил. 3.6.1, с. 141] к пунктам 1–3; [4, прил. 3.6.2, с. 148] к пункту 4; [4, прил. 3.6.3, с. 152] к пунктам 5, 6.)

**Замечание 2.1.** Здесь и в дальнейшем, следуя соглашению 1.3 из [2], запись «$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,]\ \ldots\ \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,]\ \ldots$» означает, что или $\zeta = \varsigma_1$, $\eta = \varsigma_2$, или $\zeta = \upsilon_1$, $\eta = \upsilon_2$, а ссылка на приложение к работе [4] выделяет в нем программу, символьными вычислениями в Maple подтверждающую получаемые результаты.

Приведенные выше утверждения позволяют в случае $l = 2$, $D_0 < 0$, $D \geq 0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

**Список 2.1.** Пять $CF_i^{m,2,<,>}$, пять $CF_i^{m,2,<,=}$ и их $cs^{m,2,<,\gtreqless}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v \neq 0)$.

$$CF_{8,+1}^{4,2,<,\gtreqless} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \qquad CF_{34,+1}^{4,2,<,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$CF_7^{5,2,<,\gtreqless} = \sigma\begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, CF_{22}^{5,2,<,\gtreqless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, CF_1^{6,2,<,>} = \sigma\begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix},$$

$$CF_3^{6,2,<,=} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad CF_{4,+1}^{6,2,<,=} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix};$$

$cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\}$, $cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\}$; $cs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0,\ u \neq 1\}$;
$cs_7^{5,2,<,>} = \{u \neq \pm 1, 3\}$, $cs_7^{5,2,<,=} = \{u = 1\}$;
$cs_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4,\ u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\}$,
$cs_{22}^{5,2,<,=} = \{u = -1/4\}$; $cs_1^{6,2,<,>} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi_1^2(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\}$;
$cs_3^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\}$; $cs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ |v| < 1\}$.

**Теорема 2.1.** *Любая система* $(2.1)^1$ *с* $l = 2$, *записанная в виде* $(1.1^<)$ *согласно* $(2.15)^1$ *и имеющая* $D \geq 0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.1. Ниже для каждых* $CF_i^{m,2,<,>}$ *и* $CF_i^{m,2,<,=}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(1.1^<)$, *b) замены* $(2.2)^1$, *преобразующие правую часть системы* $(1.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* $\sigma$ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,>}$ *или* $cs_i^{m,2,<,=}$ :

$CF_{8,+1}^{4,2,<,>}$ : *a)* $D > 0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde{\beta} = 0$; *b)* $J_1^2$, $L_{8,+1}^{4,2,<,>}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ : *a)* $D > 0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde{\beta} \neq 0$, $\nu = 0$; *b)* $J_1^2$, $L_1^{6,2,<,>}$, $L_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $v = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2$, $u = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - |\tilde{\beta}|)(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + |\tilde{\beta}|)^{-1}$;

$CF_7^{5,2,<,>}$ : *a)* $D > 0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2} = [\,\psi_1^2(\tilde{u}) \vee \psi_2(\tilde{u})\,]$, *где* $\tilde{u} = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq -1, [3 \vee 1/3]$; *b)* $J_1^2$, $L_1^{6,2,<,>}$, $[\,L1_7^{5,2,<,>} \vee L2_7^{5,2,<,>}\,]$; *c)* $\sigma = [\,\mathrm{sign}\lambda_2 \vee \mathrm{sign}\lambda_1\,]$, $u = [\,\tilde{u} \vee \tilde{u}^{-1}\,]$;

$CF_{22}^{5,2,<,>}$ : *a)* $D > 0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{u} = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq -1, (-5 \pm \sqrt{13})/6, (-5 \mp \sqrt{13})/2, (-4 \pm \sqrt{7})/3, -3/2, -2/3$, $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2} = \psi_3(\tilde{u})$; *b)* $J_1^2$, $L_1^{6,2,<,>}$, $L_{22}^{5,2,<,>}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$, $u = -\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$;

$CF_1^{6,2,<,>}$ : *a)* $D > 0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{u} = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq -1$, $\tilde{v} = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2} \neq \psi_1^2(\tilde{u}), \psi_2(\tilde{u})$, $\psi_3(\tilde{u})$; *b)* $J_1^2$, $L_1^{6,2,<,>}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2$, $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$;

$CF_{8,+1}^{4,2,<,=}$ : *a)* $D = 0$, $q_1 = 0$, $p_2 = 0$; *b)* $L_{8,+}^{4,2,<,=}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,p_1$;

$CF_7^{5,2,<,=}$ : *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0]$, $\tilde{\gamma}(\nu\tilde{\varsigma})^{-1} = \pm 2/\sqrt{3}$, *где* $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — *из* $[(1.6_a)^3 \vee (1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_7^{5,2,<,=}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$;

$CF_{22}^{5,2,<,=}$ : *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0]$, $\tilde{\gamma}(\nu\tilde{\varsigma})^{-1} = \pm 7/\sqrt{3}$, *где* $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — *из* $[(1.6_a)^3 \vee (1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_{22}^{5,2,<,=}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$;

$CF_3^{6,2,<,=}$ : *a)* $D = 0$, $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0]$, $|\tilde{v}| \geq 1$, $|\tilde{v}| \neq 2/\sqrt{3}, 7/\sqrt{3}$, *где* $\tilde{v} = \tilde{\gamma}(\nu\tilde{\varsigma})^{-1}$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ — *из* $[(1.6_a)^3 \vee (1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_3^{6,2,<,=}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$, $v = \psi_4$;

$CF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ : *a)* $D = 0$, $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0]$, $|\tilde{v}| < 1$, *где* $\tilde{v} = \tilde{\gamma}(\nu\tilde{\varsigma})^{-1}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — *из* $[(1.6_a)^3 \vee (1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$, $v = \tilde{v}$.

Доказательство. I. Рассмотрим случай $D > 0$. По лемме 2.1, п. $1_2$ при $\tilde{\beta} \neq 0$ система $(1.5)^3$, полученная из $(1.1^<)$ заменой $J_1^2$, всегда сводится к $NSF_1^{6,2,<,>}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ с $\tilde{\sigma} = \mathrm{sign}\lambda_2$, $\tilde{u} = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, $v = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2} > 1/4$ (см. [4, прил. 3.6.2, с. 148]). А эта $NSF_1^{6,2,<,>}$ по утверждению 2.1, п. 4 может быть сведена к одной из трех предшествующих $NSF^{m,2,<,>}$ из списка 2.1.

Остается уточнить ограничения, гарантирующие сведение к $CF^{m,2,<,>}$.

$4_a$) При $\tilde{u} = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \Leftrightarrow \nu = 0$ получена $CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ с $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = (2v^{1/2} - 1)(2v^{1/2} + 1)^{-1} = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - |\tilde{\beta}|)(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + |\tilde{\beta}|)^{-1}$. При этом $0 < u < 1$, и ограничений нет, так как $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ согласно утверждению 2.1, п. 1 сводится к $SF_8^{4,2}$ только при $u = 1$.

$4_b$) При $\tilde{u} \neq -1, [3 \vee 1/3]$, $v = [\,\psi_1^2(\tilde{u}) \vee \psi_2(\tilde{u})\,]$ получена $CF_7^{5,2,<,>}$ с $\sigma = [\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,\tilde{u}]$ ($\tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,\tilde{u} = \mathrm{sign}\,\lambda_1$), $u = [\tilde{u} \vee \tilde{u}^{-1}]$. При этом $u \neq -1, 3$, и ограничений нет, так как $NSF_7^{5,2,<,>}$ согласно 2.1, п. 2 сводится к предшествующим формам только при $u = -1, 3$.

$4_c$) При $\tilde{u} \neq -1 \Leftrightarrow \nu \neq 0$, $v = \psi_3(\tilde{u})$ получена $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ с $\sigma = \tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}(\tilde{u} + 1) = \mathrm{sign}\,\nu$, $u = -\tilde{u}(\tilde{u} + 1)^{-2} = -\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$. Кроме того, $\tilde{u} \neq (-4 \pm \sqrt{7})/3$, иначе $u = 3/2$, $\tilde{u} \neq -3/2, -2/3$, иначе $u = 6$, $\tilde{u} \neq (-5 \pm \sqrt{13})/6$, $(-5 \mp \sqrt{13})/2$, иначе $u = 4 \mp \sqrt{13}$, так как $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ по утверждению 2.1, п. 3 при таких $u$ сводится к предшествующим формам.

II. Рассмотрим случай $D = 0$. По лемме 2.1, п. $2_1$ при $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0]$ система $(1.6)^3$, полученная из $(1.1^<)$ заменой $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, всегда сводится к $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}(\tilde\sigma, 1, \tilde v)$ с $\tilde\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $\tilde v = \tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1}$ (см. [4, прил. 3.6.3, с. 152]). А эта $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}$ согласно утверждению 2.1, п. 6 может быть сведена к одной из трех предшествующих ей $CF^{m,2,<,=}$ из списка 2.1.

В частности, в п. $6_c$ при $|\tilde v| \geq 1$ и, дополнительно, $|\tilde v| \neq 2/\sqrt{3}, 7/\sqrt{3}$ получена $CF^{6,2,<,=}_3$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $v = \psi_4(\tilde v)$, так как $\tilde v = -2/\sqrt{3} \Leftrightarrow v = 1$ и $v = 1/3$ при $\tilde v = 2/\sqrt{3}$, $v = (49 \pm 7\sqrt{46})/6$ при $\tilde v = \mp 7/\sqrt{3}$, а $NSF^{6,2,<,=}_3$ согласно утверждению 2.1, п. 5 сводится к предшествующим формам только при таких значениях $v$.

Остальные результаты теоремы в достаточной степени очевидны. $\square$

**3. Случай $D < 0$.** Будем предполагать теперь, что в системе $(1.1^<)$ матрица $H$ имеет комплексно сопряженные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2$.

**Набор 3.1.** Константы, интервалы и замены, используемые далее в разделе 3:
$\psi_5 = 4\hat v^6(\hat u - 1)^2 + 4\hat v^3(2\hat u + 1) + 1$, $\psi_6 = \hat v^3(1 - \hat u) - 1 + \psi_5^{1/2}$; $\psi_7^\pm = (v^3 - 2 \pm 2(1 - v^3)^{1/2})v^{-2}$;
$\psi_8 = \tilde\gamma\nu + \tilde\beta\mu$, $\psi_9 = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (9\tilde\alpha\tilde\gamma - 8\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{10} = 2\tilde\gamma\nu - \tilde\beta\mu$,
$\psi_{11} = \tilde\gamma^3\nu^3 + 3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2 + 2\tilde\alpha\tilde\gamma - 2\tilde\beta^2)\nu\mu^2 + \tilde\beta(4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma + 3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\underline{\theta_1} \in \mathbb{R}^1$ — нуль $\psi_{11}(\nu, 1)$,
$\psi_{12} = \tilde\gamma^2\nu^2 - 4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (4\tilde\beta^2 + 9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13} = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu - (3\tilde\alpha\tilde\gamma - 4\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{14}^\pm = -\tilde\beta \pm \sqrt{3}\varsigma$,
$\psi_{15}^\pm = 2\varsigma \pm \sqrt{3}\tilde\beta$, $\psi_{16} = 4\tilde\alpha\tilde\gamma - 3\tilde\beta^2$, $\psi_{17} = \tilde v^2 - 3\tilde v + 9$, $\psi_{18} = 4\tilde v^2 - 3\tilde v + 9 + (4\tilde v + 3)\psi_{17}^{1/2}$,
$\psi_{19} = -(\tilde v^6 + 6\tilde v^{9/2} + 13\tilde v^3 + 12\tilde v^{3/2} + 4)(\tilde v^6 - 5\tilde v^3 + 4)^{-1}$, $\psi_{20}^\mp = \tilde u(3\tilde u \mp \sqrt{3})(2 \mp \sqrt{3}\tilde u)^{-1}$,
$\psi_{21} = (\tilde v - 3 + (\tilde v^2 - 3\tilde v + 9)^{1/2})^2(3\tilde v)^{-1}$; $\psi_{22} = \tilde v^2\tilde w^2 - 5\tilde v^4\tilde w + 2\tilde v\tilde w + 4\tilde v^6 + 4\tilde v^3 + 1$,
$\psi_{23} = 2\tilde v\tilde w - 5\tilde v^3 + 2 + 2\psi_{22}^{1/2}$, $\psi_{24} = \tilde v^3 - \tilde u\tilde v^2 + \tilde u^2\tilde v - 3$, $\underline{\theta_2(u)} > 0$ — нуль $\psi_{24}(u, \theta)$,
$\psi_{25}^\pm = (\tilde v^2 \pm (12\tilde v - 3\tilde v^4)^{1/2})(2\tilde v)^{-1}$, $\psi_{26} = 2\tilde v^3 + \tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 9$, $\underline{\theta_3(u)} \in \mathbb{R}^1$ — $\forall$ нуль $\psi_{26}(u, \theta)$,
$\psi_{27} = 4\tilde v^2\tilde w^2 - 4\tilde v\tilde w(2\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 - 2) + (\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)^2$, $\psi_{28} = 2\tilde v\tilde w - 2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2}$,
$\psi_{29} = \tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 1$, $\psi_{30} = \theta_3^2(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))^2\psi_{29}^{-1}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(8\theta_3^3(\tilde u) - 5\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u)) - 32)^{-1}$,
$\psi_{31} = -\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(3\tilde w + 4\tilde u^2 + 2\theta_3(\tilde u)\tilde u - 2\theta_3^2(\tilde u))(\theta_3(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))\tilde w)^{-1}$,
$\psi_{32} = 3(\tilde u^3 - 3\tilde u^2 + 6\tilde u + 1)(\tilde u^2 - \tilde u + 1)((\tilde u - 2)(2\tilde u - 1)(\tilde u + 1))^{-1}$,
$\psi_{33} = 3(\tilde u\tilde v^6 - 2\tilde u^2\tilde v^5 + (4\tilde u^3 - 1)\tilde v^4 - \tilde u(4\tilde u^3 + 1)\tilde v^3 + \tilde u^2(\tilde u^3 - 6)\tilde v^2 + (6\tilde u^3 + 2)\tilde v + 5\tilde u)(\tilde v(2\tilde u - \tilde v)\psi_{24})^{-1}$, $\psi_{34} = (\tilde v^4 - \tilde u\tilde v^3 + 3\tilde u^2\tilde v^2 - \tilde u^3\tilde v - 2\tilde v - 5\tilde u)\psi_{29}^{-1}$,
$\psi_{35} = (2\tilde u - \theta_2(\tilde u))(3\theta_2(\tilde u)\tilde u^3 - 3\theta_2^2(\tilde u)\tilde u^2 + \theta_2^3(\tilde u)\tilde u - \tilde u + \theta_2^4(\tilde u) - 4\theta_2(\tilde u))$,
$\psi_{36} = -(3\psi_{26}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))\tilde w + 2(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))(3\theta_3(\tilde u)\tilde u^3 - 6\theta_3^2(\tilde u)\tilde u^2 + 5(\theta_3^3(\tilde u) - 1)\tilde u + 2\theta_3^4(\tilde u) - 11\theta_3(\tilde u)))((8\theta_3^3(\tilde u) - 5\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u)) - 32)\tilde w)^{-1}$;

$\hat a_1^* = ((\hat u^2\hat v^6 - 2\hat v^3(\hat v^3 - 1)\hat u + \hat v^6 + 10\hat v^3 - 2)\psi_5^{1/2} + 2\hat u^3\hat v^9 - 6\hat v^6(\hat v^3 - 1)\hat u^2 + 6\hat v^3(\hat v^3 - 1)^2\hat u - 2(\hat v^3 - 1)^3)(9\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat b_1^* = ((\hat v^3\hat u^2 - (10\hat v^3 - 4)\hat u + 9\hat v^3)\psi_5^{1/2} + 2\hat v^6\hat u^3 + \hat v^3(14\hat v^3 + 1)\hat u^2 - 2(\hat v^3 - 1)(17\hat v^3 - 2)\hat u + 9\hat v^3(2\hat v^3 + 1))(6\psi_6)^{-1}$, $\hat a_2^* = -((4\hat v^9\hat u^3 - 3\hat v^6(4\hat v^3 - 3)\hat u^2 + 6\hat v^6(2\hat v^3 + 1)\hat u - (4\hat v^3 - 1)(\hat v^3 + 2)^2)\psi_5^{1/2} + 8\hat v^12\hat u^4 - 2\hat v^9(16\hat v^3 - 13)\hat u^3 + 3\hat v^6(16\hat v^6 - 6\hat v^3 + 5)\hat u^2 - 2\hat v^3(\hat v^3 - 1)(16\hat v^6 + 37\hat v^3 - 8)\hat u + (2\hat v^3 + 1)(4\hat v^3 - 1)(\hat v^3 + 2)^2)(54\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat c_2^* = ((9\hat v^6\hat u^2 - 2\hat v^3(5\hat v^3 - 8)\hat u + (\hat v^3 + 2)^2)\psi_5^{1/2} - 18\hat v^9\hat u^3 + \hat v^6(34\hat v^3 - 49)\hat u^2 - 2\hat v^3(7\hat v^6 - 5\hat v^3 + 16)\hat u - (2\hat v^3 + 1)(\hat v^3 + 2)^2)(6\hat v^3\psi_6)^{-1}$;

$\tilde a_1^* = (\tilde v^3 - 4)(\tilde u + \tilde v)((2\tilde v\tilde w - 2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2)\psi_{27} - 4\tilde v^2\tilde w^2 - 4\tilde v(-2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2)\tilde w - 2\tilde v^6 + 7\tilde u\tilde v^5 - 7\tilde u^2\tilde v^4 + 8\tilde u\tilde v^2 - 8\tilde u^2\tilde v - 4)(2\tilde v)^{-1}\psi_{28}^{-2}$, $\tilde b_1^* = (\tilde v^3 - 4)((\tilde v\tilde w - \tilde u\tilde v^2 + \tilde u^2\tilde v + 1)\psi_{27} - 2\tilde v^2\tilde w^2 + \tilde v(3\tilde v^3 - 5\tilde u\tilde v^2 + 2\tilde u^2\tilde v - 4)\tilde w + (\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)(\tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 1))\tilde v^{-2}(2\tilde v - 4\tilde u)^{-1}\psi_{28}^{-1}$,
$\tilde a_2^* = (\tilde v - 2\tilde u)(\tilde v^3 - 4)((4\tilde v\tilde w^2 - (7\tilde v^3 - 12\tilde u\tilde v^2 - 4)\tilde w + (2\tilde v^3 + 1)(\tilde v - 2\tilde u)^2)\psi_{27} - 8\tilde v^2\tilde w^3 + 2\tilde v(11\tilde v^3 - 18\tilde u\tilde v^2 - 8)\tilde w^2 - (15\tilde v^6 - 55\tilde u\tilde v^5 + 52\tilde u^2\tilde v^4 - 8\tilde v^3 + 4\tilde u\tilde v^2 + 8\tilde u^2\tilde v + 8)\tilde w + (2\tilde v^3 + 1)(\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)(\tilde v - 2\tilde u)^2)\psi_{28}^{-3}/2$, $\tilde c_2^* = \psi_{28}^2(\tilde v(\tilde v - 2\tilde u)^2(4 - \tilde v^3))^{-1}\tilde a_2^*$;
$I_* = (-1, \theta_*) \cup (1/2, 2)$, где $\theta_* \approx -0.17$ — нуль $14\theta^5 - 47\theta^4 + 113\theta^3 - 103\theta^2 + 61\theta + 14$;
$I_1^+ = (-7 - \sqrt{37}, -2) \cup (-7 + \sqrt{37}, 0)$, $I_1^- = (0, 7 - \sqrt{37}) \cup (2, 7 + \sqrt{37})$, $I_2^+ = (0, 1)$,

$I_2^- = (0, 7^{2/3}13^{-1/3})$, $I_3 = (-13 \cdot 7^{-1/3}, -7^{-1/3})$, $I_4 = (-\infty, -1) \cup (5 \cdot 91^{-1/3}, +\infty)$;
$L1^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = -\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = (\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = -\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ s_2 = r_2/2\}$;
$L1^{6,2,<,<}_{6} = L1^{7,2,<,<}_{2}$ с $\nu = \theta_1\mu$;
$L1^{6,2,<,<}_{7} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = \mp 3^{1/4}(2\tilde\varsigma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$,
$s_2 = 3^{1/4}(-\sqrt{3}\tilde\beta \pm \tilde\varsigma)(2\tilde\varsigma\mu)^{-3/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = \tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1\}$;
$L\hat{1}^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = (2\hat v^3(1+\hat u) + 1 - \psi_5^{1/2})(2\hat v^3(1-\hat u) - 2 - \psi_5^{1/2})(6\hat v(4\hat v^3 - 1))^{-1}r_2$,
$s_1 = (2\hat v^3(1-\hat u) - 1 + \psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2,\ r_2 = (\hat a_2^*\hat c_2^*)^{-1/4},\ s_2 = (\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/4}/\hat c_2^*\}$;
$L1^{6,2,<,<}_{12} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2},\ r_2 = -(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$,
$s_2 = -\tilde\beta(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}\}$;
$L1^{7,2,<,<}_{2} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2},\ r_2 = -3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$,
$s_2 = (\tilde\gamma\nu - 2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1\}$;
$L2^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{r_1 = (\tilde v + \psi_{17}^{1/2})r_2/3,\ s_1 = (\tilde v - \psi_{17}^{1/2})s_2/3,\ r_2 = 3(\psi_{17}\psi_{18}(3 - \tilde v + \psi_{17}^{1/2}))^{-1/4}$,
$s_2 = \psi_{17}^{-1/4}\psi_{18}^{1/4}(3 - \tilde v + \psi_{17}^{1/2})^{-3/4}\}$;
$L3^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{r_1 = -\tilde v^{-1/2}r_2,\ s_1 = -\tilde v^{1/4}(2 - \tilde v^{3/2} - \tilde v^3)^{1/4}(2 - 3\tilde v^{3/2} + \tilde v^3)^{-3/4}$,
$r_2 = \tilde v^{3/4}(2 - \tilde v^{3/2} - \tilde v^3)^{-1/4}(2 - 3\tilde v^{3/2} + \tilde v^3)^{-1/4},\ s_2 = \tilde v^{1/2}s_1\}$;
$L4^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{r_1 = \tilde v(\tilde v\tilde w - \tilde v^3 - 5 - \psi_{22}^{1/2})\psi_{23}^{-1}r_2,\ s_1 = (\tilde v\tilde w - \tilde v^3 + 1 - \psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$,
$r_2 = (\tilde a_2^*(\tilde\varrho)\tilde c_2^*(\tilde\varrho))^{-1/4}, s_2 = (\tilde a_2^*(\tilde\varrho)\tilde c_2^*(\tilde\varrho))^{1/4}/\tilde c_2^*(\tilde\varrho)\}$, где $(\tilde\varrho) = (-\tilde v, \tilde v, \tilde w)$;
$L2^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \mp\tilde u s_2,\ s_1 = -(2\tilde u \mp \sqrt{3})s_2,\ r_2 = -(2 \mp \sqrt{3}\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$,
$s_2 = (\tilde u^2 \mp \sqrt{3}\tilde u + 1)^{-1/2}(\pm 4\tilde u)^{-1/2}\}$;
$L3^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = (\tilde u + 2)\tilde u^{-1}r_2,\ s_1 = -r_2,\ r_2 = -\tilde u((\tilde u + 1)(\tilde u^2 + 2\tilde u + 4))^{-1/2}$,
$s_2 = 2\tilde u^{-1}r_2\}$;
$L4^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = -s_2,\ s_1 = (\tilde u + 3)s_2,\ r_2 = (\tilde u + 2)s_2,\ s_2 = ((-\tilde u - 1)(\tilde u^2 + 5\tilde u + 7))^{-1}\}$;
$L5^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = -2^{1/3}r_2,\ s_1 = 2^{1/3}((\sqrt{5} \pm 1)/5)^{1/2},\ r_2 = \pm((\sqrt{5} \mp 1)/5)^{1/2}$,
$s_2 = (2(\sqrt{5} \mp 2)/5)^{1/2}\}$;
$L6^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = -7^{-1/3}r_2,\ s_1 = -3r_1,\ r_2 = 7^{1/2}(-7^{1/3}\tilde u - 1)^{-1/2}/3,\ s_2 = 0\}$;
$L7^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \tilde u r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde u) - \tilde u)s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde u)(\tilde u + \theta_2(\tilde u))^{-1}\psi_{29}^{-1}|^{1/2},\ s_2 = r_2\}$;
$L8^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \tilde v r_2/2,\ s_1 = \psi_{25}^{-}s_2,\ r_2 = -2s_2,\ s_2 = (12 - 3\tilde v^3)^{-1/2}\}$;
$L9^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = (4 - \tilde v^3)^{-1/2}(\mp(\tilde v^{-1}\psi_{25}^{\mp} + 1))^{-1/2},\ s_2 = r_2\}$;
$L2^{6,2,<,<}_{6} = \{r_1 = -(\tilde u^2 + 3)(2\tilde u)^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde u s_2,\ r_2 = (2\tilde u)^{4/3}(\tilde u^2 + 9)^{-2/3}s_2$,
$s_2 = (-\tilde u^2 + 3)^{1/2}(\tilde u^2 + 1)^{-1}|2\tilde u|^{-1/2}\}$;
$L3^{6,2,<,<}_{6} = \{r_1 = -(\tilde u^2 - 2\tilde u + 3)(2\tilde u - 1)^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde u s_2,\ r_2 = (2\tilde u - 1)^{4/3}(\tilde u^2 - \tilde u + 7)^{-2/3}s_2$,
$s_2 = |(\tilde u - 2)(\tilde u + 1)|^{1/2}|2\tilde u - 1|^{-1/2}(\tilde u^2 - \tilde u + 1)^{-1}\}$;
$L4^{6,2,<,<}_{6} = \{r_1 = -(2\tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 3)(\tilde v(\tilde v - 2\tilde u))^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde u s_2$,
$r_2 = \tilde v^{2/3}(\tilde v - 2\tilde u)^{4/3}\psi_{26}^{-2/3}s_2,\ s_2 = -\tilde v^{1/2}|\psi_{24}|^{1/2}\psi_{29}^{-1}|\tilde v - 2\tilde u|^{-1/2}\}$;
$L2^{6,2,<,<}_{7} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = 3^{1/4}\tilde v^{1/4}(4 - \tilde v^3)^{-1/4}(-\tilde w)^{-1/2},\ s_2 = r_2\}$;
$L3^{6,2,<,<}_{7} = \{r_1 = \tilde u r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde u) - \tilde u)s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde u)(2\tilde u - \theta_2(\tilde u))\psi_{29}^{-1}(\tilde u, \theta_2(\tilde u))\tilde w^{-1}|^{1/2}$,
$s_2 = r_2\}$;
$L2^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = (2\tilde v^2\tilde w - \tilde v^4 + \tilde u\tilde v^3 - 2\tilde v + 8\tilde u - \tilde v\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2,\ r_2 = (\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/4}$,
$s_1 = (2\tilde v\tilde w - \tilde v^3 + \tilde u\tilde v^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2})(2\tilde v(\tilde v - 2\tilde u))^{-1}s_2,\ s_2 = (\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{1/4}/\tilde c_2^*\}$;
$L3^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = \tilde v r_2/2,\ s_1 = (\tilde w r_2)^{-1},\ r_2 = \sqrt{2}\tilde v^{1/4}(-\tilde w)^{-1/2}(4 - \tilde v^3)^{-1/4},\ s_2 = 0\}$;
$L4^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = \tilde u r_2,\ s_1 = (2\theta_3(\tilde u) - \tilde u)s_2/3,\ r_2 = \sqrt{2}\psi_{30}^{1/4}(-\tilde w)^{-1/2}$,
$s_2 = -3\sqrt{2}\psi_{30}^{3/4}\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(\theta_3(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u)))^{-1}(-\tilde w)^{-1/2}\}$;
также будут использоваться константы и замены, собранные в наборе $(1.1)^3$.

Из системы $(1.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$ при $D<0$ $(p_2q_1<0,\ \nu^2+\mu^2=\delta_{pq},\ \mu>0)$ заменой $J_3^2$ получена система $(1.7)^3$, в которой согласно $(2.18)^1$ и $(2.19)^1$ имеем $\tilde\alpha,\tilde\gamma,\tilde\varsigma>0$.

Осуществим разбиение элементов $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma,\nu,\mu$ системы $(1.7)^3$ на непересекающиеся множества, в каждом из которых $(1.7)^3$ сводится к определенной форме из списка 1.1.

**Лемма 3.1.** *Система* $(1.7)^3$ *сводится:*
$1_1$) *при* $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta=0$ *заменой* $L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *к* $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *с* $\sigma=1,\ u=\tilde\gamma^2\tilde\varsigma^{-2}$;
$1_2$) *при* $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma=1,\ u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}$;
$2_1$) *при* $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta=0$ *имеем случай* $1_1$;
$2_2^a$) *при* $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$ *заменой* $L1^{5,2,<,<}_{22}$ *к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=-(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2}$;
$2_2^b$) *при* $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{12}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{12}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$;
3) *при* $\nu=\theta_1\mu$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{6}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, *где* $(\cdot)=(\theta_*\mu,\mu)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
$4_1$) *при* $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}=0\ (\tilde\beta\neq0)$ *имеем случай* $2_2^a$;
$4_2$) *при* $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\neq0$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{7}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{7}$ *с* $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$;
5) *при* $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$ *заменой* $L1^{7,2,<,<}_{2}$ *к* $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq}$.

Доказательство. Любая замена $(2.2)^1$ $L=(r_1,s_1;\,r_2,s_2)$ $(\det L\neq0)$ с

$$r_1=0,\quad s_2=(\tilde\gamma\nu-2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1\quad(s_1,r_2\neq0),\tag{3.1}$$

сводит $(1.7)^3$ к системе

$$\begin{pmatrix}\hat a_1&\hat b_1&\hat c_1&\hat d_1\\ \hat a_2&0&\hat c_2&\hat d_2\end{pmatrix},\tag{3.2}$$

у которой, в частности, $\hat a_2=-\tilde\gamma\mu r_1^3s_1^{-1}\neq0$, $\hat d_2=2(\tilde\gamma\mu)^{-2}\psi_8\psi_9s_1^2/27$.

В выражении для $\hat d_2$ однородный многочлен удовлетворяет неравенству $\psi_9(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(9\tilde\alpha\tilde\gamma-8\tilde\beta^2)\mu^2>0$, так как имеет нули $\nu_{1,2}=(-\tilde\beta\pm3\varsigma\mathrm{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$. Поэтому $\hat d_2=0\Leftrightarrow\psi_8=\tilde\gamma\nu+\tilde\beta\mu=0$.

1) $\psi_8=0\Leftrightarrow\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$. При $s_1=-\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=\tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2}$, $s_2=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1$ замена $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$ сводит систему (3.2) к следующему виду: $\begin{pmatrix}-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}&-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}&-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}&-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

$1_1$) $\tilde\beta=0\Rightarrow\nu=0$. При $s_1=-\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$ замена $L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$ с учетом (3.1) приводит к $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ с $\sigma=1$, $u=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\gamma\ (=D/4<0)$.

$1_2$) $\tilde\beta\neq0$, тогда получена $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ с $\sigma=1$, $u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}<0$.

2) $\psi_8=\tilde\beta\mu+\tilde\gamma\nu\neq0$. При $s_1=3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2}$, $r_2=-3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$ замена $L_2^{7,2,<,<}$ с учетом (3.1) позволяет записать систему (3.2) в виде

$$\hat\sigma\begin{pmatrix}2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}&-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq}&3(\psi_8\psi_9)^{-1}\psi_{11}&-(2\psi_8)^{-4/3}\psi_9^{-1/3}\psi_{12}\\1&0&-3(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\psi_{13}&1\end{pmatrix},\tag{3.3}$$

где $\hat\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, однородные многочлены $\psi_{10}(\nu,\mu) = 2\tilde\gamma\nu - \tilde\beta\mu$, $\psi_{11}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^3\nu^3 + 3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2+2\tilde\alpha\tilde\gamma-2\tilde\beta^2)\nu\mu^2+\tilde\beta(4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\psi_{12}(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2-4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(4\tilde\beta^2+9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13}(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu-(3\tilde\alpha\tilde\gamma-4\tilde\beta^2)\mu^2$. При этом имеем $\psi_{11}'(\nu,1)=\tilde\gamma(\tilde\gamma^2(\nu^2+1)+2(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\beta^2)>0$, поэтому $\theta_1$ — единственный вещественный нуль $\psi_{11}(\nu,1)$; $\psi_{12}(\nu,\mu)>0$, поскольку имеет нули $\nu_{1,2}=(2\tilde\beta\pm3\tilde\gamma\mathrm{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$; $\psi_{13}(\nu,\mu)$ имеет нули $\nu_{1,2}=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi_{14}^{\pm}=-\tilde\beta\pm\sqrt3\tilde\varsigma$.

$2_1$) $\hat a_1=0\Leftrightarrow\psi_{10}=0\Leftrightarrow\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$.

$2_1^1$) $\tilde\beta=0$, тогда $\psi_{10}=0\Leftrightarrow\psi_8=0$ $(\nu=0)$ и попадаем в случай $1_1$.

$2_1^2$) $\tilde\beta\ne0$. При $s_1=2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}$, $r_2=-(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$ $(4\tilde\alpha\tilde\gamma-3\tilde\beta^2>0)$ замена $L1_{12}^{6,2,<,<}$ с учетом (3.1) приводит систему (3.3) к виду

$$\operatorname{sign}\tilde\beta\begin{pmatrix}0 & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & (\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1} & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-4/3}\psi_{16}^{-1/3}\\ 1 & 0 & (4\tilde\alpha\tilde\gamma-7\tilde\beta^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & 1\end{pmatrix}.$$

$2_1^{2a}$) $\hat c_2=0\Leftrightarrow\tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$. При $s_1=\tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=-\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$ имеем замену $L1_{22}^{5,2,<,<}$ с учетом (3.1) и получаем $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=-(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2}<-1/4$.

$2_1^{2b}$) $4\tilde\alpha\tilde\gamma-7\tilde\beta^2\ne0$, тогда получаем $NSF_{12}^{6,2,<,<}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$.

$2_2$) $\hat c_1=0\Leftrightarrow\psi_{11}=0\Leftrightarrow\nu=\theta_1\mu$, где $\theta_1\in\mathbb R^1$ — $\forall$ нуль $\psi_{11}(\nu,1)$. Тогда система (3.3) при $\nu=\theta_1\mu$ — это $NSF_6^{6,2,<,<}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}(\cdot)^{-1/3}$, $(\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)$, так как $v\ne1$ и $\psi_{10}(\cdot)$, $\psi_{12}(\cdot)\ne0$. А приводящая к $NSF_6^{6,2,<,<}$ замена $L1_6^{6,2,<,<}$ — это $L_2^{7,2,<,<}$ с $\nu=\theta_1\mu$.

$2_3$) $\hat c_2=0\Leftrightarrow\psi_{13}=0\Leftrightarrow\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$. Система (3.3) при $s_1=3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=\mp3^{1/4}(2\tilde\varsigma\mu)^{-1/2}$ с помощью замены $L1_7^{6,2,<,<}$ с учетом (3.1) принимает вид

$$\pm\begin{pmatrix}\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1} & -3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2} & 3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2} & -((\tilde\varsigma\mp\sqrt3\tilde\beta)^2+3\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$2_3^1$) $\hat a_1=0\Leftrightarrow\psi_{15}^{\mp}=0$ $(\tilde\beta\ne0)\Leftrightarrow\{\operatorname{sign}\tilde\beta=\pm1,\ \tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}\}\Rightarrow$ попадаем в $2_1^{2a}$).

$2_3^2$) $\psi_{15}^{\mp}\ne0\Rightarrow$ получена $NSF_7^{6,2,<,<}$ с $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$.

$2_4$) $\hat a_1,\hat c_1,\hat c_2\ne0\Leftrightarrow\psi_{10},\psi_{11},\psi_{13}\ne0$, тогда (3.3) — это $NSF_2^{7,2,<,<}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)<0$, $v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}>0$. $\square$

В списке 1.1 имеются четыре $NSF^{m,2,<}$, у которых $D$ может быть отрицателен. Покажем, что все они не являются $CF^{m,2,<}$ (см. [2, определение 1.10]).

**Утверждение 3.1.** *$NSF_{12}^{6,2,<,<}$, $NSF_{13}^{6,2,<,<}$, $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ при всех допустимых значениях параметров заменами $(2.2)^1$ сводятся к предшествующей согласно СП $SF_{11}^{6,2}$, а $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$.*

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения подтверждены символьными вычислениями в [4, прил. 3.6.4, с. 155].

1) Любая замена $(2.2)^1$ с $\hat u=-(\hat vs_1+s_2)(s_1-2\hat v^2s_2)(\hat v^2(2\hat vs_1-s_2)s_2)^{-1}$ и $r_1=(s_1-2\hat v^2s_2)(2\hat vs_1-s_2)^{-1}r_2$ сводит $NSF_{12}^{6,2,<,<}(\hat\sigma,\hat u,\hat v)$ именно к $SF_{11}^{6,2}$ при $(\hat u,\hat v)\in ps_{12}^{6,2,<,<}=\{\hat v>4^{-1/3},\ \hat v\ne1,\ 4\hat u>\hat v^{-3}\}$, причем $\delta_{rs}\ne0$.

Равенство для $\hat u$ является квадратным уравнением относительно $s_1$ и имеет корни $s_1^{\pm}=(2\hat v^3(1-\hat u)-1\pm\psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2\in\mathbb R^1$, так как дискриминант $\psi_5(\hat u)=4\hat v^6\hat u^2-8\hat v^3(\hat v^3-1)\hat u+(2\hat v^3+1)^2$ отрицателен. Кроме того, $\psi_6=\hat v^3(1-\hat u)-1+\psi_5^{1/2}\ne0\,(\Leftrightarrow\delta_{rs}\ne0)$.

В результате замена, в которой, например, $r_1=(2\hat v^3(1+\hat u)+1-\psi_5^{1/2})(2\hat v^3(1-\hat u)-2-\psi_5^{1/2})(6\hat v(4\hat v^3-1))^{-1}r_2$, $s_1=(2\hat v^3(1-\hat u)-1+\psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2$, сводит $NSF_{12}^{6,2,<,<}$

к $SF_{11}^{6,2} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^* r_2^2 & \hat{b}_1^* r_2 s_2 & \hat{c}_1^* s_2^2 & \hat{d}_1^* r_1^{-1} s_2^3 \\ \hat{a}_2^* r_2^3 s_2^{-1} & 0 & \hat{c}_2^* r_2 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь при $r_2 = (\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{-1/4}$, $s_2 = (\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/4}/\hat{c}_2^*$ с помощью замены $L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<}$ получаем $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \hat{\sigma}$, $u = \hat{a}_1^*(\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/2}$, $v = \hat{b}_1^*/\hat{c}_2^*$.

Здесь следует иметь в виду, что в силу инвариантности степени общего множителя $l$ и знаков дискриминантов $D_0, D$ ($l = 2$, $D_0, D < 0$) должны выполняться трудно проверяемые из-за объема формул соотношения $\hat{a}_2^*\hat{c}_2^* > 0$, $\hat{c}_1^* = \hat{a}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$, $\hat{d}_1^* = \hat{b}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$.

2) Любая замена $(2.2)^1$ с $s_1 = (v(u+v+1) + \varrho^{1/2})(2v-4u)^{-1}s_2$, $r_2 = (3uv + v + \varrho^{1/2})(8u - 3v + 9uv - 3v^2 - \varrho^{1/2})(2uv(3v+4)(3v+2)(2u-v))^{-1}r_1$, где $\varrho(u) = 9v^2u^2 - 2v(9v^2+15v+8)u + 9v^2(1+v)^2$, сводит $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\varrho(u) > 0$, так как $ps_{13}^{6,2,<,<} = \{v < -4/3,\ 4u > (u+v+1)^2\}$, а значит, дискриминант $27v^3+72v^2+60v+16$ многочлена $\varrho$, имея нули $-4/3, -2/3, -2/3$, отрицателен.

3) Любая замена $(2.2)^1$ с $s_1 = (v - v^2 - 2u + \varrho^{1/2})(2v)^{-1}s_2$, $r_2 = (2u - v - \varrho^{1/2})(2u + 3v - 3v^2 + \varrho^{1/2})(2uv^2(3v-4))^{-1}r_1$, где $\varrho(u) = 4u^2 - 4uv + 9v^2(v-1)^2$, сводит $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\varrho(u) > 0$, так как $ps_{15}^{6,2,<,<} = \{v \notin [0, 4/3],\ 4u < -(v-1)^2\}$, а значит, дискриминант $-(9v^2 - 18v + 8)$ многочлена $\varrho$ при $v \notin [2/3, /4/3]$ отрицателен.

4) Любая замена $(2.2)^1$ с $s_1 = -(u + v + ((u+v)^2 - u)^{1/2})s_2$, $r_1 = -(u + v - ((u+v)^2 - u)^{1/2})r_2$ сводит $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ к $SF_{34}^{4,2}$, поскольку $ps_{16}^{6,2,<,<} = \{v > 1/4,\ u < 0\}$. $\square$

Рассмотрим $NSF^{m,2,<,<}$ из списка 1.1. Непосредственной проверкой устанавливается, что $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ является $CF_{22}^{5,2,<,<}$, а для остальных форм $ps^{m,2,<,<} \neq cs^{m,2,<,<}$.

**Утверждение 3.2.** *Следующие формы из списка 1.1 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам:*

1) $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ *с* $ps_6^{6,2,<,<} = \{\tilde{v} \in (0,1),\ \tilde{u} \in (\psi_7^-(\tilde{v}), \psi_7^+(\tilde{v}))\}$: *a) при* $\tilde{u} = -2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5})$, $\tilde{v} = 2^{-2/3}$ *заменой* $L5_{22}^{5,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = \mp\tilde{\sigma}$, $u = -3$; *b) при* $\tilde{u} = -\tilde{v}$ *заменой* $L3_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \psi_{19}(\tilde{v})$;

2) $NSF_7^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ *с* $ps_7^{6,2,<,<} = \{\tilde{v} \neq -\tilde{u},\ 4\tilde{v} < -(\tilde{u}+1)^2)\}$:
*a) при* $\tilde{u} = -1$ *заменой* $L2_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \psi_{21}(\tilde{v})$;
*b) при* $\tilde{v} = [\,-3(\tilde{u}+1),\ \tilde{u} \in (-1, 11) \vee 3(\tilde{u}+1)(\tilde{u}+2)^{-1},\ \tilde{u} \in (-2,-1)\,]$ *заменой* $[L3_{22}^{5,2,<,<} \vee L4_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [\tilde{\sigma} \vee -\tilde{\sigma}]$, $u = [-3(\tilde{u}+1)^{-1} \vee 3((\tilde{u}+1)(\tilde{u}+2))^{-1}]$;
*c) при* $\tilde{v} = \psi_{32}(\tilde{u})$, $\tilde{u} \in I_*$, *заменой* $L3_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,(1-2\tilde{u})$, $u = -(\tilde{u}^3 - 3\tilde{u}^2 + 6\tilde{u} + 1)(\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 1)^{-1}((\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 7)(2\tilde{u}-1))^{-1/3}$, $v = (2\tilde{u}-1)^{2/3}(\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 7)^{-1/3}$;

3) $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ *с* $ps_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4\tilde{v} < -\tilde{u}^2\}$:
*a) при* $\tilde{v} = \psi_{20}^{\mp}$, $\sqrt{3}\tilde{u} \in I_1^{\mp}$ *заменой* $L2_{22}^{5,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = \pm\tilde{\sigma}$, $u = \psi_{20}^{\mp}\tilde{u}^{-2}$;
*b) при* $\tilde{v} = 3(\tilde{u}^2+5)(\tilde{u}^2+1)(2(\tilde{u}^2-3))^{-1}$, $\tilde{u} \in (-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ *заменой* $L2_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = -\tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,\tilde{u}$, $u = -(\tilde{u}^2+5)\tilde{u}^{2/3}(2(\tilde{u}^2+1)(\tilde{u}^2+9))^{-1/3}$, $v = (2\tilde{u})^{2/3}(\tilde{u}^2 + 9)^{-1/3}$;

4) $NSF_2^{7,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ *с* $ps_2^{7,2,<,<} = \{\tilde{v} \in (0,1) \cup (1, \sqrt[3]{4}), \tilde{w} \neq -\tilde{u}(\tilde{v} - \tilde{v}^{-2}),\ 4\tilde{w} < -(\tilde{u}+\tilde{v})^2\}$:
*a) при* $\tilde{u} = -\tilde{v}$, *заменой* $L4_{34,+1}^{4,2,<,<}$ — *к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \tilde{b}_1^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})/\ \tilde{c}_2^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})$;
$b^1$) *при* $\tilde{v} = [7^{-1/3} \vee \theta_2(\tilde{u})]$, $\tilde{w} = [3(7^{-1/3}\tilde{u} + 7^{-2/3}) \vee (\tilde{u} + \theta_2(\tilde{u}))(\theta_2(\tilde{u}) - 2\tilde{u})]$, $\tilde{u} \in [I_3 \vee I_4]$, *заменой* $[L6_{22}^{5,2,<,<} \vee L7_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [-\tilde{\sigma} \vee \mathrm{sign}\,\tilde{u}]$, $u = [3(7^{1/3}\tilde{u}+1)^{-1} \vee (2\tilde{u} - \theta_2(\tilde{u}))(\tilde{u} + \theta_2(\tilde{u}))^{-1}]$;

$b^2$) *при* $\tilde u=[-4\tilde v\vee\psi^{\mp}_{25}]$, $\tilde w=[3\tilde v(4\tilde v+\psi^{-}_{25})/2\vee 3(\tilde v\psi^{\pm}_{25}-2\tilde v^{-1})]$, $\tilde v\in[(0,(2/7)^{2/3})\vee I_2^{\pm}]$ *заменой* $[L8^{5,2,<,<}_{22}\vee L9^{5,2,<,<}_{22}]$ *сводится к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=[-\tilde\sigma\vee\mp\tilde\sigma]$, $u=[(4+\psi^{-}_{25}\tilde v^{-1})/6\vee(4-\tilde v^3)(\tilde v^2\psi^{\pm}_{25}-2)^{-1}]$;
$c$) *при* $\tilde w=\psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$ *заменой* $L4^{6,2,<,<}_{6}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma\,\mathrm{sign}((2\tilde u-\tilde v)\psi_{24})$, $u=(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^{-1}\psi^{-1}_{26})^{1/3}\psi_{34}$, $v=-(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^2\psi^{-1}_{26})^{1/3}$;
$d$) *при* $[\tilde u=\psi^{\mp}_{25}\vee\tilde v=\theta_2(\tilde u)\neq 2^{2/3}]$ *заменой* $[L2^{6,2,<,<}_{7}\vee L3^{6,2,<,<}_{7}]$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{7}$ *с* $\sigma=[\mp\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\mathrm{sign}\,(\tilde u-2^{-1/3})]$, $u=[-(\tilde v\tilde w-3\tilde v^2\psi^{\pm}_{25}+6)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\tilde w+2\tilde u^2+\theta_2(\tilde u)\tilde u-\theta_2^2(\tilde u))\tilde w^{-1}]$, $v=[3(4-\tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w+\psi_{35})(\psi_{29}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w)^{-1}]$;
$e^1$) *при* $\psi_{27}\geq 0$, $\tilde u\neq\tilde v/2$ *заменой* $L2^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=\tilde a_1^*(\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/2}$, $v=\tilde b_1^*/\tilde c_2^*$;
$e^2$) *при* $[\tilde u=\tilde v/2\vee\tilde v=\theta_3(\tilde u)]$ *заменой* $[L3^{6,2,<,<}_{11,+1}\vee L4^{6,2,<,<}_{11,+1}]$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=[-3(4\tilde v-\tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1}\vee-\psi^{1/2}_{30}\psi_{31}]$, $v=[(4-\tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1}\vee\psi_{36}]$.

Доказательство. Рассуждения, приводимые ниже в пп. 1–3, подтверждены символьными вычислениями в [4, прил. 3.6.5, с. 161], а в п. 4 — в [4, прил. 3.6.6, с. 172].

1) $NSF^{6,2,<,<}_{6}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в случае a) заменой с $r_1=-2^{1/3}r_2$, $s_1=2^{-2/3}(3\pm\sqrt5)s_2$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$, в b) заменой с $r_1=-\tilde v^{-1/2}r_2$, $s_2=\tilde v^{1/2}s_1$ сводится к $SF^{4,2}_{34}$;

2) $NSF^{6,2,<,<}_{7}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $r_1=(\tilde v\pm\psi^{1/2}_{17})r_2/3$, $s_1=(\tilde v\mp\psi^{1/2}_{17})s_2/3$ сводится к $SF^{4,2}_{34}$, в b) заменой с $r_1=[\,(\tilde u+2)\tilde u^{-1}r_2\vee-(\tilde u+2)^{-1}r_2\,]$, $s_1=[\,-\tilde u s_2/2\vee(\tilde u+3)s_2\,]$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$, в c) заменой с $r_1=-(\tilde u^2-2\tilde u+3)(2\tilde u-1)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde u s_2$ сводится к $SF^{6,2}_{6}$;

3) $NSF^{6,2,<}_{11,+1}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $s_1=-(2\tilde u\mp\sqrt3)s_2$, $r_2=-(2\mp\sqrt3\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$, в b) заменой с $r_1=-(\tilde u^2+3)(2\tilde u)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde u s_2$ сводится к $SF^{6,2}_{6}$.

4) Подробнее рассмотрим получение предшествующих форм из
$$NSF^{7,2,<,<}_{2}=\tilde\sigma\begin{pmatrix}\tilde u & \tilde w & \tilde u\tilde v^{-1}-\tilde v(\tilde u\tilde v+\tilde w) & \tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\\ 1 & 0 & \tilde v^{-1}-\tilde v^2 & 1\end{pmatrix}\quad(\tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\neq 0).$$

$a$) При $\tilde u=-\tilde v$, $\tilde w=(3\tilde v^2s_1^2+2(\tilde v^3-1)s_1s_2-\tilde v(\tilde v^3+2)s_2^2)(\tilde v s_2(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}$ $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ любой заменой $(2.2)^1$ с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF^{4,2}_{34}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно $s_1$ и имеет вещественные корни $s_1^{\pm}=(\tilde v\tilde w-\tilde v^3+1\pm\psi^{1/2}_{22})\tilde v^{-2}s_2/3$, поскольку $\psi_{22}=(\tilde v\tilde w+1)^2+\tilde v^3(4\tilde v^3-5\tilde v\tilde w+4)>0$, так как $\tilde w<0$. Кроме того, $\psi_{23}\neq 0\Leftrightarrow 2s_1-\tilde v s_2\neq 0$.

Замена с $r_1=\tilde v(\tilde w\tilde v-\tilde v^3-5-\psi^{1/2}_{22})\psi^{-1}_{23}r_2$, $s_1=(\tilde w\tilde v-\tilde v^3+1-\psi^{1/2}_{22})\tilde v^{-2}s_2/3$ сводит
$$NSF^{7,2,<,<}_{2}\text{ к }SF^{4,2}_{34}=\begin{pmatrix}0 & \tilde b_1^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2 & 0 & \tilde d_1^*r_1^{-1}s_2^3\\ \tilde a_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2^3s_2^{-1} & 0 & \tilde c_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2 & 0\end{pmatrix}.$$
Выбор нормировки и связанные с ней вопросы приведены в утверждении 3.1, п. 1.

В $b^1$) $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ заменой с $r_1=[-7^{-1/3}r_2\vee\tilde u r_2]$, $[s_2=0\vee s_1=(\theta_2(\tilde u)-\tilde u)s_2]$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$.

В $b^2$) $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ заменой с $r_1=[\tilde v r_2/2\vee\psi^{\mp}_{25}r_2]$, $s_1=[\psi^{-}_{25}s_2\vee\psi^{\pm}_{25}s_2]$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$; случай $\tilde u=-4\tilde v$, $\tilde w=3\tilde v(4\tilde v+\psi^{+}_{25})/2$ невозможен, так как в нем $D>0$.

В $c$) $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ заменой с $r_1=-(2\tilde u\tilde v^2-\tilde u^2\tilde v-3)(\tilde v(\tilde v-2\tilde u))^{-1}r_2$, $s_1=\tilde u s_2$ сводится к $SF^{6,2}_{6}$. При этом $\psi_{26}\neq 0$, так как является нормировочным множителем.

В $d$) $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ заменой с $r_1=[\psi^{\mp}_{25}r_2\vee\tilde u r_2]$, $s_1=[\psi^{\pm}_{25}s_2\vee(\theta_2(\tilde u)-\tilde u)s_2]$ сводится к $SF^{6,2}_{7}$; если $2\tilde u=\theta_2(\tilde u)\Leftrightarrow\tilde u=2^{-1/3}$, то $\delta_{rs}=0$, при этом $\mathrm{sign}\,(\tilde u-2^{-1/3})=\mathrm{sign}\,((2\tilde u-\theta_2(\tilde u))\psi^{-1}_{29}(\tilde u,\theta_2(\tilde u)))$.

$e^1$) При $\tilde w=(\tilde v(\tilde v-2\tilde u)s_1^2+(\tilde v^3-\tilde u\tilde v^2-2)s_1s_2+\tilde v(\tilde u\tilde v^2-2)s_2^2)(\tilde v s_2(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}$ $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ любой заменой $(2.2)^1$ с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF^{6,2}_{11}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно $s_1$ и имеет вещественные корни $s_1^{\pm} = (2\tilde{v}\tilde{w} - \tilde{v}^3 + \tilde{u}\tilde{v}^2 + 2 \pm \psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v} - 2\tilde{u}))^{-1}s_2$ при $\psi_{27} \geq 0$ и $\tilde{u} \neq \tilde{v}/2$. Кроме того, $\psi_{28} \neq 0 \Leftrightarrow 2s_1 - \tilde{v}s_2 \neq 0$. В результате замена, например, с $r_1 = (2\tilde{v}^2\tilde{w} - \tilde{v}^4 + \tilde{u}\tilde{v}^3 - 2\tilde{v} + 8\tilde{u} - \tilde{v}\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2$, $s_1 = (2\tilde{v}\tilde{w} - \tilde{v}^3 + \tilde{u}\tilde{v}^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v} - 2\tilde{u}))^{-1}s_2$ сводит $NSF_2^{7,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^* r_2^2 & \tilde{b}_1^* r_2 s_2 & \tilde{c}_1^* s_2^2 & \tilde{d}_1^* r_1^{-1} s_2^3 \\ \tilde{a}_2^* r_2^3 s_2^{-1} & 0 & \tilde{c}_2^* r_2 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. И далее, как в утверждении 3.1, п. 1.

В $e^2$) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1 = [\tilde{v}r_2/2 \vee \tilde{u}r_2]$, $[s_2 = 0 \vee s_1 = (2\theta_3(\tilde{u}) - \tilde{u})s_2/3]$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\psi_{30} > 0$, так как является нормировочным множителем.

Наконец, $NSF_2^{7,2,<,<}$ может сводиться к предшествующим $NSF_i^{6,2,<,<}$ $(i = \overline{12,16})$ из списка 1.1, а те, в свою очередь, сводятся к $SF_{11}^{6,2}$ или $SF_{34}^{4,2}$ (см. утверждение 3.1). Но все «прямые» замены к $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ и $NSF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ уже найдены выше. $\square$

Полученные результаты позволяют в случае $l = 2$, $D_0 < 0$, $D < 0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

**Список 3.1.** Шесть $CF_i^{m,2,<,<}$ и их $cs_i^{m,2,<,<}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad CF_{22}^{5,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$CF_6^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2} - v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad CF_7^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u + v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$CF_{11,+1}^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad CF_2^{7,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv + w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix};$$

$cs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{u < 0\}$, $\quad cs_{22}^{5,2,<,<} = \{u < -1/4\}$,
$cs_6^{6,2,<,<} = \{v \in (0,1),\ u \in (\psi_7^-(v), \psi_7^+(v)),\ u \neq -v,\ (u,v) \neq (-2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\}$,
$cs_7^{6,2,<,<} = \{4v < -(u+1)^2,\ u \neq -1,\ v \neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\}$,
$cs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4v < -u^2,\ v \neq \psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\}$,
$cs_2^{7,2,<,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1, -u, 2u, \theta_3(u),\ \ w \neq -uv, -u(v - v^{-2}), \psi_{33}(u,v),\ \ 4w < -(u+v)^2,\ \psi_{27}(u,v,w) < 0,\ (u,w) \neq ([-4v \vee \psi_{25}^{\mp}(v)],\ [3v(4v + \psi_{25}^{-}(v))/2 \vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v) - 2v^{-1})]),\ (v,w) \neq ([7^{-1/3} \vee \theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u + 7^{-2/3}) \vee (u + \theta_2(u))(\theta_2(u) - 2u)])\}$.

**Теорема 3.1.** *Любая система* $(2.1)^1$ *с* $l = 2$, *записанная в виде* $(1.1^<)$ *согласно* $(2.15)^1$ *и имеющая* $D < 0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 3.1. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,<,<}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(1.1^<)$; *b) замены* $(2.2)^1$, *преобразующие правую часть системы* $(1.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму; c) получаемые при этом значения* $\sigma$ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,<}$ :

*A.* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$: $1_a$) $\nu = 0$, $\tilde{\beta} = 0$, $1_b$) $J_3^2$, $L1_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $1_c$) $\sigma = 1$, $u = \tilde{\gamma}^2\tilde{\varsigma}^{-2}$;
$2_a$) $\nu = \theta_1\mu$, $\psi_8^2(\cdot)\psi_9(\cdot)) = 2\psi_{10}^2(\cdot)\psi_{12}(\cdot)$, *где* $(\cdot) = (\theta_1\mu, \mu)$, $2_b$) $J_3^2, L1_6^{6,2,<,<}, L3_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $2_c$) $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = \psi_{19}(\tilde{v})$, *где* $\tilde{v} = -(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
$3_a$) $\nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\psi_{15}^{\mp} = -\tilde{\varsigma}$, $3_b$) $J_3^2$, $L1_7^{6,2,<,<}$, $L2_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $3_c$) $\sigma = \pm 1$, $u = \psi_{21}(\tilde{v})$, *где* $\tilde{v} = -3({\psi_{14}^{\pm}}^2 + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2}$;
$4_a$) $\nu = 0$, $\tilde{\beta}$, $4\tilde{\beta}^2 - 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$, $4\tilde{\beta}^2 - 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 3\tilde{\gamma}^2 \neq 0$, $4_b$) $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}$, $L4_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $4_c$) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u = \tilde{b}_1^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})/\tilde{c}_2^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})$, *где* $\tilde{v} = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde{w} = -9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2 + \mu^2)$;

*B.* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ : $1_a$) $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\alpha} = 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$, $1_b$) $J_3^2$, $L1_{22}^{5,2,<,<}$, $1_c$) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u = -(\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\beta})^{-2}$;
$2_a$) $\nu = \theta_1\mu$, $2^{7/3}\psi_{10}(\cdot) = -(3 \pm \sqrt{5})(\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{1/3}$, $\psi_{12}(\cdot) = -8\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot)$ $((\cdot) = (\theta_1\mu, \mu))$, $2_b$) $J_3^2$, $L1_6^{6,2,<,<}$, $L5_{22}^{5,2,<,<}$, $2_c$) $\sigma = \mp\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = -3$;

$3_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}=[\,-3(\tilde u+1),\ \tilde u\in(-1,11)\vee 3(\tilde u+1)(\tilde u+2)^{-1},\ \tilde u\in(-2,-1)\,]$, *где* $\tilde v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$, $3_b)$ $J_3^2$, $L1_7^{6,2,<,<}$, $[L3_{22}^{5,2,<,<}\vee L4_{22}^{5,2,<,<}]$, $3_c)$ $\sigma=[\pm1\vee\mp1]$, $u=[-3(\tilde u+1)^{-1}\vee 3((\tilde u+1)(\tilde u+2))^{-1}]$;
$4_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u),\ \tilde u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1},\ \sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp}$, $4_b)$ $J_3^2$, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $L2_{22}^{5,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma=\pm1,\ u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$,
$5_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},\ \hat b_1^*/\hat c_2^*=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u),\ \sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp},\ \tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $\hat u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2},\ \hat v=\hat b_1^*/\hat c_2^*$, $5_b)$ $J_3^2, L1_{12}^{6,2,<,<}, L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_{22}^{5,2,<,<}$, $5_c)$ $\sigma=\pm\mathrm{sign}\,\tilde\beta,\ u=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u)\tilde u^{-2}$;
$6_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ [7^{-1/3}\vee\theta_2(\tilde u)]=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\ [3(7^{-1/3}\tilde u+7^{-2/3})\vee(\theta_2(\tilde u)-2\tilde u)(\tilde u+\theta_2(\tilde u))]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2),\ \tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}\in[I_3\vee I_4]$, $6_b)$ $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}[L6_{22}^{5,2,<,<}\vee L7_{22}^{5,2,<,<}]$, $6_c)$ $\sigma=[-\mathrm{sign}\,\psi_8\vee\mathrm{sign}\,\tilde u],\ u=[3(7^{1/3}\tilde u+1)^{-1}\vee(2\tilde u-\theta_2(\tilde u))(\tilde u+\theta_2(\tilde u))^{-1}]$;
$7_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ [-4\tilde v\vee\psi_{25}^{\mp}]=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10},\ [3\tilde v(4\tilde v+\psi_{25}^{-})/2\vee3(\tilde v\psi_{25}^{\pm}-2\tilde v^{-1})]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2),\ \tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}\in[(0,(2/7)^{2/3})\vee I_2^{\pm}]$, $7_b)$ $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L8_{22}^{5,2,<,<}\vee L9_{22}^{5,2,<,<}]$, $7_c)$ $\sigma=[-\mathrm{sign}\,\psi_8\vee\mp\mathrm{sign}\,\psi_8],\ u=[(4+\psi_{25}^{-}\tilde v^{-1})/6\vee(4-\tilde v^3)(\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}-2)^{-1}]$;

*C.* $CF_6^{6,2,<,<}$ : $1_a)$ $\nu=\theta_1\mu,\ \neg(A2_a,B2_a)$, $1_b)$ $J_3^2$, $L1_6^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=\mathrm{sign}\,\psi_8(\cdot)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot),\ v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot),\ (\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)$;
$2_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ -3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}=\psi_{32}(\tilde u),\ \tilde u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}\in I_*,\neg(B3_a)$, $2_b)$ $J_3^2$, $L1_7^{6,2,<,<}$, $L3_6^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma=\pm\mathrm{sign}\,(1-2\tilde u),\ u=-(\tilde u^3-3\tilde u^2+6\tilde u+1)(\tilde u^2-\tilde u+1)^{-1}((\tilde u^2-\tilde u+7)(2\tilde u-1))^{-1/3},\ v=(2\tilde u-1)^{2/3}(\tilde u^2-\tilde u+7)^{-1/3}$;
$3_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ -2(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(\tilde u^2-3)^{-1},\ \tilde u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}\in(-\sqrt3,\sqrt3),\ \neg(B4_a)$, $3_b)$ $J_3^2, L1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_6^{6,2,<,<}$, $3_c)$ $\sigma=-\mathrm{sign}\,\tilde u,\ 2u=-(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)^{-1/3}v,\ v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
$4_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},\ \hat b_1^*/\hat c_2^*=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(2(\tilde u^2-3))^{-1}$, $\tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}\in(-\sqrt3,\sqrt3),\ \hat u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1},\ \hat v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3},\ \neg(B5_a)$, $4_b)$ $J_3^2$, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_6^{6,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma=-\mathrm{sign}\,(\tilde\beta\tilde u),\ 2u=-(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)^{-1/3}v,\ v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
$5_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ -9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)=\psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10},\ \tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\ \neg(A4_a,B6_a,B7_a)$, $5_b)$ $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}$, $L4_6^{6,2,<,<}$, $5_c)$ $\sigma=\mathrm{sign}((2\tilde u-\tilde v)\psi_8\psi_{24}),\ u=(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^{-1}\psi_{26}^{-1})^{1/3}\psi_{34},\ v=-(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^2\psi_{26}^{-1})^{1/3}$;

*D.* $CF_7^{6,2,<,<}$ : $1_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\neq0,-\tilde\varsigma,\ \neg(B3_a,C2_a)$, $1_b)$ $J_3^2$, $L1_7^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=\pm1,\ u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1},\ v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$;
$2_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\theta_1\mu,\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ [\tilde u=\psi_{25}^{\mp}\vee\tilde v=\theta_2(\tilde u)\neq2^{2/3}],\ \tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10},\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2),\neg(A4_a,B6_a,B7_a,C5_a)$, $2_b)$ $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_7^{6,2,<,<}\vee L3_7^{6,2,<,<}]$, $2_c)$ $\sigma=[\mp\mathrm{sign}\,\psi_8\vee\mathrm{sign}((\tilde u-2^{-1/3})\psi_8)]$, $u=[-(\tilde v\tilde w-3\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}+6)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\tilde w+2\tilde u^2+\theta_2(\tilde u)\tilde u-\theta_2^2(\tilde u))\tilde w^{-1}],\ v=[3(4-\tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w+\psi_{35}]$;

*E.* $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ : $1_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \neg(B4_a,C3_a)$, $1_b)$ $J_3^2$, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=1$, $u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1},\ v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}$;
$2_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},\ \neg(B5_a,C4_a)$, $2_b)$ $J_3^2$, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde\beta,\ u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2},\ v=\hat b_1^*/\hat c_2^*$, *где* $\hat u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1},\ \hat v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$;
$3_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ [\,\tilde u\neq\tilde v/2,\ \psi_{27}\geq0\vee\tilde u=\tilde v/2\vee\tilde v=\theta_3(\tilde u)]$, *где* $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10},\ \tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\ \tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2),\ \neg(A4_a,B6_a,$

$B7_a, C5_a, D2_a)$, $3_b)$ $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L3_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L4_{11,+1}^{6,2,<,<}]$, $3_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = [\tilde a_1^*(\tilde a_2^* \tilde c_2^*)^{-1/2} \vee -3(4\tilde v - \tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1} \vee -\psi_{30}^{1/2}\psi_{31}]$, $v = [\tilde b_1^*/\tilde c_2^* \vee (4-\tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1} \vee \psi_{36}]$;

*F.* $CF_2^{7,2,<,<}$: *a)* $\nu \neq -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\neg(A4_a, B6_a, B7_a, C5_a, D2_a, E3_a)$, *b)* $J_3^2$, $L1_2^{7,2,<,<}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w = -9\tilde\gamma^2(\nu^2+\mu^2)(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}$.

*Здесь запись* $\neg(\ldots)$ *означает, что не выполняются условия, указанные в скобках.*

Доказательство теоремы вытекает из леммы 3.1 и утверждений 3.1, 3.2.

**4. Выделение $mcs^{m,2,<}$.** Продемонстрируем теперь линейные неособые замены, которые для $CF$ из списка 1.1 позволят выделить минимальные канонические множества (см. [2, определение 1.11]).

**Утверждение 4.1.** *Только для следующих* $CF^{m,2,<}$ *из списков 2.1 и 3.1 удается ограничить значения параметров в* $cs^{m,2,<}$, *а именно:*

*1) в* $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = \tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$;

*2) в* $CF_{34,+1}^{4,2,<}$ *нормировка* $(2.6)^1$ *с* $r_1, -s_2 = 1$ *изменяет знак* $\sigma$; *при* $\tilde u = u$ *замена с* $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$, $r_1, s_2 = 0$ *дает* $u = \tilde u^{-1}$ *без изменения* $\sigma$;

*3) в* $CF_1^{6,2,<,>}$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = v^{1/2}|\tilde u|^{-1/2}$, $r_2 = v^{-1/2}|\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = \tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$ *без изменения* $v$;

*4) в* $CF_3^{6,2,<,=}$ $(u=1)$ *при* $\tilde v = v > 1/2$ *замена с* $r_1 = 1$, $s_1 = (2\tilde v - 1)s_2$, $r_2 = 0$, $s_2 = (4\tilde v - 1)^{-1}$ *дает* $v = \tilde v(4\tilde v - 1)^{-1} < 1/2$ $(v > 1/4)$;

*5) в* $CF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ $(u=1)$ *при* $\tilde v = v < 0$ *нормировка с* $r_1, -s_2 = 1$ *дает* $v = -\tilde v$;

*6) в* $CF_6^{6,2,<,<}$ $(u < 0)$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u \le -1$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = (-\tilde u)^{-1/2}$, $r_2 = \tilde v s_1$ *дает* $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = \tilde u^{-1}v^2 > -1$;

*7) в* $CF_7^{6,2,<,<}$ $(v < 0)$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v < -3$ *замена с* $r_1 = -(2\tilde v + 3\tilde u)\varrho$, $s_1 = (\tilde v + 3)\varrho$, $r_2 = -s_1$, $s_2 = -(\tilde v + 3\tilde u - 3)\varrho$, *где* $\varrho = (-\tilde v(\tilde v^2 + 3\tilde u\tilde v + 3(\tilde u^2 - \tilde u + 1)))^{-1/2}$, *дает* $u = -(3\tilde u + \tilde v + 3)\tilde v^{-1}$, $v = 9\tilde v^{-1} > -3$ *без изменения* $\sigma$;

*8) в* $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ $(v < 0)$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u < 0$, $\tilde v = v$ *нормировка с* $r_1, -s_2 = 1$ *дает* $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = -\tilde u > 0$ *без изменения* $v$; *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v < -1$ *замена с* $r_1, s_2 = \tilde u\varrho$, $s_1 = -r_2$, $r_2 = (\tilde v + 1)\varrho$, *где* $\varrho = (-\tilde v(\tilde u^2 + (\tilde v+1)^2))^{-1/2}$, *дает* $u = -\tilde u\tilde v^{-1}$, $v = \tilde v^{-1} > -1$ *без изменения* $\sigma$.

**Следствие 4.1.** *Согласно определению 1.12 из [2] имеем:*

$acs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{|u| > 1\}$, $acs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{\sigma = -1,\ u > 1\}$, $acs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{\sigma = -1,\ u < -1\}$,
$acs_1^{6,2,<,>} = \{|u| > 1\}$, $acs_3^{6,2,<,=} = \{v > 1/2\}$, $acs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{v < 0\}$,
$acs_6^{6,2,<,<} = \{u \le -1\}$, $acs_7^{6,2,<,<} = \{v < -3\}$, $acs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{u < 0,\ v < -1\}$;

*для остальных канонических форм из списка 2.1* $mcs^{m,2,<,*} = cs^{m,2,<,*}$.

**5. Канонические формы и канонические множества при $l = 2$.** Приведем единый список канонических форм и канонических множеств для случая $l = 2$. Они получены в работе [3] и в данной статье.

**Список 5.1.** Двадцать две $CF_i^{m,2}$ и их $cs_i^{m,2}$ системы $(2.1)^1$ при $l = 2$ $(\sigma, \kappa = \pm 1)$.

$CF_3^{2,2,=,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $CF_4^{2,2,>,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $CF_{7,\kappa}^{2,2,=,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$CF_{8,\kappa}^{2,2,>,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $CF_7^{3,2,=,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $CF_{10}^{3,2,>,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$CF_{12}^{3,2,=,<} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $CF_{13}^{3,2,=,=} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $CF_{16}^{3,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$CF_{8,\kappa}^{4,2,\gtrless,>} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & \kappa u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}$, $CF_{14,-1}^{4,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $CF_{23}^{4,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$CF^{4,2,<,\gtrless}_{34,+1} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}; CF^{5,2,<,\geqslant}_{7} = \sigma\begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, CF^{5,2,<}_{22} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
$CF^{6,2,<,>}_{1} = \sigma\begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad CF^{6,2,<,=}_{3} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix},$
$CF^{6,2,<,=}_{4,+1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad CF^{6,2,<,<}_{6} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix},$
$CF^{6,2,<,<}_{7} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad CF^{6,2,<,<}_{11,+1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix},$
$CF^{7,2,<,<}_{2} = \sigma\begin{pmatrix} u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix};$
$cs^{2,2,=,>}_{3} = \{u \neq 1\},\ cs^{2,2,=,=}_{3} = \{u = 1\};\ cs^{2,2,>,>}_{4} = \{u \neq 1\},\ cs^{2,2,>,=}_{4} = \{u = 1\};$
$cs^{2,2,=,>}_{7,\kappa} = \{\kappa = 1\},\ cs^{2,2,=,<}_{7,\kappa} = \{\kappa = -1\};\ cs^{2,2,>,>}_{8,\kappa} = \{\kappa = 1\},\ cs^{2,2,>,<}_{8,\kappa} = \{\kappa = -1\};$
$cs^{3,2,=,>}_{7} = \{u \neq \pm 1\},\ cs^{3,2,=,=}_{7} = \{u = 1\}; cs^{3,2,>,>}_{10} = \{u \neq 1\},\ cs^{3,2,>,=}_{10} = \{u = 1\};$
$cs^{3,2,=,<}_{12} = \{u < -1/4\}; cs^{3,2,=,=}_{13} = \{u = 1\};$
$cs^{3,2,>,>}_{16} = \{u > -1/4\},\ cs^{3,2,>,=}_{16} = \{u = -1/4\},\ cs^{3,2,>,<}_{16} = \{u < -1/4\};$
$cs^{4,2,>,>}_{8,-1} = \{u \neq \pm 1\}, cs^{4,2,<,>}_{8,+1} = \{u \neq 1\}, cs^{4,2,<,=}_{8,+1} = \{u = 1\};$
$cs^{4,2,>,>}_{14,-1} = \{u \neq -1, -2, -3\};$
$cs^{4,2,>,>}_{23} = \{u \neq 1,\ v > -(1-u)^2/4,\ v \neq u, (2u-1)/4, u(2-u)/4\},$
$cs^{4,2,>,=}_{23} = \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\},\ cs^{4,2,>,<}_{23} = \{v < -(1-u)^2/4\};$
$cs^{4,2,<,>}_{34,+1} = \{u > 0, u \neq 1\}, cs^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{u < 0\}; cs^{5,2,<,>}_{7} = \{u \neq \pm 1, 3\}, cs^{5,2,<,=}_{7} = \{u = 1\};$
$cs^{5,2,<,>}_{22} = \{u > -1/4, u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\}, cs^{5,2,<,=}_{22} = \{u = -1/4\},$
$cs^{5,2,<,<}_{22} = \{u < -1/4\};$
$cs^{6,2,<,>}_{1} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi_1^2(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\};$
$cs^{6,2,<,=}_{3} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\};\ cs^{6,2,<,=}_{4,+1} = \{u = 1,\ |v| < 1\};$
$cs^{6,2,<,<}_{6} = \{v \in (0,1),\ u \in (\psi_7^-(v), \psi_7^+(v)),\ u \neq -v,\ (u,v) \neq (-2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\};$
$cs^{6,2,<,<}_{7} = \{4v < -(u+1)^2,\ u \neq -1,\ v \neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\};$
$cs^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{4v < -u^2,\ v \neq \psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\};$
$cs^{7,2,<,<}_{2} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1, -u, 2u, \theta_3(u),\ w \neq -uv, -u(v-v^{-2}), \psi_{33}^{\mp}(u,v),\ 4w < -(u+v)^2, \psi_{27}(u,v,w) < 0,\ (u,w) \neq ([-4v \vee \psi_{25}^{\mp}(v)],\ [3v(4v+\psi_{25}^{-}(v))/2 \vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v) - 2v^{-1})]),\ (v,w) \neq ([7^{-1/3} \vee \theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u + 7^{-2/3}) \vee (u+\theta_2(u))(\theta_2(u)-2u)])\}.$

**Дополнение.** Продолжая обсуждение, начатое в [1, разд. 1.5], остановимся подробнее на подходах к выбору невозмущенной части двумерных систем, которая в первую очередь подлежит классификации и соответствующей нормализации.

В предлагаемом цикле работ выбор очевиден: классификации и нормализации подлежит однородный кубический многочлен, чьи канонические формы затем используются в качестве невозмущенных частей для нормализации возмущений.

Столь же очевидна необходимость классификации и нормализации однородных квадратичных многочленов в двумерных системах, разложение правых частей которых начинается со второго порядка. Такая классификация впервые была получена К. С. Сибирским в [5] и затем заново разработана на иных принципах упорядочивания в работах В. В. Басова с соавторами (см. библиогр. в [1]).

А для двумерных систем $\dot{x} = Ax + X(x)$ с нильпотентной матрицей $A$ в невозмущенной части нормализацию одним из первых осуществил Ф. Такенс в работе [6]. Полученная им обобщенная нормальная форма (ОНФ) имеет вид $\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_1 f(y_1) + y_2 g(y_1)$ и эквивалентна ОНФ

$$\dot{y}_1 = y_2 + y_1 g(y_1), \quad \dot{y}_2 = y_1 f(y_1) + y_2 g(y_1), \tag{$*$}$$

где $f=\sum_{k=\mu}^{\infty}\alpha_k y_1^k,\ g=\sum_{k=\nu}^{\infty}\beta_k y_1^k\ \ (\alpha_\mu,\beta_\nu\neq 0,\ \mu,\nu\geq 1)$. Эта система является одним из частных случаев *неполной НФ Белицкого* и получена Г. Р. Белицким в [7].

Интересно, что А. Байдер и Я. Сандерс в работе [8] использовали именно ОНФ $(*)$ для создания полной формальной классификации ростков аналитических векторных полей в $\mathbb{R}^2$ с нильпотентной линейной частью, основанной на соотношении чисел $\mu$ и $\nu$. Назвав $(*)$ нормальной формой первого порядка, в случаях, когда $\mu\neq 2\nu$, они определили и получили НФ второго, третьего и далее вплоть до бесконечного порядка, обрывая этот процесс в момент прекращения упрощений и получения в определенном смысле единственной НФ. В дальнейшем Х. Кокубу, Х. Ока и Д. Ванг в работе [9] для неисследованного случая $\mu=2$, $\nu=1$ нашли единственную НФ второго порядка $\dot y_1=y_2$, $\dot y_2=\alpha_2 y_1^3+\beta_1 y_1 y_2+y_1\sum_{k=3}^{\infty}y_1^k$, но при условии, что отношение $\alpha_2/\beta_1^2$ не является алгебраическим числом.

Следует отметить, что единственность НФ, фактически, означает выделение простейшей НФ в определенном базисе. Поэтому предложенные в [8, 9] методы не позволяют выделять все структуры нормальных форм, как это происходит при нахождении ОНФ методом резонансных уравнений и наборов, изложенном в [1, разд. 1.3].

**Литература**

1. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61), вып. 2. С. 181–195. DOI:10.21638/11701/spbu01.2016.201

2. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61), вып. 3. С. 355–371. DOI:10.21638/11701/spbu01.2016.302

3. *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — III // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62), вып. 2. С. 179–192. DOI:10.21638/11701/spbu01.2017.201

4. *Басов В. В., Чермных А. С.* Канонические формы двумерных однородных кубических систем с квадратичным общим множителем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 66–190. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovch.pdf (дата обращения: 28.04.2017).

5. *Сибирский К. С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев: Изд-во Штиинца, 1982. 168 с.

6. *Takens F.* Singularities of vector fields // IHES. 1974. Vol. 43, N 2. P. 47–100.

7. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков $C^\infty$-отображений относительно действия группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 4. С. 855–868.

8. *Baider A., Sanders J.* Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form // J. Differential Equations. 1992. Vol. 99, issue 2. P. 205–244. https://doi.org/10.1016/0022-0396(92)90022-F

9. *Kokubu H., Oka H., Wang D.* Linear grading function and further redaction of normal forms // J. Differential Equations. 1996. Vol. 132, issue 2. P. 293–318. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0181

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторах

*Басов Владимир Владимирович* — кандидат физико-математических наук, доцент; vlvlbasov@rambler.ru

*Чермных Александр Сергеевич* — магистрант; achermnykh@yandex.ru

**TWO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS CUBIC SYSTEMS: CLASSIFICATION AND NORMAL FORMS — IV**

*Vladimir V. Basov, Aleksander S. Chermnykh*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vlvlbasov@rambler.ru, achermnykh@yandex.ru

This article is the fourth in a series of works devoted to two-dimensional cubic homogeneous systems. It considers the case where homogeneous polynomial vector on the right-hand part of the system has a square common factor with complex zeros. The set of such systems is divided into classes of linear equivalence, in each of them on the basis of properly introduced structural and normalization principles the simplest system is distinguished and is the normal form of the third order. In fact, the normal form is defined by the coefficient matrix of the right-hand part, which is called the canonical form (CF). Each CF has its own arrangement of nonzero elements, their specific normalization and canonical set of permissible values for the non-normalized elements, which relates CF to the selected class of equivalence. In addition, for each CF, (a) the conditions on the coefficients of the initial system, (b) non-singular linear substitution reducing the right-hand part of the system under these conditions to the selected CF, and (c) obtained values of CF's non-normalized elements are given. Refs 9.

*Keywords*: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

**References**

1. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms. I", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **49**, issue 2, 99–110 (2016). DOI:10.3103/S1063454116020023

2. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms. II", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **49**, issue 3, 204–218 (2016). DOI:10.3103/S1063454116030031

3. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms: III", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, issue 1, 97–110 (2017). DOI:10.3103/S1063454117020029

4. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Canonical Forms of Two-dimensional Homogeneous Cubic Systems with a Common Square Factor", *Differential Equations and Control Processes* (3), 66–190 (2016) [in Russian]. Available at http://www.math.spbu.ru/diffjournal/EN/numbers/2016.3/article.1.7.html) (accessed 28.04.2017).

5. Sibirskii K. S., *An introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations* (Shtiintsa Publ., Kishinev, 1982, 168 p.) [in Russian].

6. Takens F., "Singularities of vector fields", *IHES* **43**(2), 47–100 (1974).

7. Belickii G. R., "Normal forms for formal series and germs of $C^\infty$-mappings with respect to the action of a group", *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **40**(4), 855–868 (1976).

8. Baider A., Sanders J., "Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form", *J. Differential Equations* **99**, issue 2, 205–244 (1992). https://doi.org/10.1016/0022-0396(92)90022-F

9. Kokubu H., Oka H., Wang D., "Linear grading function and further redaction of normal forms", *J. Differential Equations* **132**, issue 2, 293–318 (1996). https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0181

**Для цитирования:** Басов В. В., Чермных А. С. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — IV // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 000–000. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.302

**For citation:** Basov V. V., Chermnykh A. S. Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — IV. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 000–000. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.302

# ХРОНИКА

## К 80-ЛЕТИЮ ВАЛЕРИЯ АФАНАСЬЕВИЧА ЦИБАРОВА

25 марта 2017 года исполнилось 80 лет доктору физико-математических наук профессору кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета Валерию Афанасьевичу Цибарову.

Вся жизнь Валерия Афанасьевича неразрывно связана с университетом. После успешного окончания школы № 185 города Ленинграда в 1955 году Валерий Афанасьевич поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. Окончив университет в 1960 году по специальности «механика», В. А. Цибаров был принят на работу в должности младшего научного сотрудника в аэродинамическую лабораторию Научно-исследовательского института математики и механики при Ленинградском государственном университете (НИИММ ЛГУ). В апреле 1975 года он был переведен по конкурсу на должность старшего научного сотрудника в том же подразделении Ленинградского государственного университета. С января 1987 года являлся заведующим сектором НИИММ ЛГУ. В лаборатории аэродинамики под руководством Валерия Афанасьевича проводились исследования в области промышленной аэродинамики, выполнявшиеся на хоздоговорной основе, а также исследования по заказам организаций военно-промышленного комплекса. В. А. Цибаров был руководителем важных госбюджетных тем и грантов.

В 1969 году Валерий Афанасьевич Цибаров защитил кандидатскую, а в 1995 году — докторскую диссертации. В. А. Цибаров неоднократно удостаивался государственной научной стипендии, присуждаемой Президиумом РАН. В 1999 году за большой вклад в подготовку кадров, развитие образования и науки и в связи с 275-летием Санкт-Петербургского государственного университета Валерий Афанасьевич Цибаров был награжден Министерством общего и профессионального образования РФ

Почетной грамотой. В 2001 году в составе научного коллектива Валерий Афанасьевич стал лауреатом Университетской премии I степени «За научные труды». В этом же году В. А. Цибаров был зарегистрирован в Федеральном Реестре Экспертов (ФРЭ) научно-технической сферы. За выдающиеся результаты в научно-педагогической деятельности В. А. Цибаров неоднократно отмечался благодарностями в приказах ректора университета. В 2012 г. за большой вклад в подготовку научно-педагогических кадров и развитие науки в университете В. А. Цибаров был награжден медалью «Санкт-Петербургский государственный университет». Валерий Афанасьевич также награжден медалью «Ветеран труда».

С сентября 2001 года В. А. Цибаров являлся профессором кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Общий стаж работы по специальности Валерия Афанасьевича составляет более 50 лет.

Валерий Афанасьевич — замечательный преподаватель. Много лет он читал авторские курсы лекций «Концепции современного естествознания» и «Математические модели современного естествознания» студентам 4 и 5 курсов математико-механического факультета. В. А. Цибаров читал спецкурсы для студентов кафедры гидроаэромеханики, руководил курсовыми и выпускными работами студентов, осуществлял научное руководство аспирантами. Он был благожелательным и в то же время достаточно строгим научным руководителем сотрудников, аспирантов и студентов.

Круг его научных интересов весьма широк. Научные исследования В. А. Цибарова относятся к области динамики разреженных и плотных газов, физико-химической аэродинамики, стохастической теории гидро- и газовзвесей, гемодинамики и стохастической теории неньютоновских сред. Полученные В. А. Цибаровым научные результаты весьма обширны и разнообразны.

В. А. Цибаровым опубликовано 137 печатных работ, включая 3 монографии и 3 учебных пособия. Он регулярно участвовал в работе различных отечественных и международных научных форумов в качестве докладчика и члена оргкомитета. Им сделано большое количество докладов на конференциях и семинарах как всесоюзных и российских, так и международных. Его научные результаты нашли широкое признание среди специалистов как в нашей стране, так и за рубежом.

В. А. Цибаров принимал активное участие в общественной жизни трудового коллектива и в работе различных комиссий (экспертная комиссия, ревизионная комиссия профкома университета, комиссия по трудовым спорам и т. д.) вплоть до университетского уровня.

Валерий Афанасьевич Цибаров — разносторонний высокообразованный человек, который пользовался заслуженным авторитетом и уважением коллег и учеников и всегда был полон новых интересных идей и творческих планов.

Поздравляя Валерия Афанасьевича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и долгих лет жизни.

*В. И. Богатко, Ю. Н. Ворошилова, Е. В. Кустова,*
*В. А. Лашков, Г. А. Леонов, С. К. Матвеев, Р. Н. Мирошин,*
*В. А. Морозов, Н. Ф. Морозов, Е. А. Нагнибеда, Е. А. Потехина,*
*Л. А. Пузырева, М. А. Рыдалевская, А. Н. Рябинин, П. Е. Товстик*

# ПАМЯТИ И. А. ОВИДЬКО
# (1961–2017)

19 марта 2017 года ушел из жизни Илья Анатольевич Овидько, заведующий лабораторией механики наноматериалов и теории дефектов Института проблем машиноведения РАН, главный научный сотрудник кафедры теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета, заведующий лабораторией механики новых наноматериалов и профессор кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета, выдающийся ученый в области физики и механики материалов.

Илья Анатольевич Овидько родился 11 июля 1961 года в городе Запорожье. В 1984 году закончил кафедру физики металлов физико-механического факультета Ленинградского политехнического института, после учился там же в аспирантуре под руководством В. И. Владимирова, в 1987 году защитил кандидатскую диссертацию. В том же году его пригласили на работу в Институт проблем машиноведения РАН, где он проработал всю свою жизнь. В 1993 году И. А. Овидько защитил докторскую диссертацию, а в 1995 году стал заведующим созданной им лаборатории, которой он руководил более 20 лет.

Научные исследования И. А. Овидько охватывали теорию структуры, фазовых переходов, механических и функциональных свойств нанокристаллических и ультрамелкозернистых материалов, нанокомпозитов, наноструктурных пленок и покрытий, нанопроволок, графена и углеродных нанотрубок. Он написал более 300 научных статей, 10 монографий, более 20 приглашенных глав в монографиях.

Он был руководителем и исполнителем огромного количества исследований, поддержанных международными и отечественными организациями, на одно перечисление которых понадобится не одна страница.

Особое место в научном наследии И. А. Овидько занимают два научных журнала «Reviews on Advanced Materials Science» и «Materials Physics and Mechanics», основателем и главным редактором которых он являлся. Под его руководством эти созданные с нуля журналы, стали высоко котироваться в международном научном сообществе.

Илья Анатольевич был очень талантливым организатором. Он был председателем или сопредседателем 12-ти научных конференций, в организации которых принимал самое активное участие. И. А. Овидько понимал важность привлечения молодежи к научной работе. В его лаборатории всегда работало много студентов, аспирантов и докторантов. Трое его учеников успешно защитили кандидатские и докторские диссертации. Остались аспиранты, которые должны защититься вскоре.

Илья Анатольевич был очень позитивным человеком, душой любой компании. Все знавшие его всегда отмечали его великолепное чувство юмора. При этом он был очень интеллигентным и исключительно работоспособным человеком. Он был всегда полон планов, был готов штурмовать новые научные вершины. Однако 19 марта этого года его не стало. Остались книги, статьи, ученики, идеи…

*С. В. Бобылев, Р. З. Валиев, Г. А. Леонов,*
*Н. Ф. Морозов, Б. Н. Семенов, Н. В. Скиба, А. Г. Шейнерман*

# ПАМЯТИ АЛЕКСЕЯ ФЕДОРОВИЧА АНДРЕЕВА (20.12.1923–22.03.2017)

22 марта 2017 года не стало Андреева Алексея Федоровича — ветерана Великой Отечественной войны, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки Российской Федерации, Почетного профессора Санкт-Петербургского государственного университета.

Профессор Андреев А. Ф. — блистательный ученый в области качественной теории дифференциальных уравнений и динамических систем второго и третьего порядков, имел тесные связи со специалистами по дифференциальным уравнениям не только России, но и Франции, Болгарии, Белоруссии, Грузии, Молдавии и др. Несомненно, его выдающиеся результаты, методы и идеи будут использоваться, развиваться и продолжаться.

Алексей Федорович Андреев родился 20 декабря 1923 г. в Псковской области в крестьянской семье, в маленькой деревеньке, от которой до ближайшей школы было 25 км. В разных школах Псковской области окончил девять классов, а в десятом классе учился в Ленинграде, куда к тому времени перебрались его старшие сестра и брат, и можно было жить с ними в общежитии строительного треста. Окончил школу № 370 с отличным аттестатом, который получил 18 июня 1941 г. В течение года учился в Ленинградском Военно-топографическом училище, год воевал на Ленинградском фронте, участвовал в боях за Красный бор и Поповку, в июле 1943 г. был тяжело ранен, 15 месяцев лечился в разных госпиталях Ленинграда, перенес четыре операции, в том числе ампутацию ноги. В ноябре 1944 г. демобилизовался. Почти год работал военруком, сначала в ремесленном училище, затем в школе № 27 г. Ленинграда.

В сентябре 1945 г. А. Ф. Андреев без экзаменов был принят в Ленинградский (ныне Санкт-Петербургский) государственный университет, только что вернувшийся из эвакуации в Саратов, на математико-механический факультет. Там его пригласил к себе на кафедру (для специализации) профессор Н. П. Еругин — инвалид войны, воевавший в 1941–1942 гг. под тем же Красным бором. В 1950 г. А. Ф. Андреев окончил университет с отличием и тогда же поступил в аспирантуру Ленинградского отделения математического института АН СССР (ЛОМИ), где в то время в качестве заместителя директора работал Н. П. Еругин. Сначала был младшим научным сотрудником (1953–1955), затем — ученым секретарем (1955–1956), с 1956 г. по 1966 г. работал в Ленинградском институте точной механики и оптики (ныне Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики), одновременно вел практические занятия и читал лекции по дифференциальным уравнениям на математико-механическом факультете Ленинградского университета. В 1966 г. Алексей Федорович окончательно перешел на постоянную работу в ЛГУ на кафедру дифференциальных уравнений. В кандидатской диссертации «Исследование поведения интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки» (защищена в 1953 г., МИАН СССР), каждая из трех глав которой могла бы стать самостоятельной кандидатской диссертацией, А. Ф. Андреев решил ряд актуальных для того времени проблем, в частности, завершил начатые А. Пуанкаре исследования изолированной особой точки плоской автономной аналитической системы. В докторской диссертации «Исследование сложных особых точек систем дифференциальных уравнений» (1981 г., ЛГУ) разработал метод исследования сложной особой точки покоя аналитической динамической системы.

В должности профессора Ленинградского государственного университета Алексей Федорович работал с 1982 г., в 1984 г. ему было присвоено ученое звание профессора по кафедре дифференциальных уравнений.

Научную деятельность Алексей Федорович начал ярко — его работы были признаны в США, исследования первой главы его кандидатской диссертации были переведены на английский язык и опубликованы Американским математическим обществом еще в 1958 г. Как показало время, научные результаты А. Ф. Андреева вызвали значительный резонанс в мировой математической литературе. Эти исследования были продолжены с помощью разработанных А. Ф. Андреевым методов такими математиками, как Р. И. Богданов (Беларусь), Ф. Дюмортье, Р. Руссари, Д. Сотомайер и др. Метод разрешения сложных особенностей аналитических динамических систем А. Ф. Андреева широко применяется как теоретическими исследователями, так и прикладниками. Эти методы развиваются в работах учеников А. Ф. Андреева. Им подготовлена целая плеяда кандидатов наук, два его ученика стали докторами наук. Перечень научных статей и аннотации работ учеников А. Ф. Андреева приведены в написанном им (в соавторстве) обзоре «Исследования по локальной качественной теории на кафедре дифференциальных уравнений Петербургского университета» (Нелинейные динамические системы. 1999. Вып. 2. С. 36–70).

Научная школа Алексея Федоровича Андреева — это высококвалифицированные специалисты, которые работают не только в вузах Санкт-Петербурга, но и во многих городах России и за рубежом. Характерной особенностью исследований этой школы является то, что они представляют собой прямое продолжение и развитие работ А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, А. Дюлака, И. Бендиксона, М. Фроммера, А. А. Андронова и других классиков.

Алексей Федорович опубликовал более 80 научных статей, а также две монографии («Особые точки дифференциальных уравнений», 1979; «Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре», 2017) и одно учебное пособие («Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений», 2003). Работы А. Ф. Андреева переведены на иностранные языки и широко известны математикам как в России, так и за ее пределами. А. Ф. Андреевым проведено наиболее полное исследование поведения решений систем дифференциальных уравнений в окрестности сложных особых точек. Его результаты находят применение и широко используются специалистами по локальной качественной теории дифференциальных уравнений, а также в социологических и экономических исследованиях.

А. Ф. Андреев — замечательный лектор, ежегодно четко, красиво и понятно читал лекции по общему курсу дифференциальных уравнений и разработанному им авторскому специальному курсу «Локальная качественная теория». Будучи выдающимся ученым, Алексей Федорович был и замечательным педагогом. Для своих учеников он был не только научным руководителем, но и наставником в жизни, образцом человека.

Жизнь Алексея Федоровича Андреева — пример мужества, благородства, скромности. Никто долгое время и не догадывался, что всегда безупречно выглядящий лектор в июне 1943 года, в условиях боевых действий производя топографическую съемку на местности, в результате подрыва на мине остался без ноги. Он позволил себе придти на работу с палочкой только после перелома ноги уже в весьма значительном возрасте. Алексей Федорович никому не отказывал ни в научной, ни в человеческой помощи.

А. Ф. Андреев постоянно рецензировал статьи для журналов «Дифференциальные уравнения», «Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия», был членом редколлегии международного электронного журнала «Динамические системы и процессы управления», неоднократно выступал с докладами на международных конференциях по дифференциальным уравнениям. А. Ф. Андреев — член Санкт-Петербургского Математического общества с момента его восстановления в 1959 г. В течение многих лет он работал в специализированном совете по защите кандидатских диссертаций, был членом комиссий по приему в аспирантуру и по приему кандидатских экзаменов по специальности.

С 1996 г. А. Ф. Андреев был одним из основных исполнителей грантов по поддержке ведущих научных школ, грантов Российского фонда фундаментальных исследований и др., в течение ряда лет ему присуждалась «Государственная стипендия выдающемуся ученому». До последнего дня он работал над новой книгой, в которую вошли его результаты за 10 лет.

А. Ф. Андреев награжден медалью «За оборону Ленинграда» (1942), орденом Красной Звезды (1943), орденом Отечественной войны I степени (1985), многими юбилейными медалями, а также медалью «В память 300-летия Санкт-Петербурга» (2003). В 1999 г. профессору А. Ф. Андрееву присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», в 2008 году — звание «Почетный профессор Санкт-Петербургского государственного университета». В 2013 году Алексей Федорович награжден памятной медалью «Санкт-Петербургский государственный университет» за пребывание в стенах университета более 50 лет.

Мы глубоко скорбим в связи с невосполнимой утратой достойного талантливого ученого и гражданина и всегда будем помнить Алексея Федоровича как замечательного, исключительно доброжелательного и деликатного человека.

*Ю. Н. Бибиков, Е. В. Васильева, Н. А. Изобов, В. Т. Кигурадзе,*
*Г. А. Леонов, С. А. Мазаник, Г. С. Осипенко, А. В. Осипов, В. А. Плисс,*
*Н. Х. Розов, С. Ю. Пилюгин, П. Е. Товстик, Ю. В. Чурин*

# CONTENTS

Vestnik of Saint Petersburg University.
Mathematics. Mechanics. Astronomy. Volume 4 (62). Issue 3. 2017