ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.925

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ ОБЩИМ МНОЖИТЕЛЕМ

В. В. Басов,   А. С. Чермных

© Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28
vlvlbasov@rambler.ru,   achermnykh@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются вещественные двумерные однородные кубические системы ОДУ, многочлены в правой части которых имеют квадратичный общий множитель. На основании определенным образом введенных принципов упорядочивания множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых выделяется структурно простейшая система – нормальная форма третьего порядка. Для матрицы коэффициентов правой части нормальной формы, называемой канонической формой (КФ), указывается каноническое множество значений, гарантирующее принадлежность системы к выбранному классу.

Кроме того, для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные замены, сводящие правую часть системы при этих условиях к выбранной КФ, c) получаемые при этой замене значения коэффициентов КФ.

В Приложениях представлены программы, написанные с использованием пакета Maple и позволившие получить большинство практических результатов. Библиогр. 2 назв.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Abstract

Real two-dimensional homogeneous cubic systems of ODE for which polynomials in right-hand parts have a common square factor are considered. In accordance with properly introduced ordering principles the set of these systems is divided into linear equivalence classes such that in each class the structurally simplest system is distinguished — the normal form of the third order. For the coefficient matrix of the normal form right-hand side (the canonical form – CF) the canonical set of values ensuring the system belonging to a selected class is specified.

In addition, for each CF a) conditions on the coefficients of the original system, b) linear substitutions reducing the right-hand part of the system under these conditionsto to the chosen CF, and c) obtained values of CF coefficients are given.

In applications the programs written with using Maple software and allowing to obtain the majority of practical results are presented. Refs 2.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

Содержание

1. Введение

1.1. Постановка задачи.

Рассматриваем вещественную двумерную однородную кубическую систему ОДУ

$$\dot{x} = P(x), \tag{1.1}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $P_1, P_2 \not\equiv 0$.

Пусть вещественная неособая линейная замена

$$x = Ly \quad (\det L \neq 0) \tag{1.2}$$

преобразует (1.1) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \qquad (\widetilde{P}_i = \tilde{a}_i y_1^3 + \tilde{b}_i y_1^2 y_2 + \tilde{c}_i y_1 y_2^2 + \tilde{d}_i y_2^3, \quad i = 1, 2). \tag{1.3}$$

В работе [1] поставлена задача определения и конструктивного построения кубических нормальных форм (1.3) из системы (1.1) посредством замен (1.2). Для этого требуется осуществить классификацию множества систем (1.1) путем разбиения векторных многочленов $P(x)$ на классы линейной эквивалентности. Основные линейные инварианты получены в [1, 2.].

В [1, 1.2-1.4] всесторонне изучены проблемы, возникающие при нормализации возмущенных систем с многочленами P в невозмущенной части, и выяснены условия, при которых они минимизируются. На основании проведенных исследований для каждого класса эквивалентности в [2, 1.] разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие вполне упорядочить многочлены $\widetilde{P}$, получаемые в результате замены (1.2), и, тем самым, теоретически выделить в каждом классе образующую – самый простой векторный многочлен $\widetilde{P}$, называемый канонической формой (КФ).

Оказалось, что любую КФ можно отождествить с матрицей коэффициентов многочлена $\widetilde{P}$, расположение нулевых элементов в которой фиксировано, а для ненулевых должны быть указаны канонические множества, описывающие их допустимые значения.

Систему с КФ в правой части естественно называть кубической нормальной формой.

Наряду с задачей практического нахождения всех КФ в [1, 1.1] были поставлены также четыре дополняющие ее технические вычислительные задачи, позволяющие эффективно использовать разработанную классификацию на практике. Они заключаются в том, чтобы для каждой КФ в явном виде выписать:

a) условия на коэффициенты векторного многочлена $P(x)$;

b) замена (1.2), преобразующая $P(x)$ при указанных условиях в выбранную КФ;

c) получаемые при этом значения элементов КФ из канонического множества;

d) минимальное каноническое множество, в котором отсутствуют те значения элементов, от которых можно избавиться заменой (1.2), сохраняющей структуру КФ.

В [2, 2.] все поставленные задачи решены в случае, когда многочлены P_1 и P_2 пропорциональны, т. е. имеют общий множитель третьей степени.

Цель предлагаемой работы заключается в получении аналогичных результатов для случая, когда P_1 и P_2 обладают обладают квадратичным общим множителем.

Следует иметь в виду, что большое количество символьных вычислений, связанных со всевозможными линейными преобразованиями однородных кубических систем, их нормировкой и выделением общего множителя различных степеней, а также с решением различных алгебраических систем и уравнений, высоких степеней с параметрами невозможно без применения символьной математики. Для этих целей используется аналитический пакет Maple. Авторами был написан набор стандартных процедур, используя которые для доказательства практически каждого утверждения были созданы пакеты программ в Maple.

Формат электронного журнала дает возможность привести имеющиеся пакеты непосредственно в статье в Приложениях, что позволяет при желании контролировать доказательства и использовать написанные программы для решения задач по нормализации возмущенных систем с конкретной однородной кубической невозмущенной частью.

В работе [1, 1.] можно найти более подробную постановку задачи, включающую в себя:

1) вывод связующей системы для возмущенных систем, зависящей исключительно от коэффициентом многочлена P, и выделение тех групп коэффициентов P, обнуление которых облегчает решение связующей системы, а значит, позволяет осознанно сформулировать структурные и нормировочные принципы, положенные в основу классификации систем (1.1), и выделить в линейно эквивалентных классах систем простейшие: те, правые части которых образуют канонические формы;

2) описание метода резонансных уравнений, позволяющего для возмущенных систем с какой-либо КФ в невозмущенной части дать конструктивное определение обобщенной нормальной формы с очевидным доказательством ее существования и выписать в явном виде все возможные структуры обобщенных нормальных форм, разумеется только для тех КФ, для которых удается решить связующую систему или хотя бы выписать резонансные уравнения, гарантирующие ее совместность;

3) обсуждение проблем и имеющихся результатов в близких по постановке задачах, когда в системе (1.1) рассматриваются квазиоднородные векторные многочлены $P(x)$ с определенными весами переменных или когда степени многочленов P_1 и P_2 принимают всевозможные значения от единицы до трех.

Остановимся в заключение на структуре предлагаемой работы.

В следующих разделах Введения приведены необходимые для дальнейшего определения и результаты, полученные в работах [1, 2.] и [2, 1.]. Разумеется их более подробное изложение с приведением большого числа поясняющих примеров следует смотреть в указанных работах.

Основным в настоящей работе является Раздел 2, целиком посвященный случаю, когда многочлены P_1, P_2 системы (1.1) имеют вещественный общий множитель степени два.

В 2.1–2.3 предложена удобная форма записи системы при $l = 2$, позволяющая разбить все множество систем на девять классов линейной эквивалентности, и приведен полный список нормированных структурных форм со своими допустимыми семействами.

В 2.4–2.6 последовательно рассматриваются случаи, когда дискриминант D_0 квадратичного общего множителя P_0 равен, больше и меньше нуля. Для каждого знака различными способами удается выделить канонические формы с каноническими и минимальными семействами и доказать теоремы о приведении к ним исходной системы.

В 2.7 собраны в единый список все полученные для случая $l = 2$ канонические формы.

Для облегчения чтения и понимания статьи в Приложениях, составляющих Раздел 3, приведены программы, написанные в Maple, которые подтверждают приведенные в Разделе 2 формулы, требующие большого объема символьных вычислений. При этом, в 3.1 собраны стандартные процедуры, используемые в последующих программах, и приведены примеры, поясняющие их использование. А в Разделе 2 в соответствующих местах имеются ссылки на сопутствующие программы.

1.2. Линейная эквивалентность однородных кубических систем.

Рассмотрим вещественную двумерную однородную кубическую систему

$$\dot{x} = P(x) \quad \text{или} \quad \dot{x} = A\,q^{[3]}(x), \tag{1.4}$$

в которой $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $x = \mathrm{colon}\,(x_1,\, x_2)$, $q^{[3]}(x) = \mathrm{colon}\,(x_1^3,\, x_1^2x_2,\, x_1x_2^2,\, x_2^3)$, причем строки $A_1, A_2 \neq 0$.

Соглашение 1.1. *В дальнейшем для краткости матрицу коэффициентов A будем отождествлять с системой* (1.4) *или говорить, что A порождает систему* (1.4).

Определение 1.1. *Любой однородный многочлен с вещественными коэффициентами, являющийся общим множителем P_1 и P_2, будем обозначать P_0. Общий множитель P_0 максимальной степени l ($l = 1, 2, 3$) будем обозначать P_0^l. При отсутствии общего множителя будем считать, что $l = 0$.*

Для векторов $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ введем функцию $\delta_{rs} = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1s_2 - r_2s_1$.

Установить наличие или отсутствие общего множителя у любых двух многочленов позволяет функция $R = R(P_1, P_2)$, называемая результантом:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \delta_{ad}^3 + \delta_{ac}^2\delta_{cd} + \delta_{ab}\delta_{bd}^2 - 2\delta_{ab}\delta_{ad}\delta_{cd} - \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{ad}\delta_{bd}.$$

Утверждение 1.1. *Многочлены P_1, P_2 имеют вещественный общий множитель P_0 ненулевой степени тогда и только тогда, когда $R(P_1, P_2) = 0$.* (См. в [3, § 50]).

Для упрощения системы (1.4) будем использовать линейные неособые замены

$$\begin{cases} x_1 = r_1 y_1 + s_1 y_2 \\ x_2 = r_2 y_1 + s_2 y_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = Ly, \quad L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}, \quad \delta = \det L \neq 0. \tag{1.5}$$

Пусть замена (1.5) преобразует систему (1.4) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \ \text{ или } \ \dot{y} = \widetilde{A}\, q^{[3]}(y), \tag{1.6}$$

где $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 y_1^3 + \tilde{b}_1 y_1^2 y_2 + \tilde{c}_1 y_1 y_2^2 + \tilde{d}_1 y_2^3 \\ \tilde{a}_2 y_1^3 + \tilde{b}_2 y_1^2 y_2 + \tilde{c}_2 y_1 y_2^2 + \tilde{d}_2 y_2^3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$.

Для многочленов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ по аналогии с R введем результант $\widetilde{R} = R(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$.

В [1, 2.2] для системы (1.6) получены следующие формулы

$$\widetilde{P}(y) = L^{-1} P(Ly) = L^{-1} A q^{[3]}(Ly), \qquad \widetilde{R} = \delta^6 R,$$
$$\widetilde{A} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} \delta_{P(r)s} & s_1 \delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1} s} + s_2 \delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2} s} & r_1 \delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1} s} + r_2 \delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2} s} & \delta_{P(s)s} \\ -\delta_{P(r)r} & -s_1 \delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1} r} - s_2 \delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2} r} & -r_1 \delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1} r} - r_2 \delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2} r} & -\delta_{P(s)r} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Среди замен (1.5), преобразующих (1.4) в (1.6), выделим две специальные замены:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \text{ – нормировка,} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 r_1^2 & b_1 r_1 s_2 & c_1 s_2^2 & d_1 s_2^3 / r_1 \\ a_2 r_1^3 / s_2 & b_2 r_1^2 & c_2 r_1 s_2 & d_2 s_2^2 \end{pmatrix}; \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – перенумерация,} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \\ d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Нормировка (1.8) имеет следующие особенности:
1) назовем a_2, b_1, c_2, d_1 элементами нечетного зигзага, a_1, b_2, c_1, d_2 – четного, тогда у всех элементов нечетного зигзага можно одновременно изменить знак, а у любого элемента из четного зигзага знак изменить нельзя;
2) любое из отношений a_1/b_2, b_1/c_2, c_1/d_2 на диагоналях изменить нельзя.

Замечание 1.2. Если в системе, полученной после замены $L = (r, s)$, потребуется перенумерация, то нужно в исходной системе сразу сделать замену $L = (s, r)$.

В то же время перенумерация (1.9) позволяет договориться о следующем.

Соглашение 1.2. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе* (1.4) *при* $l = 1, 2, 3$,

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \quad \text{если} \ \ a_1^2 + a_2^2 + d_1^2 + d_2^2 \neq 0. \tag{1.10}$$

1.3. Структурные формы.

Базовым понятием развиваемой теории является понятие структурной формы.

Определение 1.2. *Вещественную матрицу* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *с ненулевыми строками будем называть объединенной структурной m-формой* ($m = \overline{2,8}$) *и обозначать USF^m (united structural form), если какие-либо m ее элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю. Конечное множество, объединяющее все USF^m, будем обозначать $SUSF^m$ (set of USF^m).*

Очевидно, что объединенные структурные m-формы отличаются одна от другой различным расположением мест для ненулевых элементов.

В дальнейшем для краткости любую USF^m можно будет записывать по строкам, указывая в каждой только ненулевые элементы, напр., $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1, c_1; d_2)$.

Рассмотрим всевозможные расстановки ненулевых элементов в $SUSF^m$ $(m = \overline{2,8})$.

Определение 1.3. *Индексом элемента a_{ij}* $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4)$ *матрицы A будем называть число, стоящее на месте (i, j) в матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *В свою очередь, индексом k матрицы A будем называть сумму индексов ненулевых элементов A и при необходимости писать $A_{[k]}$. Аналогично вводятся индексы строк A_1 и A_2.*

В [2, 1.1] должным образом введены структурные принципы (СП), позволяющие вполне упорядочить конечное множество $SUSF = \bigcup_{m=2}^{8} SUSF^m$ и, в том числе, все входящие в него пары USF^m, получаемые друг из друга при помощи перенумерации (1.9).

Определение 1.4. *Из двух различных объединенных структурных m-форм, получаемых друг из друга перенумерацией, форму, являющуюся согласно* СП *предшествующей, будем называть структурной m-формой, при желании добавляя основная, и обозначать SF^m, а другую – дополнительной и обозначать SF_a^m (additional SF).*

Очевидно, что имеется также определенное количество "симметричных" структурных m-форм, т. е. таких SF^m, которые не изменяются в ходе перенумерации (1.9).

Поскольку любая пара, состоящая из основной и дополнительной структурных форм линейно эквивалентна, то "худшая" с точки зрения СП дополнительная форма самостоятельного интереса не представляет, но использовать ее иногда будет удобно.

Соглашение 1.3. *Согласно введенной упорядоченности сопоставим любой основной структурной m-форме порядковый номер i и будем обозначать ее SF_i^m, а дополнительную к ней структурную форму – $SF_{a,i}^m$.*

В [2, 1.1] приведен Список 1.1, состоящий из 120 упорядоченных структурных форм, входящих в $SUSF$.

Определение 1.5. *Представителем произвольной SF_i^m будем называть любую числовую матрицу, структура нулей которой совпадает со структурой SF_i^m.*

В результате любую SF_i^m можно трактовать как совокупность всех ее представителей.

Важная характеристика каждой структурной m-формы связана с определением всех возможных значений максимальной степени общего множителя P_0^l (см. опр. 1.1), который можно вынести в правой части порожденной этой формой системы (1.4) при различных значениях ненулевых коэффициентов. Поэтому множество вещественных ненулевых значений элементов любой SF_i^m разобьем на непустые множества $s_i^{m,l}$ $(0 \le l \le 3)$ следующим образом: $s_i^{m,l}$ содержит те и только те значения элементов SF_i^m, при которых в правой части системы (1.4), порожденной этой формой, можно вынести общий множитель P_0^l.

Определение 1.6. *Для любой SF_i^m, задаваемой матрицей A, запись $SF_i^{m,l}$ означает ту же матрицу A, но значения ее ненулевых элементов принадлежат $s_i^{m,l} \neq \emptyset$.*

Иными словами, $SF_i^{m,l}$ объединяет тех и только тех представителей SF_i^m, чьи элементы принадлежат $s_i^{m,l}$, или, что то же самое, $SF_i^{m,l}$ порождает только такие системы, правые части которых имеют общий множитель максимальной степени l.

Из определения (1.6) и теоремы 2.3 [1, 2.6] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *SF_i^{m,l_1} линейно не эквивалентна SF_i^{m,l_2} при $l_1 \neq l_2$, т. е. любые два представителя SF_i^{m,l_1} и SF_i^{m,l_2} линейно не эквивалентны.*

Если SF_i^m имеет только одно множество $s_i^{m,l_0} \neq \emptyset$, то, очевидно, $SF_i^{m,l_0} = SF_i^m$.

1.4. Нормированные структурные формы и допустимые множества.

Следующим шагом на пути к определению канонической формы станет введение понятия нормированной структурной формы, основанного на нормировке при помощи замены (1.8) всех представителей $SF_i^{m,l}$ с целью получения на двух, как правило (см. зам. 1.1), должным образом выбранных местах единичных по модулю элементов.

В [2, 1.2] приведены нормировочные принципы (НП) выбора нормируемых элементов матрицы A, позволяющие осуществить нормировку любой из 120 SF_i^m, т. е. однозначно выбрать в ней места для нормируемых элементов и значения, которые должны получить элементы на этих местах после нормировки. При этом нормирующая замена (1.8) определяется однозначно для всех SF, кроме $SF_3^{2,2}$ и $SF_4^{2,2}$, для которых элемент s_2 в замене произволен и может быть выбран, например, единицей (см. зам. 1.1).

Итак, представители любой $SF_i^{m,l}$ (числовые матрицы заданной структуры с элементами из $s_i^{m,l}$) разбиваются на классы эквивалентности относительно нормирующих замен (1.8), а в качестве образующих берутся нормированные представители.

Определение 1.7. *$SF_i^{m,l}$ будем называть нормированной структурной формой и обозначать $NSF_i^{m,l}$ (normalized SF), если она объединяет только своих нормированных в соответствии с НП представителей.*

Соглашение 1.4. *Любую нормированную структурную форму A будем записывать в виде σB, где вынесенный из матрицы A множитель σ равен знаку первого нормированного элемента. Оставшиеся ненормированными ненулевые элементы матрицы B, если таковые имеются, будем должным образом выражать через переменные, называемые в дальнейшем параметрами NSF и функции от них. Также при необходимости будем записывать NSF как функцию от своих параметров.*

Тем самым, параметры NSF, обозначаемые $u, v, w, \dots$, всегда предполагаются отличными от нуля. Например, $NSF_7^{5,1} = NSF_7^{5,1}(\sigma, u, v) = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, но при этом $v \neq u$, иначе $m \neq 5$.

Соглашение 1.4 позволяет в матрице B, используемой в дальнейшем для нормализации возмущенных систем, получить максимальное количество единиц, а множитель σ, если он окажется отрицательным, заменой времени можно сделать равным единице.

Так, $SF_2^{2,1} = (a_1; c_2)$ заменой (1.8) может быть сведена к $NSF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\sigma = \operatorname{sign} a_1$. Здесь нормируемые элементы расположены на разных зигзагах, и согласно замечанию 1.1 на знак элемента из четного зигзага повлиять невозможно, поэтому он выносится в виде множителя σ. А знак нормируемого элемента из нечетного зигзага всегда можно сделать равным σ, что и требуется в НП.

Определение 1.8. *Если все ненулевые элементы $SF_i^{m,l}$ расположены только на одном из зигзагов, из-за чего второй нормированный элемент в матрице B при его наличии может равняться как единице, так и минус единице (будем обозначать его κ), то получаемую NSF будем называть двойственной и обозначать $NSF_{i,\kappa}^{m,l}$.*

Отметим, что для $NSF_i^{m,l}$ по сравнению с $SF_i^{m,l}$ существенно облегчается практическое написание условий, фиксирующих максимальную степень l общего множителя.

Так, $NSF_7^5 = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть $NSF_7^{5,2}$ при $-v$, $w = u$; $NSF_7^{5,1}$ при $w = v - u$; $NSF_7^{5,0}$, если не выполняются перечисленные выше ограничения на параметры.

Определение 1.9. *Значения параметров, при которых определена произвольная $NSF_i^{m,l}$, будем называть допустимыми. Объединение допустимых значений параметров для каждой из форм будем называть допустимым множеством и обозначать $ps_i^{m,l}$ (permissible set). Допустимое множество будем называть тривиальным и обозначать $tps_i^{m,l}$ (trivial ps), если входящие в него параметры ограничений не имеют.*

1.5. Канонические множества и канонические формы. Итак, рассмотрим произвольную $NSF_i^{m,l}$ матрицу, имеющую m ненулевых элементов с заданным расположением, фиксирующим i – ее порядковый номер в $SUSF^m$ согласно введенным СП. Наконец, l – это степень общего множителя P_0^l, который выносится из правой части системы, порожденной любым представителем $NSF_i^{m,l}$. Согласно утверждению 1.2 l инвариантна относительно линейных неособых замен.

Отметим, что получение нормированных структурных форм – это формальная работа, требующая только нормировки (1.8), т. е. замены, не затрагивающей структуры порождающей эти формы матрицы A.

Теперь же станем упрощать $NSF_i^{m,l}$, сводя их посредством подходящих линейных неособых замен (1.5) при определенных значениях параметров из $ps_i^{m,l}$ к предшествующим структурным формам, т. е. к $SF_j^{n,l}$ с $n < m$ или с $j < i$ при $n = m$.

В связи с этим следует иметь в виду следующие два соображения.

С одной стороны, практически каждая $NSF_i^{m,l}$ может сводиться к предшествующим $SF_j^{n,l}$, т. е. имеет "лишних" представителей, линейно эквивалентных каким-либо представителям предшествующих форм. Значения параметров, допускающие таких представителей, надо удалять из $ps_i^{m,l}$.

С другой стороны, те $NSF_i^{m,l}$, которые при всех допустимых значениях своих параметров линейно эквивалентны каким-либо предшествующим формам, самостоятельного интереса не представляют, поскольку не могут выступать в роли "простейших".

Определение 1.10. *Непустое множество, содержащее те и только те значения параметров из* $ps_i^{m,l}$*, при которых* $NSF_i^{m,l}$ *линейно не эквивалентна никакой предшествующей* SF*, будем называть каноническим и обозначать* $cs_i^{m,l}$ *(canonical set).*

Определение 1.11. *Любую* $NSF_i^{m,l}$ *будем называть канонической формой и обозначать* $CF_i^{m,l}$ *(canonical form), если ее параметры принадлежат* $cs_i^{m,l}$*.*

Таким образом, матрицы $CF_i^{m,l}$ и $NSF_i^{m,l}$ выглядят одинаково, но параметры $CF_i^{m,l}$ принадлежат $cs_i^{m,l}$ – это $ps_i^{m,l}$, из которого удалены те значения, параметров при которых представители $NSF_i^{m,l}$ заменами (1.5) сводятся к предшествующим SF.

Утверждение 1.3. *Любые две канонические формы линейно не эквивалентны.*

Это очевидное утверждение означает, что никакие два представителя различных CF или, что то же самое, никакие две системы (1.4), порожденные соответствующими числовыми матрицами, не могут быть связаны линейной неособой заменой.

В ряде случаев канонические множества параметров удается дополнительно ограничить при помощи линейных замен, преобразующих CF в себя.

Определение 1.12. *Каноническое множество любой* $CF_i^{m,l}$ *будем называть минимальным и обозначать* $mcs_i^{m,l}$ *(minimal cs), если найдена линейная неособая замена, преобразующая* $CF_i^{m,l}$ *в себя и позволяющая ограничить значения элементов* $cs_i^{m,l}$*, а именно, если это возможно, то хотя бы один из нееденичных элементов получен ограниченным сверху и (или) снизу и (или) зафиксирован знак множителя* σ*.*

Таким образом, если $CF_i^{m,l}$ не содержит параметров или их невозможно ограничить, то автоматически $cs_i^{m,l} = mcs_i^{m,l}$, т. е. является минимальным.

Определение 1.13. *Множество, содержащее те значения параметров из* $cs_i^{m,l}$*, от которых удается избавиться при помощи линейных неособых замен, переводящих* $CF_i^{m,l}$ *в себя, будем называть дополнительным и обозначать* $acs_i^{m,l}$ *(additional cs).*

Тем самым, $mcs_i^{m,l} = cs_i^{m,l} \backslash acs_i^{m,l}$.

Соглашение 1.5. *В дальнейшем: 1) Запись* "$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,] \ldots \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,] \ldots$" *будет означать, что или* $\zeta = \varsigma_1,\ \eta = \varsigma_2$*, или* $\zeta = \upsilon_1,\ \eta = \upsilon_2$*; 2) условие, заключенное в круглые скобки и записанное после другого условия, не является требованием, а приводится в качестве напоминания для лучшего восприятия последующих рассуждений; 3) в формулировках результатов отличие от нуля выражений, стоящих в знаменателе, не является предположением, а устанавливается в ходе доказательства.*

2. Однородные кубические системы с квадратичным общим множителем

2.1. Запись и линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l=2}$.

Система (1.4) при $l=2$ с учетом соглашения 1.2 однозначно представима в виде

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \tag{2.1}$$

где матрица $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ и $\det H = \delta_{pq} \neq 0$, вещественный общий множитель $P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = p_0^2\, q^{[2]}(x)$ со строкой коэффициентов $p_0^2 = (\alpha, 2\beta, \gamma)$, он имеет дискриминант $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$, причем либо $\alpha = 1$ $(D_0 = \beta^2 - \gamma)$, либо $\alpha, \gamma = 0$, $2\beta = 1$ $(D_0 = 1)$, так как условие (1.10) из соглашения 1.2 исключает случай $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ потому, что перенумерация (1.9) при необходимости сводит p_0 к строке $(\gamma, 2\beta, \alpha)$.

Действительно, из равенства $\begin{pmatrix} \alpha p_1 & \alpha q_1 + 2\beta p_1 & 2\beta q_1 + \gamma p_1 & \gamma q_1 \\ \alpha p_2 & \alpha q_2 + 2\beta p_2 & 2\beta q_2 + \gamma p_2 & \gamma q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ вытекают формулы, однозначно определяющие p_0^2 и H (см. прил. 3.2):

$$\begin{aligned}
&1)\ a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \text{тогда}\ \ \delta_{ab} \neq 0,\ \ P_1^{(2)}(\theta_*) = P_2^{(2)}(\theta_*) = 0,\\
&\text{где}\ \ P_i^{(2)}(\theta) = a_i^2\theta^3 - 2a_i b_i \theta^2 + (a_i c_i + b_i^2)\theta + a_i d_i - b_i c_i\ \ (i=1,2),\ \ 2\theta_* = \delta_{ac}\delta_{ab}^{-1},\\
&\text{и}\ \ \alpha = 1,\ 2\beta = \theta_*,\ \gamma = \theta_*^2 - (b_i\theta_* - c_i)a_i^{-1},\ \ p_i = a_i,\ \ q_i = b_i - a_i\theta_*;\\
&2)\ a_1 \neq 0,\ a_2 = 0,\ \text{тогда}\ \ b_2 \neq 0,\ P_1^{(2)}(\theta_*) = 0,\ \theta_*^2 - (b_1\theta_* - c_1)a_1^{-1} = d_2 b_2^{-1},\\
&\text{где}\ \theta_* = c_2 b_2^{-1},\ \text{и}\ \alpha = 1,\ 2\beta = \theta_*,\ \gamma = d_2 b_2^{-1},\ p_1 = a_1,\ q_1 = b_1 - a_1\theta_*,\ p_2 = 0,\ q_2 = b_2;\\
&3)\ a_1 = 0,\ a_2 \neq 0,\ \text{тогда все аналогично п. 2) со сменой нижних индексов;}\\
&4)\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \text{тогда}\ \ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ \delta_{bc} \neq 0\ \text{и}\ \alpha = 0,\ \beta = 1/2,\ \gamma = 0,\ p_i = b_i,\ q_i = c_i.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь в (2.2_1) значение θ_* найдено из равенства правых частей формулы для γ причем $\delta_{ab} = 0$, иначе $\delta_{ac} = 0$ и A_1, A_2 пропорциональны, т. е. $l = 3$; а в (2.2_4) $\delta_{bc} = \delta_{pq} \neq 0$.

Собственные числа H и дискриминант характеристического полинома имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sqrt{D})/2 \neq 0, \quad D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq} = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2 q_1. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *При $l = 2$ замена* (1.5) $x = Ly$ *преобразует систему* (1.4), *записанную в виде* (2.1) *согласно* (2.2), *в систему* (1.6) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$ *вида*

$$\dot{y} = \widetilde{P}_0^2(y)\, \widetilde{H} y, \tag{2.4}$$

где матрица $\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix}$ *и строка коэффициентов* $\tilde{p}_0^2 = (\tilde{\alpha},\ 2\tilde{\beta},\ \tilde{\gamma})$ *общего множителя* $\widetilde{P}_0^2 = \tilde{\alpha} y_1^2 + 2\tilde{\beta} y_1 y_2 + \tilde{\gamma} y_2^2 = \tilde{p}_0^2\, q^{[2]}(y)$ *вычисляются по следующим формулам:*

$$\tilde{p}_0^2 = p_0^2 M,\ \ M = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1 s_1 & s_1^2 \\ r_1 r_2 & \delta_* & s_1 s_2 \\ r_2^2 & 2r_2 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix},\ \ \begin{matrix} \delta_* = r_1 s_2 + \\ + r_2 s_1, \\ \det M = \delta^3 \end{matrix}\ \ \text{или}\ \ \begin{matrix} \tilde{\alpha} = \alpha r_1^2 + 2\beta r_1 r_2 + \gamma r_2^2, \\ \tilde{\beta} = \alpha r_1 s_1 + \beta\delta_* + \gamma r_2 s_2, \\ \tilde{\gamma} = \alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2; \end{matrix} \tag{2.5}$$

$$\widetilde{H} = L^{-1} H L \ \ \text{или}\ \ \widetilde{H} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix} \ \ (\delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = \delta_{pq}),$$

при этом дискриминант $\widetilde{D}_0 = \tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$ *связан с* D_0 *следующим образом:*

$$\widetilde{D}_0 = \delta^2 D_0. \tag{2.6}$$

а собственные числа $\widetilde{H}$ *и дискриминант* $\widetilde{D}$ *совпадают с* λ_1, λ_2 *и* D (см. [1, 2.4, т.2.2]).

Следствие 2.1. *При* $l = 2$ *квадратичный общий множитель* P_0^2*, выносимый из многочленов* P_1, P_2 *системы* (1.4)*, и полученный в результате замены* (1.5) *общий множитель* $\widetilde{P}_0^2$*, выносимый из многочленов* $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ *системы* (2.4)*, одновременно раскладываются или не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами и полный квадрат у них сохраняется.*

Следствие 2.2. *Для матрицы* $\widetilde{A}$ *системы* (1.6) *верна формула*

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{p}_1 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_1 + 2\tilde{\beta}\tilde{p}_1 & 2\tilde{\beta}\tilde{q}_1 + \tilde{\gamma}\tilde{p}_1 & \tilde{\gamma}\tilde{q}_1 \\ \tilde{\alpha}\tilde{p}_2 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_2 + 2\tilde{\beta}\tilde{p}_2 & 2\tilde{\beta}\tilde{q}_2 + \tilde{\gamma}\tilde{p}_2 & \tilde{\gamma}\tilde{q}_2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Из теоремы 2.1 также вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Всех представителей, образующих* $NSF_i^{m,2}$*, в зависимости от знака дискриминанта* $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$ *можно разбить на три непересекающихся множества, обозначаемых* $NSF_i^{m,2,>}$, $NSF_i^{m,2,=}$, $NSF_i^{m,2,<}$*. В свою очередь всех представителей, образующих* $NSF_i^{m,2,*}$*, в зависимости от знака дискриминанта* D *из* (2.3) *можно разбить на три непересекающихся множества, обозначаемых* $NSF_i^{m,2,*,>}$, $NSF_i^{m,2,*,=}$, $NSF_i^{m,2,*,<}$*. Аналогичные разбиения можно осуществить в* $ps_i^{m,2}$.

Следствие 2.3. *Системы, порожденные любыми двумя представителями* $NSF_i^{m,2}$ *с различными парами третьих и четвертых верхних индексов, не могут оказаться линейно эквивалентными.*

2.2. Список $\mathbf{NSF_i^{m,2}}$.

Выделим сначала из множества структурных форм (см. [2, Список 1.1]) все формы (кроме SF_1^8), имеющие хотя бы одного представителя, порождающего систему, из правой части которой можно вынести общий множитель максимальной степени два, т. е. выделим те формы, для которых может быть реализован случай $l = 2$. Затем нормируем их, согласно введенным в [2, 1.2] НП, получая $NSF_i^{m,2}$.

Список 2.1. Сорок четыре $NSF^{m,2}$ $(m = \overline{2,7})$ с указанием для каждой p_0^2 и D_0 (под ней), σH, а также D и $ps^{m,2}$ (под ним) $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$$NSF_3^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[4]}, \ \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps_3^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_4^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[4]}, \ \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps_4^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_{7,\kappa}^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \ \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} 4\kappa, \\ tps_{7,\kappa}^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_{8,\kappa}^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \ \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} 4\kappa, \\ tps_{8,\kappa}^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{[6]},\ \begin{matrix}(1,0,0),\\0,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{3,2}_{7};\end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{10}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{[7]},\ \begin{matrix}(0,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{3,2}_{10};\end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{12}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{[7]},\ \begin{matrix}(1,0,0),\\0,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&u\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u+1,\\tps^{3,2}_{12};\end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{a,13}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}_{[8]},\ \begin{matrix}(1,0,0),\\0,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&0\\1&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{3,2}_{13};\end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{16}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{[8]},\ \begin{matrix}(0,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&u\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{3,2}_{16};\end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{a,18}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\u&1&0&0\end{pmatrix}_{[9]},\ \begin{matrix}(1,0,0),\\0,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}0&1\\u&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u+1,\\tps^{3,2}_{18};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,7}=\sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&u&u&0\end{pmatrix}_{[8]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&0\\0&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{4,2}_{7};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{8,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa u&0\\0&1&0&\kappa\end{pmatrix}_{[8]},\ \begin{matrix}(1,0,\kappa),\\-\kappa,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{4,2}_{8,\kappa};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,12}=\sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-u&0&u&0\end{pmatrix}_{[9]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&0\\-u&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{4,2}_{12};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,14,-1}=\sigma\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&u&u&0\end{pmatrix}_{[9]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}-1&1\\0&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u+1)^2,\\tps^{4,2}_{14,-1};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,18}=\sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\v&u&0&0\end{pmatrix}_{[10]},\ \begin{matrix}(1,0,0),\\0,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&1\\v&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2+4v,\\ps^{4,2}_{18}=\{u\neq v\};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{23}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{[10]},\ \begin{matrix}(0,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u&v\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2+4v,\\ps^{4,2}_{23}=\{u\neq v\};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,27,-1}=\sigma\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\u&u&0&0\end{pmatrix}_{[11]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}-1&1\\u&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u+1,\\tps^{4,2}_{27,-1};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,29}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-u&0&u&0\end{pmatrix}_{[11]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}0&1\\-u&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}u(u-4),\\tps^{4,2}_{29};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,33}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\u&u&0&0\end{pmatrix}_{[12]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}0&1\\u&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u,\\tps^{4,2}_{33};\end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{34,+1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&u\\1&0&+1&0\end{pmatrix}_{[12]},\ \begin{matrix}(1,0,1),\\-1,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}0&u\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u,\\tps^{4,2}_{34,+1};\end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{[11]},\ \begin{matrix}(1,-1,1),\\-3/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{5,2}_{7};\end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{8}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{[11]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u&v-u\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ps^{5,2}_{8}=\{u\neq v\};\end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,10}=\sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\v-u&v&u&0\end{pmatrix}_{[12]},\ \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&0\\v-u&u\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ps^{5,2}_{10}=\{u\neq v\};\end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{14,-1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -u \pm v & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \begin{matrix} (1, \pm 1, 0), \\ 1/4 \end{matrix}, \begin{pmatrix} u & v \mp u \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u \mp 1)^2 + 4v, \\ ps^{5,2}_{14,-1} = \{u \neq \pm v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,16,-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -u \pm v & v & u & 0 \end{pmatrix}_{[13]}, \begin{matrix} (1, \pm 1, 0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ -u \pm v & \pm u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u \mp 1)^2 + 4v, \\ ps^{5,2}_{16,-1} = \{u \neq \pm v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,20} = \sigma \begin{pmatrix} v - v^2 & 1 & 1 & 0 \\ uv & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[13]}, \begin{matrix} (1, v^{-1}, 0), \\ v^{-2}/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} v - v^2 & v \\ uv & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (v(1-v))^2 + 4uv^2, \\ ps^{5,2}_{20} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{22} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}, \begin{matrix} (1, -1, 1), \\ -3/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u + 1, \\ tps^{5,2}_{22}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,23} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ v - u & v & u & 0 \end{pmatrix}_{[14]}, \begin{matrix} (1, 1, 0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v - u & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} u^2 + 4(v - u), \\ ps^{5,2}_{23} = \{u \neq v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[12]}, \begin{matrix} (1, 1, v), \\ (1 - 4v)/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u - 1)^2, \\ tps^{6,2}_{1}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{3} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[13]}, \begin{matrix} (1, 1, v), \\ (1 - 4v)/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & -uv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u - 1)^2, \\ ps^{6,2}_{3} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{4,+1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{[14]}, \begin{matrix} (1, 0, 1), \\ -1, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u - 1)^2, \\ tps^{6,2}_{4,+1}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{5} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u(v-1) & -uv \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[14]}, \begin{matrix} (1, 1, v), \\ (1 - 4v)/4, \end{matrix} \sigma \begin{pmatrix} u & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u - 1)^2, \\ ps^{6,2}_{5} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{6} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2} - v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}, \begin{matrix} (1, -v, v^{-1}), \\ (v^3 - 4)v^{-1}/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & uv^{-2} \\ 1 & v \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u - v)^2 + 4uv^{-2}, \\ ps^{6,2}_{6} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{7} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u + v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[15]}, \begin{matrix} (1, -1, 1), \\ -3/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & u + v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u + 1)^2 + 4v, \\ ps^{6,2}_{7} = \{u \neq -v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{a,9} = \sigma \begin{pmatrix} w(1-w) & 1 & 1 & 0 \\ w(v - uw) & v & u & 0 \end{pmatrix}_{[15]}, \begin{matrix} (1, w^{-1}, 0), \\ w^{-2}/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} w - w^2 & w \\ w(v - uw) & uw \end{pmatrix}, \begin{matrix} (w(u - w + 1))^2 + 4w^2(v - u), \\ ps^{6,2}_{9} = \{w \neq 1,\ v \neq u,\ uw\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{11,+1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[16]}, \begin{matrix} (1, 0, 1), \\ -1, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} u^2 + 4v, \\ tps^{6,2}_{11,+1}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{12} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & -uv & u & -uv^2 \\ 1 & 0 & v - v^{-2} & 1 \end{pmatrix}_{[16]}, \begin{matrix} (1, v^{-1}, v), \\ (1 - 4v^3)v^{-2}/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -uv \\ 1 & v^{-1} \end{pmatrix}, \begin{matrix} v^{-2} - 4uv, \\ ps^{6,2}_{12} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{13} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}_{[16]}, \begin{matrix} (1, -v, v^2 + v), \\ -v(3v + 4)/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & uv \\ 1 & 1 + v \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u + v + 1)^2 - 4u, \\ ps^{6,2}_{13} = \{v \neq -1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{15} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & uv & uv(v-1) \\ 1 & 1 & 0 & -v(v-1)^2 \end{pmatrix}_{[17]}, \begin{matrix} (1, v, v^2 - v), \\ -v(3v - 4)/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1 - v \end{pmatrix}, \begin{matrix} (v - 1)^2 + 4u, \\ ps^{6,2}_{15} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{16} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & uv \\ 1 & 1 & v & 0 \end{pmatrix}_{[18]}, \begin{matrix} (1, 1, v), \\ (1 - 4v)/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u, \\ tps^{6,2}_{16}; \end{matrix}$$

$$NSF^{7,2}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv - u + w & v(w - u) \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[16]}, \begin{matrix} (1, 1, v), \\ (1 - 4v)/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & w - u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u - 1)^2, \\ ps^{7,2}_{1} = \{w \neq u,\ u(1 - v)\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{7,2}_{2} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv + w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[17]}, \begin{matrix} (1, -v, v^{-1}), \\ (v^3 - 4)v^{-1}/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & uv + w \\ 1 & v \end{pmatrix},$$

$(u+v)^2+4w,\ ps_2^{7,2}=\{v\neq 1,\ w\neq uv,\ -u(v-v^{-2})\}$;

$NSF_3^{7,2}=\sigma\begin{pmatrix}u & u+v & v(w+1) & w(w+1)(v-uw)\\ 1 & 1 & 0 & -w^2(w+1)\end{pmatrix}_{[18]},\ \begin{matrix}(1,w+1,w(w+1)),\\ (w+1)(1-3w)/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u & v-uw\\ 1 & -w\end{pmatrix},$

$(u-w)^2+4v,\ \ ps_3^{7,2}=\{w\neq -1,\ v\neq -u,\ uw\}$;

$NSF_4^{7,2}=\sigma\begin{pmatrix}u & u+v & v+uw & vw\\ 1 & 1 & w & 0\end{pmatrix}_{[19]},\ \begin{matrix}(1,1,w),\\ (1-4w)/4,\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u & v\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}u^2+4v,\\ ps_4^{7,2}=\{v\neq -u,\ -uw\}.\end{matrix}$

Замечание 2.1. В представленном списке содержатся две нормированные структурные формы: $NSF_{14,-1}^{5,2}$ и $NSF_{16,-1}^{5,2}$, имеющие раздвоение, не связанное с нормировкой (см. опр. 1.8). Однако, этот вид двойственности не представляет интереса, поскольку обе эти формы, как будет показано ниже, не являются каноническими. Существуют линейные замены, сводящие их к предшествующим согласно СП структурным формам при любых допустимых значениях параметров.

Замечание 2.2. В связи с использованием в разложении правой части системы (2.1) нормировки коэффициентов общего множителя P_0^2 отвечающей соглашению 1.2, согласно которой $\alpha=1$ или $\alpha,\gamma=0,\ 2\beta=1$, так как случай $\alpha=0,\gamma\neq 0$ исключается при помощи перенумерации (1.9), во-первых, σ является множителем матрицы H, во-вторых, из $NSF^{m,2}$, требующих перенумерации, в соответствии с определением 1.4 получаются дополнительные $NSF_a^{m,2}$, что и отражено в списке 2.1.

2.3. Девять классов эквивалентности однородных кубических систем.

Итак, пусть произвольная система (1.4) $\dot x=A\,q^{[3]}(x)$ при $l=2$ записана в виде (2.1) $\dot x=P_0^2(x)Hx$, где $P_0^2=\alpha x_1^2+2\beta x_1x_2+\gamma x_2^2$, причем $\alpha=1$ $(D_0=\beta^2-\gamma)$ или $\alpha,\gamma=0$, $2\beta=1$ $(D_0=1)$, и матрица $H=(p,q)$ – неособая.

По теореме 2.1 любая замена (1.5) $x=Ly$ $(\det L\neq 0)$ преобразует (2.1) в систему (2.4) $\dot y=(\tilde\alpha,2\tilde\beta,\tilde\gamma)\,q^{[2]}(y)\,\widetilde{H}y,$ у которой $\tilde p_0^2=(\tilde\alpha,2\tilde\beta,\tilde\gamma)$ и матрица $\widetilde H$ с $\delta_{\tilde p\tilde q}\neq 0$ из (2.5), При этом с учетом обозначений (1.6) для матрицы $\widetilde A$ системы (2.4) верна формула (2.7).

Приводить систему (2.1) к различным каноническим формам будем в два этапа.

На первом этапе выберем замену (1.5), которая сводит матрицу H системы (2.1) к жордановой форме $\widetilde H$ в получаемой системе (2.4). Вид замены будет, конечно, зависеть от знака дискриминанта D из формулы (2.3) (см. прил. 3.3).

1) $D>0$, тогда согласно (2.3) матрица H имеет вещественные различные собственные числа $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$. Точнее говоря, пусть

$$\lambda_1=(p_1+q_2+\sigma_0\sqrt{D})/2,\quad \lambda_2=(p_1+q_2-\sigma_0\sqrt{D})/2,\quad \lambda_*=p_1-q_2+\sigma_0\sqrt{D}\neq 0,\qquad (2.8)$$

где $\sigma_0=\{1$ при $p_1\geq q_2$, -1 при $p_1<q_2\}$, тогда $\sigma_0=\operatorname{sign}\lambda_*$ и $\sigma_0\sqrt{D}=\lambda_1-\lambda_2$.

Замена $J_1^2=\begin{pmatrix}\lambda_* & -2q_1\\ 2p_2 & \lambda_*\end{pmatrix}$ $(\delta=2\sigma_0\sqrt{D}\,\lambda_*)$ с учетом формул для $\widetilde P_0$ из (2.5) сводит систему (2.1) к системе, записанной в виде (2.7) или (2.4), у которой

$$\widetilde A=\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda_1 & 2\tilde\beta\lambda_1 & \tilde\gamma\lambda_1 & 0\\ 0 & \tilde\alpha\lambda_2 & 2\tilde\beta\lambda_2 & \tilde\gamma\lambda_2\end{pmatrix};\ \ \widetilde H=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \tilde\alpha=\alpha\lambda_*^2+4\beta p_2\lambda_*+4\gamma p_2^2,$$
$$\tilde\beta=\beta\lambda_*^2-2(\alpha q_1-\gamma p_2)\lambda_*-4\beta p_2q_1,\quad \tilde\gamma=\gamma\lambda_*^2-4\beta q_1\lambda_*+4\alpha q_1^2.\qquad (2.9)$$

2) $D = 0$, тогда в формуле (2.3) $\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1 + q_2)/2 \neq 0$, иначе $\det H = 0$.

$2_1)$: a) $q_1 \neq 0$, тогда замена $J^2_{2a} = \begin{pmatrix} 0 & 2q_1 \\ 2 & q_2 - p_1 \end{pmatrix}$, b) $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ $(p_1, q_2 = \nu)$, тогда нормировка $J^2_{2b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, сводят (2.1) к системе (2.7) или (2.4), у которой:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\nu & 2\tilde{\beta}\nu & \tilde{\gamma}\nu & 0 \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\alpha}\nu + 2\tilde{\beta} & 2\tilde{\beta}\nu + \tilde{\gamma} & \tilde{\gamma}\nu \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 1 & \nu \end{pmatrix},$$
$$a)\ \tilde{\alpha} = 4\gamma, \quad \tilde{\beta} = 4\beta q_1 - 2\gamma(p_1 - q_2), \quad \tilde{\gamma} = 4\alpha q_1^2 - 4\beta q_1(p_1 - q_2) + \gamma(p_1 - q_2)^2, \tag{2.10}$$
$$b)\ \tilde{\alpha} = \alpha,\ \tilde{\beta} = \beta p_2,\ \tilde{\gamma} = \gamma p_2^2 \quad (\nu = p_1).$$

$2_2)$ q_1, $p_2 = 0$, тогда в системе (2.1) матрица H – диагональная и $p_1, q_2 = \nu \neq 0$.

3) $D < 0$ $(\delta_{pq} > 0,\ p_2 q_1 < 0)$, тогда в (2.3) λ_1, λ_2 – комплексно-сопряженные.

Замена $J^2_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{-D} & p_1 - q_2 \\ 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$ $(\delta = 2p_2\sqrt{-D})$ с учетом формул для $\widetilde{P}_0$ из (2.5) сводит (2.1) к системе, записанной в виде (2.7) или (2.4), у которой

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\nu & 2\tilde{\beta}\nu - \tilde{\alpha}\mu & \tilde{\gamma}\nu - 2\tilde{\beta}\mu & -\tilde{\gamma}\mu \\ \tilde{\alpha}\mu & \tilde{\alpha}\nu + 2\tilde{\beta}\mu & 2\tilde{\beta}\nu + \tilde{\gamma}\mu & \tilde{\gamma}\nu \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \nu & -\mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha D,$$
$$\tilde{\beta} = \sqrt{-D}(\alpha(p_1 - q_2) + 2\beta p_2), \quad \tilde{\gamma} = \alpha(p_1 - q_2)^2 + 4\beta p_2(p_1 - q_2) + 4\gamma p_2^2, \tag{2.11}$$

где $\nu = (p_1 + q_2)/2\,(= \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2})$, $\mu = \sqrt{-D}/2\,(= |\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2}|) > 0$, причем $\nu^2 + \mu^2 = \delta_{pq}$.

На втором этапе в линейно неэквивалентных системах (2.9), (2.10), (2.11) сделаем произвольную замену (1.5), сводящую каждую из них к системе (2.4), все составляющие которой вместо символа $\tilde{}$ будем сверху отмечать символом $\breve{}$.

В результате, учитывая (2.5), по аналогии с (2.7) получим систему

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve{a}_1 & \breve{b}_1 & \breve{c}_1 & \breve{d}_1 \\ \breve{a}_2 & \breve{b}_2 & \breve{c}_2 & \breve{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & \breve{\alpha}\breve{q}_1 + 2\breve{\beta}\breve{p}_1 & 2\breve{\beta}\breve{q}_1 + \breve{\gamma}\breve{p}_1 & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & \breve{\alpha}\breve{q}_2 + 2\breve{\beta}\breve{p}_2 & 2\breve{\beta}\breve{q}_2 + \breve{\gamma}\breve{p}_2 & \breve{\gamma}\breve{q}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

у которой $\breve{\alpha} = \tilde{\alpha}r_1^2 + 2\tilde{\beta}r_1r_2 + \tilde{\gamma}r_2^2$, $\breve{\beta} = (\tilde{\alpha}s_1 + \tilde{\beta}s_2)r_1 + (\tilde{\beta}s_1 + \tilde{\gamma}s_2)r_2$, $\breve{\gamma} = \tilde{\alpha}s_1^2 + 2\tilde{\beta}s_1s_2 + \tilde{\gamma}s_2^2$,
$\breve{H} = \begin{pmatrix} \breve{p}_1 & \breve{q}_1 \\ \breve{p}_2 & \breve{q}_2 \end{pmatrix} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix}$ $\quad (\det \breve{H} = \delta_{\breve{p}\breve{q}} = \delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = \delta_{pq})$.

Остается подобрать коэффициенты замены (1.5) так, чтобы система (2.12) оказалась наиболее простой в соответствии с введенными в [2, 1.1,1.2] СП и НП.

Реализация указанного плана будет проводиться отдельно для каждого из трех классов систем, на которые разбивается (2.1) в соответствии со знаком дискриминанта D_0 общего множителя P_0^2, инвариантного согласно (2.6) относительно замен (1.5).

Таким образом фактическое нахождение канонических форм будет осуществляться отдельно в каждом из девяти линейно неэквивалентных классов, разделяемых знаками дискриминантов D_0 и D системы (2.1) (см. след. 2.3).

Набор 2.1. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2:
$D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$, $\sigma_0 = \{1$ при $p_1 \geq q_2$, -1 при $p_1 < q_2\}$, $\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sigma_0\sqrt{D})/2$, $\lambda_* = p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D}$; $\nu = (p_1 + q_2)/2$, $\mu = \sqrt{-D}/2$; $\tilde{\tau} = (\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma})^{1/2}$, $\tilde{\phi} = (2\tilde{\tau})^{-1/2}$, $\sigma_\alpha = \operatorname{sign}\tilde{\alpha}$, $\sigma_\beta = \{1$ при $\tilde{\beta} \geq 0$, -1 при $\tilde{\beta} < 0\}$, $\sigma_\gamma = \operatorname{sign}\tilde{\gamma}$, $\tilde{\eta} = \tilde{\beta} + \sigma_\beta\tilde{\tau}$; $\tilde{\varsigma} = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}^2)^{1/2}$;
$J^2_1 = \{r_1 = \lambda_*,\ s_1 = -2q_1,\ r_2 = 2p_2,\ s_2 = \lambda_*\}$, $J^2_{2a} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2q_1,\ s_2 = 2,\ r_2 = q_2 - p_1\}$, $J^2_{2b} = \{r_1 = 1,\ s_1 = 0,\ r_2 = 0,\ s_2 = p_2\}$, $J^2_3 = \{r_1 = \sqrt{-D},\ s_1 = p_1 - q_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = 2p_2\}$.

2.4. Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при нулевом дискриминанте $\mathbf{P^2_0}$.

Система (2.1), у которой $P^2_0(x)$ является полным квадратом, имеет вид

$$\dot{x} = P^2_0(x)Hx, \quad P^2_0 = (x_1 + \beta x_2)^2 \quad (\gamma = \beta^2 \Leftrightarrow D_0 = 0,\ \det H = \delta_{pq} \neq 0). \qquad (2.1^=)$$

Выделим из списка 2.1 нормированные формы до $NSF^{3,2}_{a,13}$ включительно, относящиеся к случаю $D_0 = 0$, таких форм – 5. Обозначения для них см. в утверждении 2.1.

Докажем, что приведенный ниже список содержит все возможные канонические формы системы $(2.1^=)$ со своими каноническими множествами из определения 1.11.

Список 2.2. Пять $CF^{m,2,=}_i$ и их $cs^{m,2,=}_i$ $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u \neq 0,\ p^2_0 = (1,0,0))$:

$$CF^{2,2,=,\gtreqless}_3 = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs^{2,2,=,>}_3 = \{u \neq 1\}, \\ cs^{2,2,=,=}_3 = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF^{2,2,=,\gtrless}_{7,\kappa} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs^{2,2,=,>}_{7,\kappa} = \{\kappa = 1\}, \\ cs^{2,2,=,<}_{7,\kappa} = \{\kappa = -1\}; \end{matrix}$$

$$CF^{3,2,=,\gtreqless}_7 = \sigma\begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs^{3,2,=,>}_7 = \{u \neq \pm 1\}, \\ cs^{3,2,=,=}_7 = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF^{3,2,=,<}_{12} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad cs^{3,2,=,<}_{12} = \{u < -1/4\};$$

$$CF^{3,2,=,=}_{a,13} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad cs^{3,2,=,=}_{13} = \{u = 1\}.$$

Утверждение 2.2. *Только следующие формы из списка 2.2 при указанных значениях параметров сводятся к предшествующим, согласно СП, структурным формам:*
$NSF^{3,2,=,>}_7$ *при* $u = -1$ *заменой* (1.5) *с* $r_1 = r_2$, $s_1 = 0$ *сводится к* $SF^{2,2}_7$;
$NSF^{3,2,=,>}_{12}$ $(u > -1/4)$, $NSF^{3,2,=,=}_{12}$ $(u = -1/4)$ *заменой* (1.5) *с* $r_1 = (1 + \sqrt{1 + 4u})r_2/2$, $s_1 = 0$ *сводятся к* $SF^{3,2}_7$;
$NSF^{3,2,=,>}_{13}$ $(u \neq 1)$ *заменой* (1.5) *с* $r_2 = (1 - u)r_1$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{2,2}_3$.

Набор 2.2. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2.4:
$\varpi_1 = 2p_2\beta + \lambda_*$, $\varpi_2 = 2q_1 - \lambda_*\beta$, $\varpi_3 = (p_1 - q_2)\beta - 2q_1$,
$\varpi_4 = p_2\beta^2 + 2p_1\beta - q_1$, $\varpi_5 = p_2\beta^2 + (p_1 - q_2)\beta - q_1$, $\varpi_6 = p_1 - q_2 + 2p_2\beta$;
$L^{2,2,=,>}_3 = \{r_1 = [\,0 \vee |\varpi_1^2\lambda_2|^{-1/2}\,],\ s_1 = [\,1 \vee 0\,],\ r_2 = [\,|\varpi_2^2\lambda_1|^{-1/2} \vee 0\,],\ s_2 = [\,0 \vee 1\,]\}$;
$L^{2,2,=,>}_{7,+1} = \{r_1, -s_1 = \varpi_1^{-1}\varpi_2 r_2,\ r_2, s_2 = |4\varpi_2^2\lambda_2|^{-1/2}\}$;
$L^{3,2,=,>}_7 = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\varpi_1^{-1}\varpi_2 s_2,\ r_2 = |\varpi_2^2\lambda_1|^{-1/2},\ s_2 = \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}r_2\}$;
$L^{2,2,=,=}_3 = \{r_1 = |p_1|^{-1/2},\ s_1 = -\beta,\ r_2 = 0,\ s_2 = 1\}$;
$L^{3,2,=,=}_7 = \{r_1 = 0,\ s_1 = \nu r_2,\ r_2 = [\,|\varpi_3^2\nu|^{-1/2} \vee |(\beta p_2)^2\nu|^{-1/2}\,]$,
$s_2 = [\,2\beta\varpi_3^{-1}\nu r_2 \vee -(\beta p_2)^{-1}r_2\,]\}$;
$L^{3,2,=,=}_{13} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = [\,|4\beta^2\nu|^{-1/2} \vee |\nu|^{-1/2}\,],\ r_2 = \nu^{-1}s_1\}$;

$L_{7,-1}^{3,2,=,<} = \{r_1, s_2 = (-D)^{1/4}(2^{3/2}p_2\varpi_4)^{-1},\ -s_1, r_2 = (p_1+\beta p_2)(-D)^{-1/4}(\sqrt{2}p_2\varpi_4)^{-1}\}$;
$L_{12}^{3,2,=,<} = \{r_1 = (\delta_{pq} + \nu(\beta p_2 - q_2)(-D)^{-1/2}\rho^{-1},\ s_1 = \delta_{pq}\varpi_6(-D)^{-1/2}(4\nu\rho)^{-1}$,
$r_2 = (\beta p_2 - q_2)(2\rho)^{-1},\ s_2 = \delta_{pq}(4\nu\rho)^{-1}\}$, где $\rho = p_2\varpi_5|2\nu|^{1/2}$.

Теорема 2.2. *Любая система* (1.4) *с* $l = 2$, *записанная в виде* ($2.1^=$) *согласно* (2.2), *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.2. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,=,*}$ *приведены:*
a) условия на P_0^2 *и* H *системы* ($2.1^=$), *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть системы* ($2.1^=$) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,=,*}$:

$CF_3^{2,2,=,>}$: *a)* $D > 0,\ [\,\varpi_1 = 0 \vee \varpi_2 = 0\,]$, *b)* J_1^2, $L_3^{2,2,=,>}$, *c)* $\sigma = [\,\mathrm{sign}\,\lambda_1 \vee \mathrm{sign}\,\lambda_2\,]$, $u = [\,\lambda_1^{-1}\lambda_2 \vee \lambda_1\lambda_2^{-1}\,]$;

$CF_{7,+1}^{2,2,=,>}$: *a)* $D > 0,\ \varpi_1, \varpi_2 \neq 0,\ \lambda_1 = -\lambda_2$, *b)* J_1^2, $L_{7,+1}^{2,2,=,>}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\lambda_2$;

$CF_7^{3,2,=,>}$: *a)* $D > 0, \varpi_1, \varpi_2 \neq 0, \lambda_1 \neq -\lambda_2$, *b)* J_1^2, $L_7^{3,2,=,>}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_1$, $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2$;

$CF_3^{2,2,=,=}$: *a)* $D = 0,\ q_1 = 0,\ p_2 = 0$, *b)* $L_3^{2,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,p_1$;

$CF_7^{3,2,=,=}$: *a)* $D = 0,\ [\,q_1 \neq 0,\ \varpi_3 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0,\ \beta \neq 0\,]$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L_7^{3,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$;

$CF_{13}^{3,2,=,=}$: *a)* $D = 0,\ [\,q_1 \neq 0, \beta \neq 0, \varpi_3 = 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0, \beta = 0\,]$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L_{13}^{3,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$;

$CF_{7,-1}^{2,2,=,<}$: *a)* $D < 0,\ q_2 = -p_1$, *b)* J_3^2, $L_{7,-1}^{3,2,=,<}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF_{12}^{3,2,=,<}$: *a)* $D < 0,\ \nu \neq 0$, *b)* J_3^2, $L_{12}^{3,2,=,<}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu$, $u = -\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$.

Доказательство. В зависимости от знака дискриминанта D из (2.3) система ($2.1^=$) с $\gamma = \beta^2$ одной из замен J_1^2, J_{2a}^2 или J_{2b}^2, J_3^2 сведена соответственно к системе (2.9), (2.10), (2.11) с жордановой матрицей $\widetilde{H}$ и общим множителем $\widetilde{P}_0^2$. При этом $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} \geq 0$, $\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} > 0$, $\tilde{\beta}^2 = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$ в силу (2.5), (2.6).

Далее, в каждой из полученных систем сделана произвольная замена (1.5), преобразующая ее в систему (2.12), из которой и будут выделяться канонические формы.

В системе (2.12) общий множитель $\breve{P}_0^2$ имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha} > 0: \quad \breve{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}r_1 + \tilde{\beta}r_2)^2, \quad \breve{\beta} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}r_1 + \tilde{\beta}r_2)(\tilde{\alpha}s_1 + \tilde{\beta}s_2), \quad \breve{\gamma} = \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}s_1 + \tilde{\beta}s_2)^2;\\
&\tilde{\alpha} = 0 \ \ (\tilde{\beta} = 0,\ \tilde{\gamma} > 0): \quad \breve{\alpha} = \tilde{\gamma}r_2^2, \quad \breve{\beta} = \tilde{\gamma}r_2s_2, \quad \breve{\gamma} = \tilde{\gamma}s_2^2.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

В формуле (2.13) всегда можно сделать, например, $\breve{\beta} = 0$, $\breve{\gamma} = 0$. Для этого в замене (1.5) достаточно зафиксировать следующую связь между s_1 и s_2 :

$$\tilde{\alpha} \neq 0: \ s_1 = -\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}s_2, \qquad \tilde{\alpha} = 0: \ s_2 = 0, \tag{2.14}$$

в результате которой в получаемой системе (2.12) два правых столбца $\breve{A}$ будут нулевыми.

1) $D > 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sigma_0\sqrt{D} \neq 0)$, (см. прил. 3.4.1). Из системы ($2.1^=$) заменой J_1^2 получена система (2.9), у которой в $\widetilde{P}_0^2 : \tilde{\alpha} = \varpi_1^2$, $\tilde{\beta} = \varpi_1\varpi_2$, $\tilde{\gamma} = \varpi_2^2$.

Пусть замена (1.5) при условии (2.14) сводит систему (2.9) к системе (2.12), у которой коэффициенты $\breve{P}_0^2$ определены в (2.13).

1_1) $\tilde{\alpha} = 0$ $(\tilde{\gamma} > 0,\ s_2 = 0)$. Тогда система (2.12) $= \tilde{\gamma}r_2^2 \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)r_1s_1^{-1} & \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При

$r_1=0,\ s_1=1,\ r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq1$.

$1_2)$ $\tilde\alpha>0$. Тогда система (2.12) имеет вид

$$\breve A=(r_1+\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda_1r_1+\tilde\beta\lambda_2r_2 & \tilde\beta(\lambda_2-\lambda_1)s_2 & 0 & 0\\ \tilde\alpha(\lambda_2-\lambda_1)r_1r_2s_2^{-1} & \tilde\alpha\lambda_2r_1+\tilde\beta\lambda_1r_2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

$1_2^1)$ $\tilde\beta=0$ $(\tilde\gamma=0,s_1=0)$. Тогда система (2.15) $=\tilde\alpha r_1^2\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ (\lambda_2-\lambda_1)r_2s_2^{-1} & \lambda_2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2=0,\ s_2=1,\ r_1=(\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2}$ – это $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq1$.

$1_2^2)$ $\tilde\beta\neq0$.

$1_2^{2a})$ $\lambda_1=-\lambda_2\ \Leftrightarrow p_1+q_2=0$. Тогда при $r_1=\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2$ система (2.15) $=$ $4\tilde\gamma r_2^2\lambda_2\begin{pmatrix}0 & r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ r_2s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2,s_2=(4\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}$ – это $CF_{7,+1}^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$.

$1_2^{2b})$ $\lambda_1\neq-\lambda_2$. Тогда при $r_1=0$ система (2.15) $=\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\lambda_2 & (\lambda_2-\lambda_1)r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2},\ s_2=\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ эта система – $NSF_7^{3,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1$, $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq\pm1$.

В системе (2.15) можно еще сделать $\breve b_2=0$ или $\breve a_1=0$, получая $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,>}$ предшествует согласно СП2.

2) $D=(p_1-q_2)^2+4p_2q_1=0$, т. е. в (2.3) $\lambda_1,\lambda_2=\nu=(p_1+q_2)/2\neq0$ (см. прил. 3.4.2).

$2_1)$ Из $(2.1^=)$ с $\gamma=\beta^2$ при $q_1\neq0$ заменой J_{2a}^2 получена система (2.10) с $\tilde\alpha=4\beta^2$, $\tilde\beta=-2\beta((p_1-q_2)\beta-2q_1)$, $\tilde\gamma=((p_1-q_2)\beta-2q_1)^2$ согласно (2.10_a), а при $q_1=0$, $p_2\neq0$ $(q_2,p_1=\nu)$ заменой J_{2b}^2 – (2.10) с $\tilde\alpha=1$, $\tilde\beta=\beta p_2$, $\tilde\gamma=(\beta p_2)^2$ согласно (2.10_b).

Пусть замена (1.5) при условии (2.14) сводит систему (2.10) к системе (2.12), у которой коэффициенты $\breve P_0$ определены в (2.13).

$2_1^1)$ $\tilde\alpha=0$ $(\tilde\gamma>0)$. Тогда система (2.12) $=\tilde\gamma r_2\begin{pmatrix}r_1+\nu r_2 & s_1 & 0 & 0\\ -r_1^2s_1^{-1} & \nu r_2-r_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=0$, $r_2=(\tilde\gamma|\nu|)^{-1/2},\ s_1=\nu r_2$ $(s_2=0)$ – это $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\nu,\ u=1$.

В системе (2.12) помимо $\breve a_2=0$ можно получить $\breve b_2=0$ или $\breve a_1=0$, что превратит ее в $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,=}$ предшествует согласно СП2.

$2_1^2)$ $\tilde\alpha=[\,4\beta^2\vee1\,]>0$. Тогда система (2.12) имеет вид

$$\breve A=(r_1+\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix}(\tilde\alpha\nu r_1+\tilde\beta)r_1+\tilde\beta\nu r_2 & -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2s_2 & 0 & 0\\ \tilde\alpha r_1^2s_2^{-1} & (\tilde\alpha\nu r_1-\tilde\beta)r_1+\tilde\beta\nu r_2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (2.16)$$

$2_1^{2a})$ $\tilde\beta=0$ $(s_1=0)\Leftrightarrow[\,\varpi_3=0\vee\beta=0\,]$. Тогда (2.16) $=\tilde\alpha r_1^2\begin{pmatrix}\nu & 0 & 0 & 0\\ r_1s_2^{-1} & \nu & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=(\tilde\alpha|\nu|)^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=\nu^{-1}r_1$ – это $CF_{a,13}^{3,2,=,=}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\nu$. И – перенумерация (1.9).

$2_1^{2b})$ $\tilde\beta\neq0$ $(\tilde\gamma>0)$. Тогда при $r_1=0$ система (2.16) $=\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\nu & -\tilde\beta^{-1}\tilde\gamma r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ 0 & \nu & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2=(\tilde\gamma|\nu|)^{-1/2},\ s_2=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\nu r_2$ $(s_1=\nu r_2)$ – это $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\nu,\ u=1$.

Случаи 2_1^1) и 2_1^{2b}) для $q_1 \neq 0$ ($\beta = 0$ и $\beta \neq 0$) объединены в формулировке теоремы. Из (2.16) можно также получить $SF_{12}^{3,2}$ и $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,=}$ предшествует.

2_2) $q_1 = 0$, $p_2 = 0$ ($q_2 = p_1$), т. е. в самой системе ($2.1^=$) H – диагональная матрица. Замена (1.5) с $r_1 = |p_1|^{-1/2}$, $s_1 = -\beta$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ сводит ($2.1^=$) к $CF_3^{2,2,=,=}$ ($u = 1$) с $\sigma = \operatorname{sign} p_1$.

3) $D < 0$ ($p_2 q_1 < 0$), (см. прил. 3.4.3). Из системы ($2.1^=$) заменой J_3^2 получена система (2.11) с

$$\tilde{\alpha} = -D, \quad \tilde{\beta} = \sqrt{-D}\varpi_6, \quad \tilde{\gamma} = \varpi_6^2.$$

Пусть замена (1.5) при условии (2.14) сводит систему (2.11) к системе (2.12), у которой коэффициенты $\breve{P}_0$ определены в (2.13). Тогда (2.12) имеет вид

$$(r_1 + \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta} r_2)\begin{pmatrix} (\tilde{\alpha}\nu + \tilde{\beta}\mu)r_1 + (\tilde{\beta}\nu - \tilde{\alpha}\mu)r_2 & -\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)\mu s_2 & 0 & 0 \\ \mu(r_1^2 + r_2^2)s_2^{-1} & (\tilde{\alpha}\nu - \tilde{\beta}\mu)r_1 + (\tilde{\beta}\nu + \tilde{\alpha}\mu)r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.17)$$

3_1) $\nu = 0 \Leftrightarrow q_2 = -p_1$, при этом $\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 = -4Dp_2\varpi_4 \neq 0$, так как дискриминант ϖ_4 равен D, а $D = 4(p_1^2 + p_2 q_1)$. Тогда при $r_2 = \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta} r_1$ система (2.17) $= \tilde{\alpha}^{-3}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^2 \mu r_1^2 \times$ $\begin{pmatrix} 0 & -r_1^{-1}s_2 & 0 & 0 \\ r_1 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde{\alpha}^{3/2}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^{-1}\mu^{-1/2}$ – это $CF_{7,-1}^{2,2,=,<}$ с $\sigma = 1$.

3_2) $\nu \neq 0 \Leftrightarrow p_1 + q_2 \neq 0$, при этом $\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 \neq 0$. Тогда в системе (2.17) при $r_1 = \tilde{\alpha}^{1/2}(\tilde{\alpha}\mu + \tilde{\beta}\nu)\rho$, $r_2 = \tilde{\alpha}^{1/2}(\tilde{\beta}\mu - \tilde{\alpha}\nu)\rho$, $s_2 = \tilde{\alpha}^{3/2}(\nu^2 + \mu^2)(2\nu)^{-1}\rho$, где $\rho = |2\nu|^{-1/2}\mu^{-1}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^{-1}$, элемент $\breve{b}_2 = 0$ и – это $CF_{12}^{3,2,=,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = -(\nu^2 + \mu^2)(2\nu)^{-2} < -1/4$.

В системе (2.17) можно также сделать $\breve{a}_1 = 0$, получая SF с бóльшим индексом. $\square$

В результате оказалась доказанной полнота списка 2.2 $CF_i^{m,2,=}$ при нулевом дискриминанте общего множителя P_0^2 и их линейная неэквивалентность друг другу.

Приведем теперь линейные неособые замены, которые для CF из списка 2.2 позволят выделить минимальные канонические множества, введенные в определении 1.12.

Утверждение 2.3. *Только в $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}$ и $CF_7^{3,2,=,>}$ из списка 2.2 удается ограничить значения параметров $cs_7^{m,2,=}$, а именно: в $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}$ нормировка* (1.8) *с $r_1, -s_2 = 1$ изменяет знак σ; в $CF_7^{3,2,=,>}$ при $\tilde{\sigma} = \sigma$, $\tilde{u} = u$ замена с $r_1 = |\tilde{u}|^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = (1 - \tilde{u})|\tilde{u}|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{u}|\tilde{u}|^{-1/2}$ дает $\sigma = \tilde{\sigma}\operatorname{sign}\tilde{u}$, $u = \tilde{u}^{-1}$.*

Следствие 2.4. *Согласно определению 1.13 имеем: $acs_{7,\kappa}^{2,2,=} = \{\sigma = -1\}$, $acs_7^{3,2,=,>} = \{|u| > 1\}$; у остальных канонических форм из списка 2.2 $mcs^{m,2,=,*} = cs^{m,2,=,*}$.*

Замечание 2.3. В $NSF_{12}^{3,2,=,<}$ в отличие от $NSF_{12}^{3,2,=}$ элемент $b_1 < 0$, так как $u < -1/4$. Поэтому НП2 выполняется и можно осуществить лучшую согласно НП3 нормировку, получая $NSF_{12,new}^{3,2,=,<} = \sigma\begin{pmatrix} v & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ с $D = v^2 - 4$, а значит, $ps_{12,new}^{3,2,=,<} = \{|v| < 2\}$. При этом $NSF_{12}^{3,2,=,<}$ нормировкой с $r_1 = (-u)^{-1/4}$, $s_2 = (-u)^{-3/4}$ сводится к $NSF_{12,new}^{3,2,=,<}$ с $v = (-u)^{-1/2} \in (0, 2)$.

2.5. Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при положительном дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$.

Система (2.1) с положительным дискриминантом многочлена $P_0^2(x)$, имеет вид

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{array}{c} P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \\ \alpha = 1 \text{ или } \alpha, \gamma = 0,\ 2\beta = 1; \end{array} \; D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \quad (\det H = \delta_{pq} \neq 0). \quad (2.1^>)$$

Выделим из списка 2.1 нормированные формы до $NSF_{23}^{4,2}$ включительно, относящиеся к случаю $D_0 > 0$, таких форм – 9.

Выясним, какие $NSF^{m,2,>}$ оказываются каноническими формами, и докажем, что приведенный ниже список содержит все возможные канонические формы системы $(2.1^>)$ со своими каноническими множествами из определения 1.11.

Список 2.3. Семь $CF_i^{m,2,>}$ и их $cs_i^{m,2,>}$ $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u, v \neq 0)$:

$$CF_4^{2,2,>,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_4^{2,2,>,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_4^{2,2,>,=} = \{u = 1\}; \end{array}$$

$$CF_{8,\kappa}^{2,2,>,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_{8,\kappa}^{2,2,>,>} = \{\kappa = 1\}, \\ cs_{8,\kappa}^{2,2,>,<} = \{\kappa = -1\}; \end{array}$$

$$CF_{10}^{3,2,>,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_{10}^{3,2,>,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_{10}^{3,2,>,=} = \{u = 1\}; \end{array}$$

$$CF_{16}^{3,2,>,*} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_{16}^{3,2,>,>} = \{u > -1/4\}, \\ cs_{16}^{3,2,>,=} = \{u = -1/4\}, \\ cs_{16}^{3,2,>,<} = \{u < -1/4\}; \end{array}$$

$$CF_{8,-1}^{4,2,>,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad cs_{8,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq \pm 1\};$$

$$CF_{a,14,-1}^{4,2,>,>} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & u & 0 \end{pmatrix}, \quad cs_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq -1, -2, -3\};$$

$$CF_{23}^{4,2,>,*} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{array}{l} cs_{23}^{4,2,>,>} = \{u \neq 1,\ v > -(1-u)^2/4,\ v \neq u,\ (2u-1)/4,\ u(2-u)/4\}, \\ cs_{23}^{4,2,>,=} = \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\}, \\ cs_{23}^{4,2,>,<} = \{v < -(1-u)^2/4\}. \end{array}$$

Утверждение 2.4. *Только* $NSF_7^{4,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_{12}^{4,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *не являются* $CF^{m,2,>}$, *т. е. при всех допустимых значениях параметров заменами* (1.5) *сводятся согласно СП1 к предшествующим структурным формам.*

Доказательство. $NSF_7^{4,2,>}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = 0$ сводится к $SF_{10}^{3,2}$ или $SF_4^{2,2}$, а $NSF_{12}^{4,2,>}$ той же заменой сводится к $SF_{10}^{3,2}$ или $SF_4^{2,2}$. Непосредственной проверкой установлено, что остальные $NSF^{m,2,>}$ являются $CF^{m,2,>}$. $\square$

Набор 2.3. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2.5:

$\varphi_1 = \tilde{\eta}^2\lambda_1 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\lambda_2,\ \ \varphi_2 = \tilde{\eta}^2\lambda_2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\lambda_1,\ \ \varphi_3{}^{\pm} = 2\tilde{\tau}\nu\,\sigma_\beta \pm \tilde{\gamma},\ \ \varphi_4{}^{\pm} = 2\tilde{\tau}\nu\,\sigma_\beta \pm (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})\mu;$

$L_4^{2,2,>,>} = \{r_1 = 1,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (2\tilde{\beta}\lambda_2)^{-1}\};$

$L1_{10}^{3,2,>,>} = \{r_1 = -|\tilde{\gamma}|^{1/2} D^{1/4} (2\tilde{\beta}\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\gamma,\ s_1 = -\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-1}s_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde{\gamma}|^{-1/2}D^{-1/4}\},$

$L2_{10}^{3,2,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = |\tilde{\alpha}|^{-1/2}D^{-1/4},\ r_2 = |\tilde{\alpha}|^{1/2}D^{1/4}(2\tilde{\beta}\lambda_1)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha,\ s_2 = -\tilde{\alpha}\tilde{\eta}^{-1}s_1\};$

$L_{8,+1}^{2,2,>,>} = \{r_1 = |4\tilde{\alpha}\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = -\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde{\alpha}\tilde{\eta}^{-1}r_1,\ s_2 = |4\tilde{\gamma}\lambda_1|^{-1/2}\};$

$L_8^{4,2,>,>} = \{-r_1, s_1 = v^{1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2},\ r_2, s_2 = v^{-1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2}\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,>} = \{r_1 = \tilde\phi^2\tilde\eta|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}r_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,>} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-1}r_2,\ r_2 = \tilde\phi^2\tilde\eta|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L1_{23}^{4,2,>,>} = \{r_1 = |2\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,$
$s_2 = -|\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(2\nu)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\}$,
$L2_{23}^{4,2,>,>} = \{r_1 = \tilde\phi|\tilde\eta|^{1/2}|\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,$
$s_2 = \tilde\phi|\tilde\eta|^{3/2}|\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}\varphi_2^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\sigma_\beta\}$;
$L1_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{r_1, s_1 = 1,\ r_2 = 0,\ s_2 = -2\}$,
$L2_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = (\tilde u - 2)s_2/2,\ r_2, s_2 = 2|\tilde u(\tilde u-2)|^{-1/2}\}$;
$L_4^{2,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\eta,\ s_1 = \tilde\phi^4\tilde\gamma(p_1\tilde\eta)^{-1},\ r_2 = -\tilde\alpha,\ s_2 = \tilde\phi^4 p_1^{-1}\}$;
$L_{10}^{3,2,>,=} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = |2\tilde\beta|^{-1/2},\ r_2 = \nu^{-1}s_1,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,=} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = -\tilde\phi/2,\ r_2 = -\tilde\phi\tilde\eta\tilde\gamma^{-1}\,\sigma_\beta,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\phi,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(2\tilde\gamma)^{-1}\,\sigma_\beta\}$;
$L_{23}^{4,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\phi,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(\varphi_3^-)^{-1}\,\sigma_\beta\}$;
$L_{8,-1}^{2,2,>,=} = \{r_1, s_2 = |\tilde\eta|^{1/2}(\tilde\alpha^2+\tilde\beta^2)^{-1}\mu^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,<} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde\phi(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2},$
$r_2 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,<} = \{r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,$
$r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi(\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}\}$;
$L_{23}^{4,2,>,<} = \{r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}, s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2, r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1, s_2 = \tilde\phi((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{1/2}/\varphi_4^-\}$.

Утверждение 2.5. *Только следующие формы из списка 2.3 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам:*

1) $NSF_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *: a) при* $u = -1$ *заменой с* $r_2 = -r_1$ $s_1 = s_2$ *сводится к* $SF_8^{2,2}$;
b) $NSF_{8,-1}^{4,2,>,=}$ $(u = 1)$ *той же заменой сводится к* $SF_4^{2,2}$;
2) $NSF_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *: a) при* $u = -3$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = -2s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;
b) при $u = -2$ *заменой с* $r_2 = -r_1$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF_{10}^{3,2}$;
c) $NSF_{14,-1}^{4,2,>,=}$ $(u = -1)$ *той же заменой сводится к* $SF_{16}^{3,2}$;
3) $NSF_{23}^{4,2,>,>}(\tilde\sigma, \tilde u, \tilde v)$ *: a) при* $\tilde u = 1$ $(\tilde v > 0,\ \tilde v \neq 1)$ *заменой* $L_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = (1-\tilde v^{1/2})(1+\tilde v^{1/2})^{-1} \in (-1,1)$ $(|u| < 1)$;
b) при $\tilde u \neq 1$, $\tilde v = (2\tilde u - 1)/4$ $(\tilde u \neq \pm 1/2)$ *заменой* $L1_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $u = -2\tilde u - 1$ $(u \neq -1, -2, -3)$;
c) при $\tilde u \neq 1$, $\tilde v = \tilde u(2-\tilde u)/4$ $(\tilde u \neq \pm 2)$ *заменой* $L2_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $\sigma = -\tilde\sigma\,\mathrm{sign}(\tilde u(\tilde u - 2))$, $u = -(\tilde u + 2)\tilde u^{-1}$ $(u \neq -1, -2, -3)$.

Теорема 2.3. *Любая система* (1.4) *с* $l = 2$, *записанная в виде* $(2.1^>)$ *согласно* (2.2), *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.3. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,>,*}$ *приведены:*
a) условия на коэффициенты системы $(2.1^>)$, *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть системы* $(2.1^>)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,>,*}$:

$CF_4^{2,2,>,>}$ *: a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma = 0$, *b)* J_1^2, $L_4^{2,2,>,>}$, *c)* $\sigma = 1$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF_{10}^{3,2,>,>}$ *: a)* $D > 0$, *в* (2.9) $[\,\tilde\alpha = 0,\ \tilde\gamma \neq 0 \vee \tilde\alpha \neq 0,\ \tilde\gamma = 0\,]$, *b)* J_1^2, $[\,L1_{10}^{3,2,>,>} \vee L2_{10}^{3,2,>,>}\,]$, *c)* $\sigma = [\,-\sigma_0\sigma_\gamma \vee \sigma_0\sigma_\alpha\,]$, $u = [\,\lambda_1\lambda_2^{-1} \vee \lambda_1^{-1}\lambda_2\,]$;

$CF_{8,+1}^{2,2,>,>}$ *: a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta = 0$, $\nu = 0$, *b)* J_1^2, $L_{8,+1}^{2,2,>,>}$, *c)* $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$;

$CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *: a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta = 0, \nu \neq 0$, *b)* J_1^2, $L1_{23}^{4,2,>,>}$, $L_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $v = D(2\nu)^{-2}$, *c)* $\sigma = -\sigma_0\sigma_\alpha$, $u = (|2\nu| - D^{1/2})(|2\nu| + D^{1/2})^{-1}$;

$CF_{16}^{3,2,>,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \neq 0$, $2\tilde\tau\nu = [\,\sigma_0 D^{1/2}|\tilde\beta| \vee -\sigma_0 D^{1/2}|\tilde\beta|\,]$, *b)* J_1^2, $[\,L1_{16}^{3,2,>,>} \vee L2_{16}^{3,2,>,>}\,]$, *c)* $\sigma = [\,\sigma_\alpha \mathrm{sign}\,\lambda_1 \vee \sigma_\gamma \mathrm{sign}\,\lambda_2\,]$, $u = -\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;

$CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \neq 0$, $2\tilde\tau\nu \neq \pm D^{1/2}|\tilde\beta|$, $4\tilde v = [\,2\tilde u - 1 \vee \tilde u(2-\tilde u)\,]$, *где* $\tilde u = \varphi_1\varphi_2^{-1}$, $\tilde v = -D\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2\varphi_2^{-2}$, *b)* J_1^2, $L2_{23}^{4,2,>,>}$, $[\,L1_{14,-1}^{4,2,>,>} \vee L2_{14,-1}^{4,2,>,>}\,]$, *c)* $\sigma = [\,\sigma_0\sigma_\alpha \vee \sigma_0\sigma_\alpha \mathrm{sign}(\tilde u(2-\tilde u))\,]$, $u = [\,-(1+2\tilde u)^{-1} \vee -\tilde u(\tilde u+2)^{-1}\,]$;

$CF_{23}^{4,2,>,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \neq 0$, $2\tilde\tau\nu \neq \pm D^{1/2}|\tilde\beta|$, $4\tilde v \neq \tilde u(2-\tilde u), (2\tilde u - 1)$, *где* $\tilde u = \varphi_1\varphi_2^{-1}$, $\tilde v = -D\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2\varphi_2^{-2}$, *b)* J_1^2, $L2_{23}^{4,2,>,>}$, *c)* $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$, $u = \tilde u$, $v = \tilde v$;

$CF_4^{2,2,>,=}$: *a)* $D = 0$, $q_1, p_2 = 0$, *b)* $L_4^{2,2,>,=}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF_{10}^{3,2,>,=}$: $(2.1^>)$ *при* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma = 0$ *заменами* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L_{10}^{3,2,>,=}$ *сводится к* $CF_{10}^{3,2,>,=}$ *с* $\sigma = \sigma_\beta$;

$CF_{16}^{3,2,>,=}$: 1) *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma \neq 0$, $\varphi_3^+ = 0$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L1_{16}^{3,2,>,=}$, *c)* $\sigma = -\sigma_\beta$;
2) *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma \neq 0$, $\varphi_3^- = 0$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L2_{16}^{3,2,>,=}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$;

$CF_{23}^{4,2,>,=}$: *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0, p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma \neq 0$, $\varphi_3^\pm \neq 0$, *b)* $[\,J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2\,]$, $L_{23}^{4,2,>,=}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_3^+(\varphi_3^-)^{-1}$, $v = -\tilde\gamma^2(\varphi_3^-)^{-2}$;

$CF_{8,-1}^{2,2,>,<}$: *a)* $D < 0$, $\nu = 0$, *в* (2.11) $\tilde\alpha + \tilde\gamma = 0$, *b)* J_3^2, $L_{8,-1}^{2,2,>,<}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$;

$CF_{16}^{3,2,>,<}$: *a)* $D < 0$, $\nu \neq 0$, *в* (2.11) $[\,\varphi_4^+ = 0 \vee \varphi_4^- = 0\,]$, *b)* J_3^2, $[\,L1_{16}^{3,2,>,<} \vee L2_{16}^{3,2,>,<}\,]$, *c)* $\sigma = [\,-\sigma_\beta \vee \sigma_\beta\,]$;

$CF_{23}^{4,2,>,<}$: *a)* $D < 0$, *в* (2.11) $\nu^2 + (\tilde\alpha + \tilde\gamma)^2 \neq 0$, $\varphi_4^\pm \neq 0$, *b)* J_3^2, $L_{23}^{4,2,>,<}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_4^+(\varphi_4^-)^{-1}$, $v = -\mu^2(\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)\tilde\eta^{-2}(\varphi_4^-)^{-2}$.

Доказательство. В зависимости от знака дискриминанта D из (2.3) система $(2.1^>)$ с $\beta^2 > \alpha\gamma$ одной из замен J_1^2, J_{2a}^2 или J_{2b}^2, J_3^2 сведена соответственно к системе (2.9), (2.10), (2.11) с жордановой матрицей $\widetilde H$ и общим множителем $\widetilde P_0^2$. При этом $\tilde\tau, |\tilde\eta| > 0$ в силу (2.6).

Далее, в каждой из полученных систем делается произвольная замена (1.5), преобразующая ее в систему (2.12), из которой и будут выделяться канонические формы.

Следует иметь ввиду замечание 1.2 при сравнении замен из набора 2.3 и замен получаемых в ходе доказательства, когда в конце делается перенумерация. Она переставляет столбцы замены.

В системе (2.12) коэффициенты $\breve\alpha, \breve\gamma$ общего множителя $\breve P_0^2$ всегда можно сделать нулевыми, в результате чего $\breve A$ из (2.12) будет иметь элементы $\breve a_1, \breve a_2 = 0$ и $\breve d_1, \breve d_2 = 0$.

Для этого в замене (1.5) достаточно зафиксировать следующие две связи:

$$s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2, \quad r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1 \qquad (\,\tilde\tau = (\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}, \;\; \tilde\eta = \tilde\beta + \sigma_\beta\tilde\tau, \;\; \mathrm{sign}\,0 = 1), \qquad (2.18)$$

при выполнении которых $\delta = r_1s_2 - r_2s_1 = 2\tilde\tau\tilde\eta^{-1}\sigma_\beta r_1 s_2$, в системе (2.12) $\breve\beta = 2\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1} r_1 s_2$ и, если $\tilde\alpha\tilde\gamma = 0$, то $\tilde\tau = |\tilde\beta| \neq 0$, а если $\tilde\beta = 0$, то $\tilde\tau = \tilde\eta = (-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2} > 0$.

Однако, никакими заменами при условии (2.18) не получить $NSF_{8,-1}^{4,2,>}$, $NSF_{a,14,-1}^{4,2,>}$ из списка 2.3. Но эти формы предшествуют только $NSF_{23}^{4,2,>}$ и именно из нее будут получены согласно утв. 2.5,3) в п.п. 1_2^{1b} и 1_2^{2c} соответственно.

1) $D>0$ $(\lambda_1,\lambda_2\neq 0,\ \lambda_1-\lambda_2=\sigma_0\sqrt{D}\neq 0)$, (см. прил. 3.5.1). Из системы $(2.1^{>})$ заменой J_1^2 получена система (2.9), которую любая замена (1.5) при условии (2.18) сводит к системе (2.12) вида

$$2\tilde\tau\,\sigma_\beta\begin{pmatrix}0 & (\lambda_1-\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_2)r_1s_2 & -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0\\ 0 & \tilde\alpha\tilde\eta^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & (\lambda_2-\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_1)r_1s_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

1_1) $\tilde\alpha\tilde\gamma=0$ $(\tilde\beta\neq 0,\ \tilde\tau=|\tilde\beta|,\ \tilde\eta=2\tilde\beta)$.

1_1^1) $\tilde\alpha,\tilde\gamma=0$ $(r_1,s_2=0)$. Тогда (2.19) $=\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=1$, $s_2=(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}$ – это $CF_4^{2,2,>,>}$ с $\sigma=1$, $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq 1$.

1_1^2) $\tilde\alpha=0,\ \tilde\gamma\neq 0$. Тогда система (2.19) $=\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & -\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0\\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=-|\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\gamma$, $s_2=|\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ – это $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с $\sigma=-\sigma_0\,\mathrm{sign}\,\tilde\gamma$, $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq 1$.

1_1^3) $\tilde\gamma=0,\ \tilde\alpha\neq 0$. Тогда система (2.19) $=\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & 0 & 0\\ 0 & \tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_1)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha$ – это $CF_{a,10}^{3,2,>,>}$ с $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq 1$, $\sigma=\sigma_0\sigma_\alpha$. Перенумерация (1.9) сведет ее к $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с теми же $\sigma,\ u$.

1_2) $\tilde\alpha\neq 0,\tilde\gamma\neq 0$ $(\tilde\tau\neq|\tilde\beta|)$. Тогда системе (2.19) $\breve c_1\breve b_2\neq 0$.

1_2^1) $\tilde\beta=0$, тогда $\tilde\alpha\tilde\gamma<0$ и $\tilde\eta,\tilde\tau=(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}$. Поэтому система (2.19) имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1s_2 & -2\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0\\ 0 & 2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1s_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

1_2^{1a}) $\lambda_2=-\lambda_1\Leftrightarrow q_2=-p_1$. Тогда система (2.20) при $r_1=|4\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=|4\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ – это $CF_{8,+1}^{2,2,>,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde\alpha\lambda_1)\,(=\sigma_\alpha\sigma_0=\sigma_\alpha\mathrm{sign}\,p_1=-\sigma_0\sigma_\gamma)$.

1_2^{1b}) $\lambda_2\neq-\lambda_1$. Тогда (2.20) при $s_2=-|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha$, $r_1=|2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ – это $NSF_{23}^{4,2,>,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2))\,(=\sigma_0\sigma_\alpha)$, $u=1$, $v=D(\lambda_1+\lambda_2)^{-2}$ $(v>0\ ,v\neq 1)$. По утв. 2.5,3) она – неканоническая и сводится к $CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$.

1_2^2) $\tilde\beta\neq 0$. Тогда $\breve b_1^2+\breve c_2^2\neq 0$.

1_2^{2a}) $\breve c_2=0\Leftrightarrow\lambda_2=\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_1\Leftrightarrow\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)=|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2)$, так как $\tilde\alpha\tilde\gamma=(\tilde\beta-\sigma_\beta\tilde\tau)\tilde\eta$. Тогда (2.19) $=\begin{pmatrix}0 & 8\tilde\beta\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_1r_1s_2 & -4\tilde\gamma\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_1s_2^2 & 0\\ 0 & 4\tilde\alpha\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_1r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=\tilde\eta(2\tilde\tau)^{-1}|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=\tilde\eta\tilde\alpha(4\tilde\beta\tilde\tau)^{-1}|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$ – это $CF_{16}^{3,2,>,>}$ с $\sigma=\sigma_\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda_1,\ u=-\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}>-1/4$.

1_2^{2b}) $\breve b_1=0\Leftrightarrow\lambda_1=\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_2\Leftrightarrow\tilde\tau(\lambda_1+\lambda_2)=-|\tilde\beta|(\lambda_1-\lambda_2)$. Тогда система (2.19) $=4\tilde\tau^2\tilde\eta^{-2}\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 0 & \tilde\gamma s_2^2 & 0\\ 0 & -\tilde\alpha r_1^2 & 2\tilde\beta r_1s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=\tilde\eta\tilde\gamma(4\tilde\beta\tilde\tau)^{-1}|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2}$, $s_2=\tilde\eta(2\tilde\tau)^{-1}|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2}$ получаем $CF_{a,16}^{3,2,>,>}$ с $\sigma=\sigma_\gamma\,\mathrm{sign}\,\lambda_2$, $u=-\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$. И далее – перенумерация (1.9).

1_2^{2c}) $\breve{b}_1, \breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{\tau}(\lambda_1+\lambda_2) \pm |\tilde{\beta}|(\lambda_1-\lambda_2) \neq 0$. Тогда система (2.19) при $r_1 = |\tilde{\eta}|^{1/2}|\tilde{\alpha}(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}\tilde{\phi}$, $s_2 = |\tilde{\eta}|^{3/2}|\tilde{\alpha}(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}\tilde{\phi}\varphi_2^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\sigma_\beta$ – это $NSF_{23}^{4,2,>,>}$ с $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$, $u = \varphi_1\varphi_2^{-1}$ $(u \neq 1)$, $v = -\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^2(\lambda_1-\lambda_2)^2\varphi_2^{-2}$ $(v \neq u,\ 4v > -(1-u)^2)$.

Теперь при $v = (2u-1)/4$ или $v = u(2-u)/4$ полученная $NSF_{23}^{4,2,>,>}$ не является канонической, так как согласно утверждению 2.5,3) сводится к $CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$.

А если $v \neq (2u-1)/4,\ u(2-u)/4$, то $NSF_{23}^{4,2,>,>} = CF_{23}^{4,2,>,>}$.

2) $D = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1+q_2)/2 \neq 0)$, (см. прил. 3.5.2).

2_1) $q_1 \neq 0$ или $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ $(q_2 = p_1 = \nu)$. Из $(2.1^>)$ заменой J_{2a}^2 или J_{2b}^2 получена система (2.10), которую любая замена (1.5) при условии (2.18) сводит к (2.12) вида

$$2\tilde{\tau}\begin{pmatrix} 0 & \varphi_3^+\tilde{\eta}^{-1}r_1s_2 & -\tilde{\gamma}^2\tilde{\eta}^{-2}\,\sigma_\beta s_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta r_1^2 & \varphi_3^-\tilde{\eta}^{-1}r_1s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\varphi_3^\pm = 2\tilde{\tau}\nu\,\sigma_\beta \pm \tilde{\gamma}). \tag{2.21}$$

2_1^1) $\tilde{\gamma} = 0$ $(\tilde{\tau} = |\tilde{\beta}|,\ \tilde{\eta} = 2\tilde{\beta})$. Тогда система (2.21) $= 2\tilde{\beta}\begin{pmatrix} 0 & \nu r_1 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & r_1^2 & \nu r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = |2\tilde{\beta}|^{-1/2}$, $s_2 = \nu^{-1}r_1$ – это $CF_{a,10}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = 1$. И – перенумерация (1.9).

2_1^2) $\tilde{\gamma} \neq 0$. Тогда в системе (2.21) $\breve{b}_2\breve{c}_1 \neq 0$, $\breve{b}_1^2 + \breve{c}_2^2 \neq 0$.

2_1^{2a}) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_3^+ = 0$. Тогда система (2.21) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\tilde{\tau}\tilde{\gamma}^2\tilde{\eta}^{-2}\,\sigma_\beta\, s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\tau}\,\sigma_\beta\, r_1^2 & -4\tilde{\tau}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-1}r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = -\tilde{\phi}/2$, $s_2 = -\tilde{\phi}\tilde{\eta}\tilde{\gamma}^{-1}\,\sigma_\beta$ – это $CF_{a,16}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = -\sigma_\beta$, $u = -1/4$. И – (1.9).

2_1^{2b}) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_3^- = 0$. Тогда система (2.21)$= \begin{pmatrix} 0 & 4\tilde{\tau}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-1}r_1s_2 & -2\tilde{\tau}\tilde{\gamma}^2\tilde{\eta}^{-2}\,\sigma_\beta\, s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\tau}\,\sigma_\beta\, r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde{\phi}$, $s_2 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\,\sigma_\beta$ – это $CF_{16}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = -1/4$.

2_1^{2c}) $\breve{b}_1\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_3^\pm \neq 0$.

При $r_1 = \tilde{\phi}$, $s_2 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}(\varphi_3^-)^{-1}\sigma_\beta$ система (2.21) – это $CF_{23}^{4,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_3^+(\varphi_3^-)^{-1}$, $v = -\tilde{\gamma}^2(\varphi_3^-)^{-2}$ $(u \neq \pm 1,\ 4v = -(1-u)^2)$, так как по утверждению 2.5 $NSF_{23}^{4,2,>,=}$ не может быть сведена к $NSF_{8,-1}^{4,2,>,=}$ или $NSF_{14,-1}^{4,2,>,=}$.

2_2) $q_1 = 0,\ p_2 = 0$, т. е. в самой системе $(2.1^>)$ H – диагональная матрица с диагональю (p_1, p_1). Тогда замена (1.5) с $r_1 = \tilde{\eta},\ s_1 = \tilde{\phi}^4\tilde{\gamma}(p_1\tilde{\eta})^{-1},\ r_2 = -\tilde{\alpha},\ s_2 = \tilde{\phi}^4 p_1^{-1}$ сводит $(2.1^>)$ к $CF_4^{2,2,>,=}$ с $\sigma = 1$ $(u = 1)$.

3) $D = (p_1-q_2)^2 + 4p_2q_1 < 0$ $(p_2q_1 < 0)$, (см. прил. 3.5.3). Из системы $(2.1^>)$ получена система (2.11), которую любая замена (1.5) при условии (2.18) сводит к системе (2.12) вида

$$\frac{2\tilde{\tau}\sigma_\beta}{\tilde{\eta}^2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\eta}\varphi_4^+ r_1s_2 & -(\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)\mu s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)\mu r_1^2 & \tilde{\eta}\varphi_4^- r_1s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\varphi_4^\pm = 2\tilde{\tau}\nu\sigma_\beta + (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})\mu). \tag{2.22}$$

3_1) $\nu = 0$ $(\Leftrightarrow p_1 + q_2 = 0)$, $\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} = 0$. Тогда $\tilde{\tau} = (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)^{1/2}$ и (2.22) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\tilde{\tau}^2\tilde{\eta}^{-1}\mu\, s_2^2 & 0 \\ 0 & 4\tilde{\tau}^2\tilde{\eta}^{-1}\mu\, r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde{\phi}^2|\tilde{\eta}|^{1/2}\mu^{-1/2}$ – это $CF_{8,-1}^{2,2,>,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$.

3_2) $\nu^2 + (\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})^2 \neq 0$, тогда $\breve{b}_1^2 + \breve{c}_2^2 \neq 0$.

3^1_2) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^+ = 0$ $(\nu(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}) \neq 0)$. Тогда система (2.22) имеет вид $\dfrac{2\tilde{\tau}\mu\sigma_\beta}{\tilde{\eta}^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)r_1^2 & -2\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde{\phi}(\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)^{1/2}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})^{-1}(4\mu)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}((\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)\mu)^{-1/2}$ – это $CF^{3,2,>,<}_{a,16}$ с $\sigma = -\sigma_\beta$, $u = -(\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)(\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)(2\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}))^{-2} < -1/4$. И далее – перенумерация (1.9).

3^2_2) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^- = 0$ $(\nu(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}) \neq 0)$. Тогда система (2.22) имеет вид $\dfrac{2\tilde{\tau}\mu\sigma_\beta}{\tilde{\eta}^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde{\eta}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})r_1s_2 & -(\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)s_2^2 & 0 \\ 0 & (\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $s_2 = \tilde{\phi}(\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)^{1/2}(\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma})^{-1}(4\mu)^{-1/2}$, $r_1 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}((\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)\mu)^{-1/2}$ – это $CF^{3,2,>,<}_{16}$ с $\sigma = \sigma_\beta$ и u из 3^1_2).

3^3_2) $\breve{b}_1\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_4^\pm \neq 0$.

При $r_1 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}((\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)\mu)^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{\phi}((\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)\mu)^{1/2}(\varphi_4^-)^{-1}$система (2.22) – это $CF^{4,2,>,<}_{23}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_4^+(\varphi_4^-)^{-1}$, $v = -\mu^2(\tilde{\alpha}^2+\tilde{\eta}^2)(\tilde{\gamma}^2+\tilde{\eta}^2)\tilde{\eta}^{-2}(\varphi_4^-)^{-2}$ $(4v < -(1-u)^2)$, так как по утверждению 2.5 $NSF^{4,2,>,<}_{23}$ не может быть сведена к $NSF^{4,2,>,<}_{8,-1}$ или $NSF^{4,2,>,<}_{14,-1}$. $\square$

Приведем теперь линейные неособые замены, которые для CF из списка 2.3 позволят выделить канонические минимальные множества, введенные в определении 1.12.

Утверждение 2.6. *Только для следующих $CF^{m,2,>}$ из списка 2.3 удается ограничить значения параметров в $cs^{m,2,>}$, а именно:*

1) в $CF^{2,2,>}_4$ нормировка (1.8) с $r_1, -s_2 = 1$ изменяет знак σ; при $\tilde{u} = u$, $|\tilde{u}| > 1$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = 1$, $r_2 = \tilde{u}^{-1}$ дает $u = \tilde{u}^{-1}$;

2) в $CF^{2,2,>}_{8,-1}$ перенумерация (1.9), а в $CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$ при $u = 1$ замена с $-r_1, r_2, s_2 = 3^{-1/2}$, $s_1 = 2s_2$ изменяют знак σ;

3) в $CF^{4,2,>,>}_{8,-1}$ при $\tilde{\sigma} = \sigma$, $\tilde{u} = u$, $|\tilde{u}| > 1$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = |\tilde{u}|^{-1/2}$ дает $\sigma = -\tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,\tilde{u}$, $u = \tilde{u}^{-1}$;

4) в $CF^{4,2,>,>}_{23}$ при $\tilde{\sigma} = \sigma$, $\tilde{u} = u$, $|\tilde{u}| > 1$, $\tilde{v} = v$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = |\tilde{v}|^{3/2}(\tilde{u}\tilde{v})^{-1}$, $r_2 = |\tilde{v}|^{-1/2}$ дает $\sigma = \tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,v$, $u = \tilde{u}^{-1}$, $v = \tilde{u}^{-2}\tilde{v}$.

Следствие 2.5. *Согласно определению 1.13 имеем:*
$acs^{2,2,>,>}_4 = \{|u| > 1,\ \sigma = -1\}$, $acs^{2,2,>,=}_4 = \{\sigma = -1\}$, $acs^{2,2,>,<}_{8,-1} = \{\sigma = -1\}$,
$acs^{4,2,>,>}_{8,-1} = \{|u| > 1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{14,-1} = \{\sigma = -1$ *при* $u = 1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{23} = \{|u| > 1\}$;
у остальных канонических форм из списка 2.3 $mcs^{m,2,>,*} = cs^{m,2,>,*}$.

2.6. Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при отрицательном дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$.

2.6.1. Выделение $NSF^{m,2,<}$. Система (2.1) с отрицательным дискриминантом многочлена $P_0^2(x)$ имеет вид

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{matrix} P_0^2 = x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2, \\ D_0 = \beta^2 - \gamma < 0 \quad (\alpha = 1), \end{matrix} \quad H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \ \delta_{pq} = \det H \neq 0, \qquad (2.1^<)$$

Выделим из списка 2.1 нормированные структурные формы до $NSF^{7,2}_2$ включительно, относящиеся к случаю $D_0 < 0$ (см. опр. 2.1), таких форм – 17.

Список 2.4. Семнадцать $NSF^{m,2,<,*}$ со своими $ps^{m,2,<}$ и D $\quad(\sigma=\pm1,\ u,v,w\neq0)$.

$I.\ \ NSF^{4,2,<,\geqslant}_{8,+1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&u&0\\0&1&0&+1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ tps^{4,2,<}_{8,+1};\end{matrix}\quad NSF^{4,2,<,\gtrless}_{34,+1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&u\\1&0&+1&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u,\\ tps^{4,2,<}_{34,+1};\end{matrix}$

$NSF^{5,2,<,\geqslant}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ tps^{5,2,<}_{7};\end{matrix}\quad NSF^{5,2,<,*}_{22}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u+1,\\ tps^{5,2,<}_{22};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,\geqslant}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&uv&0\\0&1&1&v\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps^{6,2,<}_{1}=\{v>1/4\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,\geqslant}_{3}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(1-v)&0&-uv^2\\0&1&1&v\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps^{6,2,<}_{3}=\{v>1/4,\ v\neq1\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,\geqslant}_{4,+1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\0&1&0&+1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ tps^{6,2,<}_{4,+1};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,*}_{6}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(v^{-2}-v)&0&uv^{-3}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-v)^2+4uv^{-2},\\ ps^{6,2,<}_{6}=\{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\ v\neq1\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,*}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&-v&u+v\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u+1)^2+4v,\\ ps^{6,2,<}_{7}=\{v\neq-u\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,*}_{11,+1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\1&0&+1&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}u^2+4v,\\ tps^{6,2,<}_{11,+1};\end{matrix}$

$NSF^{7,2,<,*}_{2}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv^{-1}-v(uv+w)&u+wv^{-1}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u+v)^2+4w,\ \ ps^{7,2,<}_{2}=\{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\\ v\neq1,\ w\neq-uv,-u(v-v^{-2})\};\end{matrix}$

$II.\ \ NSF^{6,2,<,\geqslant}_{5}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&u(v-1)&-uv\\0&1&1&v\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps^{6,2,<}_{5}=\{v>1/4,\ v\neq1\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,*}_{12}=\sigma\begin{pmatrix}0&-uv&u&-uv^2\\1&0&v-v^{-2}&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}v^{-2}-4uv,\\ ps^{6,2,<}_{12}=\{v>4^{-1/3},\ v\neq1\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,*}_{13}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&uv&uv^2(1+v)\\1&1&0&v(1+v)^2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u+v+1)^2-4u,\\ ps^{6,2,<}_{13}=\{v\notin[-4/3,0]\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,*}_{15}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&uv&uv(v-1)\\1&1&0&-v(v-1)^2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(v-1)^2+4u,\\ ps^{6,2,<}_{15}=\{v\notin[0,4/3]\};\end{matrix}$

$NSF^{6,2,<,\gtrless}_{16}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&u&uv\\1&1&v&0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}4u,\\ ps^{6,2,<}_{16}=\{v>1/4\};\end{matrix}$

$NSF^{7,2,<,\geqslant}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv-u+w&v(w-u)\\0&1&1&v\end{pmatrix},\ \begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps^{7,2,<}_{1}=\{v>1/4,\ w\neq u,u(1-v)\}.\end{matrix}$

Замечание 2.4. 1. $NSF^{4,2,<}_{8,+1}=CF^{4,2,<}_{8,+1}$, поскольку предшествующие формы с $D_0<0$ отсутствуют, и канонические множества имеют вид $cs^{4,2,<,>}_{8,+1}=\{u\neq1\}$, $cs^{4,2,<,=}_{8,+1}=\{u=1\}$.

2. В списке 2.4 только у $CF^{4,2,<}_{8,+1}$ и $CF^{6,2,<}_{1}$ матрица H диагональна (см. сп. 2.1).

3. Будет показано, что все NSF из списка 2.4_I – канонические, а из 2.4_{II} – нет.

2.6.2. Случай $D\geq0$. Итак, будем предполагать сначала, что в системе $(2.1^<)$ матрица H имеет вещественные собственные числа λ_1,λ_2.

Набор 2.4. Константы и замены, используемые далее в разделе 2.6.2:

$\psi_1(u)=(u^2-3u+3)^{1/2}(u-3)^{-1}$, $\psi_2(u)=(3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$,

$\psi_3(u) = (u^2+3u+3)(3u^2+3u+1)(3u^2+8u+3)^{-2}$; $\psi_4 = \tilde v(\tilde v - (\tilde v^2-1)^{1/2})/2$;
$L^{4,2,<,>}_{8,+1} = \{r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}\}$;
$L^{4,2,<,>}_{34,+1} = \{r_1 = -v^{1/2}r_2,\ s_1 = (v(4v-1))^{1/4}(2v^{1/2}+1)^{-1},\ r_2 = (v(4v-1))^{-1/4},\ s_2 = v^{-1/2}s_1\}$;
$L1^{5,2,<,>}_7 = \{r_1 = (\tilde u^2 - 3\tilde u+3)^{1/2}(1-\tilde u)^{-1},\ s_1 = 0,\ r_2 = (1-\tilde u)^{-1}s_2,\ s_2 = \psi_1^{-1}(\tilde u)\}$;
$L2^{5,2,<,>}_7 = \{r_1 = \tilde u^{1/3}|\tilde u|^{1/6}(\tilde u-1)^{-1},\ s_1 = |\tilde u|^{-1/2},\ r_2 = (3\tilde u-1)\tilde u^{-1}r_1,\ s_2 = 0\}$;
$L^{5,2,<,>}_{22} = \{r_1 = -(\tilde u^2+3\tilde u+3)^{1/2}(\tilde u-1)^{-1}|\tilde u+1|^{-1/2},\ s_1 = \tilde u(\tilde u+1)^{-1}r_1,$
$r_2 = -(3\tilde u^2+8\tilde u+3)(\tilde u^2+3\tilde u+3)^{-1}r_1,\ s_2 = (\tilde u+1)^{-1}r_2\}$;
$L^{6,2,<,>}_1 = \{r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = \tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}r_1\}$;
$L^{4,2,<,=}_{8,+1} = \{r_1 = -\beta r_2,\ s_1 = |p_1|^{-1/2},\ r_2 = |p_1|^{-1/2}(\gamma-\beta^2)^{-1/2},\ s_2 = 0\}$;
$L^{5,2,<,=}_7 = \{r_1 = 1/2,\ s_1 = -1,\ r_2 = \mp\sqrt3/2,\ s_2 = 0\}$;
$L^{5,2,<,=}_{22} = \{r_1 = \pm\sqrt{14}/7,\ s_1 = \mp5\sqrt{14}/28,\ r_2 = \sqrt{42}/14,\ s_2 = \sqrt{42}/28\}$;
$L^{6,2,<,=}_3 = \{r_1 = 1,\ s_1 = 1/2,\ r_2 = 0,\ s_2 = -(\tilde v + (\tilde v^2-1)^{1/2})/2\}$;
$L^{6,2,<,=}_{4,+1} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde\gamma^{1/2}|\nu|^{-1/2}\tilde\varsigma^{-1},\ r_2 = |\tilde\gamma\nu|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1\}$.

Из системы $(2.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$:
1) при $D>0$ $(\lambda_1,\lambda_2\neq0,\ \lambda_1-\lambda_2 = \sigma_0\sqrt D\neq0)$ заменой J_1^2 из набора 2.1 получена система (2.9), в которой согласно (2.5) и (2.6) $\tilde\alpha,\tilde\gamma>0$ и $\tilde\varsigma = (\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\beta^2)^{1/2}>0$;
2) при $D=0$ $(\lambda_1,\lambda_2=\nu=(p_1+q_2)/2\neq0)$ и $[q_1\neq0\vee q_1=0,\ p_2\neq0]$ заменой $[J^2_{2a}\vee J^2_{2b}]$ из набора 2.1 получена система (2.10) с $\tilde\alpha,\tilde\gamma,\tilde\varsigma>0$.
Наконец, система $(2.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$ при $D=0$ и $q_1,p_2=0$ сразу имеет вид (2.9), но с $\lambda_1,\lambda_2=\nu$, так как в этом случае H диагональна и в ней $p_1,q_2=\nu\neq0$.

Лемма 2.1.
1) (2.9) при: $1_1)$ $\tilde\beta=0$ *заменой* $L^{4,2,<,>}_{8,+1}$ *сводится к* $CF^{4,2,<,>}_{8,+1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2,\ u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$;
$1_2)$ $\tilde\beta\neq0$ *заменой* $L^{6,2,<,>}_1$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,>}_1$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\lambda_2,\ u = \lambda_1\lambda_2^{-1},\ v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;
$2_1)$ *(2.10) заменой* $L^{6,2,<,=}_{4,+1}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}$ $(u=1)$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\nu,\ v = \tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$;
$2_2)$ $(2.1^<)$ *при* $D, q_1, p_2 = 0$ *заменой* $L^{4,2,<,=}_{8,+1}$ *сводится к* $CF^{4,2,<,=}_{8,+1}$ $(u=1)$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,p_1$.

Следствие 2.6. *Все шесть* $NSF^{m,2,<}$ *из списка* 2.4_{II} *при* $D>0$ *и* $D=0$ *каноническими структурными формами не являются.*

Утверждение 2.7. *Только следующие* $NSF^{m,2,<}$ *из списка* 2.4_I *с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам (см. прил. 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3):*

1) $NSF^{4,2,<,>}_{34,+1}$ *с* $ps^{4,2,<,>}_{34,+1} = \{u>0\}$ *при* $u=1$ *заменой* (1.5) *с* $s_1 = s_2,\ r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF^{4,2}_8$;

2) $NSF^{5,2,<,>}_7$ *с* $ps^{5,2,<,>}_7 = \{u\neq1\}$:
a) при $u=3$ *заменой с* $r_1 = 0,\ s_1 = 2s_2$ *сводится к* $SF^{4,2}_8$;
b) при $u=-1$ *заменой с* $s_1 = s_2(1+\sqrt7)/3,\ r_2 = -r_1(1+\sqrt7)/2$ *сводится к* $SF^{4,2}_{34}$;

3) $NSF^{5,2,<,>}_{22}$ *с* $ps^{5,2,<,>}_{22} = \{u>-1/4\}$:
a) при $u=3/2$ *заменой с* $r_1 = -r_2(\sqrt7+1)/2,\ s_1 = s_2(\sqrt7-1)/2$ *сводится к* $SF^{4,2}_8$;
b) при $u = [\,6\vee4\mp\sqrt{13}\,]$ *заменой с* $r_1 = [\,4r_2/3\vee(-1\pm\sqrt{13})r_2/6\,],\ s_2 = [\,-3s_1\vee(-1\mp\sqrt{13})s_1/6\,]$ *сводится к* $SF^{5,2}_7$;

4) $NSF^{6,2,<,>}_1(\tilde\sigma,\tilde u,v)$ *с* $ps^{6,2,<,>}_1 = \{\tilde u\neq1,\ v>1/4\}$:
a) при $\tilde u=-1$ *заменой* $L^{4,2,<,>}_{34,+1}$ *сводится к* $NSF^{4,2,<,>}_{34,+1}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma,\ u = (2v^{1/2}-1)(2v^{1/2}+1)^{-1}$;
b) при $\tilde u\neq-1,[3\vee1/3],\ v = [\psi_1^2(\tilde u)\vee\psi_2(\tilde u)]$ *заменой* $[L1^{5,2,<,>}_7\vee L2^{5,2,<,>}_7]$ *сводится к* $NSF^{5,2,<,>}_7$ *с* $\sigma = [\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,\tilde u],\ u = [\tilde u\vee\tilde u^{-1}]$;

c) при $\tilde u \neq -1,\ v = \psi_3(\tilde u)$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,>}$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma\,\mathrm{sign}(\tilde u + 1)$, $u = -\tilde u(\tilde u + 1)^{-2}$;

5) $NSF_3^{6,2,<,=}$ *с* $ps_3^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1\}$:
a) при $v = 1/3$ *заменой с* $r_2 = -3r_1,\ s_2 = 0$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,=}$;
b) при $v = (49 \mp 7\sqrt{46})/6$ *заменой с* $r_1 = r_2(11 \mp 2\sqrt{46})/6,\ s_1 = s_2(-38 \pm 5\sqrt{46})/6$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,=}$;

6) $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}(\tilde\sigma, 1, \tilde v)$ *с* $ps_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1\}$:
a) при $v = \pm 2/\sqrt{3}$ *заменой* $L_7^{5,2,<,=}$ *сводится к* $CF_7^{5,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$;
b) при $v = \mp 7/\sqrt{3}$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,=}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,=}$ $(u = -1/4)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$;
c) при $|\tilde v| \geq 1$ *заменой* $L_3^{6,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_3^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma,\ v = \psi_4(\tilde v)$.

Полученные результаты позволяют в случае $l = 2,\ D_0 < 0,\ D \geq 0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

Список 2.5. Пять $CF_i^{m,2,<,>}$, пять $CF_i^{m,2,<,=}$ и их $cs^{m,2,<,\geqslant}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v \neq 0)$.

$$CF_{8,+1}^{4,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\}; \end{array}$$

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \quad cs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0,\ u \neq 1\};$$

$$CF_7^{5,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_7^{5,2,<,>} = \{u \neq \pm 1, 3\}, \\ cs_7^{5,2,<,=} = \{u = 1\}; \end{array}$$

$$CF_{22}^{5,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} cs_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4,\ u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\}, \\ cs_{22}^{5,2,<,=} = \{u = -1/4\}; \end{array}$$

$$CF_1^{6,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad cs_1^{6,2,<,>} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi_1^2(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\};$$

$$CF_3^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad cs_3^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\};$$

$$CF_{4,+1}^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad cs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ |v| < 1\}.$$

Теорема 2.4. *Любая система* (1.4) *с* $l = 2$, *записанная в виде* ($2.1^<$) *согласно* (2.2) *и имеющая* $D \geq 0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.5. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,<,>}$ *и* $CF_i^{m,2,<,=}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* ($2.1^<$), *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть системы* ($2.1^<$) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,>}$ *или* $cs_i^{m,2,<,=}$:

$CF_{8,+1}^{4,2,<,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9)$\tilde\beta = 0$; *b)* J_1^2, $L_{8,+1}^{4,2,<,>}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2,\ u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta \neq 0,\ \nu = 0$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$, $L_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$; *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\lambda_2,\ u = (\tilde\alpha\tilde\gamma - |\tilde\beta|)(\tilde\alpha\tilde\gamma + |\tilde\beta|)^{-1}$;

$CF_7^{5,2,<,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta \neq 0$, $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} = [\,\psi_1^2(\tilde u) \vee \psi_2(\tilde u)\,]$, *где* $\tilde u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq -1, [3 \vee 1/3]$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$, $[\,L1_7^{5,2,<,>} \vee L2_7^{5,2,<,>}\,]$; *c)* $\sigma = [\,\mathrm{sign}\lambda_2 \vee \mathrm{sign}\lambda_1\,],\ u = [\,\tilde u \vee \tilde u^{-1}\,]$;

$CF_{22}^{5,2,<,>}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta \neq 0$, $\tilde u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq -1, (-5 \pm \sqrt{13})/6, (-5 \mp \sqrt{13})/2, (-4 \pm \sqrt{7})/3, -3/2, -2/3$, $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} = \psi_3(\tilde u)$; *b)*$J_1^2, L_1^{6,2,<,>}, L_{22}^{5,2,<,>}$; *c)*$\sigma = \mathrm{sign}\,\nu, u = -\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$;

$CF_1^{6,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* (2.9) $\tilde\beta\neq 0$, $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq -1$, $\tilde v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}\neq\psi_1^2(\tilde u),\psi_2(\tilde u)$, $\psi_3(\tilde u)$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$, $u=\tilde u$, $v=\tilde v$;

$CF_{8,+1}^{4,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $q_1=0$, $p_2=0$; *b)* $L_{8,+1}^{4,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\operatorname{sign}p_1$;

$CF_7^{5,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}=\pm 2/\sqrt3$, *где* $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a)\vee(2.10_b)]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_7^{5,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\nu$;

$CF_{22}^{5,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}=\pm 7/\sqrt3$, *где* $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a)\vee(2.10_b)]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_{22}^{5,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\nu$;

$CF_3^{6,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $|\tilde v|\geq 1$, $|\tilde v|\neq 2/\sqrt3,\,7/\sqrt3$, *где* $\tilde v=\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$, $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a)\vee(2.10_b)]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_3^{6,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\nu$, $v=\psi_4$;

$CF_{4,+1}^{6,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $|\tilde v|<1$, *где* $\tilde v=\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$, $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a)\vee(2.10_b)]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\nu$, $v=\tilde v$.

Доказательство. I. $D>0$ (см. прил. 3.6.2). По лемме 2.1, 1_2) при $\tilde\beta\neq 0$ система (2.9), полученная из $(2.1^<)$ заменой J_1^2, всегда сводится к $NSF_1^{6,2,<,>}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ с $\tilde\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$, $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}$, $v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}>1/4$. А эта $NSF_1^{6,2,<,>}$ согласно утверждению 2.7, 4) может быть сведена к одной из трех предшествующих $NSF^{m,2,<,>}$ из списка 2.5.

Остается уточнить ограничения, гарантирующие сведение к $CF^{m,2,<,>}$.

4_a) При $\tilde u=-1\Leftrightarrow\lambda_2=-\lambda_1\Leftrightarrow\nu=0$ получена $CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ с $\sigma=\tilde\sigma$, $u=(2v^{1/2}-1)(2v^{1/2}+1)^{-1}=(\tilde\alpha\tilde\gamma-|\tilde\beta|)(\tilde\alpha\tilde\gamma+|\tilde\beta|)^{-1}$. При этом $0<u<1$, и ограничений нет, так как $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ согласно утверждению 2.7,1) сводится к $SF_8^{4,2}$ только при $u=1$.

4_b) При $\tilde u\neq -1,[3\vee 1/3]$, $v=[\,\psi_1^2(\tilde u)\vee\psi_2(\tilde u)\,]$ получена $CF_7^{5,2,<,>}$ с $\sigma=[\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u]$ $(\tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u=\operatorname{sign}\lambda_1)$, $u=[\tilde u\vee\tilde u^{-1}]$. При этом $u\neq -1,3$, и ограничений нет, так как $NSF_7^{5,2,<,>}$ согласно 2.7,2) сводится к предшествующим формам только при $u=-1,3$.

4_c) При $\tilde u\neq -1\Leftrightarrow\nu\neq 0$, $v=\psi_3(\tilde u)$ получена $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ с $\sigma=\tilde\sigma\operatorname{sign}(\tilde u+1)=\operatorname{sign}\nu$, $u=-\tilde u(\tilde u+1)^{-2}=-\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$. Кроме того $\tilde u\neq(-4\pm\sqrt7)/3$, иначе $u=3/2$, $\tilde u\neq -3/2$, $-2/3$, иначе $u=6$, $\tilde u\neq(-5\pm\sqrt{13})/6$, $(-5\mp\sqrt{13})/2$, иначе $u=4\mp\sqrt{13}$, так как $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ согласно утверждению 2.7,3) сводится к предшествующим формам при таких u.

II. $D=0$ (см. прил. 3.6.3). По лемме 2.1, 2_1) при $[\,q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$ система (2.10), полученная из $(2.1^<)$ заменой $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, всегда сводится к $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}(\tilde\sigma,1,\tilde v)$ с $\tilde\sigma=\operatorname{sign}\nu$, $\tilde v=\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$. А эта $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ согласно утв. 2.7,6) может быть сведена к одной из трех предшествующих ей $CF^{m,2,<,=}$ из списка 2.5.

В частности, в 6_c) при $|\tilde v|\geq 1$ и, дополнительно, $|\tilde v|\neq 2/\sqrt3,7/\sqrt3$ получена $CF_3^{6,2,<,=}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\nu$, $v=\psi_4(\tilde v)$, так как $\tilde v=-2/\sqrt3\Leftrightarrow v=1$ и $v=1/3$ при $\tilde v=2/\sqrt3$, $v=(49\pm 7\sqrt{46})/6$ при $\tilde v=\mp 7/\sqrt3$, а $NSF_3^{6,2,<,=}$ согласно утверждению 2.7,5) сводится к предшествующим формам только при таких значениях v.
Остальные результаты теоремы в достаточной степени очевидны. □

2.6.3. Случай $D<0$. Будем предполагать теперь, что в системе $(2.1^<)$ матрица H имеет комплексно сопряженные собственные числа λ_1,λ_2.

Набор 2.5. Константы, интервалы и замены, используемые далее в разделе 2.6.3:
$\psi_5=4\hat v^6(\hat u-1)^2+4\hat v^3(2\hat u+1)+1$, $\psi_6=\hat v^3(1-\hat u)-1+\psi_5^{1/2}$; $\psi_7^{\pm}=(v^3-2\pm 2(1-v^3)^{1/2})v^{-2}$;
$\psi_8=\tilde\gamma\nu+\tilde\beta\mu$, $\psi_9=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(9\tilde\alpha\tilde\gamma-8\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{10}=2\tilde\gamma\nu-\tilde\beta\mu$,
$\psi_{11}=\tilde\gamma^3\nu^3+3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2+2\tilde\alpha\tilde\gamma-2\tilde\beta^2)\nu\mu^2+\tilde\beta(4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\underline{\theta_1}\in\mathbb{R}^1$ – нуль $\psi_{11}(\nu,1)$,

$\psi_{12}=\tilde\gamma^2\nu^2-4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(4\tilde\beta^2+9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13}=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu-(3\tilde\alpha\tilde\gamma-4\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{14}^{\pm}=-\tilde\beta\pm\sqrt3\tilde\varsigma$, $\psi_{15}^{\pm}=2\tilde\varsigma\pm\sqrt3\tilde\beta$, $\psi_{16}=4\tilde\alpha\tilde\gamma-3\tilde\beta^2$, $\psi_{17}=\tilde v^2-3\tilde v+9$, $\psi_{18}=4\tilde v^2-3\tilde v+9+(4\tilde v+3)\psi_{17}^{1/2}$, $\psi_{19}=-(\tilde v^6+6\tilde v^{9/2}+13\tilde v^3+12\tilde v^{3/2}+4)(\tilde v^6-5\tilde v^3+4)^{-1}$, $\psi_{20}^{\mp}=\tilde u(3\tilde u\mp\sqrt3)(2\mp\sqrt3\tilde u)^{-1}$, $\psi_{21}=(\tilde v-3+(\tilde v^2-3\tilde v+9)^{1/2})^2(3\tilde v)^{-1}$; $\psi_{22}=\tilde v^2\tilde w^2-5\tilde v^4\tilde w+2\tilde v\tilde w+4\tilde v^6+4\tilde v^3+1$, $\psi_{23}=2\tilde v\tilde w-5\tilde v^3+2+2\psi_{22}^{1/2}$, $\psi_{24}=\tilde v^3-\tilde u\tilde v^2+\tilde u^2\tilde v-3$, $\underline{\theta_2(u)}>0$ – нуль $\psi_{24}(u,\theta)$, $\psi_{25}^{\pm}=(\tilde v^2\pm(12\tilde v-3\tilde v^4)^{1/2})(2\tilde v)^{-1}$, $\psi_{26}=2\tilde v^3+\tilde u\tilde v^2-\tilde u^2\tilde v-9$, $\underline{\theta_3(u)}\in\mathbb{R}^1-\forall$ нуль $\psi_{26}(u,\theta)$, $\psi_{27}=4\tilde v^2\tilde w^2-4\tilde v\tilde w(2\tilde v^3-3\tilde u\tilde v^2-2)+(\tilde v^3-3\tilde u\tilde v^2+2)^2$, $\psi_{28}=2\tilde v\tilde w-2\tilde v^3+3\tilde u\tilde v^2+2-\psi_{27}^{1/2}$, $\psi_{29}=\tilde u\tilde v^2-\tilde u^2\tilde v-1$, $\psi_{30}=\theta_3^2(\tilde u)(2\tilde u-\theta_3(\tilde u))^2\psi_{29}^{-1}(\tilde u,\theta_3(\tilde u))(8\theta_3^3(\tilde u)-5\psi_{29}(\tilde u,\theta_3(\tilde u))-32)^{-1}$, $\psi_{31}=-\psi_{29}(\tilde u,\theta_3(\tilde u))(3\tilde w+4\tilde u^2+2\theta_3(\tilde u)\tilde u-2\theta_3^2(\tilde u))(\theta_3(\tilde u)(2\tilde u-\theta_3(\tilde u))\tilde w)^{-1}$, $\psi_{32}=3(\tilde u^3-3\tilde u^2+6\tilde u+1)(\tilde u^2-\tilde u+1)((\tilde u-2)(2\tilde u-1)(\tilde u+1))^{-1}$, $\psi_{33}=3(\tilde u\tilde v^6-2\tilde u^2\tilde v^5+(4\tilde u^3-1)\tilde v^4-\tilde u(4\tilde u^3+1)\tilde v^3+\tilde u^2(\tilde u^3-6)\tilde v^2+(6\tilde u^3+2)\tilde v+5\tilde u)(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)\psi_{24})^{-1}$, $\psi_{34}=(\tilde v^4-\tilde u\tilde v^3+3\tilde u^2\tilde v^2-\tilde u^3\tilde v-2\tilde v-5\tilde u)\psi_{29}^{-1}$, $\psi_{35}=(2\tilde u-\theta_2(\tilde u))(3\theta_2(\tilde u)\tilde u^3-3\theta_2^2(\tilde u)\tilde u^2+\theta_2^3(\tilde u)\tilde u-\tilde u+\theta_2^4(\tilde u)-4\theta_2(\tilde u))$, $\psi_{36}=-(3\psi_{26}(\tilde u,\theta_3(\tilde u))\tilde w+2(2\tilde u-\theta_3(\tilde u))(3\theta_3(\tilde u)\tilde u^3-6\theta_3^2(\tilde u)\tilde u^2+5(\theta_3^3(\tilde u)-1)\tilde u+2\theta_3^4(\tilde u)-11\theta_3(\tilde u)))((8\theta_3^3(\tilde u)-5\psi_{29}(\tilde u,\theta_3(\tilde u))-32)\tilde w)^{-1}$;

$\hat a_1^*=((\hat u^2\hat v^6-2\hat v^3(\hat v^3-1)\hat u+\hat v^6+10\hat v^3-2)\psi_5^{1/2}+2\hat u^3\hat v^9-6\hat v^6(\hat v^3-1)\hat u^2+6\hat v^3(\hat v^3-1)^2\hat u-2(\hat v^3-1)^3)(9\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat b_1^*=((\hat v^3\hat u^2-(10\hat v^3-4)\hat u+9\hat v^3)\psi_5^{1/2}+2\hat v^6\hat u^3+\hat v^3(14\hat v^3+1)\hat u^2-2(\hat v^3-1)(17\hat v^3-2)\hat u+9\hat v^3(2\hat v^3+1))(6\psi_6)^{-1}$, $\hat a_2^*=-((4\hat v^9\hat u^3-3\hat v^6(4\hat v^3-3)\hat u^2+6\hat v^6(2\hat v^3+1)\hat u-(4\hat v^3-1)(\hat v^3+2)^2)\psi_5^{1/2}+8\hat v^12\hat u^4-2\hat v^9(16\hat v^3-13)\hat u^3+3\hat v^6(16\hat v^6-6\hat v^3+5)\hat u^2-2\hat v^3(\hat v^3-1)(16\hat v^6+37\hat v^3-8)\hat u+(2\hat v^3+1)(4\hat v^3-1)(\hat v^3+2)^2)(54\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat c_2^*=((9\hat v^6\hat u^2-2\hat v^3(5\hat v^3-8)\hat u+(\hat v^3+2)^2)\psi_5^{1/2}-18\hat v^9\hat u^3+\hat v^6(34\hat v^3-49)\hat u^2-2\hat v^3(7\hat v^6-5\hat v^3+16)\hat u-(2\hat v^3+1)(\hat v^3+2)^2)(6\hat v^3\psi_6)^{-1}$;

$\tilde a_1^*=(\tilde v^3-4)(\tilde u+\tilde v)((2\tilde v\tilde w-2\tilde v^3+3\tilde u\tilde v^2+2)\psi_{27}-4\tilde v^2\tilde w^2-4\tilde v(-2\tilde v^3+3\tilde u\tilde v^2+2)\tilde w-2\tilde v^6+7\tilde u\tilde v^5-7\tilde u^2\tilde v^4+8\tilde u\tilde v^2-8\tilde u^2\tilde v-4)(2\tilde v)^{-1}\psi_{28}^{-2}$, $\tilde b_1^*=(\tilde v^3-4)((\tilde v\tilde w-\tilde u\tilde v^2+\tilde u^2\tilde v+1)\psi_{27}-2\tilde v^2\tilde w^2+\tilde v(3\tilde v^3-5\tilde u\tilde v^2+2\tilde u^2\tilde v-4)\tilde w+(\tilde v^3-3\tilde u\tilde v^2+2)(\tilde u\tilde v^2-\tilde u^2\tilde v-1))\tilde v^{-2}(2\tilde v-4\tilde u)^{-1}\psi_{28}^{-1}$, $\tilde a_2^*=(\tilde v-2\tilde u)(\tilde v^3-4)((4\tilde v\tilde w^2-(7\tilde v^3-12\tilde u\tilde v^2-4)\tilde w+(2\tilde v^3+1)(\tilde v-2\tilde u)^2)\psi_{27}-8\tilde v^2\tilde w^3+2\tilde v(11\tilde v^3-18\tilde u\tilde v^2-8)\tilde w^2-(15\tilde v^6-55\tilde u\tilde v^5+52\tilde u^2\tilde v^4-8\tilde v^3+4\tilde u\tilde v^2+8\tilde u^2\tilde v+8)\tilde w+(2\tilde v^3+1)(\tilde v^3-3\tilde u\tilde v^2+2)(\tilde v-2\tilde u)^2)\psi_{28}^{-3}/2$, $\tilde c_2^*=\psi_{28}^2(\tilde v(\tilde v-2\tilde u)^2(4-\tilde v^3))^{-1}\tilde a_2^*$;

$I_*=(-1,\theta_*)\cup(1/2,2)$, где $\theta_*\approx-0.17$ – нуль $14\theta^5-47\theta^4+113\theta^3-103\theta^2+61\theta+14$; $I_1^+=(-7-\sqrt{37},\,-2)\cup(-7+\sqrt{37},\,0)$, $I_1^-=(0,\,7-\sqrt{37})\cup(2,\,7+\sqrt{37})$, $I_2^+=(0,1)$, $I_2^-=(0,7^{2/3}13^{-1/3})$, $I_3=(-13\cdot7^{-1/3},-7^{-1/3})$, $I_4=(-\infty,-1)\cup(5\cdot91^{-1/3},+\infty)$;

$L1_{34,+1}^{4,2,<,<}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=-\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2=(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1_{22}^{5,2,<,<}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2=-\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ s_2=r_2/2\}$;
$L1_6^{6,2,<,<}=L1_2^{7,2,<,<}$ с $\nu=\theta_1\mu$;
$L1_7^{6,2,<,<}=\{r_1=0,\ s_1=3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2=\mp3^{1/4}(2\tilde\varsigma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$, $s_2=3^{1/4}(-\sqrt3\tilde\beta\pm\tilde\varsigma)(2\tilde\varsigma\mu)^{-3/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1_{11,+1}^{6,2,<,<}=\{r_1=0,\ s_1=-\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2=\tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2},\ s_2=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1\}$;
$L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}=\{r_1=(2\hat v^3(1+\hat u)+1-\psi_5^{1/2})(2\hat v^3(1-\hat u)-2-\psi_5^{1/2})(6\hat v(4\hat v^3-1))^{-1}r_2$, $s_1=(2\hat v^3(1-\hat u)-1+\psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2,\ r_2=(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{-1/4},\ s_2=(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/4}/\hat c_2^*\}$;
$L1_{12}^{6,2,<,<}=\{r_1=0,\ s_1=2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$, $s_2=-\tilde\beta(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}\}$;
$L1_2^{7,2,<,<}=\{r_1=0,\ s_1=3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2},\ r_2=-3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$, $s_2=(\tilde\gamma\nu-2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1\}$;
$L2_{34,+1}^{4,2,<,<}=\{r_1=(\tilde v+\psi_{17}^{1/2})r_2/3,\ s_1=(\tilde v-\psi_{17}^{1/2})s_2/3,\ r_2=3(\psi_{17}\psi_{18}(3-\tilde v+\psi_{17}^{1/2}))^{-1/4}$, $s_2=\psi_{17}^{-1/4}\psi_{18}^{1/4}(3-\tilde v+\psi_{17}^{1/2})^{-3/4}\}$;

$L3^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{r_1 = -\tilde{v}^{-1/2} r_2,\ s_1 = -\tilde{v}^{1/4}(2-\tilde{v}^{3/2}-\tilde{v}^3)^{1/4}(2-3\tilde{v}^{3/2}+\tilde{v}^3)^{-3/4},$
$r_2 = \tilde{v}^{3/4}(2-\tilde{v}^{3/2}-\tilde{v}^3)^{-1/4}(2-3\tilde{v}^{3/2}+\tilde{v}^3)^{-1/4},\ s_2 = \tilde{v}^{1/2}s_1\};$
$L4^{4,2,<,<}_{34,+1} = \{r_1 = \tilde{v}(\tilde{v}\tilde{w}-\tilde{v}^3-5-\psi_{22}^{1/2})\psi_{23}^{-1}r_2,\ s_1 = (\tilde{v}\tilde{w}-\tilde{v}^3+1-\psi_{22}^{1/2})\tilde{v}^{-2}s_2/3,$
$r_2=(\tilde{a}_2^*(\tilde{\varrho})\tilde{c}_2^*(\tilde{\varrho}))^{-1/4}, s_2=(\tilde{a}_2^*(\tilde{\varrho})\tilde{c}_2^*(\tilde{\varrho}))^{1/4}/\tilde{c}_2^*(\tilde{\varrho})\}$, где $(\tilde{\varrho}) = (-\tilde{v},\tilde{v},\tilde{w});$
$L2^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \mp\tilde{u}s_2,\ s_1 = -(2\tilde{u}\mp\sqrt{3})s_2,\ r_2 = -(2\mp\sqrt{3}\tilde{u})\tilde{u}^{-1}r_1,$
$s_2 = (\tilde{u}^2\mp\sqrt{3}\tilde{u}+1)^{-1/2}(\pm 4\tilde{u})^{-1/2}\};$
$L3^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = (\tilde{u}+2)\tilde{u}^{-1}r_2,\ s_1 = -r_2,\ r_2 = -\tilde{u}((\tilde{u}+1)(\tilde{u}^2+2\tilde{u}+4))^{-1/2},\ s_2 = 2\tilde{u}^{-1}r_2\};$
$L4^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = -s_2,\ s_1 = (\tilde{u}+3)s_2,\ r_2 = (\tilde{u}+2)s_2,\ s_2 = ((-\tilde{u}-1)(\tilde{u}^2+5\tilde{u}+7))^{-1}\};$
$L5^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = -2^{1/3}r_2,\ s_1 = 2^{1/3}((\sqrt{5}\pm 1)/5)^{1/2},\ r_2 = \pm((\sqrt{5}\mp 1)/5)^{1/2},$
$s_2 = (2(\sqrt{5}\mp 2)/5)^{1/2}\};$
$L6^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = -7^{-1/3}r_2,\ s_1 = -3r_1,\ r_2 = 7^{1/2}(-7^{1/3}\tilde{u}-1)^{-1/2}/3,\ s_2 = 0\};$
$L7^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \tilde{u}r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde{u})-\tilde{u})s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde{u})(\tilde{u}+\theta_2(\tilde{u}))^{-1}\psi_{29}^{-1}|^{1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L8^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \tilde{v}r_2/2,\ s_1 = \psi_{25}^{-}s_2,\ r_2 = -2s_2,\ s_2 = (12-3\tilde{v}^3)^{-1/2}\};$
$L9^{5,2,<,<}_{22} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = (4-\tilde{v}^3)^{-1/2}(\mp(\tilde{v}^{-1}\psi_{25}^{\mp}+1))^{-1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L2^{6,2,<,<}_{6} = \{r_1 = -(\tilde{u}^2+3)(2\tilde{u})^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde{u}s_2,\ r_2 = (2\tilde{u})^{4/3}(\tilde{u}^2+9)^{-2/3}s_2,$
$s_2 = (-\tilde{u}^2+3)^{1/2}(\tilde{u}^2+1)^{-1}|2\tilde{u}|^{-1/2}\};$
$L3^{6,2,<,<}_{6} = \{r_1 = -(\tilde{u}^2-2\tilde{u}+3)(2\tilde{u}-1)^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde{u}s_2,\ r_2 = (2\tilde{u}-1)^{4/3}(\tilde{u}^2-\tilde{u}+7)^{-2/3}s_2,$
$s_2 = |(\tilde{u}-2)(\tilde{u}+1)|^{1/2}|2\tilde{u}-1|^{-1/2}(\tilde{u}^2-\tilde{u}+1)^{-1}\};$
$L4^{6,2,<,<}_{6} = \{r_1 = -(2\tilde{u}\tilde{v}^2-\tilde{u}^2\tilde{v}-3)(\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde{u}s_2,$
$r_2 = \tilde{v}^{2/3}(\tilde{v}-2\tilde{u})^{4/3}\psi_{26}^{-2/3}s_2,\ s_2 = -\tilde{v}^{1/2}|\psi_{24}|^{1/2}\psi_{29}^{-1}|\tilde{v}-2\tilde{u}|^{-1/2}\};$
$L2^{6,2,<,<}_{7} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = 3^{1/4}\tilde{v}^{1/4}(4-\tilde{v}^3)^{-1/4}(-\tilde{w})^{-1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L3^{6,2,<,<}_{7} = \{r_1= \tilde{u}r_2,\ s_1=(\theta_2(\tilde{u})-\tilde{u})s_2,\ r_2=|\theta_2(\tilde{u})(2\tilde{u}-\theta_2(\tilde{u}))\psi_{29}^{-1}(\tilde{u},\theta_2(\tilde{u}))\tilde{w}^{-1}|^{1/2},\ s_2= r_2\};$
$L2^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = (2\tilde{v}^2\tilde{w}-\tilde{v}^4+\tilde{u}\tilde{v}^3-2\tilde{v}+8\tilde{u}-\tilde{v}\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2,$
$s_1=(2\tilde{v}\tilde{w}-\tilde{v}^3+\tilde{u}\tilde{v}^2+2-\psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}s_2, r_2=(\tilde{a}_2^*\tilde{c}_2^*)^{-1/4}, s_2=(\tilde{a}_2^*\tilde{c}_2^*)^{1/4}/\tilde{c}_2^*\};$
$L3^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = \tilde{v}r_2/2,\ s_1 = (\tilde{w}r_2)^{-1},\ r_2 = \sqrt{2}\tilde{v}^{1/4}(-\tilde{w})^{-1/2}(4-\tilde{v}^3)^{-1/4},\ s_2 = 0\};$
$L4^{6,2,<,<}_{11,+1} = \{r_1 = \tilde{u}r_2,\ s_1 = (2\theta_3(\tilde{u})-\tilde{u})s_2/3,\ r_2 = \sqrt{2}\psi_{30}^{1/4}(-\tilde{w})^{-1/2},$
$s_2 = -3\sqrt{2}\psi_{30}^{3/4}\psi_{29}(\tilde{u},\theta_3(\tilde{u}))(\theta_3(\tilde{u})(2\tilde{u}-\theta_3(\tilde{u})))^{-1}(-\tilde{w})^{-1/2}\}.$

Из системы $(2.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$ при $D<0$ $(p_2q_1<0,\ \nu^2+\mu^2=\delta_{pq},\ \mu>0)$ заменой J_3^2 получена система (2.11), в которой согласно (2.5) и (2.6) $\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}>0$ и $\tilde{\varsigma} = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2)^{1/2}>0$.

Осуществим разбиение элементов $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\nu,\mu$ системы (2.11) на непересекающиеся множества, в каждом из которых (2.11) сводится к определенной форме из списка 2.4.

Лемма 2.2. *Система* (2.11) *сводится:*

1_1) *при* $\nu = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}=0$ *заменой* $L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *к* $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *с* $\sigma = 1,\ u = \tilde{\gamma}^2\tilde{\varsigma}^{-2}$;
1_2) *при* $\nu = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}\neq 0$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma = 1,\ u = -2\tilde{\beta}\tilde{\varsigma}^{-1},\ v = -(\tilde{\beta}^2+\tilde{\gamma}^2)\tilde{\varsigma}^{-2}$;
2_1) *при* $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}=0$ – *это случай* 1_1);
2_2^a) *при* $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}\neq 0,\ \tilde{\alpha} = 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$ *заменой* $L1^{5,2,<,<}_{22}$ *к* $NSF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u = -(\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\beta})^{-2}$;
2_2^b) *при* $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}\neq 0,\ \tilde{\alpha}\neq 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{12}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{12}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u = (\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}^2)\psi_{16}^{-1},\ v = \psi_{16}^{1/3}(2\tilde{\beta})^{-2/3}$;
3) *при* $\nu = \theta_1\mu$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{6}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, *где* $(\cdot) = (\theta_*\mu,\mu)$, $u = 2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot),\ v = -(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
4_1) *при* $\nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}=0$ $(\tilde{\beta}\neq 0)$ – *это случай* 2_2^a);

4_2) *при* $\nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi_{15}^{\mp} \neq 0$ *заменой* $L1_7^{6,2,<,<}$ *к* $NSF_7^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \pm 1$, $u = \psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}$, $v = -3({\psi_{14}^{\pm}}^2 + \tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$;
5) *при* $\nu \neq -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$ *заменой* $L1_2^{7,2,<,<}$ *к* $NSF_2^{7,2,<,<}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w = -9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq}$.

Доказательство. Любая замена (1.5), в которой

$$r_1 = 0, \quad s_2 = (\tilde\gamma\nu - 2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1 \quad (s_1, r_2 \neq 0), \tag{2.23}$$

сводит (2.11) к системе

$$\begin{pmatrix} \hat a_1 & \hat b_1 & \hat c_1 & \hat d_1 \\ \hat a_2 & 0 & \hat c_2 & \hat d_2 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

у которой, в частности, $\hat a_2 = -\tilde\gamma\mu r_1^3 s_1^{-1} \neq 0$, $\hat d_2 = 2(\tilde\gamma\mu)^{-2}\psi_8\psi_9 s_1^2/27$.

В $\hat d_2$ однородный квадратный многочлен $\psi_9(\nu,\mu) = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (9\tilde\alpha\tilde\gamma - 8\tilde\beta^2)\mu^2 > 0$, так как имеет нули $\nu_{1,2} = (-\tilde\beta \pm 3\varsigma\mathbf{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$. Поэтому $\hat d_2 = 0 \Leftrightarrow \psi_8 = \tilde\gamma\nu + \tilde\beta\mu = 0$.

1) $\psi_8 = 0 \Leftrightarrow \nu = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$. При $s_1 = -\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = \tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2}$, $s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1$ – замена $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$ – система (2.24)$=\begin{pmatrix} -2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1} & -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2} & -2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1} & -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1_1) $\tilde\beta = 0 \Rightarrow \nu = 0$. При $s_1 = -\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = (\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$ – замена $L1_{34,+1}^{4,2,<,<}$ с учетом (2.23) – получена $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ с $\sigma = 1$, $u = -\tilde\alpha^{-1}\tilde\gamma$ $(= D/4 < 0)$.

1_2) $\tilde\beta \neq 0$, тогда получена $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = 1$, $u = -2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v = -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2} < 0$.

2) $\psi_8 = \tilde\beta\mu + \tilde\gamma\nu \neq 0$. При $s_1 = 3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2}$, $r_2 = -3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$ – замена $L_2^{7,2,<,<}$ с учетом (2.23) – система (2.24) принимает вид

$$\hat\sigma\begin{pmatrix} 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10} & -9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq} & 3(\psi_8\psi_9)^{-1}\psi_{11} & -(2\psi_8)^{-4/3}\psi_9^{-1/3}\psi_{12} \\ 1 & 0 & -3(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\psi_{13} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

где $\hat\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, однородные многочлены $\psi_{10}(\nu,\mu) = 2\tilde\gamma\nu - \tilde\beta\mu$, $\psi_{11}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^3\nu^3 + 3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2 + 2\tilde\alpha\tilde\gamma - 2\tilde\beta^2)\nu\mu^2 + \tilde\beta(4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma + 3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\psi_{12}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^2\nu^2 - 4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (4\tilde\beta^2 + 9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu - (3\tilde\alpha\tilde\gamma - 4\tilde\beta^2)\mu^2$. При этом $\psi_{11}'(\nu,1) = \tilde\gamma(\tilde\gamma^2(\nu^2+1) + 2(\tilde\alpha\tilde\gamma - \tilde\beta^2) > 0$, поэтому θ_1 – единственный вещественный нуль $\psi_{11}(\nu,1)$; $\psi_{12}(\nu,\mu) > 0$, поскольку имеет нули $\nu_{1,2} = (2\tilde\beta \pm 3\tilde\gamma\mathbf{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$; $\psi_{13}(\nu,\mu)$ имеет нули $\nu_{1,2} = \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi_{14}^{\pm} = -\tilde\beta \pm \sqrt{3}\tilde\varsigma$.

2_1) $\hat a_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_{10} = 0 \Leftrightarrow \nu = \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$.

2_1^1) $\tilde\beta = 0$, тогда $\psi_{10} = 0 \Leftrightarrow \psi_8 = 0$ $(\nu = 0)$ и попадаем в случай 1_1).

2_1^2) $\tilde\beta \neq 0$. При $s_1 = 2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}$, $r_2 = -(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$ $(4\tilde\alpha\tilde\gamma - 3\tilde\beta^2 > 0)$ – замена $L1_{12}^{6,2,<,<}$ с учетом (2.23) – система (2.25) принимает вид
$\operatorname{sign}\tilde\beta\begin{pmatrix} 0 & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & (\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1} & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-4/3}\psi_{16}^{-1/3} \\ 1 & 0 & (4\tilde\alpha\tilde\gamma - 7\tilde\beta^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & 1 \end{pmatrix}$.

2_1^{2a}) $\hat c_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde\alpha = 7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$. При $s_1 = \tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = -\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$ – замена $L1_{22}^{5,2,<,<}$ с учетом (2.23)– получена $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde\beta$, $u = -(\tilde\beta^2 + 4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2} < -1/4$.

2_1^{2b}) $4\tilde\alpha\tilde\gamma - 7\tilde\beta^2 \neq 0$, тогда получена $NSF_{12}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde\beta$, $u = (\tilde\beta^2 + 4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $v = \psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$.

2_2) $\hat{c}_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_{11} = 0 \Leftrightarrow \nu = \theta_1\mu$, где $\theta_1 \in \mathbb{R}^1 - \forall$ нуль $\psi_{11}(\nu, 1)$. Тогда система (2.25) при $\nu = \theta_1\mu$ – это $NSF_6^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = 2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v = -(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}(\cdot)^{-1/3}$, $(\cdot) = (\theta_1\mu, \mu)$, так как $v \neq 1$ и $\psi_{10}(\cdot)$, $\psi_{12}(\cdot) \neq 0$. А приводящая к $NSF_6^{6,2,<,<}$ замена $L1_6^{6,2,<,<}$ – это $L_2^{7,2,<,<}$ с $\nu = \theta_1\mu$.

2_3) $\hat{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \psi_{13} = 0 \Leftrightarrow \nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$. Система (2.25) при $s_1 = 3^{3/4}\tilde{\gamma}(2\tilde{\varsigma})^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = \mp 3^{1/4}(2\tilde{\varsigma}\mu)^{-1/2}$ – замена $L1_7^{6,2,<,<}$ с учетом (2.23) – принимает вид

$$\pm\begin{pmatrix} \psi_{15}^{\mp}\tilde{\varsigma}^{-1} & -3({\psi_{14}^{\pm}}^2 + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2} & 3({\psi_{14}^{\pm}}^2 + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2} & -((\tilde{\varsigma} \mp \sqrt{3}\tilde{\beta})^2 + 3\tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2_3^1) $\hat{a}_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_{15}^{\mp} = 0$ $(\tilde{\beta} \neq 0) \Leftrightarrow \{\operatorname{sign}\tilde{\beta} = \pm 1,\ \tilde{\alpha} = 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}\} \Rightarrow$ попадаем в 2_1^{2a}).

2_3^2) $\psi_{15}^{\mp} \neq 0 \Rightarrow$ получена $NSF_7^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \pm 1$, $u = \psi_{15}^{\mp}\tilde{\varsigma}^{-1}$, $v = -3({\psi_{14}^{\pm}}^2 + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2}$.

2_4) $\hat{a}_1, \hat{c}_1, \hat{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{13} \neq 0$, тогда (2.25) – это $NSF_2^{7,2,<,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $w = -9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2 + \mu^2) < 0$, $v = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3} > 0$. $\square$

В списке 2.4_{II} имеются четыре $NSF^{m,2,<}$, у которых дискриминант D может быть отрицателен. Покажем, что все они не являются $CF^{m,2,<,<}$ (см. опр. 1.11).

Утверждение 2.8. $NSF_{12}^{6,2,<,<}, NSF_{13}^{6,2,<,<}, NSF_{15}^{6,2,<,<}$ *при всех допустимых значениях параметров заменами* (1.5) *сводятся к предшествующей согласно СП* $SF_{11}^{6,2}$, *а* $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ *– к* $SF_{34}^{4,2}$ *(см. прил. 3.6.4).*

Доказательство. 1) Любая замена (1.5) при $r_1 = (s_1 - 2\hat{v}^2 s_2)(2\hat{v}s_1 - s_2)^{-1}r_2$ сводит $NSF_{12}^{6,2,<,<}(\hat{\sigma}, \hat{u}, \hat{v})$, $ps_{12}^{6,2,<,<} = \{\hat{v} > 4^{-1/3},\ \hat{v} \neq 1,\ 4\hat{u} > \hat{v}^{-3}\}$ с $\hat{u} = -(\hat{v}s_1 + s_2)(s_1 - 2\hat{v}^2 s_2)(\hat{v}^2(2\hat{v}s_1 - s_2)s_2)^{-1}$ именно к $SF_{11}^{6,2}$ при $(\hat{u}, \hat{v}) \in ps_{12}^{6,2,<,<}$ и $\delta_{rs} \neq 0$.

Равенство для $\hat{u}$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет корни $s_1^{\pm} = (2\hat{v}^3(1 - \hat{u}) - 1 \pm \psi_5^{1/2})(2\hat{v})^{-1}s_2 \in \mathbb{R}^1$, так как дискриминант $\psi_5(\hat{u}) = 4\hat{v}^6\hat{u}^2 - 8\hat{v}^3(\hat{v}^3 - 1)\hat{u} + (2\hat{v}^3 + 1)^2$ отрицателен. Кроме того, $\psi_6 = \hat{v}^3(1 - \hat{u}) - 1 + \psi_5^{1/2} \neq 0$ $(\Leftrightarrow \delta_{rs} \neq 0)$.

В результате замена, в которой, например, $r_1 = (2\hat{v}^3(1 + \hat{u}) + 1 - \psi_5^{1/2})(2\hat{v}^3(1 - \hat{u}) - 2 - \psi_5^{1/2})(6\hat{v}(4\hat{v}^3 - 1))^{-1}r_2$, $s_1 = (2\hat{v}^3(1 - \hat{u}) - 1 + \psi_5^{1/2})(2\hat{v})^{-1}s_2$ сводит $NSF_{12}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^* r_2^2 & \hat{b}_1^* r_2 s_2 & \hat{c}_1^* s_2^2 & \hat{d}_1^* r_1^{-1} s_2^3 \\ \hat{a}_2^* r_2^3 s_2^{-1} & 0 & \hat{c}_2^* r_2 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь при $r_2 = (\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{-1/4}$, $s_2 = (\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/4}/\hat{c}_2^*$ – замена $L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<}$ – получаем $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \hat{\sigma}$, $u = \hat{a}_1^*(\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/2}$, $v = \hat{b}_1^*/\hat{c}_2^*$.
Здесь следует иметь в виду, что в силу инвариантности степени общего множителя l и знаков дискриминантов D_0, D $(l = 2,\ D_0, D < 0)$ должны выполняться трудно проверяемые из-за объема формул соотношения $\hat{a}_2^*\hat{c}_2^* > 0$, $\hat{c}_1^* = \hat{a}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$, $\hat{d}_1^* = \hat{b}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$.

2) Любая замена (1.5) при $r_2 = (2s_1 - vs_2)(s_1 - 2(v+1)s_2)^{-1}v^{-1}r_1$ сводит $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ с $u = v(s_1 + (v+1)s_2)(s_1 - 2(v+1)s_2)(s_1 + vs_2)^{-1}(2s_1 - vs_2)^{-1}$ к $SF_{11}^{6,2}$ при $(u, v) \in ps_{13}^{6,2,<,<} = \{v < -4/3,\ 4u > (u + v + 1)^2\}$ и $\delta_{rs} \neq 0$. Здесь $v > 0$ не вошло в $ps_{13}^{6,2,<,<}$, так как $D < 0$.

Равенство для u имеет вещественные корни $s_1^{\pm} = (v(u + v + 1) \pm \varrho^{1/2})(2v - 4u)^{-1}s_2$, так как $\varrho(u) = 9v^2u^2 - 2v(9v^2 + 15v + 8)u + 9v^2(1 + v)^2 > 0$ в силу того, что дискриминант $27v^3 + 72v^2 + 60v + 16$ этого многочлена, имея нули $-4/3, -2/3, -2/3$, отрицателен. Тогда замена, например, с $s_1 = (v(u + v + 1) + \varrho^{1/2})(2v - 4u)^{-1}s_2$, $r_2 = (3uv + v + \varrho^{1/2})(8u - 3v + 9uv - 3v^2 - \varrho^{1/2})(2uv(3v + 4)(3v + 2)(2u - v))^{-1}r_1$ сводит $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$.

3) Любая замена (1.5) при $r_2 = (2s_1 + vs_2)(s_1 + 2(v - 1)s_2)^{-1}v^{-1}r_1$ сводит $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ с $u = -v(s_1 - (v-1)s_2)(s_1 + 2(v-1)s_2)s_2^{-1}(2s_1 + vs_2)^{-1}$ именно к $SF_{11}^{6,2}$ при $(u, v) \in ps_{15}^{6,2,<,<} = \{v \notin [0, 4/3],\ 4u < -(v - 1)^2\}$ и $\delta_{rs} \neq 0$.

Равенство для u является квадратным уравнением относительно s_2 и имеет корни $s_1^{\pm} = (v - v^2 - 2u) \pm \varrho^{1/2})(2v)^{-1}s_2 \in \mathbb{R}^1$, так как многочлен $\varrho(u) = 4u^2 - 4uv + 9v^2(v-1)^2 > 0$ в силу того, что его дискриминант $-(9v^2 - 18v + 8) < 0$ при $v \notin [2/3, /4/3]$. Тогда замена, например, с $s_1 = (v - v^2 - 2u + \varrho^{1/2})(2v)^{-1}s_2$, $r_2 = (2u - v - \varrho^{1/2})(2u + 3v - 3v^2 + \varrho^{1/2})(2uv^2(3v-4))^{-1}r_1$ сводит $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$.

4) Любая замена (1.5) с $s_1 = -(u+v+((u+v)^2-u)^{1/2})s_2$, $r_1 = -(u+v-((u+v)^2-u)^{1/2})r_2$ сводит $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ к $SF_{34}^{4,2}$, поскольку $ps_{16}^{6,2,<,<} = \{v > 1/4,\ u < 0\}$. $\square$

Рассмотрим $NSF^{m,2,<,<}$ из списка 2.4_I. Непосредственной проверкой устанавливается, что $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ является $CF_{22}^{5,2,<,<}$, а у остальных форм $ps^{m,2,<,<} \neq cs^{m,2,<,<}$.

Утверждение 2.9. *Только следующие формы из списка 2.4 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам (см. прил. 3.6.5, 3.6.6):*

1) $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ *с* $ps_6^{6,2,<,<} = \{\tilde v \in (0,1),\ \tilde u \in (\psi_7^-(\tilde v), \psi_7^+(\tilde v))\ (\psi_7^- < -1, \psi_7^+ \in (-1,0))\}$:
a) *при* $\tilde u = -\tilde v$ *заменой* $L3_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = \psi_{19}(\tilde v)$;
b) *при* $\tilde u = -2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5})$, $\tilde v = 2^{-2/3}$ *заменой* $L5_{22}^{5,2,<,<}$ – *к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = \mp\tilde\sigma$, $u = -3$;
2) $NSF_7^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ *с* $ps_7^{6,2,<,<} = \{\tilde v \neq -\tilde u,\ 4\tilde v < -(\tilde u + 1)^2)\}$:
a) *при* $\tilde u = -1$ *заменой* $L2_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = \psi_{21}(\tilde v)$;
b) *при* $\tilde v = [\,-3(\tilde u+1),\ \tilde u \in (-1,11) \vee 3(\tilde u+1)(\tilde u+2)^{-1},\ \tilde u \in (-2,-1)\,]$ *заменой* $[L3_{22}^{5,2,<,<} \vee L4_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [\tilde\sigma \vee -\tilde\sigma]$, $u = [-3(\tilde u+1)^{-1} \vee 3((\tilde u+1)(\tilde u+2))^{-1}]$;
c) *при* $\tilde v = \psi_{32}(\tilde u)$, $\tilde u \in I_*$, *заменой* $L3_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,(1-2\tilde u)$, $u = -(\tilde u^3 - 3\tilde u^2 + 6\tilde u + 1)(\tilde u^2 - \tilde u + 1)^{-1}((\tilde u^2 - \tilde u + 7)(2\tilde u - 1))^{-1/3}$, $v = (2\tilde u - 1)^{2/3}(\tilde u^2 - \tilde u + 7)^{-1/3}$;

3) $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ *с* $ps_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4\tilde v < -\tilde u^2\}$:
a) *при* $\tilde v = \psi_{20}^{\mp}$, $\sqrt{3}\tilde u \in I_1^{\mp}$ *заменой* $L2_{22}^{5,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = \pm\tilde\sigma$, $u = \psi_{20}^{\mp}\tilde u^{-2}$;
b) *при* $\tilde v = 3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(2(\tilde u^2-3))^{-1}$, $\tilde u \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ *заменой* $L2_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = -\tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,\tilde u$, $u = -(\tilde u^2+5)\tilde u^{2/3}(2(\tilde u^2+1)(\tilde u^2+9))^{-1/3}$, $v = (2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;

4) $NSF_2^{7,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v,\tilde w)$ *с* $ps_2^{7,2,<,<} = \{\tilde v \in (0,1) \cup (1, \sqrt[3]{4}),\ \tilde w \neq -\tilde u(\tilde v - \tilde v^{-2}),\ 4\tilde w < -(\tilde u + \tilde v)^2\}$:
a) *при* $\tilde u = -\tilde v$, *заменой* $L4_{34,+1}^{4,2,<,<}$ – *к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = \tilde b_1^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)/\ \tilde c_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)$;
b^1) *при* $\tilde v = [7^{-1/3} \vee \theta_2(\tilde u)]$, $\tilde w = [3(7^{-1/3}\tilde u + 7^{-2/3}) \vee (\tilde u + \theta_2(\tilde u))(\theta_2(\tilde u) - 2\tilde u)]$, $\tilde u \in [I_3 \vee I_4]$, *заменой* $[L6_{22}^{5,2,<,<} \vee L7_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [-\tilde\sigma \vee \mathrm{sign}\,(\tilde u+1)]$, $u = [3(7^{1/3}\tilde u + 1)^{-1} \vee (2\tilde u - \theta_2(\tilde u))(\tilde u + \theta_2(\tilde u))^{-1}]$;
b^2) *при* $\tilde u = [-4\tilde v \vee \psi_{25}^{\mp}]$, $\tilde w = [3\tilde v(4\tilde v + \psi_{25}^-)/2 \vee 3(\tilde v\psi_{25}^{\pm} - 2\tilde v^{-1})]$, $\tilde v \in [(0,(2/7)^{2/3}) \vee I_2^{\pm}]$ *заменой* $[L8_{22}^{5,2,<,<} \vee L9_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [-\tilde\sigma \vee \mp\tilde\sigma]$, $u = [(4 + \psi_{25}^-\tilde v^{-1})/6 \vee (4 - \tilde v^3)(\tilde v^2\psi_{25}^{\pm} - 2)^{-1}]$;
c) *при* $\tilde w = \psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$ *заменой* $L4_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma\,\mathrm{sign}((2\tilde u - \tilde v)\psi_{24})$, $u = (\tilde v(2\tilde u - \tilde v)^{-1}\psi_{26}^{-1})^{1/3}\psi_{34}$, $v = -(\tilde v(2\tilde u - \tilde v)^2\psi_{26}^{-1})^{1/3}$;
d) *при* $[\tilde u = \psi_{25}^{\mp} \vee \tilde v = \theta_2(\tilde u) \neq 2^{2/3}]$ *заменой* $[L2_7^{6,2,<,<} \vee L3_7^{6,2,<,<}]$ *сводится к* $NSF_7^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = [\mp\tilde\sigma \vee \tilde\sigma\mathrm{sign}\,(\tilde u - 2^{-1/3})]$, $u = [-(\tilde v\tilde w - 3\tilde v^2\psi_{25}^{\pm} + 6)(\tilde v\tilde w)^{-1} \vee -(\tilde w + 2\tilde u^2 + \theta_2(\tilde u)\tilde u - \theta_2^2(\tilde u))\tilde w^{-1}]$, $v = [3(4 - \tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1} \vee -(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w + \psi_{35})(\psi_{29}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w)^{-1}]$;
e^1) *при* $\psi_{27} \geq 0$, $\tilde u \neq \tilde v/2$ *заменой* $L2_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = \tilde a_1^*(\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/2}$, $v = \tilde b_1^*/\tilde c_2^*$;
e^2) *при* $[\tilde u = \tilde v/2 \vee \tilde v = \theta_3(\tilde u)]$ *заменой* $[L3_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L4_{11,+1}^{6,2,<,<}]$ *сводится к* $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = [-3(4\tilde v - \tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1} \vee -\psi_{30}^{1/2}\psi_{31}]$, $v = [(4 - \tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1} \vee \psi_{36}]$.

Доказательство. 1) $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $r_1 = -\tilde v^{-1/2}r_2$, $s_2 = \tilde v^{1/2}s_1$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$, в b) заменой с $r_1 = -2^{1/3}r_2$, $s_1 = 2^{-2/3}(3 \pm \sqrt{5})s_2$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$;

2) $NSF_7^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $r_1=(\tilde v\pm\psi_{17}^{1/2})r_2/3,\ s_1=(\tilde v\mp\psi_{17}^{1/2})s_2/3$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$, в b) заменой с $r_1=[\,(\tilde u+2)\tilde u^{-1}r_2\vee-(\tilde u+2)^{-1}r_2\,]$, $s_1=[\,-\tilde u s_2/2\vee(\tilde u+3)s_2\,]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$, в c) заменой с $r_1=-(\tilde u^2-2\tilde u+3)(2\tilde u-1)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde u s_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$;

3) $NSF_{11,+1}^{6,2,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $s_1=-(2\tilde u\mp\sqrt3)s_2$, $r_2=-(2\mp\sqrt3\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$, в b) заменой с $r_1=-(\tilde u^2+3)(2\tilde u)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde u s_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$.

4) Подробнее рассмотрим получение предшествующих форм из

$$NSF_2^{7,2,<,<}=\tilde\sigma\begin{pmatrix}\tilde u & \tilde w & \tilde u\tilde v^{-1}-\tilde v(\tilde u\tilde v+\tilde w) & \tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\\ 1 & 0 & \tilde v^{-1}-\tilde v^2 & 1\end{pmatrix}\quad(\tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\neq0).$$

a) При $\tilde u=-\tilde v$, $\tilde w=(3\tilde v^2s_1^2+2(\tilde v^3-1)s_1s_2-\tilde v(\tilde v^3+2)s_2^2)(\tilde v s_2(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}$ $NSF_2^{7,2,<,<}$ любой заменой (1.5) с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет вещественные корни $s_1^{\pm}=(\tilde v\tilde w-\tilde v^3+1\pm\psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$, так как $\psi_{22}=(\tilde v\tilde w+1)^2+\tilde v^3(4\tilde v^3-5\tilde v\tilde w+4)>0$ в силу того, что $\tilde w<0$. Кроме того, $\psi_{23}\neq0\Leftrightarrow 2s_1-\tilde v s_2\neq0$.

Замена с $r_1=\tilde v(\tilde w\tilde v-\tilde v^3-5-\psi_{22}^{1/2})\psi_{23}^{-1}r_2,\ s_1=(\tilde w\tilde v-\tilde v^3+1-\psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$ сводит $NSF_2^{7,2,<,<}$ к $SF_{34}^{4,2}=\begin{pmatrix}0 & \tilde b_1^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2 & 0 & \tilde d_1^*r_1^{-1}s_2^3\\ \tilde a_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2^3s_2^{-1} & 0 & \tilde c_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2 & 0\end{pmatrix}$. Выбор нормировки и связанные с ней вопросы приведены в утверждении 2.8, 1).

В b^1) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[-7^{-1/3}r_2\vee\tilde u r_2]$, $[s_2=0\vee s_1=(\theta_2(\tilde u)-\tilde u)s_2]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$.

В b^2) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\tilde v r_2/2\vee\psi_{25}^{\mp}r_2],\ s_1=[\psi_{25}^{-}s_2\vee\psi_{25}^{\pm}s_2]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$; случай $\tilde u=-4\tilde v$, $\tilde w=3\tilde v(4\tilde v+\psi_{25}^{+})/2$ невозможен, так как в нем $D>0$.

В *c*) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=-(2\tilde u\tilde v^2-\tilde u^2\tilde v-3)(\tilde v(\tilde v-2\tilde u))^{-1}r_2,\ s_1=\tilde u s_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$. При этом $\psi_{26}\neq0$, так как является нормировочным множителем.

В *d*) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\psi_{25}^{\mp}r_2\vee\tilde u r_2],\ s_1=[\psi_{25}^{\pm}s_2\vee(\theta_2(\tilde u)-\tilde u)s_2]$ сводится к $SF_7^{6,2}$; если $2\tilde u=\theta_2(\tilde u)\Leftrightarrow\tilde u=2^{-1/3}$, то $\delta_{rs}=0$, при этом $\operatorname{sign}(\tilde u-2^{-1/3})=\operatorname{sign}((2\tilde u-\theta_2(\tilde u))\psi_{29}^{-1}(\tilde u,\theta_2(\tilde u)))$.

e^1) При $\tilde w=(\tilde v(\tilde v-2\tilde u)s_1^2+(\tilde v^3-\tilde u\tilde v^2-2)s_1s_2+\tilde v(\tilde u\tilde v^2-2)s_2^2)(\tilde v s_2(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}$ $NSF_2^{7,2,<,<}$ любой заменой (1.5) с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde v s_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет вещественные корни $s_1^{\pm}=(2\tilde v\tilde w-\tilde v^3+\tilde u\tilde v^2+2\pm\psi_{27}^{1/2})(2\tilde v(\tilde v-2\tilde u))^{-1}s_2$ при $\psi_{27}\geq0$ и $\tilde u\neq\tilde v/2$. Кроме того, $\psi_{28}\neq0\Leftrightarrow2s_1-\tilde v s_2\neq0$. В результате замена, например, с $r_1=(2\tilde v^2\tilde w-\tilde v^4+\tilde u\tilde v^3-2\tilde v+8\tilde u-\tilde v\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2$, $s_1=(2\tilde v\tilde w-\tilde v^3+\tilde u\tilde v^2+2-\psi_{27}^{1/2})(2\tilde v(\tilde v-2\tilde u))^{-1}s_2$ сводит $NSF_2^{7,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}=\begin{pmatrix}\tilde a_1^*r_2^2 & \tilde b_1^*r_2s_2 & \tilde c_1^*s_2^2 & \tilde d_1^*r_1^{-1}s_2^3\\ \tilde a_2^*r_2^3s_2^{-1} & 0 & \tilde c_2^*r_2s_2 & 0\end{pmatrix}$. И далее, как в утверждении 2.8, 1).

В e^2) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\tilde v r_2/2\vee\tilde u r_2],\ [s_2=0\vee s_1=(2\theta_3(\tilde u)-\tilde u)s_2/3]$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\psi_{30}>0$, так как является нормировочным множителем.

Наконец, $NSF_2^{7,2,<,<}$ возможно при определенных условиях сводится к предшествующим ей $NSF_i^{6,2,<,<}$ $(i=12,13,15,16)$ из списка 2.4, которые, в свою очередь, сводятся к $SF_{11}^{6,2}$ или $SF_{34}^{4,2}$ – это сделано в утверждении 2.8. А все прямые замены к $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ и $NSF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ уже найдены выше. $\square$

Полученные результаты позволяют в случае $l=2,\ D_0<0,\ D<0$ выписать все канонические формы со своими каноническими семействами.

Список 2.6. Шесть $CF_i^{m,2,<,<}$ и их $cs_i^{m,2,<,<}$ $(\sigma=\pm1,\ u,v,w\neq 0)$.

$CF_{34,+1}^{4,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&u\\1&0&+1&0\end{pmatrix},\ \ cs_{34,+1}^{4,2,<,<}=\{u<0\};$

$CF_{22}^{5,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ \ cs_{22}^{5,2,<,<}=\{u<-1/4\};$

$CF_{6}^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(v^{-2}-v)&0&uv^{-3}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix},\ \ cs_{6}^{6,2,<,<}=\{v\in(0,1),\ u\in(\psi_7^-(v),\psi_7^+(v)),$
$u\neq -v,\ (u,v)\neq(-2^{-5/3}(3\pm\sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\};$

$CF_{7}^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&-v&u+v\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ \ cs_{7}^{6,2,<,<}=\{4v<-(u+1)^2,\ u\neq -1,$
$v\neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\};$

$CF_{11,+1}^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ \ cs_{11,+1}^{6,2,<,<}=\{4v<-u^2,\ v\neq\psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\};$

$CF_{2}^{7,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv^{-1}-v(uv+w)&u+wv^{-1}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix},\ \ cs_{2}^{7,2,<,<}=\{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\ v\neq 1,-u,2u,\theta_3(u),$
$w\neq -uv,-u(v-v^{-2}),\psi_{33}(u,v),$
$4w<-(u+v)^2,\ \psi_{27}(u,v,w)<0,$
$(u,w)\neq([-4v\vee\psi_{25}^{\mp}(v)],\ [3v(4v+\psi_{25}^-(v))/2\vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v)-2v^{-1})]),$
$(v,w)\neq([7^{-1/3}\vee\theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u+7^{-2/3})\vee(u+\theta_2(u))(\theta_2(u)-2u)])\}.$

Теорема 2.5. *Любая система* (1.4) *с* $l=2$, *записанная в виде* $(2.1^<)$ *согласно* (2.2) *и имеющая* $D<0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.6. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,<,<}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(2.1^<)$, *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть* $(2.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,<}$:

A. $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=0,\ \tilde\beta=0,$ $1_b)$ $J_3^2,\ L1_{34,+1}^{4,2,<,<},$ $1_c)$ $\sigma=1,\ u=\tilde\gamma^2\tilde\varsigma^{-2};$
$2_a)$ $\nu=\theta_1\mu,\ \psi_8^2(\cdot)\psi_9(\cdot))=2\psi_{10}^2(\cdot)\psi_{12}(\cdot)$, *где* $(\cdot)=(\theta_1\mu,\mu),$ $2_b)$ $J_3^2, L1_6^{6,2,<,<}, L3_{34,+1}^{4,2,<,<},$ $2_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot),\ u=\psi_{19}(\tilde v)$, *где* $\tilde v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot);$
$3_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}=-\tilde\varsigma,$ $3_b)$ $J_3^2,\ L1_7^{6,2,<,<},\ L2_{34,+1}^{4,2,<,<},$ $3_c)$ $\sigma=\pm1,\ u=\psi_{21}(\tilde v)$, *где* $\tilde v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2};$
$4_a)$ $\nu=0,\ \tilde\beta,\ 4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma,\ 4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2\neq 0,$ $4_b)$ $J_3^2,\ L1_2^{7,2,<,<},\ L4_{34,+1}^{4,2,<,<},$ $4_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=\tilde b_1^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)/\tilde c_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)$, *где* $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\ \tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2);$

B. $CF_{22}^{5,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq 0,\ \tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},$ $1_b)$ $J_3^2,\ L1_{22}^{5,2,<,<},$ $1_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=-(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2};$
$2_a)$ $\nu=\theta_1\mu,\ 2^{7/3}\psi_{10}(\cdot)=-(3\pm\sqrt5)(\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{1/3},\ \psi_{12}(\cdot)=-8\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot)\ ((\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)),$ $2_b)$ $J_3^2,\ L1_6^{6,2,<,<},\ L5_{22}^{5,2,<,<},$ $2_c)$ $\sigma=\mp\operatorname{sign}\psi_8(\cdot),\ u=-3;$
$3_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}=[-3(\tilde u+1),\ \tilde u\in(-1,11)\vee 3(\tilde u+1)(\tilde u+2)^{-1},\ \tilde u\in(-2,-1)]$, *где* $\tilde v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2},$ $3_b)$ $J_3^2,\ L1_7^{6,2,<,<},\ [L3_{22}^{5,2,<,<}\vee L4_{22}^{5,2,<,<}],$ $3_c)$ $\sigma=[\pm1\vee\mp1]$, $u=[-3(\tilde u+1)^{-1}\vee 3((\tilde u+1)(\tilde u+2))^{-1}];$
$4_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq 0,\ -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u),\ \tilde u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1},\ \sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp},$ $4_b)$ $J_3^2,\ L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $L2_{22}^{5,2,<,<},$ $4_c)$ $\sigma=\pm1,\ u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1},$
$5_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq 0,\ \tilde\alpha\neq 7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},\ \hat b_1^*/\hat c_2^*=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u),\ \sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp},\ \tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $\hat u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2},\ \hat v=\hat b_1^*/\hat c_2^*,$ $5_b)$ $J_3^2, L1_{12}^{6,2,<,<}, L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_{22}^{5,2,<,<},$ $5_c)$ $\sigma=\pm\operatorname{sign}\tilde\beta,\ u=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u)\tilde u^{-2};$
$6_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ [7^{-1/3}\vee\theta_2(\tilde u)]=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\ [3(7^{-1/3}\tilde u+7^{-2/3})\vee$ $(\theta_2(\tilde u)-2\tilde u)(\tilde u+\theta_2(\tilde u))]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2),\ \tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}\in[I_3\vee I_4],$

$6_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$ $[L6_{22}^{5,2,<,<} \vee L7_{22}^{5,2,<,<}]$, $6_c)$ $\sigma = [-\operatorname{sign}\psi_8 \vee \operatorname{sign}\tilde{u}]$, $u = [3(7^{1/3}\tilde{u}+1)^{-1} \vee (2\tilde{u} - \theta_2(\tilde{u}))(\tilde{u}+\theta_2(\tilde{u}))^{-1}]$;
$7_a)$ $\nu \neq -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $[-4\tilde{v} \vee \psi_{25}^{\mp}] = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $[3\tilde{v}(4\tilde{v}+\psi_{25}^{-})/2 \vee 3(\tilde{v}\psi_{25}^{\pm} - 2\tilde{v}^{-1})] = -9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\tilde{v} = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3} \in [(0,(2/7)^{2/3}) \vee I_2^{\pm}]$, $7_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L8_{22}^{5,2,<,<} \vee L9_{22}^{5,2,<,<}]$, $7_c)$ $\sigma = [-\operatorname{sign}\psi_8 \vee \mp\operatorname{sign}\psi_8]$, $u = [(4+\psi_{25}^{-}\tilde{v}^{-1})/6 \vee (4-\tilde{v}^3)(\tilde{v}^2\psi_{25}^{\pm}-2)^{-1}]$;

C. $CF_6^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu = \theta_1\mu$, $\neg(A2_a, B2_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_6^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = 2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v = -(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$, $(\cdot) = (\theta_1\mu, \mu)$;
$2_a)$ $\nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $-3(\psi_{14}^{\pm\,2} + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2} = \psi_{32}(\tilde{u})$, $\tilde{u} = \psi_{15}^{\mp}\tilde{\varsigma}^{-1} \in I_*$, $\neg(B3_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $L3_6^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma = \pm\operatorname{sign}(1-2\tilde{u})$, $u = -(\tilde{u}^3 - 3\tilde{u}^2 + 6\tilde{u} + 1)(\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 1)^{-1}((\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 7)(2\tilde{u}-1))^{-1/3}$, $v = (2\tilde{u}-1)^{2/3}(\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 7)^{-1/3}$;
$3_a)$ $\nu = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $-2(\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2)\tilde{\varsigma}^{-2} = 3(\tilde{u}^2+5)(\tilde{u}^2+1)(\tilde{u}^2-3)^{-1}$, $\tilde{u} = -2\tilde{\beta}\tilde{\varsigma}^{-1} \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\neg(B4_a)$, $3_b)$ J_3^2, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $L2_6^{6,2,<,<}$, $3_c)$ $\sigma = -\operatorname{sign}\tilde{u}$, $2u = -(\tilde{u}^2+5)(\tilde{u}^2+1)^{-1/3}v$, $v = (2\tilde{u})^{2/3}(\tilde{u}^2+9)^{-1/3}$;
$4_a)$ $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\alpha} \neq 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$, $\hat{b}_1^*/\hat{c}_2^* = 3(\tilde{u}^2+5)(\tilde{u}^2+1)(2(\tilde{u}^2-3))^{-1}$, $\tilde{u} = \hat{a}_1^*(\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/2} \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\hat{u} = (\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\gamma}^2)\psi_{16}^{-1}$, $\hat{v} = \psi_{16}^{1/3}(2\tilde{\beta})^{-2/3}$, $\neg(B5_a)$, $4_b)$ J_3^2, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $L2_6^{6,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde{\beta}\tilde{u})$, $2u = -(\tilde{u}^2+5)(\tilde{u}^2+1)^{-1/3}v$, $v = (2\tilde{u})^{2/3}(\tilde{u}^2+9)^{-1/3}$;
$5_a)$ $\nu \neq -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $-9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2) = \psi_{33}(\tilde{u},\tilde{v})$, $\tilde{u} = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde{v} = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\neg(A4_a, B6_a, B7_a)$, $5_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $L4_6^{6,2,<,<}$, $5_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}((2\tilde{u}-\tilde{v})\psi_8\psi_{24})$, $u = (\tilde{v}(2\tilde{u}-\tilde{v})^{-1}\psi_{26}^{-1})^{1/3}\psi_{34}$, $v = -(\tilde{v}(2\tilde{u}-\tilde{v})^2\psi_{26}^{-1})^{1/3}$;

D. $CF_7^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\psi_{15}^{\mp} \neq 0, -\tilde{\varsigma}$, $\neg(B3_a, C2_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma = \pm 1$, $u = \psi_{15}^{\mp}\tilde{\varsigma}^{-1}$, $v = -3(\psi_{14}^{\pm\,2} + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2}$;
$2_a)$ $\nu \neq -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $[\tilde{u} = \psi_{25}^{\mp} \vee \tilde{v} = \theta_2(\tilde{u}) \neq 2^{2/3}]$, $\tilde{u} = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde{v} = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde{w} = -9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\neg(A4_a, B6_a, B7_a, C5_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_7^{6,2,<,<} \vee L3_7^{6,2,<,<}]$, $2_c)$ $\sigma = [\mp\operatorname{sign}\psi_8 \vee \operatorname{sign}((\tilde{u} - 2^{-1/3})\psi_8)]$, $u = [-(\tilde{v}\tilde{w} - 3\tilde{v}^2\psi_{25}^{\pm} + 6)(\tilde{v}\tilde{w})^{-1} \vee -(\tilde{w} + 2\tilde{u}^2 + \theta_2(\tilde{u})\tilde{u} - \theta_2^2(\tilde{u}))\tilde{w}^{-1}]$, $v = [3(4-\tilde{v}^3)(\tilde{v}\tilde{w})^{-1} \vee (\psi_{24}(\tilde{u}, \theta_2(\tilde{u}))\tilde{w} + \psi_{35}]$;

E. $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\neg(B4_a, C3_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma = 1$, $u = -2\tilde{\beta}\tilde{\varsigma}^{-1}$, $v = -(\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2)\tilde{\varsigma}^{-2}$;
$2_a)$ $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\alpha} \neq 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$, $\neg(B5_a, C4_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u = \hat{a}_1^*(\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/2}$, $v = \hat{b}_1^*/\hat{c}_2^*$, *где* $\hat{u} = (\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\gamma}^2)\psi_{16}^{-1}$, $\hat{v} = \psi_{16}^{1/3}(2\tilde{\beta})^{-2/3}$;
$3_a)$ $\nu \neq -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $[\tilde{u} \neq \tilde{v}/2, \psi_{27} \geq 0 \vee \tilde{u} = \tilde{v}/2 \vee \tilde{v} = \theta_3(\tilde{u})]$, *где* $\tilde{u} = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde{v} = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde{w} = -9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\neg(A4_a, B6_a, B7_a, C5_a, D2_a)$, $3_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L3_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L4_{11,+1}^{6,2,<,<}]$, $3_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = [\tilde{a}_1^*(\tilde{a}_2^*\tilde{c}_2^*)^{-1/2} \vee -3(4\tilde{v} - \tilde{v}^4)^{1/2}(4\tilde{w})^{-1} \vee -\psi_{30}^{1/2}\psi_{31}]$, $v = [\tilde{b}_1^*/\tilde{c}_2^* \vee (4-\tilde{v}^3)(4\tilde{v}\tilde{w})^{-1} \vee \psi_{36}]$;

F. $CF_2^{7,2,<,<}$: *a)* $\nu \neq -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu$, $\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$, $\neg(A4_a, B6_a, B7_a, C5_a, D2_a, E3_a)$, *b)* J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w = -9\tilde{\gamma}^2(\nu^2 + \mu^2)(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}$.
Здесь везде запись $\neg(\ldots)$ *означает, что не выполняются указанные в скобках условия.*

Доказательство. Состыкуем результаты леммы 2.2 и утверждений 2.8, 2.9, получая соответствующие пункты формулировки теоремы.

*A*1) из 2.2,1_1); *A*2) из 2.2,3), 2.9,1_a); *A*3) из 2.2,4_2), 2.9,2_a); *A*4) из 2.2,5), 2.9,4_a).
При этом в *A*4) $\tilde{u} = -\tilde{v} \Leftrightarrow 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10} + (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3} = 0 \Leftrightarrow \psi_8 + \psi_{10} = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$, следовательно $\nu \neq -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu, \theta_1\mu, \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu, \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu \Leftrightarrow \theta_1 \neq 0$ $(\psi_{11}(0,1) \neq 0)$, $\psi_{14}^{\pm} \neq 0 \Leftrightarrow$

$4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma \neq 0$, $\tilde\beta(4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma + 3\tilde\gamma^2) \neq 0$, а $\psi_8 = \tilde\beta\mu$ и $\operatorname{sign}\psi_8 = \operatorname{sign}\tilde\beta$.

$B1$) из 2.2,2_2^a); $B2$) из 2.2,3), 2.9,1_b); $B3$) из 2.2,4_2), 2.9,2_b); $B4$) из 2.2,1_2), 2.9,3_a); $B5$) из 2.2,2_2^b), 2.8,1), 2.9,3_a); $B6$) из 2.2,5), 2.9,4_b^1); $B7$) из 2.2,5), 2.9,4_b^2).

$C1$) из 2.2,3); $C2$) из 2.2,4_2), 2.9,2_c); $C3$) из 2.2,1_2), 2.9,3_b); $C4$) из 2.2,2_2^b), 2.8,1), 2.9,3_b); $C5$) из 2.2,5), 2.9,4_c).
При этом в $C2$) случай $A3_a$) ухода из $NSF_7^{6,2,<,<}$ невозможен, так как $\tilde u = -1$ при $\psi_{15}^{\mp} = -\varsigma$; в $C3$) и $C4$) получена именно $CF_6^{6,2,<,<}$, так как ее нельзя свести к $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ в силу того, что тогда бы была прямая замена, сводящая $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ к $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$.

$D1$) из 2.2,4_2); $D2$) из 2.2,5), 2.9,4_d).
$E1$) из 2.2,1_2); $E2$) из 2.2,2_2^b), 2.8,1); $E3$) из 2.2,5), 2.9,4_e). $\square$

Замечание 2.5. В $NSF_6^{6,2,<,<}$ в отличие от $NSF_6^{6,2,<}$ элемент $c_2 = v^{-1} - v^2 > 0$, так как $v \in (0,1)$, поэтому можно осуществить лучшую согласно НПЗ нормировку и получить

$$NSF_{6,new}^{6,2,<,<} = \sigma\begin{pmatrix} uv & u & 0 & u(v^2+1)^2 \\ 1 & 0 & 1 & v(v^2+1) \end{pmatrix}, \quad p_0^2 = (1, -v, 1+v^2), \quad H = \sigma\begin{pmatrix} uv & u(v^2+1) \\ 1 & v \end{pmatrix}$$

с $D_0 = -3v^2 - 4$, $D = v^2(u+1)^2 + 4u$. При этом $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde\sigma, \tilde u, \tilde v)$ из утверждения 2.9,1) заменой (1.8) с $r_1 = \tilde v^{1/4}(1-\tilde v^3)^{-1/4}$, $s_2 = r_1^3$ сводится к $NSF_{6,new}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \tilde\sigma$, $u = \tilde u\tilde v^{-1}$, $v = \tilde v^{3/2}(1-\tilde v^3)^{-1/2} > 0$ и $ps_{6,new}^{6,2,<,<} = \{v^2 + 2 - 2(v^2+1)^{1/2} < -uv^2 < v^2 + 2 + 2(v^2+1)^{1/2}\}$.

2.6.4. Выделение $mcs^{m,2,<}$. Продемонстрируем теперь линейные неособые замены, которые для некоторых полученных $CF^{m,2,<}$ позволят выделить канонические минимальные семейства, введенные в определении 1.12.

Утверждение 2.10. *Только для следующих $CF^{m,2,<}$ из списков 2.5 и 2.6 удается ограничить значения параметров в $cs^{m,2,<}$, а именно:*
1) в $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$ дает $\sigma = \tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$;
2) в $CF_{34,+1}^{4,2,<}$ нормировка (1.8) с $r_1, -s_2 = 1$ изменяет знак σ; при $\tilde u = u$ замена с $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$, $r_1, s_2 = 0$ дает $u = \tilde u^{-1}$ без изменения σ;
3) в $CF_1^{6,2,<,>}$ при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = v^{1/2}|\tilde u|^{-1/2}$, $r_2 = v^{-1/2}|\tilde u|^{-1/2}$ дает $\sigma = \tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$ без изменения v;
4) в $CF_3^{6,2,<,=}$ ($u=1$) при $\tilde v = v > 1/2$ замена с $r_1 = 1$, $s_1 = (2\tilde v - 1)s_2$, $r_2 = 0$, $s_2 = (4\tilde v - 1)^{-1}$ дает $v = \tilde v(4\tilde v - 1)^{-1} < 1/2$ ($v > 1/4$);
5) в $CF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ ($u=1$) при $\tilde v = v < 0$ нормировка с $r_1, -s_2 = 1$ дает $v = -\tilde v$;
6) в $CF_6^{6,2,<,<}$ ($u<0$) при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u \le -1$ замена с $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = (-\tilde u)^{-1/2}$, $r_2 = \tilde v s_1$ дает $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = \tilde u^{-1}v^2 > -1$;
7) в $CF_7^{6,2,<,<}$ ($v<0$) при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v < -3$ замена с $r_1 = -(2\tilde v + 3\tilde u)\varrho$, $s_1 = (\tilde v + 3)\varrho$, $r_2 = -s_1$, $s_2 = -(\tilde v + 3\tilde u - 3)\varrho$, где $\varrho = (-\tilde v(\tilde v^2 + 3\tilde u\tilde v + 3(\tilde u^2 - \tilde u + 1)))^{-1/2}$, дает $u = -(3\tilde u + \tilde v + 3)\tilde v^{-1}$, $v = 9\tilde v^{-1} > -3$ без изменения σ;
8) в $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ ($v<0$) при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u < 0$, $\tilde v = v$ нормировка с $r_1, -s_2 = 1$ дает $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = -\tilde u > 0$ без изменения v; при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v < -1$ замена с $r_1, s_2 = \tilde u\varrho$, $s_1 = -r_2$, $r_2 = (\tilde v + 1)\varrho$, где $\varrho = (-\tilde v(\tilde u^2 + (\tilde v+1)^2))^{-1/2}$, дает $u = -\tilde u\tilde v^{-1}$, $v = \tilde v^{-1} > -1$ без изменения σ.

Следствие 2.7. *Согласно соглашению 1.13 имеем:*
$acs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{|u| > 1\}$, $acs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{\sigma = -1,\ u > 1\}$, $acs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{\sigma = -1,\ u < -1\}$,
$acs_1^{6,2,<,>} = \{|u| > 1\}$, $acs_3^{6,2,<,=} = \{v > 1/2\}$, $acs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{v < 0\}$,
$acs_6^{6,2,<,<} = \{u \le -1\}$, $acs_7^{6,2,<,<} = \{v < -3\}$, $acs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{u < 0,\ v < -1\}$;
у остальных канонических форм из списка 2.5 $mcs^{m,2,<,*} = cs^{m,2,<,*}$.

2.7. Канонические формы и канонические множества при l = 2.

В заключение приведем общий список канонических форм системы (1.4) при $l = 2$.

Список 2.7. Двадцать две $CF_i^{m,2}$ и их $cs_i^{m,2}$ $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$$CF_3^{2,2,=,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[4]}, \quad \begin{matrix} cs_3^{2,2,=,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_3^{2,2,=,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_4^{2,2,>,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[4]}, \quad \begin{matrix} cs_4^{2,2,>,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_4^{2,2,>,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{7,\kappa}^{2,2,=,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \quad \begin{matrix} cs_{7,\kappa}^{2,2,=,>} = \{\kappa = 1\}, \\ cs_{7,\kappa}^{2,2,=,<} = \{\kappa = -1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{8,\kappa}^{2,2,>,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \quad \begin{matrix} cs_{8,\kappa}^{2,2,>,>} = \{\kappa = 1\}, \\ cs_{8,\kappa}^{2,2,>,<} = \{\kappa = -1\}; \end{matrix}$$

$$CF_7^{3,2,=,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \quad \begin{matrix} cs_7^{3,2,=,>} = \{u \neq \pm 1\}, \\ cs_7^{3,2,=,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{10}^{3,2,>,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[7]}, \quad \begin{matrix} cs_{10}^{3,2,>,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_{10}^{3,2,>,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{12}^{3,2,=,<} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[7]}, \quad cs_{12}^{3,2,=,<} = \{u < -1/4\};$$

$$CF_{13}^{3,2,=,=} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[8]}, \quad cs_{13}^{3,2,=,=} = \{u = 1\};$$

$$CF_{16}^{3,2,>,*} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[8]}, \quad \begin{matrix} cs_{16}^{3,2,>,>} = \{u > -1/4\}, \\ cs_{16}^{3,2,>,=} = \{u = -1/4\}, \\ cs_{16}^{3,2,>,<} = \{u < -1/4\}; \end{matrix}$$

$$CF_{8,\kappa}^{4,2,\gtrless,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_{[8]}, \quad \begin{matrix} cs_{8,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq \pm 1\}, \\ cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{14,-1}^{4,2,>,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{[9]}, \quad cs_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq -1, -2, -3\};$$

$$CF_{23}^{4,2,>,*} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[10]}, \quad \begin{matrix} cs_{23}^{4,2,>,>} = \{u \neq 1,\, v > -(1-u)^2/4,\, v \neq u, (2u-1)/4, u(2-u)/4\}, \\ cs_{23}^{4,2,>,=} = \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\}, \\ cs_{23}^{4,2,>,<} = \{v < -(1-u)^2/4\}; \end{matrix}$$

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \quad \begin{matrix} cs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0,\, u \neq 1\}, \\ cs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{u < 0\}; \end{matrix}$$

$$CF_7^{5,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[11]}, \quad \begin{matrix} cs_7^{5,2,<,>} = \{u \neq \pm 1, 3\}, \\ cs_7^{5,2,<,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{22}^{5,2,<,*} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}, \quad \begin{matrix} cs_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4,\, u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\}, \\ cs_{22}^{5,2,<,=} = \{u = -1/4\}, \\ cs_{22}^{5,2,<,<} = \{u < -1/4\}; \end{matrix}$$

$$CF_1^{6,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[12]}, \quad cs_1^{6,2,<,>} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi_1^2(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\};$$

$$CF_3^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[13]}, \ cs_3^{6,2,<,=} = \{u=1,\ v>1/4,\ v\neq 1/3, 1, (49\mp 7\sqrt{46})/6\};$$

$$CF_{4,+1}^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{[14]}, \ cs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u=1,\ |v|<1\};$$

$$CF_6^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}, \ \begin{array}{l} cs_6^{6,2,<,<} = \{v\in(0,1),\ u\in(\psi_7^-(v),\psi_7^+(v)), \\ u\neq -v,\ (u,v)\neq(-2^{-5/3}(3\pm\sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\}; \end{array}$$

$$CF_7^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[15]}, \ \begin{array}{l} cs_7^{6,2,<,<} = \{4v<-(u+1)^2,\ u\neq -1, \\ v\neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\}; \end{array}$$

$$CF_{11,+1}^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[16]}, \ cs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4v<-u^2,\ v\neq\psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\};$$

$$CF_2^{7,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[17]}, \ \begin{array}{r} cs_2^{7,2,<,<} = \{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\ v\neq 1, -u, 2u, \theta_3(u), \\ w\neq -uv, -u(v-v^{-2}), \psi_{33}^{\mp}(u,v), \\ 4w<-(u+v)^2, \psi_{27}(u,v,w)<0, \end{array}$$

$(u,w)\neq([-4v\vee\psi_{25}^{\mp}(v)],\ [3v(4v+\psi_{25}^{-}(v))/2\vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v)-2v^{-1})]),$
$(v,w)\neq([7^{-1/3}\vee\theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u+7^{-2/3})\vee(u+\theta_2(u))(\theta_2(u)-2u)])\}.$

Замечание 2.6. Только $CF_{8,\kappa}^{4,2,\gtreqless,>}$ имеет канонические семейства, соответствующие разным знакам дискриминанта D_0 и только в $CF_{16}^{3,2,>,*}$, $CF_{23}^{4,2,>,*}$, $CF_{22}^{5,2,<,*}$ реализуются все три возможных значения дискриминанта D.

Список литературы

[1] *Basov V. V.* Two-Dimensional Homogeneous Cubic Systems: Classification and Normal Forms. I // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **49**(2), 99–110 (2016) (http://link.springer.com/article/10.3103/S1063454116020023).

Original Russian Text © *В. В. Басов,* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2016. Т. 3 (61). Вып. 2.— С. 181–195 (http://elibrary.ru/item.asp?id=26421300).

[2] *Basov V. V.* Two-Dimensional Homogeneous Cubic Systems: Classification and Normal Forms. II // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **49**(3), 204–218 (2016).

Original Russian Text © *В. В. Басов,* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2016. Т. 3 (61). Вып. 3.— С. 355-371.

3. Приложения

3.1. Стандартные процедуры

```
> restart; with(LinearAlgebra): mylib := table():
```

3.1.1. Вспомогательные процедуры (используются только в стандартных).

pprintf

Функция, аналогичная по синтаксису printf, но выводящая алгебраические выражения в формате prettyprint.

```
> mylib[pprintf] := proc(S::string)
    uses StringTools, Typesetting;   local X,L,r,n,i,j,k;
    L := [RegSplit("%a",S)]; X := [_passed[2..-1]]; r := NULL; j := 1;
    for i from 1 to nops(L) do
      n := CountCharacterOccurrences(L[i],"%");
      r := r, mi(sprintf(L[i],seq(X[k],k=j..j+n-1))); j := j+n;
      if j <= nops(X) then  r := r, op(map(Typeset,[X[j]])); j := j+1; end if; end do;
    print(mrow(r)); end proc:
```

P

Кубический многочлен с коэффициентами a,b,c,d от переменных x,y.

```
> mylib[P] := (a,b,c,d,x,y) -> a*x^3+b*x^2*y+c*x*y^2+d*y^3:
```

delta

Определитель матрицы $(x_1, y_1; x_2, y_2)$.

```
> mylib[delta] := (x1,y1,x2,y2) -> x1*y2-x2*y1:
```

R

Результант системы с матрицей $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

```
> mylib[R] := proc(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2)
    local dab,dac,dad,dbc,dbd,dcd,Rez;
    dab := factor(a1*b2-a2*b1); dac := factor(a1*c2-a2*c1);
    dad := factor(a1*d2-a2*d1); dbc := factor(b1*c2-b2*c1);
    dbd := factor(b1*d2-b2*d1); dcd := factor(c1*d2-c2*d1);
    Rez := factor(dad^3-2*dab*dad*dcd+dac^2*dcd+dab*dbd^2-dab*dbc*dcd-dac*dad*dbd);
    mylib[pprintf]("Resultant:   %a", Rez); end proc:
```

3.1.2. Процедуры для однородных кубических систем с примерами их действия.

zamproc (l = 0,1,2,3)

Производит линейную замену $\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$ в системе с матрицей $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

Результат --- матрица 2x4 получаемой системы.

При написании full = true будет дополнительно выписана матрица исходной системы, замена и ее определитель.

При написании res = true будет дополнительно выписан результант исходной системы.

При написании lbl = true элементы матрицы получаемой системы будут выписаны построчно.

```
> mylib[zamproc] := proc(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2, r1,s1,r2,s2, {full::boolean := false,
                        res::boolean := false, lbl::boolean := false}) :: Matrix;
    local a1nn,b1nn,c1nn,d1nn,a2nn,b2nn,c2nn,d2nn,a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,Delta,
          i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,ix,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,mx,M;   Delta := r1*s2 - s1*r2:
    a1n := (s2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,r1,r2)-s1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,r1,r2))/Delta:
    b1n := (3*a1*r1^2*s1*s2+2*b1*r1*s1*r2*s2+b1*r1^2*s2^2+2*c1*r1*r2*s2^2+c1*s1*r2^2*s2
            +3*d1*r2^2*s2^2-3*a2*r1^2*s1^2-2*b2*r1*s1^2*r2-b2*r1^2*s1*s2-2*c2*r1*s1*r2*s2
            -c2*s1^2*r2^2-3*d2*s1*r2^2*s2)/Delta:
    c1n := (3*a1*r1*s1^2*s2+2*b1*r1*s1*s2^2+b1*s1^2*r2*s2+2*c1*s1*r2*s2^2+c1*r1*s2^3
            +3*d1*r2*s2^3-3*a2*r1*s1^3-2*b2*r1*s1^2*s2-b2*s1^3*r2-2*c2*s1^2*r2*s2
            -c2*r1*s1*s2^2-3*d2*s1*r2*s2^2)/Delta:
    d1n := (s2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,s1,s2)-s1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,s1,s2))/Delta:
    a2n := (-r2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,r1,r2)+r1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,r1,r2))/Delta:
    b2n := (3*a2*r1^3*s1+2*b2*r1^2*s1*r2+b2*r1^3*s2+2*c2*r1^2*r2*s2+c2*r1*s1*r2^2
            +3*d2*r1*r2^2*s2-3*a1*r1^2*s1*r2-2*b1*r1*s1*r2^2-b1*r1^2*r2*s2-2*c1*r1*r2^2*s2
            -c1*s1*r2^3-3*d1*r2^3*s2)/Delta:
    c2n := (3*a2*r1^2*s1^2+2*b2*r1^2*s1*s2+b2*r1*s1^2*r2+2*c2*r1*s1*r2*s2+c2*r1^2*s2^2
            +3*d2*r1*r2*s2^2-3*a1*r1*s1^2*r2-2*b1*r1*s1*r2*s2-b1*s1^2*r2^2-2*c1*s1*r2^2*s2
            -c1*r1*r2*s2^2-3*d1*r2^2*s2^2)/Delta:
    d2n := (-r2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,s1,s2)+r1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,s1,s2))/Delta:
    a1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a1n))))):
    b1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b1n))))):
    c1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c1n))))):
    d1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d1n))))):
    a2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a2n))))):
    b2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b2n))))):
    c2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c2n))))):
    d2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d2n))))):
    a1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a1))))):
    b1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b1))))):
```

```
    c1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c1))))):
    d1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d1))))):
    a2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a2))))):
    b2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b2))))):
    c2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c2))))):
    d2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d2))))):
    M := Matrix(2, 4); M(1,1) := a1nn; M(1,2) := b1nn; M(1,3) := c1nn; M(1,4) := d1nn;
                       M(2,1) := a2nn; M(2,2) := b2nn; M(2,3) := c2nn; M(2,4) := d2nn;
    if full then mylib[pprintf]("Initial system:"); print(a1n,b1n,c1n,d1n); print(a2n,b2n,c2n,d2n);
  end if;
    if res then mylib[R](a1, b1, c1, d1, a2, b2, c2, d2); end if;
    if full then mylib[pprintf]("substitution:  %a, %a; %a, %a",
                         simplify(factor(simplify(r1))),simplify(factor(simplify(s1))),
                         simplify(factor(simplify(r2))),simplify(factor(simplify(s2))));
      mylib[pprintf]("det:  %a", simplify(factor(simplify(mylib[delta](r1,s1,r2,s2)))));
      mylib[pprintf]("system after substitution:"); end if:
    if lbl then print(a1nn); print(b1nn); print(c1nn); print(d1nn);
             print(a2nn); print(b2nn); print(c2nn); print(d2nn);
    else print(a1nn,b1nn,c1nn,d1nn); print(a2nn,b2nn,c2nn,d2nn); end if;
    return M; end proc:
```

```
> mylib[zamproc](u,0,0,v,0,1,0,1, r1,1,0,s2):
```

$$u\,r1^2,\ r1\,(3\,u-1),\ 3\,u-2,\ \frac{s2^3\,v-s2^2+u-1}{r1}$$

$$0,\ r1^2,\ 2\,r1,\ s2^2+1 \qquad (1)$$

Вызов процедуры с включением всех дополнительных опций:
вывод исходной системы и замены с ее определителем (full = true), вывод результанта исходной системы (res = true), построчный вывод элементов матрицы получаемой системы (lbl = true).

```
> mylib[zamproc](u,0,0,v,0,1,0,1, r1,1,0,s2, full = true, res = true, lbl = true):
```

Initial system:

$u,\ 0,\ 0,\ v$

$0,\ 1,\ 0,\ 1$

Resultant: $u\,(u^2+v^2)$

substitution: $r1,\ 1;\ 0,\ s2$

det: $r1\ s2$

system after substitution:

$u\,r1^2$

$r1\,(3\,u-1)$

$3\,u-2$

$\frac{s2^3\,v-s2^2+u-1}{r1}$

0

$r1^2$

$2\,r1$

$s2^2+1 \qquad (2)$

zamprocl2 (для l = 2,3)

Замена $\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$ в системе с l = 2,3, записанной в виде (α, β, γ), $\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}$.

Результат --- матрица 2x4 полученной системы.
При написании full = true будет дополнительно выписана матрица исходной системы, замена и ее определитель.
При написании lbl = true элементы матрицы получаемой системы будут выписаны построчно.

```
> mylib[zamprocl2] := proc(alp,beta,gamma,p1,q1,p2,q2, r1,s1,r2,s2,
                          {full::boolean := false, lbl::boolean := false}) :: Matrix;
  local a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n, M;
  a1n := factor(simplify(alp*p1)); b1n := factor(simplify(alp*q1+beta*p1));
  c1n := factor(simplify(beta*q1+gamma*p1)); d1n := factor(simplify(gamma*q1));
  a2n := factor(simplify(alp*p2)); b2n := factor(simplify(alp*q2+beta*p2));
  c2n := factor(simplify(beta*q2+gamma*p2)); d2n := factor(simplify(gamma*q2));
  M := mylib[zamproc](a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,r1,s1,r2,s2,
              ':-full' = full,':-res' = false,':-lbl' = lbl);
  return M; end proc:
```

```
> mylib[zamprocl2](2,1,-1,1,2,0,-1, r1,s1,r2,0):
```

$$-(r1+r2)\,(2\,r1-r2),\ -s1\,(4\,r1+r2),\ -2\,s1^2,\ 0$$

$$\frac{2\,(2\,r1-r2)\,(r1+r2)^2}{s1},\ (r1+r2)\,(10\,r1+r2),\ s1\,(8\,r1+5\,r2),\ 2\,s1^2 \qquad (3)$$

l2pH (для l = 2,3)

Замена $\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$ в системе с l = 2,3, записанной в виде (α, β, γ), $\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}$.

Результат --- вектор коэффициентов общего множителя p_0^2 и матрица H получаемой системы.

При написании full = true будут дополнительно выписаны p_0^2 и H исходной системы, замена и ее определитель.

При написании hidep = true не будет выписана строка p_0^2 получаемой системы.

При написании hideH = true не будет выписана матрица H получаемой системы.

```
> mylib[l2pH] := proc(alp,beta,gamma,p1,q1,p2,q2,r1,s1,r2,s2,
                      {full::boolean := false, hidep::boolean := false, hideH::boolean := false})
  local alpn,betan,gamman,p1n,q1n,p2n,q2n,p20,H2:
  alpn := combine(factor(simplify(alp*r1^2+beta*r1*r2+gamma*r2^2))):
  betan := combine(factor(simplify(alp*2*r1*s1+beta*(r1*s2+r2*s1)+gamma*2*r2*s2))):
  gamman := combine(factor(simplify(alp*s1^2+beta*s1*s2+gamma*s2^2))):
  p1n := factor(simplify((r1*(p1*s2-p2*s1)+r2*(q1*s2-q2*s1))/(r1*s2-r2*s1))):
  q1n := factor(simplify((s1*(p1*s2-p2*s1)+s2*(q1*s2-q2*s1))/(r1*s2-r2*s1))):
  p2n := factor(simplify(-(r1*(p1*r2-p2*r1)+r2*(q1*r2-q2*r1))/(r1*s2-r2*s1))):
  q2n := factor(simplify(-(s1*(p1*r2-p2*r1)+s2*(q1*r2-q2*r1))/(r1*s2-r2*s1))):
  if full then p20 := convert(Matrix([[alp,beta,gamma]]),list); H2 := Matrix([[p1,q1],[p2,q2]]);
    mylib[pprintf]("Initial coefficients:  %a = %a; H = %a", (p[0])^(2), p20, H2);
    mylib[pprintf]("substitution:  %a, %a; %a, %a", r1,s1,r2,s2);
    mylib[pprintf]("det:  %a", simplify(factor(simplify(mylib[delta](r1,s1,r2,s2)))));
    mylib[pprintf]("coefficients after substitution:");   end if:
  p20 := convert(Matrix([[alpn,betan,gamman]]),list); H2 := Matrix([[p1n,q1n],[p2n,q2n]]);
  if not(hidep) then mylib[pprintf]("%a = %a", (p[0])^(2), p20); end if:
  if not(hideH) then mylib[pprintf]("H = %a", H2); end if: end proc:
```

```
> mylib[l2pH](1,0,1, 2,3,0,5, r1,3,-5,s2);
```

$$p_0^2 = [r1^2 + 25, 6\, r1 - 10\, s2, s2^2 + 9]$$

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{2\, r1\, s2 - 15\, s2 + 75}{r1\, s2 + 15} & \dfrac{3\, s2\, (-3 + s2)}{r1\, s2 + 15} \\ -\dfrac{15\, (r1 + 5)}{r1\, s2 + 15} & \dfrac{5\, (r1\, s2 + 3\, s2 + 6)}{r1\, s2 + 15} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

l2syst (для l = 2,3)

Представление системы с l = 2,3, записанной как (α, β, γ), $\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}$, в виде матрицы 2x4.

При написании full = true будут дополнительно выписаны p_0^2 и H исходной системы.

При написании lbl = true элементы матрицы 2x4 будут выписаны построчно.

```
> mylib[l2syst] := proc(alp,beta,gamma,p1,q1,p2,q2, {full::boolean := false, lbl::boolean := false})
  local a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,p20,H2:
  a1n := factor(simplify(alp*p1)); b1n := factor(simplify(alp*q1+beta*p1));
  c1n := factor(simplify(beta*q1+gamma*p1)); d1n := factor(simplify(gamma*q1));
  a2n := factor(simplify(alp*p2)); b2n := factor(simplify(alp*q2+beta*p2));
  c2n := factor(simplify(beta*q2+gamma*p2)); d2n := factor(simplify(gamma*q2));
  p20 := convert(Matrix([[alp,beta,gamma]]),list); H2 := Matrix([[p1,q1],[p2,q2]]);
  if full then mylib[pprintf]("Initial coefficients:  %a = %a; H = %a", (p[0])^(2), p20, H2);
    mylib[pprintf]("Matrix (2x4):"); end if;
  if lbl then print(a1n);print(b1n);print(c1n);print(d1n);print(a2n);print(b2n);print(c2n);print(d2n);
  else print(a1n,b1n,c1n,d1n); print(a2n,b2n,c2n,d2n); end if; end proc:
```

```
> mylib[l2syst](alpha,-1,1, p1,q1,1,5, full = true);
```

Initial coefficients: $p_0^2 = [\alpha, -1, 1]$; $H = \begin{bmatrix} p1 & q1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Matrix (2x4):

$$\alpha\, p1, \alpha\, q1 - p1, -q1 + p1, q1$$

$$\alpha, 5\,\alpha - 1, -4, 5 \qquad \textbf{(5)}$$

pm2 (для l = 2)

В системе с матрицей $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ при $l = 2$ выделяются:

коэффициенты общего множителя p_0^2 с его дискриминантом D_0,

матрица H с ее определителем, дискриминантом характеристического полинома D и собственными числами.

```
> mylib[pm2] := proc(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2)
  local P1n,P2n,dab,dac,dad,dbc,dbd,dcd,Rez,chis,znam,obw,om,hp,deltaH,mn,Dp,DH,ev;
  P1n := factor(simplify(mylib[P](a1,b1,c1,d1,x1,x2))); P2n := factor(simplify(mylib[P](a2,b2,c2,d2,
  x1,x2)));
  chis := numer(P1n/P2n);znam:=denom(P1n/P2n);obw:=simplify(P1n/chis);
  if coeff(obw,x1^2)<>0 then   mn := coeff(obw,x1^2);
    om := Matrix([[coeff(obw,x1^2)/mn,coeff(obw,x1)/x2/mn,coeff(obw,x2^2)/mn]]);
    hp := Matrix([[coeff(chis,x1)*mn,coeff(chis,x2)*mn],[coeff(znam,x1)*mn,coeff(znam,x2)*mn]]);
  else if coeff(obw,x1)<>0 then mn := coeff(obw,x1)/x2;
      om := Matrix([[0,coeff(obw,x1)/x2/mn,coeff(obw,x2^2)/mn]]);
      hp := Matrix([[coeff(chis,x1)*mn,coeff(chis,x2)*mn],[coeff(znam,x1)*mn,coeff(znam,x2)*mn]]);
    else mn := coeff(obw,x2^2); om := Matrix([[0,0,coeff(obw,x2^2)/mn]]);
      hp := Matrix([[coeff(chis,x1)*mn,coeff(chis,x2)*mn],[coeff(znam,x1)*mn,coeff(znam,x2)*mn]]);
    end if; end if;
  deltaH := factor(simplify(hp[1,1]*hp[2,2]-hp[1,2]*hp[2,1]));
  DH := factor(simplify((hp[1,1]+hp[2,2])^2-4*deltaH));
  dab := factor(a1*b2-a2*b1); dac := factor(a1*c2-a2*c1); dad := factor(a1*d2-a2*d1);
  dbc := factor(b1*c2-b2*c1); dbd := factor(b1*d2-b2*d1); dcd := factor(c1*d2-c2*d1);
  Rez := factor(dad^3-2*dab*dad*dcd+dac^2*dcd+dab*dbd^2-dab*dbc*dcd-dac*dad*dbd);
  Dp := factor(simplify((om[1,2])^2-4*om[1,1]*om[1,3]));   om := convert(om,list);
  mylib[pprintf]("Initial coefficients:"); print(a1,b1,c1,d1); print(a2,b2,c2,d2); mylib[pprintf]
  ("Factorization:");
  ev := Eigenvalues(hp);   mylib[pprintf]("%a = %a; %a = %a", (p[0])^(2), om, D[0], Dp);
  mylib[pprintf]("H = %a, det = %a, %a = %a, eigenvalues:  %a, %a", hp,deltaH,D,DH,ev[1],ev[2]); end
  proc:
```

```
> mylib[pm2](1,0,1,0,0,2,0,2);
```

Initial coefficients:

1, 0, 1, 0

0, 2, 0, 2

Factorization:

$p_0^2 = [1, 0, 1]; \; D_0 = -4$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; det = 2, \; D = 1, \; eigenvalues: \; 2, 1 \tag{6}$$

```
> save(mylib, "newlib.m");
```

При нажатии !!! создается файл newlib.m, из которого в дальнейшем подключается список mylib.

3.2. Представление системы с матрицей A при l = 2 в виде $\dot{x} = P_0^2(x)Hx$.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

Задача -- разложить матрицу $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ на строку p_0^2 и матрицу H :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\,\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} p1 & q1 \\ p2 & q2 \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\,p1, \alpha\,q1 + 2\,\beta\,p1, 2\,\beta\,q1 + g\,p1, q1\,g$$
$$\alpha\,p2, \alpha\,q2 + 2\,\beta\,p2, 2\,\beta\,q2 + g\,p2, g\,q2 \qquad \textbf{(1)}$$

---

1) $a_1, a_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 1$. Приравнивание первых строк матриц A и (1). Обозначим bb = 2β.

```
> solve([a1=p1, b1=q1+bb*p1, c1=q1*bb+g*p1, d1=q1*g],{p1,q1,bb,g});
```

$$\Big\{bb = RootOf(\_Z^3\,a1^2 - 2\,b1\,\_Z^2\,a1 + (b1^2 + a1\,c1)\,\_Z + d1\,a1 - b1\,c1), g = \frac{1}{a1}\,\big(c1 - RootOf(\_Z^3\,a1^2 - 2\,b1\,\_Z^2\,a1 + (b1^2 + a1\,c1)\,\_Z + d1\,a1 - b1\,c1)\,b1 + RootOf(\_Z^3\,a1^2 - 2\,b1\,\_Z^2\,a1 + (b1^2 + a1\,c1)\,\_Z + d1\,a1 - b1\,c1)^2\,a1\big), p1 = a1, q1 = b1 - RootOf(\_Z^3\,a1^2 - 2\,b1\,\_Z^2\,a1 + (b1^2 + a1\,c1)\,\_Z + d1\,a1 - b1\,c1)\,a1\Big\} \qquad \textbf{(2)}$$

```
> pp := x^3*a1^2-2*b1*x^2*a1+(b1^2+c1*a1)*x+a1*d1-b1*c1;
```

$$pp := x^3\,a1^2 - 2\,b1\,x^2\,a1 + (b1^2 + a1\,c1)\,x + d1\,a1 - b1\,c1 \qquad \textbf{(3)}$$

Обозначим через θ вещественный корень многочлена (3). Перепишем решение (2):

```
> 2*beta = theta,  g1 = (a1*theta^2-b1*theta+c1)/a1,  p1 = a1,  q1 = b1-theta*a1;
```

$$2\,\beta = \theta, g1 = \frac{a1\,\theta^2 - b1\,\theta + c1}{a1}, p1 = a1, q1 = b1 - \theta\,a1 \qquad \textbf{(4)}$$

Далее приравниваем вторые строки матриц A и (1).
Так как 2β = θ, у многочлена (3) и аналогичного ему с коэффициентами из второй строки есть общий корень θ.
Из равенства двух выражений для коэффициента γ получаем значение корня θ.

```
> g1 := (a1*theta^2-b1*theta+c1)/a1; g2 := (a2*theta^2-b2*theta+c2)/a2; theta=solve(g1=g2,theta);
```

$$g1 := \frac{a1\,\theta^2 - b1\,\theta + c1}{a1}$$

$$g2 := \frac{a2\,\theta^2 - b2\,\theta + c2}{a2}$$

$$\theta = \frac{a1\,c2 - a2\,c1}{a1\,b2 - a2\,b1} \qquad \textbf{(5)}$$

---

2) $a_1 \neq 0, a_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, p_2 = 0, q_2 \neq 0$. Для первых строк сохраняются равенства (4). Из равенства вторых строк:

```
> unassign('g2'); b2=q2, c2=2*beta*q2, d2=g2*q2;   unassign('g1'); 2*beta=c2/b2, 2*beta=theta, g1=g2;
```

$$b2 = q2, c2 = 2\,\beta\,q2, d2 = g2\,q2$$

$$2\,\beta = \frac{c2}{b2}, 2\,\beta = \theta, g1 = g2 \qquad \textbf{(6)}$$

---

4) $a_1, a_2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha, \gamma = 0$. Представление (1) имеет вид:

```
> l2syst(0,1,0,p1,q1,p2,q2, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [0, 1, 0];\ H = \begin{bmatrix} p1 & q1 \\ p2 & q2 \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$0, p1, q1, 0$$
$$0, p2, q2, 0 \qquad \textbf{(7)}$$

3.3. Приведение матрицы H к жордановой форме.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

Дискриминант D матрицы H.

```
> DH := (p1-q2)^2+4*p2*q1;
```

$$DH := (p1-q2)^2+4\,p2\,q1 \tag{1}$$

1) $D>0$.

λ_1, λ_2 и λ_*:

```
> lambda1:=(p1+q2+sigma*sqrt(DH))/2; lambda2:=(p1+q2-sigma*sqrt(DH))/2; lz:=p1-q2+sigma*sqrt(DH);
```

$$\lambda 1 := \frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2+\frac{1}{2}\,\sigma\sqrt{(p1-q2)^2+4\,p2\,q1}$$

$$\lambda 2 := \frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2-\frac{1}{2}\,\sigma\sqrt{(p1-q2)^2+4\,p2\,q1}$$

$$lz := p1-q2+\sigma\sqrt{(p1-q2)^2+4\,p2\,q1} \tag{2}$$

Результат действия произвольной замены J_1 на матрицу H :

```
> H := <<p1,p2>|<q1,q2>>: J1 := <<a,b>|<c,d>>: F := evala((1/J1).H.J1): 'J1' = J1, 'F' = F;
```

$$J1=\begin{bmatrix} a & c\\ b & d\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} -\dfrac{a\,c\,p2-a\,d\,p1+b\,c\,q2-b\,d\,q1}{a\,d-b\,c} & -\dfrac{c^2\,p2-c\,d\,p1+c\,d\,q2-d^2\,q1}{a\,d-b\,c}\\ \dfrac{a^2\,p2-a\,b\,p1+a\,b\,q2-b^2\,q1}{a\,d-b\,c} & \dfrac{a\,c\,p2+a\,d\,q2-b\,c\,p1-b\,d\,q1}{a\,d-b\,c}\end{bmatrix} \tag{3}$$

Поиск замены к жордановой форме при $\sigma = 1$.

```
> solve([F[1,1]=subs(sigma=1,lambda1),F[1,2]=0,F[2,1]=0,F[2,2]=subs(sigma=1,lambda2)], {a,b,c,d});
```

$$\left\{a=RootOf(p2\,\_Z^2-q1+(-p1+q2)\,\_Z)\,b,\ b=b,\ c=-\frac{1}{2}\,\frac{d\left(\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}-p1+q2\right)}{p2},\ d=d\right\} \tag{4}$$

```
> solve(_Z^2*p2-q1+(-p1+q2)*_Z, _Z);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{p1-q2+\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}}{p2},\ -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}-p1+q2}{p2} \tag{5}$$

Выбираем подходящие значения для b и d и получаем замену J_1^2 :

```
> b1 := 2*p2: a1 := (1/2)*(p1-q2+sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1))*b1/p2: d1 := p1-q2+sqrt(p1^2-2*p1*
  q2+q2^2+4*p2*q1): c1 := simplify(expand(-(1/2)*d1*(-p1+q2+sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1))/p2)):
  J1 := <<a1,b1>|<c1,d1>>; 'F' = evala((1/J1).H.J1);
```

$$J1 := \begin{bmatrix} p1-q2+\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2} & -2\,q1\\ 2\,p2 & p1-q2+\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+\frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+\frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2\end{bmatrix} \tag{6}$$

Поиск замены к жордановой форме при $\sigma = -1$.

```
> solve([F[1,1]=subs(sigma=-1,lambda1),F[1,2]=0,F[2,1]=0,F[2,2]=subs(sigma=-1,lambda2)], {a,b,c,d});
```

$$\left\{a=RootOf(p2\,\_Z^2-q1+(-p1+q2)\,\_Z)\,b,\ b=b,\ c=\frac{1}{2}\,\frac{d\left(p1-q2+\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}\right)}{p2},\ d=d\right\} \tag{7}$$

Выбираем подходящие значения для b и d и получаем замену J_1^2 :

```
> b1 := 2*p2: a1 := -(1/2)*(-p1+q2+sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1))*b1/p2: d1 := -(-p1+q2+sqrt(p1^2-2*
  p1*q2+q2^2+4*p2*q1)): c1 := simplify(expand((1/2)*d1*(p1-q2+sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1))/p2)):
  J1 := <<a1,b1>|<c1,d1>>; 'F' = evala((1/J1).H.J1);
```

$$J1 := \begin{bmatrix} p1-q2-\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2} & -2\,q1\\ 2\,p2 & p1-q2-\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+\frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+\frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2\end{bmatrix} \tag{8}$$

Действие замены J_1^2 на строку p_0^2.

```
> unassign('lz'); l2pH(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2, lz,-2*q1,2*p2,lz, hideH = true);
```

$$p_0^2 = [\alpha\,lz^2+4\,\beta\,lz\,p2+4\,g\,p2^2,\ -4\,\alpha\,lz\,q1+2\,\beta\,lz^2-8\,\beta\,p2\,q1+4\,g\,p2\,lz,\ 4\,\alpha\,q1^2-4\,\beta\,q1\,lz+g\,lz^2] \tag{9}$$

Проверка равенства $\delta = 2\sigma_0\sqrt{D}\lambda_*$.

```
> # x1 := collect((simplify(lz^2 + 4*p2*q1)), sigma, factor); x2 := 2*sqrt(DH)*lz*sigma;
  # subs(sigma = 1, simplify(x1 - x2)); subs(sigma = -1, simplify(x1 - x2));
```

2) $D = 0$. Поиск замены к жордановой форме:

```
> solve([F[1,1]=subs(sigma=1,lambda1),F[1,2]=0,F[2,1]=1,F[2,2]=subs(sigma=1,lambda2)], {a,b,c,d});
```

$$\left\{a=a,\, b=b,\, c=-\frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}\;a+\frac{1}{2}\,a\,p1-\frac{1}{2}\,a\,q2+b\,q1,\, d=-\frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}\;b+a\,p2-\frac{1}{2}\,b\,p1+\frac{1}{2}\,b\,q2\right\} \quad (10)$$

Определитель полученной замены:

```
> c1 := q1*b-(1/2)*a*q2+(1/2)*a*p1-(1/2)*sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1)*a:
  d1 := -(1/2)*b*p1+a*p2-(1/2)*sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1)*b+(1/2)*q2*b: det=simplify(a*d1-c1*b);
```

$$det=a^2\,p2-a\,b\,p1+a\,b\,q2-b^2\,q1 \quad (11)$$

2_1^a) $q_1 \neq 0$. Возьмем $a=0, b=2$ ($\det \neq 0$). Получаем замену $\mathcal{J}^2_{2a}$.

```
> a1 := 0: b1 := 2: c1 := q1*b1-(1/2)*a1*q2+(1/2)*a1*p1-(1/2)*sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1)*a1:
  d1 := -(1/2)*b1*p1+a1*p2-(1/2)*sqrt(p1^2-2*p1*q2+q2^2+4*p2*q1)*b1+(1/2)*q2*b1:
  J2 := <<a1,b1>|<c1,d1>>; 'F' = evala((1/J2).H.J2);
```

$$J2:=\begin{bmatrix} 0 & 2\,q1 \\ 2 & -p1-\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+q2 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+\frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{p1^2-2\,p1\,q2+4\,p2\,q1+q2^2}+\frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Действие замены $\mathcal{J}^2_{2a}$ на строку p^2_0.

```
> l2pH(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2, 0,2*q1,2,-p1+q2, hideH = true);
```

$$p^2_0=\left[4\,g,\, 8\,\beta\,q1-4\,g\,p1+4\,g\,q2,\, 4\,\alpha\,q1^2-4\,\beta\,q1\,p1+4\,\beta\,q1\,q2+g\,p1^2-2\,g\,p1\,q2+g\,q2^2\right] \quad (13)$$

2_1^b) $q_1=0,\ p_2\neq 0 \ \Rightarrow q_2=p_1$. Возьмем $b=0, a=1$ ($\det\neq 0$). Получаем замену $\mathcal{J}^2_{2b}$.

```
> a1 := 1: b1 := 0: q21 := p1: c1 := -(1/2)*a1*q21+(1/2)*a1*p1: d1 := -(1/2)*b1*p1+a1*p2+(1/2)*q21*b1:
  H := <<p1,p2>|<0,q21>>: J2 := <<a1,b1>|<c1,d1>>: 'J2' = J2, 'F' = evala((1/J2).H.J2);
```

$$J2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p2 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} p1 & 0 \\ 1 & p1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Действие замены $\mathcal{J}^2_{2b}$ на строку p^2_0.

```
> l2pH(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2, 1,0,0,p2, hideH = true);
```

$$p^2_0=\left[\alpha,\, 2\,\beta\,p2,\, g\,p2^2\right] \quad (15)$$

3) $D < 0$. Поиск замены к жордановой форме:

```
> solve([F[1,1]=(p1+q2)/2,F[1,2]=-sqrt(-DH)/2,F[2,1]=sqrt(-DH)/2,F[2,2]=(p1+q2)/2], {a,b,c,d});
```

$$\left\{a=\frac{1}{2}\,\frac{b\,p1\sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2}-b\,q2\sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2}-d\,p1^2+2\,d\,p1\,q2-4\,d\,q1\,p2-d\,q2^2}{p2\sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2}},\, b=b,\, c=-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2}\;b-d\,p1+d\,q2}{p2},\, d=d\right\} \quad (16)$$

Выбираем подходящие значения для b и d и получаем замену $\mathcal{J}^2_3$:

```
> b1 := 0: d1 := 2*p2: a1 := (1/2)*(-d1*p1^2+2*d1*q2*p1+b1*p1*sqrt(-p1^2+2*p1*q2-q2^2-4*p2*q1)-d1*q2^2
  -q2*b1*sqrt(-p1^2+2*p1*q2-q2^2-4*p2*q1)-4*p2*d1*q1)/(p2*sqrt(-p1^2+2*p1*q2-q2^2-4*p2*q1)): c1 := -
  (1/2)*(-d1*p1+d1*q2+sqrt(-p1^2+2*p1*q2-q2^2-4*p2*q1)*b1)/p2:
  H := <<p1,p2>|<q1,q2>>: J3 := evala(<<a1,b1>|<c1,d1>>): 'J3' = J3, 'F' = evala((1/J3).H.J3);
```

$$J3=\begin{bmatrix} \sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2} & p1-q2 \\ 0 & 2\,p2 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2 & -\frac{1}{2}\sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{-p1^2+2\,p1\,q2-4\,p2\,q1-q2^2} & \frac{1}{2}\,p1+\frac{1}{2}\,q2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Действие замены $\mathcal{J}^2_3$ на строку p^2_0.

```
> l2pH(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2, sqrt(-D),p1-q2,0,2*p2, hideH = true);
```

$$p^2_0=\left[-\alpha\,D,\, 2\sqrt{-D}\,\left(\alpha\,p1-\alpha\,q2+2\,\beta\,p2\right),\, \alpha\,p1^2-2\,\alpha\,p1\,q2+\alpha\,q2^2+4\,\beta\,p2\,p1-4\,\beta\,p2\,q2+4\,g\,p2^2\right] \quad (18)$$

3.4. Нулевой дискриминант многочлена P_0^2 ($D_0 = 0$).

3.4.1. Теорема 2.2, случай $D > 0$.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

В рассматриваемой системе $D > 0$, поэтому у H есть два различных вещественных собственных числа λ и μ.

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,lambda,0,0,mu, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\begin{array}{c} \alpha\lambda, 2\beta\lambda, g\lambda, 0 \\ 0, \alpha\mu, 2\beta\mu, g\mu \end{array} \qquad \mathbf{(1)}$$

$1_1)$: $\alpha = 0$ $(\beta = 0, s_2 = 0, \gamma > 0)$.

```
> l2syst(0,0,g,lambda,0,0,mu);
```

$$\begin{array}{c} 0, 0, g\lambda, 0 \\ 0, 0, 0, g\mu \end{array} \qquad \mathbf{(2)}$$

Замена в системе (2) с $s_2 = 0$.

```
> zamproc(0,0,g*lambda,0,0,0,0,g*mu,r1,s1,r2,0):
```

$$\begin{array}{c} g\mu r2^2, 0, 0, 0 \\ \dfrac{g\, r1\, r2^2 (\lambda-\mu)}{s1}, g\lambda r2^2, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(3)}$$

Еще один нуль получаем при $r_1 = 0$.

```
> zamproc(0,0,g*lambda,0,0,0,0,g*mu,0,s1,r2,0):
```

$$\begin{array}{c} g\mu r2^2, 0, 0, 0 \\ 0, g\lambda r2^2, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(4)}$$

Нормировка системы (4).

```
> r21 := (g*abs(lambda))^(-1/2):
  zamproc(0,0,g*lambda,0,0,0,0,g*mu,0,s1,r21,0):
```

$$\begin{array}{c} \dfrac{\mu}{|\lambda|}, 0, 0, 0 \\ 0, \dfrac{\lambda}{|\lambda|}, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(5)}$$

$1_2)$: $\alpha > 0$ $(s_1 = -\beta s_2 \alpha^{-1}, \gamma = \beta^2 \alpha^{-1})$.

Замена в системе (1).

```
> s11 := -beta*s2/alpha:
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,0,alpha*mu,2*beta*mu,mu*beta^2/alpha,
        r1,s11,r2,s2):
```

$$\begin{array}{c} \dfrac{(\alpha\lambda r1 + \beta\mu r2)(\alpha r1 + \beta r2)}{\alpha}, -\dfrac{(\lambda-\mu)(\alpha r1 + \beta r2)\beta s2}{\alpha}, 0, 0 \\ -\dfrac{(\lambda-\mu)(\alpha r1 + \beta r2)\, r1\, r2}{s2}, \dfrac{(\alpha r1 + \beta r2)(\alpha\mu r1 + \beta\lambda r2)}{\alpha}, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(6)}$$

$1_2^1)$: $\beta = 0$ $(\gamma = 0, s_1 = 0)$.

```
> l2syst(alpha,0,0,lambda,0,0,mu);
```

$$\begin{array}{c} \alpha\lambda, 0, 0, 0 \\ 0, \alpha\mu, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(7)}$$

Замена в системе (7) с $s_1 = 0$.

```
> zamproc(alpha*lambda,0,0,0,0,alpha*mu,0,0, r1,0,r2,s2):
```

$$\begin{array}{c} \alpha\lambda r1^2, 0, 0, 0 \\ -\dfrac{\alpha\, r1^2\, r2 (\lambda-\mu)}{s2}, \alpha\mu r1^2, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(8)}$$

Еще один нуль получаем при $r_2 = 0$.

```
> zamproc(alpha*lambda,0,0,0,0,alpha*mu,0,0, r1,0,0,s2):
```

$$\begin{array}{c} \alpha\lambda r1^2, 0, 0, 0 \\ 0, \alpha\mu r1^2, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(9)}$$

Нормировка системы (9).

```
> zamproc(alpha*lambda,0,0,0,0,alpha*mu,0,0, (abs(alpha*mu))^(-1/2),0,0,1):
```

$$\begin{array}{c} \alpha\lambda \left|\dfrac{1}{\alpha\mu}\right|, 0, 0, 0 \\ 0, \alpha\mu \left|\dfrac{1}{\alpha\mu}\right|, 0, 0 \end{array} \qquad \mathbf{(10)}$$

$1_2^2)$: $\beta \neq 0$. Система имеет вид (1).

$1_2^{2a})$: $\lambda = -\mu$ $(r_1 = \beta r_2 \alpha^{-1})$.

```
> r11 := beta*r2/alpha: s11 := -beta*s2/alpha:
  zamproc(alpha*(-mu),2*beta*(-mu),(-mu)*beta^2/alpha,0,0,alpha*mu,2*beta*mu,mu*beta^2/alpha,
        r11,s11,r2,s2):
```

$$0,\ \frac{4\,\beta^2\,\mu\,s2\,r2}{\alpha},\ 0,\ 0$$

$$\frac{4\,r2^3\,\mu\,\beta^2}{\alpha\,s2},\ 0,\ 0,\ 0 \tag{11}$$

Нормировка системы (11).

```
> r21 := 1/sqrt(4*beta^2*abs(mu)/alpha): r11 := beta*r21/alpha:
  s21 := 1/sqrt(4*beta^2*abs(mu)/alpha): s11 := -beta*s21/alpha:
  zamproc(alpha*(-mu),2*beta*(-mu),(-mu)*beta^2/alpha,0,0,alpha*mu,2*beta*mu,mu*beta^2/alpha,
        r11,s11,r21,r21):
```

$$0,\ \frac{\mu}{|\mu|},\ 0,\ 0$$

$$\frac{\mu}{|\mu|},\ 0,\ 0,\ 0 \tag{12}$$

$1_2^{2b})$: $\lambda \neq -\mu$ $(r_1 = 0)$.

```
> s11 := -beta*s2/alpha:
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,0,alpha*mu,2*beta*mu,mu*beta^2/alpha,
        0,s11,r2,s2):
```

$$\frac{\mu\,\beta^2\,r2^2}{\alpha},\ -\frac{\beta^2\,r2\,s2\,(\lambda-\mu)}{\alpha},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\lambda\,\beta^2\,r2^2}{\alpha},\ 0,\ 0 \tag{13}$$

Нормировка системы (13).

```
> r21 := sqrt(alpha)/(beta*abs(lambda)^(1/2)):
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,0,alpha*mu,2*beta*mu,mu*beta^2/alpha,
        0,s11,r21,s2):
```

$$\frac{\mu}{|\lambda|},\ -\frac{\beta\,s2\,(\lambda-\mu)}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{|\lambda|}},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0 \tag{14}$$

```
> s21 := -sqrt(alpha)*lambda/(beta*abs(lambda)^(1/2)*(lambda - mu)): s11 := -beta*s21/alpha:
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,0,alpha*mu,2*beta*mu,mu*beta^2/alpha,
        0,s11,r21,s21):
```

$$\frac{\mu}{|\lambda|},\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0 \tag{15}$$

3.4.2. Теорема 2.2, случай D = 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

В рассматриваемой системе D = 0, поэтому у матрицы H собственные числа совпадают и равны λ.

2_1) : собственные числа образуют жорданову клетку размерности 2.

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,lambda,0,1,lambda, full = true);
```

Initial coefficients: $p_0^2 = [\alpha, 2\,\beta, g]$; $H = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

Matrix (2x4):

$$\alpha\,\lambda,\ 2\,\beta\,\lambda,\ g\,\lambda,\ 0$$
$$\alpha,\ \alpha\,\lambda+2\,\beta,\ 2\,\beta\,\lambda+g,\ g\,\lambda \qquad (1)$$

2_1^1) : $\alpha = 0$ $(\beta = 0, s_2 = 0)$. Система (1) имеет вид:

```
> l2syst(0,0,g,lambda,0,1,lambda);
```

$$0,\ 0,\ g\,\lambda,\ 0$$
$$0,\ 0,\ g,\ g\,\lambda \qquad (2)$$

Замена в системе (2) с $s_2 = 0$.

```
> zamproc(0,0,g*lambda,0,0,0,g,g*lambda,r1,s1,r2,0):
```

$$g\,r2\,(\lambda\,r2+r1),\ g\,s1\,r2,\ 0,\ 0$$
$$-\frac{g\,r1^2\,r2}{s1},\ g\,r2\,(\lambda\,r2-r1),\ 0,\ 0 \qquad (3)$$

Еще один нуль на оптимальном месте получаем при $r_1 = 0$.

```
> zamproc(0,0,g*lambda,0,0,0,g,g*lambda,0,s1,r2,0):
```

$$g\,\lambda\,r2^2,\ g\,s1\,r2,\ 0,\ 0$$
$$0,\ g\,\lambda\,r2^2,\ 0,\ 0 \qquad (4)$$

Нормировка системы (4).

```
> r21 := (g*abs(lambda))^(-1/2): s11 := (g*abs(lambda))^(-1/2)*lambda:
  zamproc(0,0,g*lambda,0,0,0,g,g*lambda,0,s11,r21,0):
```

$$\frac{\lambda}{|\lambda|},\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0$$
$$0,\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0 \qquad (5)$$

2_1^2) : $\alpha > 0$ $(s_1 = -\beta\,s_2\alpha^{-1}, \gamma = \beta^2\alpha^{-1})$. Система имеет вид (1).

```
> s11 := -beta*s2/alpha:
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,alpha,alpha*lambda+2*beta,
          2*beta*lambda+beta^2/alpha,lambda*beta^2/alpha, r1,s11,r2,s2):
```

$$\frac{(\alpha\,r1+\beta\,r2)\,(\alpha\,\lambda\,r1+\beta\,\lambda\,r2+\beta\,r1)}{\alpha},\ -\frac{(\alpha\,r1+\beta\,r2)\,s2\,\beta^2}{\alpha^2},\ 0,\ 0$$
$$\frac{(\alpha\,r1+\beta\,r2)\,r1^2}{s2},\ \frac{(\alpha\,r1+\beta\,r2)\,(\alpha\,\lambda\,r1+\beta\,\lambda\,r2-\beta\,r1)}{\alpha},\ 0,\ 0 \qquad (6)$$

2_1^{2a}) : $\beta = 0$ $(s_1 = 0)$. Система (6) принимает следующий вид:

```
> zamproc(alpha*lambda,0,0,0,alpha,alpha*lambda,0,0, r1,0,r2,s2):
```

$$\alpha\,\lambda\,r1^2,\ 0,\ 0,\ 0$$
$$\frac{\alpha\,r1^3}{s2},\ \alpha\,\lambda\,r1^2,\ 0,\ 0 \qquad (7)$$

Нормировка системы (7).

```
> r11 := 1/(sqrt(alpha)*abs(lambda)^(1/2)): s21 := r11/lambda:
  zamproc(alpha*lambda,0,0,0,alpha,alpha*lambda,0,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0,\ 0$$
$$\frac{\lambda}{|\lambda|},\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0 \qquad (8)$$

2_1^{2b}) : $\beta \neq 0$. При $r_1 = 0$ получаем нуль на оптимальном месте:

```
> s11 := -beta*s2/alpha:
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,alpha,alpha*lambda+2*beta,
          2*beta*lambda+beta^2/alpha,lambda*beta^2/alpha, 0,s11,r2,s2):
```

$$\frac{\lambda\,\beta^2\,r2^2}{\alpha},\ -\frac{\beta^3\,s2\,r2}{\alpha^2},\ 0,\ 0$$
$$0,\ \frac{\lambda\,\beta^2\,r2^2}{\alpha},\ 0,\ 0 \qquad (9)$$

Нормировка системы (9).

```
> s11 := -beta*s2/alpha: r21 := sqrt(alpha)/(beta*abs(lambda)^(1/2)):
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,alpha,alpha*lambda+2*beta,
          2*beta*lambda+beta^2/alpha,lambda*beta^2/alpha, 0,s11,r21,s2):
```

$$\frac{\lambda}{|\lambda|},\ -\frac{s2\,\beta^2}{\alpha^{3/2}\sqrt{|\lambda|}},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0 \tag{10}$$

```
> s21 := -lambda*alpha^(3/2)/(beta^2*sqrt(abs(lambda))): s11 := -beta*s21/alpha:
  zamproc(alpha*lambda,2*beta*lambda,lambda*beta^2/alpha,0,alpha,alpha*lambda+2*beta,
          2*beta*lambda+beta^2/alpha,lambda*beta^2/alpha, 0,s11,r21,s21):
```

$$\frac{\lambda}{|\lambda|},\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\lambda}{|\lambda|},\ 0,\ 0 \tag{11}$$

2_1) : собственные числа образуют две жордановы клетки размерности 1.

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,lambda,0,0,lambda, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\,\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\,\lambda,\ 2\,\beta\,\lambda,\ g\,\lambda,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,\lambda,\ 2\,\beta\,\lambda,\ g\,\lambda \tag{12}$$

Система (12) с нормированным коэффициентом α :

```
> l2syst(1,2*beta,beta^2,p1,0,0,p1, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [1, 2\,\beta, \beta^2];\ H = \begin{bmatrix} p1 & 0 \\ 0 & p1 \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$p1,\ 2\,\beta\,p1,\ \beta^2\,p1,\ 0$$

$$0,\ p1,\ 2\,\beta\,p1,\ \beta^2\,p1 \tag{13}$$

Замена в системе (13) с $s_1 = -\beta\,s_2\alpha^{-1}$ $(\alpha = 1)$.

```
> s11 := -beta*s2:
  zamproc(p1,2*beta*p1,beta^2*p1,0,0,p1,2*beta*p1,beta^2*p1, r1,s11,r2,s2):
```

$$p1\,(\beta\,r2 + r1)^2,\ 0,\ 0,\ 0$$

$$0,\ p1\,(\beta\,r2 + r1)^2,\ 0,\ 0 \tag{14}$$

Нормировка системы (14).

```
> s11 := -beta: s21 := 1: r21 := 0: r11 := abs(p1)^(-1/2):
  zamproc(p1,2*beta*p1,beta^2*p1,0,0,p1,2*beta*p1,beta^2*p1, r11,s11,0,1):
```

$$\frac{p1}{|p1|},\ 0,\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{p1}{|p1|},\ 0,\ 0 \tag{15}$$

3.4.3. Теорема 2.2, случай D < 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

В рассматриваемой системе D < 0, поэтому у матрицы H комплексные сопряженные собственные числа $\nu \pm i\mu$.

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,nu,-mu,mu,nu, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \nu & -\mu \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\begin{array}{c} \alpha\nu,\ -\alpha\mu + 2\beta\nu,\ -2\mu\beta + g\nu,\ -\mu g \\ \alpha\mu,\ \alpha\nu + 2\mu\beta,\ 2\beta\nu + \mu g,\ g\nu \end{array} \tag{1}$$

$\alpha = -D \neq 0$, следовательно $\gamma = \beta^2\alpha^{-1}$. Сделаем замену в системе (1) с $s_1 = -\beta s_2 \alpha^{-1}$.

```
> s11 := -beta*s2/alpha:
  zamproc(alpha*nu,-alpha*mu+2*beta*nu,-2*mu*beta+nu*beta^2/alpha,-mu*beta^2/alpha,alpha*mu,
          alpha*nu+2*mu*beta,2*beta*nu+mu*beta^2/alpha,nu*beta^2/alpha, r1,s11,r2,s2):
```

$$\begin{array}{c} -\dfrac{(\alpha r1 + \beta r2)\,(\alpha\mu r2 - \alpha\nu r1 - \beta\mu r1 - \beta\nu r2)}{\alpha},\ -\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\,(\alpha r1 + \beta r2)\,\mu s2}{\alpha^2},\ 0,\ 0 \\ \dfrac{(r1^2 + r2^2)\,(\alpha r1 + \beta r2)\,\mu}{s2},\ \dfrac{(\alpha r1 + \beta r2)\,(\alpha\mu r2 + \alpha\nu r1 - \beta\mu r1 + \beta\nu r2)}{\alpha},\ 0,\ 0 \end{array} \tag{2}$$

3_1) : $\nu = 0$. Система (1) принимает следующий вид:

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,0,-mu,mu,0);
```

$$\begin{array}{c} 0,\ -\alpha\mu,\ -2\mu\beta,\ -\mu g \\ \alpha\mu,\ 2\mu\beta,\ \mu g,\ 0 \end{array} \tag{3}$$

При $r_2 = \beta r_1 \alpha^{-1}$ в системе (2) получаем два дополнительных нуля:

```
> s11 := -beta*s2/alpha: r21 := beta*r1/alpha:
  zamproc(0,-alpha*mu,-2*mu*beta,-mu*beta^2/alpha,alpha*mu,2*mu*beta,mu*beta^2/alpha,0,r1,s11,r21,s2):
```

$$\begin{array}{c} 0,\ -\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2\,\mu r1\, s2}{\alpha^3},\ 0,\ 0 \\ \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2\,\mu r1^3}{\alpha^3 s2},\ 0,\ 0,\ 0 \end{array} \tag{4}$$

Нормировка системы (4).

```
> s21 := (alpha^2+beta^2)^2*mu*r1^3/alpha^3: s11 := -beta*s21/alpha:
  zamproc(0,-alpha*mu,-2*mu*beta,-mu*beta^2/alpha,alpha*mu,2*mu*beta,mu*beta^2/alpha,0,
          r1,s11,r21,s21):
```

$$\begin{array}{c} 0,\ -\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^4\, r1^4\mu^2}{\alpha^6},\ 0,\ 0 \\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \end{array} \tag{5}$$

```
> r11 := alpha^(3/2)/(sqrt(mu)*(alpha^2+beta^2)): r21 := beta*r11/alpha:
  s21 := (alpha^2+beta^2)^2*mu*r11^3/alpha^3: s11 := -beta*s21/alpha:
  zamproc(0,-alpha*mu,-2*mu*beta,-mu*beta^2/alpha,alpha*mu,2*mu*beta,mu*beta^2/alpha,0,
          r11,s11,r21,s21):
```

$$\begin{array}{c} 0,\ -1,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \end{array} \tag{6}$$

3_2) : $\nu \neq 0$. Система после замены имеет вид (2).

При указанных значениях r_1, r_2 и s_2 ($s_1 = -\beta s_2 \alpha^{-1}$) получаем еще нуль на позиции b_2.

```
> rho := abs(2*nu)^(-1/2)*mu^(-1)*(alpha^2+beta^2)^(-1):
  r11 := alpha^(1/2)*(alpha*mu+beta*nu)*rho: r21 := alpha^(1/2)*(beta*mu-alpha*nu)*rho:
  s21 := alpha^(3/2)*(nu^2+mu^2)*(2*nu)^(-1)*rho: s11 := -beta*s21/alpha:
  zamproc(alpha*nu,-alpha*mu+2*beta*nu,-2*mu*beta+nu*beta^2/alpha,-mu*beta^2/alpha,alpha*mu,
          alpha*nu+2*mu*beta,2*beta*nu+mu*beta^2/alpha,nu*beta^2/alpha, r11,s11,r21,s21):
```

$$\begin{array}{c} \dfrac{\nu}{|\nu|},\ -\dfrac{1}{4}\,\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\nu\,|\nu|},\ 0,\ 0 \\ \dfrac{\nu}{|\nu|},\ 0,\ 0,\ 0 \end{array} \tag{7}$$

3.5. Положительный дискриминант многочлена P_0^2 ($D_0>0$).

3.5.1. Теорема 2.3, случай D > 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

В рассматриваемой системе $D>0$, поэтому у H есть два различных вещественных собственных числа λ_1, λ_2.
Система заменой J_1^2 приведена к следующему виду :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2=[\alpha, 2\beta, g];\ H=\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\ 0 & \lambda 2\end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\lambda 1, 2\beta\lambda 1, g\lambda 1, 0$$

$$0, \alpha\lambda 2, 2\beta\lambda 2, g\lambda 2 \qquad \textbf{(1)}$$

Берем $\eta=\eta_1$ при $\beta\ge 0$ и $\eta=\eta_2$ при $\beta<0$.

```
> eta1 := beta+sqrt(beta^2-alpha*g);  eta2 := beta-sqrt(beta^2-alpha*g);
  tau = sqrt(beta^2-alpha*g);
```

$$\eta 1 := \beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}$$

$$\eta 2 := \beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}$$

$$\tau=\sqrt{\beta^2-\alpha g} \qquad \textbf{(2)}$$

Замена в произвольной системе с $D_0>0$, обнуляющая два элемента p_0^2 (для η_1 и η_2) :

```
> r21 := -alpha*r1/eta1: s11 := -g*s2/eta1:
  l2pH(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2,r1,s11,r21,s2, hideH = true):
```

$$p_0^2=\left[0, -\frac{4\,r1\,s2\,(-\beta^2+\alpha g)}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}}, 0\right] \qquad \textbf{(3)}$$

```
> r21 := -alpha*r1/eta2: s11 := -g*s2/eta2:
  l2pH(alpha,2*beta,g,p1,q1,p2,q2,r1,s11,r21,s2, hideH = true):
```

$$p_0^2=\left[0, \frac{4\,r1\,s2\,(-\beta^2+\alpha g)}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}}, 0\right] \qquad \textbf{(4)}$$

Проведем указанную выше замену в случае $D>0$ для системы (1).
Случай $\beta\ge 0$.

```
> eta := eta1: r21 := -alpha*r1/eta: s11 := -g*s2/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2,r1,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{2\,r1\,s2\,(\alpha g-\beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\lambda 1+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\lambda 2-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\lambda 1+3\beta\lambda 1 g\alpha+\beta\lambda 2 g\alpha-4\beta^3\lambda 1\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha g+\beta^2\right)}$$

$$\frac{2\,g\,s2^2\,(\lambda 1-\lambda 2)\,(\alpha g-\beta^2)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha g+2\beta^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha g+\beta^2\right)}$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{2\,r1^2\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\,(\alpha g-\beta^2)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha g+2\beta^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha g+\beta^2\right)}$$

$$\frac{2\,r1\,s2\,(\alpha g-\beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\lambda 1+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\lambda 2-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\lambda 2+\beta\lambda 1 g\alpha+3\beta\lambda 2 g\alpha-4\beta^3\lambda 2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha g+\beta^2\right)}$$

$$0 \qquad \textbf{(5)}$$

Упрощение полученной системы :

```
> (-g*alpha+2*beta*sqrt(beta^2-g*alpha)+2*beta^2)=(beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^2;
  (beta^2+beta*sqrt(beta^2-g*alpha)-g*alpha)=sqrt(beta^2-g*alpha)*(beta+sqrt(beta^2-g*alpha));
  # скобка в b1:
  collect(3*beta*lambda1*g*alpha+g*alpha*lambda1*tau+beta*lambda2*g*alpha+g*alpha*lambda2*tau-4*
  beta^3*lambda1-4*lambda1*beta^2*tau,lambda1,factor)=
  -(beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^3*lambda1+g*alpha*lambda2*(beta+sqrt(beta^2-g*alpha));
  # проверка равенства:
  simplify(3*beta*lambda1*g*alpha+g*alpha*lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g)+beta*lambda2*g*alpha+g*alpha*
  lambda2*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*beta^3*lambda1-4*lambda1*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g) - (-(beta+sqrt
  (beta^2-alpha*g))^3*lambda1+g*alpha*lambda2*(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))));
  # скобка в c2:
  collect(3*beta*lambda2*g*alpha+g*alpha*lambda2*sqrt(beta^2-g*alpha)+beta*lambda1*g*alpha+g*alpha*
  lambda1*sqrt(beta^2-g*alpha)-4*beta^3*lambda2-4*lambda2*beta^2*sqrt(beta^2-g*alpha)= -(beta+sqrt
  (beta^2-g*alpha))^3*lambda2+g*alpha*lambda1*(beta+sqrt(beta^2-g*alpha)),lambda2,factor);
  # проверка равенства:
  simplify(3*beta*lambda2*g*alpha+g*alpha*lambda2*sqrt(beta^2-alpha*g)+beta*alpha*g*lambda1+g*alpha*
  lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*beta^3*lambda2-4*lambda2*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g) - (-(beta+sqrt
  (beta^2-alpha*g))^3*lambda2+g*alpha*lambda1*(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))));
```

$$-\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\beta^2=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2$$

$$\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g=\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$\left(3\alpha g\beta+g\alpha\tau-4\beta^3-4\beta^2\tau\right)\lambda 1+g\alpha\,\lambda 2\,(\beta+\tau)=-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3\lambda 1+g\alpha\,\lambda 2\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$0$$

$$\left(\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+3\alpha g\beta-4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)\lambda 2+g\alpha\,\lambda 1\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)=-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3\lambda 2+g\alpha\,\lambda 1\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$0 \qquad \textbf{(6)}$$

В итоге получаем систему

```
> zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r1*s2,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*g*
  eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*r1^2,2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r1*s2,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta\,\lambda 1-\alpha\,\lambda 1\,g-g\,\alpha\,\lambda 2+2\beta^2\lambda 1\right)r1\,s2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,g\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\,r1^2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta\,\lambda 2-\alpha\,\lambda 1\,g-g\,\alpha\,\lambda 2+2\beta^2\lambda 2\right)r1\,s2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Случай $\beta<0$.

```
> eta := eta2: r21 := -alpha*r1/eta: s11 := -g*s2/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2,r1,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{2\,r1\,s2\,(\alpha g-\beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\,\lambda 1+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\,\lambda 2-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\lambda 1-3\beta\,\lambda 1\,g\,\alpha-\beta\,\lambda 2\,g\,\alpha+4\beta^3\lambda 1\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$\frac{2\,g\,s2^2\,(\lambda 1-\lambda 2)\,(\alpha g-\beta^2)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{2\,r1^2\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\,(\alpha g-\beta^2)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$\frac{2\,r1\,s2\,(\alpha g-\beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\,\lambda 1+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\,\lambda 2-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\lambda 2-\beta\,\lambda 1\,g\,\alpha-3\beta\,\lambda 2\,g\,\alpha+4\beta^3\lambda 2\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$0 \qquad \textbf{(8)}$$

Упрощение полученной системы :

```
> alpha*g+2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-2*beta^2=-(beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^2;
  -beta^2+beta*sqrt(beta^2-alpha*g)+alpha*g=sqrt(beta^2-g*alpha)*(beta-sqrt(beta^2-g*alpha));
  # скобка в b1
  collect(-3*beta*lambda1*g*alpha+g*alpha*lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g)-lambda2*beta*g*alpha+g*alpha*
  lambda2*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*beta^3*lambda1-4*lambda1*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g),lambda1,factor)=
  (beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^3*lambda1-g*alpha*lambda2*(beta-sqrt(beta^2-g*alpha));
  # проверка равенства
  simplify(-3*beta*alpha*g*lambda1+g*alpha*lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g)-beta*lambda2*g*alpha+g*alpha*
  lambda2*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*lambda1*beta^3-4*lambda1*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g) - ((beta-sqrt
  (beta^2-alpha*g))^3*lambda1-g*alpha*lambda2*(beta-sqrt(beta^2-alpha*g))));
  # скобка в c2
  collect(-3*lambda2*beta*g*alpha+g*alpha*lambda2*sqrt(beta^2-alpha*g)-beta*lambda1*g*alpha+g*alpha*
  lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*lambda2*beta^3-4*lambda2*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g),lambda2,factor)=
  (beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^3*lambda2-g*alpha*lambda1*(beta-sqrt(beta^2-g*alpha));
  # проверка равенства
  simplify(-3*beta*lambda2*g*alpha+g*alpha*lambda2*sqrt(beta^2-alpha*g)-beta*alpha*g*lambda1+g*alpha*
  lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*beta^3*lambda2-4*lambda2*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g) - ((beta-sqrt
  (beta^2-alpha*g))^3*lambda2-g*alpha*lambda1*(beta-sqrt(beta^2-alpha*g))));
```

$$\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2=-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2$$

$$-\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\alpha g=\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$\left(-3\alpha g\beta+\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)\lambda 1+g\alpha\lambda 2\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)=\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3\lambda 1-g\alpha\lambda 2\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$0$$

$$\left(-3\alpha g\beta+\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)\lambda 2+\alpha\lambda 1 g\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)=\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3\lambda 2-g\alpha\lambda 1\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$0 \qquad (9)$$

В итоге получаем систему

```
> zamproc(0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r1*s2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s2^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*r1^2,
  -2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r1*s2,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta\lambda 1+\alpha\lambda 1 g+g\alpha\lambda 2-2\beta^2\lambda 1\right)r1\,s2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,g\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\,r1^2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta\lambda 2+\alpha\lambda 1 g+g\alpha\lambda 2-2\beta^2\lambda 2\right)r1\,s2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0 \qquad (10)$$

1_1) : $\alpha\gamma=0$ $(\eta_1=\eta_2=2\beta)$.

1_1^1) : $\alpha=0,\ \gamma=0$. Система (7) принимает следующий вид :

```
> r21 := 0: s11 := 0:
  zamprocl2(0,2*beta,0,lambda1,0,0,lambda2, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ 2\beta\lambda 1\,r1\,s2,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ 2\beta\lambda 2\,r1\,s2,\ 0 \qquad (11)$$

Нормировка системы (11).

```
> r11 := 1: s21 := 1/(2*beta*lambda2):
  zamprocl2(0,2*beta,0,lambda1,0,0,lambda2, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ \frac{\lambda 1}{\lambda 2},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ 1,\ 0 \qquad (12)$$

1_1^2) : $\alpha=0,\ \gamma\neq 0$. Система (7) принимает следующий вид :

```
> r22 := 0: s12 := -g*s2/(2*beta):
  zamprocl2(0,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, r1,s12,r22,s2):
```

$$0,\ 2\beta\lambda 1\,r1\,s2,\ -(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2 g,\ 0$$

$$0,\ 0,\ 2\beta\lambda 2\,r1\,s2,\ 0 \qquad (13)$$

Нормировка системы (13).

```
> s22 := 1/sqrt(abs(g*(lambda1-lambda2))): s12 := -g*s22/(2*beta):
  zamprocl2(0,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, r1,s12,r22,s22):
```

$$0,\ \frac{2\,\beta\,\lambda 1\,r1}{\sqrt{|g\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ -(\lambda 1-\lambda 2)\,g\left|\frac{1}{g\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{2\,\beta\,\lambda 2\,r1}{\sqrt{|g\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ 0 \qquad \mathbf{(14)}$$

```
> r12 := (sqrt(abs(g*(lambda1-lambda2)))/(2*beta*lambda2))
        *(-abs(1/(g*(lambda1-lambda2)))*g*(lambda1-lambda2)):
  zamprocl2(0,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, r12,s12,r22,s22):
```

$$0,\ -\frac{\lambda 1\,(\lambda 1-\lambda 2)\,g\left|\frac{1}{g\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{\lambda 2},\ -(\lambda 1-\lambda 2)\,g\left|\frac{1}{g\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -(\lambda 1-\lambda 2)\,g\left|\frac{1}{g\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ 0 \qquad \mathbf{(15)}$$

$1_1^3)$: $\alpha \neq 0,\ \gamma = 0$. Система (7) принимает следующий вид :

```
> r23 := -alpha*r1/(2*beta): s13 := 0:
  zamprocl2(alpha,2*beta,0,lambda1,0,0,lambda2, r1,s13,r23,s2):
```

$$0,\ 2\,\beta\,\lambda 1\,r1\,s2,\ 0,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,r1^2\,(\lambda 1-\lambda 2),\ 2\,\beta\,\lambda 2\,r1\,s2,\ 0 \qquad \mathbf{(16)}$$

Нормировка системы (16).

```
> r13 := 1/sqrt(abs(alpha*(lambda1-lambda2))): r23 := -alpha*r13/(2*beta):
  zamprocl2(alpha,2*beta,0,lambda1,0,0,lambda2, r13,s13,r23,s2):
```

$$0,\ \frac{2\,\beta\,\lambda 1\,s2}{\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \frac{2\,\beta\,\lambda 2\,s2}{\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ 0 \qquad \mathbf{(17)}$$

```
> s23 := (sqrt(abs(alpha*(lambda1-lambda2)))/(2*beta*lambda1))
        *(abs(1/(alpha*(lambda1-lambda2)))*alpha*(lambda1-lambda2)):
  zamprocl2(alpha,2*beta,0,lambda1,0,0,lambda2, r13,s13,r23,s23):
```

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ 0,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \frac{\lambda 2\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{\lambda 1},\ 0 \qquad \mathbf{(18)}$$

$1_2)$: $\alpha,\ \gamma \neq 0$.

$1_2^1)$: $\beta = 0\ \ (\eta = \sqrt{-\alpha\gamma})$.

```
> eta0 := sqrt(-alpha*g);
```

$$\eta 0 := \sqrt{-\alpha\,g} \qquad \mathbf{(19)}$$

Система (7) принимает следующий вид :

```
> r21 := -alpha*r1/eta0: s11:=-g*s2/eta0:
  zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda2, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -\frac{2\,\alpha\,g\,r1\,s2\,(\lambda 1+\lambda 2)}{\sqrt{-\alpha\,g}},\ -2\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2\,g,\ 0$$

$$0,\ 2\,\alpha\,r1^2\,(\lambda 1-\lambda 2),\ -\frac{2\,\alpha\,g\,r1\,s2\,(\lambda 1+\lambda 2)}{\sqrt{-\alpha\,g}},\ 0 \qquad \mathbf{(20)}$$

1_2^{1a}) : $\lambda_2 = -\lambda_1$.

```
> lambda20 := -lambda1:
  zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda20, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ -4\,\lambda 1\,g\,s2^2,\ 0$$

$$0,\ 4\,\lambda 1\,r1^2\,\alpha,\ 0,\ 0 \tag{21}$$

Нормировка системы (21).

```
> r10 := 1/sqrt(abs(4*alpha*lambda1)): s20 := 1/sqrt(abs(4*g*lambda1)):
  r20 := -alpha*r10/eta0: s10 := -g*s20/eta0:
  zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda20, r10,s10,r20,s20):
```

$$0,\ 0,\ -\lambda 1\,g\left|\frac{1}{g\,\lambda 1}\right|,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ 0,\ 0 \tag{22}$$

1_2^{1b}) : $\lambda_2 \neq -\lambda_1$. Нормировка системы (20).

```
> r11 := 1/sqrt(abs(2*alpha*(lambda1-lambda2))): r21 := -alpha*r11/eta0: s11 := -g*s2/eta0:
  zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda2, r11,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -\frac{\alpha\,g\,s2\,\sqrt{2}\,(\lambda 1+\lambda 2)\left|\frac{\sqrt{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{\sqrt{-\alpha\,g}},\ -2\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2\,g,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ -\frac{\alpha\,g\,s2\,\sqrt{2}\,(\lambda 1+\lambda 2)\left|\frac{\sqrt{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{\sqrt{-\alpha\,g}},\ 0 \tag{23}$$

```
> s21 := (1/2)*abs(alpha*(lambda1-lambda2))^(3/2)*sqrt(2)
        /(sqrt(-alpha*g)*(lambda1+lambda2)*alpha*(lambda1-lambda2)):  s11 := -g*s21/eta0:
  zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda2, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ \frac{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)},\ \frac{|\alpha^3\,(\lambda 1-\lambda 2)^3|}{\alpha^3\,(\lambda 1-\lambda 2)\,(\lambda 1+\lambda 2)^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \frac{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)},\ 0 \tag{24}$$

1_2^2) : $\beta \neq 0$.

1_2^{2b}) : $\lambda_1 = \alpha\gamma\bar{\eta}^{-2}\lambda_2$.

Случай $\beta \geq 0$. Система (7) принимает следующий вид :

```
> r21 := -alpha*r1/eta1: s11 := -g*s2/eta1: lambda11 := alpha*g*eta1^(-2)*lambda2:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda11,0,0,lambda2, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ -\frac{4\,(-\beta^2+\alpha\,g)\,g\,\lambda 2\,s2^2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{4\,(-\beta^2+\alpha\,g)\left(2\,\beta^2+2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}-\alpha\,g\right)\alpha\,\lambda 2\,r1^2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}\right)^4},\ -\frac{8\,\beta\,(-\beta^2+\alpha\,g)\left(2\,\beta^2+2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}-\alpha\,g\right)\lambda 2\,r1\,s2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}\right)^4},\ 0 \tag{25}$$

Нормировка системы (25).

```
> s21 := (beta+sqrt(beta^2-alpha*g))/sqrt(abs((4*(beta^2-alpha*g))*g*lambda2)): s11 := -g*s21/eta1:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda11,0,0,lambda2,r1,s11,r21,s21):
```

$$0,\ 0,\ -(-\beta^2+\alpha\,g)\,g\,\lambda 2\left|\frac{1}{(-\beta^2+\alpha\,g)\,g\,\lambda 2}\right|,\ 0$$

$$0,\ \frac{4\,(-\beta^2+\alpha\,g)\left(2\,\beta^2+2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}-\alpha\,g\right)\alpha\,\lambda 2\,r1^2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}\right)^4},\ -\frac{4\,r1\,\beta\,\lambda 2\,(-\beta^2+\alpha\,g)\left(2\,\beta^2+2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}-\alpha\,g\right)\left|\frac{\sqrt{(-\beta^2+\alpha\,g)\,g\,\lambda 2}}{(-\beta^2+\alpha\,g)\,g\,\lambda 2}\right|}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\,g}\right)^3},\ 0 \tag{26}$$

Упрощение системы (26), используя тождества (6).

```
> zamproc(0,0,g*lambda2/abs(g*lambda2),0,0,4*(-beta^2+alpha*g)*r1^2*lambda2*alpha/(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,4*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*abs(1/sqrt(g*lambda2))*r1*lambda2/(beta+sqrt(beta^2-alpha*g)),0, 1,0,0,1):
```

$$0,\, 0,\, g\,\lambda 2 \left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|,\, 0$$

$$0,\, \frac{4\,(\alpha\, g-\beta^2)\, r1^2\,\lambda 2\,\alpha}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)^2},\, \frac{4\,\beta\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\; r1\,\lambda 2}{\sqrt{|g\,\lambda 2|}\left(\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)},\, 0 \qquad \textbf{(27)}$$

Продолжение нормировки системы (27).

```
> r13 := (beta+sqrt(beta^2-alpha*g))*g/(4*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*sqrt(abs(g*lambda2))):
zamproc(0,0,g*lambda2/abs(g*lambda2),0,0,4*(-beta^2+alpha*g)*r13^2*lambda2*alpha/(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,4*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*abs(1/sqrt(g*lambda2))*r13*lambda2/(beta+sqrt(beta^2-alpha*g)),0, 1,0,0,1):
```

$$0,\, 0,\, g\,\lambda 2 \left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|,\, 0$$

$$0,\, -\frac{1}{4}\,\frac{g^2\left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|\lambda 2\,\alpha}{\beta^2},\, g\,\lambda 2\left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|,\, 0 \qquad \textbf{(28)}$$

Случай $\beta < 0$. Система (10) принимает следующий вид :

```
> r22 := -alpha*r1/eta2: s12 := -g*s2/eta2: lambda12 := alpha*g*eta2^(-2)*lambda2:
zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda12,0,0,lambda2, r1,s12,r22,s2):
```

$$0,\, 0,\, -\frac{4\,(\alpha\, g-\beta^2)\, g\,\lambda 2\, s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)^2},\, 0$$

$$0,\, -\frac{4\,(\alpha\, g-\beta^2)\left(2\,\beta\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}+\alpha\, g-2\,\beta^2\right)\alpha\,\lambda 2\, r1^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)^4},\, \frac{8\,\beta\,(\alpha\, g-\beta^2)\left(2\,\beta\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}+\alpha\, g-2\,\beta^2\right)\lambda 2\, r1\, s2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)^4},\, 0 \qquad \textbf{(29)}$$

Упрощение, используя тождества (9), и нормировка системы (29).

```
> s23:=(beta-sqrt(beta^2-alpha*g))/(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*sqrt(abs(g*lambda2))):
zamproc(0,0,-4*lambda2*(-beta^2+alpha*g)*g*s23^2/(-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,0,0,4*(-beta^2+alpha*g)*alpha*lambda2*r1^2/((-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2),-8*beta*(-beta^2+alpha*g)*lambda2*r1*s23/((-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2),0, 1,0,0,1):
```

$$0,\, 0,\, g\,\lambda 2 \left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|,\, 0$$

$$0,\, \frac{4\,(\alpha\, g-\beta^2)\,\alpha\,\lambda 2\, r1^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)^2},\, -\frac{4\,\beta\,\lambda 2\, r1\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha\, g+\beta^2}\right)\sqrt{|g\,\lambda 2|}},\, 0 \qquad \textbf{(30)}$$

```
> r13 := (beta-sqrt(beta^2-alpha*g))*g/(4*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*sqrt(abs(g*lambda2))):
zamproc(0,0,lambda2*g*abs(1/(g*lambda2)),0,0,(4*(-beta^2+alpha*g))*alpha*lambda2*r13^2/(-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,-4*beta*lambda2*r13*sqrt(beta^2-alpha*g)/((-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))*sqrt(abs(g*lambda2))),0, 1,0,0,1):
```

$$0,\, 0,\, g\,\lambda 2 \left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|,\, 0$$

$$0,\, -\frac{1}{4}\,\frac{g^2\left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|\lambda 2\,\alpha}{\beta^2},\, g\,\lambda 2\left|\frac{1}{g\,\lambda 2}\right|,\, 0 \qquad \textbf{(31)}$$

$1_2^{2a})$: $\lambda_2 = \alpha\gamma\eta^{-2}\lambda_1$.

Случай $\beta \geq 0$. Система (7) принимает следующий вид :

```
> r21 := -alpha*r1/eta1: s11 := -g*s2/eta1: lambda21 := alpha*g*eta1^(-2)*lambda1:
zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda21, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\, -\frac{8\,\beta\,(-\beta^2+\alpha\, g)\left(2\,\beta^2+2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha\, g}-\alpha\, g\right)\lambda 1\, r1\, s2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\, g}\right)^4},\, \frac{4\,(-\beta^2+\alpha\, g)\left(2\,\beta^2+2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha\, g}-\alpha\, g\right)g\,\lambda 1\, s2^2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\, g}\right)^4},\, 0$$

$$0,\, -\frac{4\,(-\beta^2+\alpha\, g)\, r1^2\,\lambda 1\,\alpha}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\, g}\right)^2},\, 0,\, 0 \qquad \textbf{(32)}$$

Нормировка системы (32).

```
> r13 := (beta+sqrt(beta^2-alpha*g))/sqrt(abs((4*(beta^2-alpha*g))*alpha*lambda1)):
  r21 := -alpha*r13/eta1:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda21, r13,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -\frac{4\, s2\, \beta\, \lambda 1\, (-\beta^2+\alpha g)\left(2\beta^2+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)\left|\frac{\sqrt{(-\beta^2+\alpha g)\,\alpha\,\lambda 1}}{(-\beta^2+\alpha g)\,\alpha\,\lambda 1}\right|}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3},\ \frac{4\,(-\beta^2+\alpha g)\left(2\beta^2+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right) g\,\lambda 1\, s2^2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^4},\ 0$$

$$0,\ -(-\beta^2+\alpha g)\,\alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{(-\beta^2+\alpha g)\,\alpha\,\lambda 1}\right|,\ 0,\ 0 \tag{33}$$

Упрощение системы (33), используя тождества (6).

```
> zamproc(0,(4*beta*s2*lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g))/(sqrt(abs(alpha*lambda1))*(beta+sqrt(beta^2-
  alpha*g))),(4*(-beta^2+alpha*g))*s2^2*g*lambda1/(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,0,0,alpha*lambda1/abs
  (alpha*lambda1),0,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{4\beta\, s2\,\lambda 1\sqrt{-\alpha g+\beta^2}}{\sqrt{|\alpha\,\lambda 1|}\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)},\ \frac{4\,(\alpha g-\beta^2)\, s2^2\, g\,\lambda 1}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ 0,\ 0 \tag{34}$$

Продолжение нормировки системы (34).

```
> s23 := (beta+sqrt(beta^2-alpha*g))*alpha/(4*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*sqrt(abs(alpha*lambda1))):
  zamproc(0,(4*beta*s23*lambda1*sqrt(beta^2-alpha*g))/(sqrt(abs(alpha*lambda1))*(beta+sqrt(beta^2-
  alpha*g))),(4*(-beta^2+alpha*g))*s23^2*g*lambda1/(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,0,0,alpha*lambda1/abs
  (alpha*lambda1),0,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ -\frac{1}{4}\,\frac{\alpha^2\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right| g\,\lambda 1}{\beta^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ 0,\ 0 \tag{35}$$

Случай $\beta < 0$. Система (10) принимает следующий вид :

```
> r22 := -alpha*r1/eta2: s12 := -g*s2/eta2:  lambda22 := alpha*g*eta2^(-2)*lambda1:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda22, r1,s12,r22,s2):
```

$$0,\ \frac{8\beta\,(\alpha g-\beta^2)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2\right)\lambda 1\, r1\, s2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^4},\ -\frac{4\,(\alpha g-\beta^2)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2\right) g\,\lambda 1\, s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^4},\ 0$$

$$0,\ -\frac{4\,(\alpha g-\beta^2)\, r1^2\,\lambda 1\,\alpha}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0,\ 0 \tag{36}$$

Упрощение, используя тождества (9), и нормировка системы (36).

```
> r14:=(beta-sqrt(beta^2-alpha*g))/(2*sqrt((beta^2-alpha*g)*abs(alpha*lambda1))):
  zamproc(0,-8*beta*(-beta^2+alpha*g)*lambda1*r14*s2/((-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2),4*(-beta^2+
  alpha*g)*g*lambda1*s2^2/((-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2),0,0,-4*(-beta^2+alpha*g)*r14^2*lambda1*
  alpha/((-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2),0,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{4\beta\,\lambda 1\, s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)\sqrt{|\alpha\,\lambda 1|}},\ \frac{4\,(\alpha g-\beta^2)\, g\,\lambda 1\, s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ 0,\ 0 \tag{37}$$

```
> s24 := alpha*(beta-sqrt(beta^2-alpha*g))/(4*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*sqrt(abs(alpha*lambda1))):
  zamproc(0,-4*s24*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)*lambda1/(sqrt(abs(alpha*lambda1))*(-beta+sqrt(beta^2-
  alpha*g))),(4*(-beta^2+alpha*g))*g*lambda1*s24^2/(-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^2,0,0,alpha*
  lambda1/abs(alpha*lambda1),0,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ -\frac{1}{4}\,\frac{\alpha^2\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right| g\,\lambda 1}{\beta^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,\lambda 1\left|\frac{1}{\alpha\,\lambda 1}\right|,\ 0,\ 0 \tag{38}$$

1_2^{2c}) : $\lambda_2 \neq \alpha\gamma\eta^{-2}\lambda_1,\ \lambda_1 \neq \alpha\gamma\eta^{-2}\lambda_2$.

Случай $\beta \geq 0$. Система (7) :

```
> eta := eta1:
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r1*s2,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*g*
  eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*r1^2,2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r1*s2,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(2\lambda 1\beta^2+2\lambda 1\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 1\alpha g-\lambda 2\alpha g\right)r1\,s2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ -\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,g\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\,r1^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(2\lambda 2\beta^2+2\lambda 2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 2\alpha g-\lambda 1\alpha g\right)r1\,s2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ 0 \qquad \textbf{(39)}$$

Нормировка системы (39).

```
> r11 := sqrt(beta+sqrt(beta^2-alpha*g))/sqrt(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*abs(alpha*(lambda1-lambda2)));
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r11*s2,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*r11^2,
  2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r11*s2,0, 1,0,0,1):
```

$$r11 := \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}}\,\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}}$$

$$0,\ \frac{(\beta^2-\alpha g)^{1/4}\left(2\lambda 1\beta^2+2\lambda 1\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 1\alpha g-\lambda 2\alpha g\right)\sqrt{2}\,s2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^{3/2}\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ -\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,g\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \frac{(\beta^2-\alpha g)^{1/4}\left(2\lambda 2\beta^2+2\lambda 2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 2\alpha g-\lambda 1\alpha g\right)\sqrt{2}\,s2}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^{3/2}\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ 0 \qquad \textbf{(40)}$$

```
> s21 := (beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^(3/2)*alpha*(lambda1-lambda2)/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(2*
  beta^2*lambda2+2*lambda2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-g*alpha*lambda2-alpha*lambda1*g)*sqrt(abs(alpha*
  (lambda1-lambda2))));
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r11*s21,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s21^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*
  r11^2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r11*s21,0, 1,0,0,1):
```

$$s21 := \frac{1}{2}\,\frac{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^{3/2}\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\sqrt{2}}{(\beta^2-\alpha g)^{1/4}\left(2\lambda 2\beta^2+2\lambda 2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 2\alpha g-\lambda 1\alpha g\right)\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}}$$

$$0,\ \frac{\left(2\lambda 1\beta^2+2\lambda 1\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 1\alpha g-\lambda 2\alpha g\right)\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{2\lambda 2\beta^2+2\lambda 2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 2\alpha g-\lambda 1\alpha g},\ -\frac{g\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2(\lambda 1-\lambda 2)^3\alpha^2\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{\left(2\lambda 2\beta^2+2\lambda 2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\lambda 2\alpha g-\lambda 1\alpha g\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ 0 \qquad \textbf{(41)}$$

Случай $\beta < 0$. Система (10) :

```
> eta := eta2:
  zamproc(0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r1*s2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*g*
  eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s2^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*r1^2,
  -2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r1*s2,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(-2\lambda 1\beta^2+2\lambda 1\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 1\alpha g+\lambda 2\alpha g\right)r1\,s2}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ -\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,g\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\,r1^2}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(-2\lambda 2\beta^2+2\lambda 2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 2\alpha g+\lambda 1\alpha g\right)r1\,s2}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ 0 \qquad \textbf{(42)}$$

Нормировка системы (42).

```
> r12 := sqrt(-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))/sqrt(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*abs(alpha*(lambda1-lambda2)));
  zamproc(0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r12*s2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s2^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*
  r12^2,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r12*s2,0, 1,0,0,1):
```

$$r12 := \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}}\,\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}}$$

$$0,\ \frac{(\beta^2-\alpha g)^{1/4}\left(-2\,\lambda 1\,\beta^2+2\,\lambda 1\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 1\,\alpha g+\lambda 2\,\alpha g\right)\sqrt{2}\,s2}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^{3/2}\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ -\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,g\,(\lambda 1-\lambda 2)\,s2^2}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \frac{(\beta^2-\alpha g)^{1/4}\left(-2\,\lambda 2\,\beta^2+2\,\lambda 2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 2\,\alpha g+\lambda 1\,\alpha g\right)\sqrt{2}\,s2}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^{3/2}\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}},\ 0 \qquad \mathbf{(43)}$$

```
> s22 := (-beta+sqrt(beta^2-alpha*g))^(3/2)*alpha*(lambda1-lambda2)/(sqrt(2)*(alpha*lambda1*g-2*
  beta^2*lambda2+2*lambda2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)+g*alpha*lambda2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(abs
  (alpha*(lambda1-lambda2))));
  zamproc(0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda1-alpha*g*eta^(-2)*lambda2)*r12*s22,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*s22^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*alpha*eta^(-1)*(lambda1-lambda2)*
  r12^2,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(lambda2-alpha*g*eta^(-2)*lambda1)*r12*s22,0, 1,0,0,1):
```

$$s22 := \frac{1}{2}\,\frac{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^{3/2}\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\sqrt{2}}{\left(-2\,\lambda 2\,\beta^2+2\,\lambda 2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 2\,\alpha g+\lambda 1\,\alpha g\right)(\beta^2-\alpha g)^{1/4}\sqrt{|\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)|}}$$

$$0,\ \frac{(\lambda 1-\lambda 2)\,\alpha\left(-2\,\lambda 1\,\beta^2+2\,\lambda 1\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 1\,\alpha g+\lambda 2\,\alpha g\right)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|}{-2\,\lambda 2\,\beta^2+2\,\lambda 2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 2\,\alpha g+\lambda 1\,\alpha g},\ -\frac{\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|\alpha^2\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2(\lambda 1-\lambda 2)^3 g}{\left(-2\,\lambda 2\,\beta^2+2\,\lambda 2\,\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\lambda 2\,\alpha g+\lambda 1\,\alpha g\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ \alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)\left|\frac{1}{\alpha\,(\lambda 1-\lambda 2)}\right|,\ 0 \qquad \mathbf{(44)}$$

Проверка неравенства $u \neq v$.

```
> u-v = factor(simplify((-lambda1*beta^2-2*lambda1*beta*tau-lambda1*tau^2+alpha*g*lambda2)/(-lambda2*
  beta^2-2*lambda2*beta*tau-lambda2*tau^2+alpha*g*lambda1)+g*alpha*(beta+tau)^2*(lambda1-lambda2)^2/(-
  lambda2*beta^2-2*lambda2*beta*tau-lambda2*tau^2+alpha*g*lambda1)^2));
```

$$u-v = \frac{\lambda 1\,\lambda 2\,(\alpha g-\beta^2-2\,\beta\,\tau-\tau^2)^2}{(\alpha g\,\lambda 1-\beta^2\,\lambda 2-2\,\beta\,\lambda 2\,\tau-\lambda 2\,\tau^2)^2} \qquad \mathbf{(45)}$$

3.5.2. Теорема 2.3, случай D = 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

В рассматриваемой системе D = 0, поэтому у матрицы H собственные числа совпадают и равны ν.

Берем $\eta = \eta_1$ при $\beta \ge 0$ и $\eta = \eta_2$ при $\beta < 0$.

```
> eta1 := beta+sqrt(beta^2-alpha*g);  eta2 := beta-sqrt(beta^2-alpha*g);
```

$$\eta 1 := \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha g}$$

$$\eta 2 := \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha g} \qquad \textbf{(1)}$$

$2_1) : q_1 \ne 0$ или $q_1 = 0, p_2 \ne 0.$

Система заменой J^2_{2a} или J^2_{2b} соответственно приведена к следующему виду :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,nu,0,1,nu, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\,\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 1 & \nu \end{bmatrix}$$

$$\textit{Matrix (2x4):}$$

$$\alpha\,\nu,\ 2\,\beta\,\nu,\ g\,\nu,\ 0$$

$$\alpha,\ \alpha\,\nu + 2\,\beta,\ 2\,\beta\,\nu + g,\ g\,\nu \qquad \textbf{(2)}$$

Проведем замену, обнуляющую два элемента p_0^2.

Случай $\beta \ge 0$.

```
> r21 := -alpha*r1/eta1:  s11 := -g*s2/eta1:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,1,nu, r1,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{2\,r1\,s2\,(\alpha g - \beta^2)\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g \nu - 4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2 \nu + 4\,\alpha\beta g \nu - 4\,\beta^3\nu - 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta g + \alpha g^2 - 2\,\beta^2 g\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2} - \alpha g + \beta^2\right)\left(\beta + \sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$\frac{2\,(\alpha g - \beta^2)\,s2^2 g^2}{\left(\beta + \sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2} - \alpha g + \beta^2\right)}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{2\,r1^2\,(\alpha g - \beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g - 4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2 + 3\,\alpha\beta g - 4\,\beta^3\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2} - \alpha g + \beta^2\right)\left(\beta + \sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$\frac{2\,r1\,s2\,(\alpha g - \beta^2)\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g \nu - 4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2 \nu + 4\,\alpha\beta g \nu - 4\,\beta^3\nu + 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta g - \alpha g^2 + 2\,\beta^2 g\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2} - \alpha g + \beta^2\right)\left(\beta + \sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$

$$0 \qquad \textbf{(3)}$$

Упрощение полученной системы :

```
> (-g*alpha+2*beta*sqrt(beta^2-g*alpha)+2*beta^2)=(beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^2;
  (beta^2+beta*sqrt(beta^2-g*alpha)-g*alpha)=sqrt(beta^2-g*alpha)*(beta+sqrt(beta^2-g*alpha));
  # скобка в b2
  3*beta*g*alpha+g*alpha*sqrt(beta^2-g*alpha)-4*beta^3-4*beta^2*sqrt(beta^2-g*alpha)=-(beta+sqrt
  (beta^2-g*alpha))^3;
  # скобка в b1
  collect(alpha*g^2+2*g*alpha*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*nu*alpha*g*beta-2*g*beta^2-2*g*beta*sqrt
  (beta^2-alpha*g)-4*beta^2*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*nu*beta^3,nu,factor)=`#mo(" ")`;
  `#mo(" ")`=(-2*(beta + sqrt(beta^2-alpha*g))^2*sqrt(beta^2-alpha*g))*nu - g*(beta + sqrt(beta^2-
  alpha*g))^2;
  # скобка в c2
  collect(-alpha*g^2+2*g*alpha*nu*sqrt(beta^2-g*alpha)+4*nu*alpha*g*beta+2*g*beta*sqrt(beta^2-g*alpha)
  +2*g*beta^2-4*nu*beta^3-4*beta^2*nu*sqrt(beta^2-g*alpha),nu,factor);
```

$$-\alpha g + 2\,\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha g} + 2\,\beta^2 = \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha g}\right)^2$$

$$\beta^2 + \beta\sqrt{\beta^2 - \alpha g} - \alpha g = \sqrt{\beta^2 - \alpha g}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha g}\right)$$

$$3\,\beta\alpha g + \sqrt{\beta^2 - \alpha g}\,\alpha g - 4\,\beta^3 - 4\,\beta^2\sqrt{\beta^2 - \alpha g} = -\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha g}\right)^3$$

$$\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha g+4\beta\alpha g-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^3\right)\nu-g\left(-\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\beta^2\right)=$$
$$=-2\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu-g\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2$$
$$\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha g+4\beta\alpha g-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^3\right)\nu+g\left(-\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\beta^2\right) \quad \textbf{(4)}$$

В итоге получаем систему

```
> zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu + g)*r1*s2/eta1,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  eta1^(-2)*g^2*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu - g)*r1*s2/eta1,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g\right)r1\,s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,g^2\,s2^2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$
$$0,\ 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,r1^2,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g\right)r1\,s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \quad \textbf{(5)}$$

Случай $\beta<0$.

```
> r21 := -alpha*r1/eta2: s11 := -g*s2/eta2:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,1,nu, r1,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$
$$\frac{2\,r1\,s2\left(\alpha g-\beta^2\right)\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\nu-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\nu-4\alpha\beta g\nu+4\beta^3\nu-2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta g-\alpha g^2+2\beta^2 g\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$
$$\frac{2\left(\alpha g-\beta^2\right)s2^2 g^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)}$$
$$0$$
$$0$$
$$\frac{2\,r1^2\left(\alpha g-\beta^2\right)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2-3\alpha\beta g+4\beta^3\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$
$$\frac{2\,r1\,s2\left(\alpha g-\beta^2\right)\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\nu-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\nu-4\alpha\beta g\nu+4\beta^3\nu+2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta g+\alpha g^2-2\beta^2 g\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$
$$0 \quad \textbf{(6)}$$

Упрощение полученной системы :

```
> alpha*g+2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-2*beta^2=-(beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^2;
  -beta^2+beta*sqrt(beta^2-alpha*g)+alpha*g=sqrt(beta^2-g*alpha)*(beta-sqrt(beta^2-g*alpha));
  # скобка в b2
  expand((beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^3) = (beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^3;
  # скобка в b1
  collect(-g^2*alpha+2*g*alpha*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*nu*alpha*g*beta-2*g*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)
  +2*g*beta^2+4*nu*beta^3-4*beta^2*nu*sqrt(beta^2-alpha*g), nu, factor)=`#mo(" ")`;
  `#mo(" ")`=-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*eta2^2*nu + eta2^2*g;
  # скобка в c2
  collect(g^2*alpha+2*g*alpha*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*nu*alpha*g*beta+2*g*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)
  -2*g*beta^2+4*nu*beta^3-4*beta^2*nu*sqrt(beta^2-alpha*g), nu, factor);
```

$$\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2=-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2$$
$$-\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\alpha g=\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$
$$4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-3\beta\alpha g+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha g=\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3$$
$$\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha g-4\beta\alpha g+4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)\nu-g\left(\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2\right)=$$
$$=-2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2\nu+\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2 g$$
$$\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\alpha g-4\beta\alpha g+4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)\nu+g\left(\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2\right) \quad \textbf{(7)}$$

В итоге получаем систему

```
> zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu + g)*r1*s2/eta2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *g^2*s2^2/eta2^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu - g)*r1*s2/eta2,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu-g\right) r1\, s2}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\, g^2 s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\, r1^2,\ \frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu+g\right) r1\, s2}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0 \qquad \textbf{(8)}$$

$2_1^1)$: $\gamma = 0$ $(\eta_1 = \eta_2 = 2\beta)$.

```
> eta := 2*beta: r21 := -alpha*r1/eta: s11 := 0:
  zamprocl2(alpha,2*beta,0,nu,0,1,nu, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ 2\,\beta\,\nu\, r1\, s2,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 2\, r1^2\,\beta,\ 2\,\beta\,\nu\, r1\, s2,\ 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Нормировка системы (9).

```
> r11 := 1/(sqrt(2)*sqrt(abs(beta))): r21 := -alpha*r11/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,0,nu,0,1,nu, r11,s11,r21,s2):
```

$$0,\ \frac{\beta\,\nu\, s2\,\sqrt{2}}{\sqrt{|\beta|}},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\beta}{|\beta|},\ \frac{\beta\,\nu\, s2\,\sqrt{2}}{\sqrt{|\beta|}},\ 0 \qquad \textbf{(10)}$$

```
> s21 := r11/nu:
  zamprocl2(alpha,2*beta,0,nu,0,1,nu, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ \frac{\beta}{|\beta|},\ 0,\ 0$$

$$0,\ \frac{\beta}{|\beta|},\ \frac{\beta}{|\beta|},\ 0 \qquad \textbf{(11)}$$

$2_1^2)$: $\gamma \neq 0$.

$2_1^{2a})$: $b_1 = 0$.

Случай $\beta \geq 0$. $b_1 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -2\eta\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$. Система (5) принимает следующий вид :

```
> eta := eta1: nu1 := -g/(2*sqrt(beta^2 - alpha*g)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1 + g)*r1*s2/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  eta^(-2)*g^2*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu1 - g)*r1*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2 s2^2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ -\frac{4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g\, r1\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \textbf{(12)}$$

Нормировка системы (12).

```
> s22 := -eta/(g*sqrt(2*sqrt(beta^2-alpha*g))):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1 + g)*r1*s22/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *eta^(-2)*g^2*s22^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu1 - g)*r1*s22/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -1,\ 0$$

$$0,\ 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ 2\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4} r1\,\sqrt{2},\ 0 \qquad \textbf{(13)}$$

```
> r12 := -1/(2*sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1 + g)*r12*s22/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*eta^(-2)*g^2*s22^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r12^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*nu1 - g)*r12*s22/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -1,\ 0$$

$$0,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 0 \tag{14}$$

Случай $\beta < 0$. $b_1 = 0 \iff \gamma = 2\eta\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$. Система (8) принимает следующий вид :

```
> eta := eta2: nu2 := g/(2*sqrt(beta^2 - alpha*g)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2 + g)*r1*s2/eta, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *g^2*s2^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu2 - g)*r1*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2 s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ \frac{4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g\, r1\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \tag{15}$$

Нормировка системы (15).

```
> s23 := eta/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*g):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2 + g)*r1*s23/eta, 2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*g^2*s23^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *nu2 - g)*r1*s23/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ 1,\ 0$$

$$0,\ -2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ -2\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4} r1\sqrt{2},\ 0 \tag{16}$$

```
> r13 := -1/(2*sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2 + g)*r13*s23/eta, 2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*g^2*s23^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r13^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*nu2 - g)*r13*s23/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ 1,\ 0$$

$$0,\ -\frac{1}{4},\ 1,\ 0 \tag{17}$$

2_1^{2b}) : $c_2 = 0$.

Случай $\beta \geq 0$. $c_2 = 0 \iff \gamma = 2\eta\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$. Система (5) принимает следующий вид :

```
> eta := eta1: nu3 := g/(2*sqrt(beta^2 - alpha*g)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3 + g)*r1*s2/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  eta^(-2)*g^2*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu3 - g)*r1*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g\, r1\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2 s2^2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ 0,\ 0 \tag{18}$$

Нормировка системы (18).

```
> r14 := 1/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3 + g)*r14*s2/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *eta^(-2)*g^2*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r14^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu3 - g)*r14*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4} g\sqrt{2}\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2 s2^2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 0 \tag{19}$$

```
> s24 := eta/(2*sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*g):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3 + g)*r14*s24/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*eta^(-2)*g^2*s24^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r14^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*nu3 - g)*r14*s24/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 1,\ -\frac{1}{4},\ 0$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 0 \qquad \mathbf{(20)}$$

Случай $\beta < 0$. $c_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -2\eta\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$. Система (8) принимает следующий вид :

```
> eta := eta2: nu4 := -g/(2*sqrt(beta^2 - alpha*g)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4 + g)*r1*s2/eta, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *g^2*s2^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu4 - g)*r1*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g\, r1\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2\, s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ 0,\ 0 \qquad \mathbf{(21)}$$

Нормировка системы (21).

```
> r15 := 1/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4 + g)*r15*s2/eta, 2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*g^2*s2^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r15^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)
  *nu4 - g)*r15*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{2\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4} g\sqrt{2}\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2\, s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ 0,\ 0 \qquad \mathbf{(22)}$$

```
> s25 := -eta/(2*sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*g):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4 + g)*r15*s25/eta, 2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*g^2*s25^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r15^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*
  g)*nu4 - g)*r15*s25/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -1,\ \frac{1}{4},\ 0$$

$$0,\ -1,\ 0,\ 0 \qquad \mathbf{(23)}$$

2_1^{2c}) : $b_1 c_2 \neq 0$.

Случай $\beta \geq 0$. Система (5) :

```
> eta := eta1:
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu + g)*r1*s2/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  eta^(-2)*g^2*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2, 2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu
  - g)*r1*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g\right) r1\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2\, s2^2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g\right) r1\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \mathbf{(24)}$$

Нормировка системы (24).

```
> r16 := 1/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+g)*r16*s2/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  eta^(-2)*g^2*s2^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r16^2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu-g)*r16*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g\right)\sqrt{2}\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2\, s2^2}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ \frac{\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g\right)\sqrt{2}\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \mathbf{(25)}$$

```
> s26 := eta/((beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(2)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-g)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+g)*r16*s26/eta,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  eta^(-2)*g^2*s26^2,0,0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r16^2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu-g)*r16*s26/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g}{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g},\ -\frac{g^2}{\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ 1,\ 0 \qquad \textbf{(26)}$$

Случай $\beta < 0$. Система (8) :

```
> eta := eta2:
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+g)*r1*s2/eta,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g^2*s2^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1^2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-
  g)*r1*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g\right) r1\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2 s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, r1^2,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g\right) r1\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \textbf{(27)}$$

Нормировка системы (27).

```
> r17 := 1/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+g)*r17*s2/eta,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g^2*s2^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r17^2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-
  g)*r17*s2/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g\right)\sqrt{2}\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\, g^2 s2^2}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ \frac{\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g\right)\sqrt{2}\, s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \textbf{(28)}$$

```
> s27 := eta/(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+g)):
  zamproc(0,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+g)*r17*s27/eta,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  g^2*s27^2/eta^2,0,0,-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r17^2,2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*
  nu-g)*r17*s27/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-g}{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g},\ \frac{g^2}{\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+g\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ -1,\ 0 \qquad \textbf{(29)}$$

$2_2)$: $q_1 = 0,\ p_2 = 0.$

В системе матрица H диагональная :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\nu,\ 2\beta\nu,\ g\nu,\ 0$$

$$0,\ \alpha\nu,\ 2\beta\nu,\ g\nu \qquad \textbf{(30)}$$

Случай $\beta \geq 0$.

```
> eta := eta1: r21 := -alpha*r1/eta: s11 := -g*s2/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -\frac{4\left(\alpha g-\beta^2\right)\nu\, r1\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -\frac{4\left(\alpha g-\beta^2\right)\nu\, r1\, s2}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \textbf{(31)}$$

Нормировка системы (31).

```
> r11 := eta: r21 := -alpha*r11/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, r11,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -4\,s2\,(\alpha\,g-\beta^2)\,\nu,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -4\,s2\,(\alpha\,g-\beta^2)\,\nu,\ 0 \tag{32}$$

```
> s21 := 1/(4*(beta^2 - alpha*g)*nu): s11 := -g*s21/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ 1,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ 1,\ 0 \tag{33}$$

Случай $\beta < 0$.

```
> eta := eta2: r21 := -alpha*r1/eta: s11 := -g*s2/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ \frac{4\,(\alpha\,g-\beta^2)\,\nu\,r1\,s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha\,g+\beta^2}},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{4\,(\alpha\,g-\beta^2)\,\nu\,r1\,s2}{-\beta+\sqrt{-\alpha\,g+\beta^2}},\ 0 \tag{34}$$

Нормировка системы (34).

```
> r11 := eta: r21 := -alpha*r11/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, r11,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -4\,s2\,(\alpha\,g-\beta^2)\,\nu,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -4\,s2\,(\alpha\,g-\beta^2)\,\nu,\ 0 \tag{35}$$

```
> s21 := 1/(4*(beta^2-alpha*g)*nu): s11 := -g*s21/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,0,nu, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ 1,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ 1,\ 0 \tag{36}$$

3.5.3. Теорема 2.3, случай D < 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib):
```

В рассматриваемой системе D < 0, поэтому у матрицы H комплексные сопряженные собственные числа $\nu \pm i\mu$.
Система заменой J_3^2 приведена к следующему виду :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,nu,-mu,mu,nu, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \nu & -\mu \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\nu,\ -\alpha\mu + 2\beta\nu,\ -2\mu\beta + g\nu,\ -\mu g$$
$$\alpha\mu,\ \alpha\nu + 2\mu\beta,\ 2\beta\nu + \mu g,\ g\nu \qquad \textbf{(1)}$$

Берем $\eta = \eta_1$ при $\beta \geq 0$ и $\eta = \eta_2$ при $\beta < 0$.

```
> eta1 := beta+sqrt(beta^2-alpha*g);  eta2 := beta-sqrt(beta^2-alpha*g);
```

$$\eta 1 := \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha g}$$
$$\eta 2 := \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha g} \qquad \textbf{(2)}$$

Проведем замену, обнуляющую два элемента p_0^2.

Случай $\beta \geq 0$.

```
> eta := eta1: r21 := -alpha*r1/eta: s11:=-g*s2/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,-mu,mu,nu,r1,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$

$$-\frac{1}{\left(\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2}\Big(2\,r1\,s2\,(-\beta^2+\alpha g)\Big(-\alpha\mu g^2-\mu g\alpha^2-4\alpha g\nu\beta-2\alpha g\nu\sqrt{\beta^2-\alpha g}$$
$$+2\mu g\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2g\mu\beta^2+2\alpha\mu\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\alpha\mu\beta^2+4\nu\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\nu\beta^3\Big)\Big)$$

$$\frac{2\,s2^2\mu(-\beta^2+\alpha g)\left(g^2\beta+g^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}-3\alpha g\beta+4\beta^3+4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)}{\left(\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{2\,r1^2\mu(-\beta^2+\alpha g)\left(\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+3\alpha g\beta-\alpha^2\beta-\alpha^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)}{\left(\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left(\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2}\Big(2\,r1\,s2\,(-\beta^2+\alpha g)\Big(-\alpha\mu g^2-\mu g\alpha^2+4\alpha g\nu\beta+2\alpha g\nu\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\mu g\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}$$
$$+2g\mu\beta^2+2\alpha\mu\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\alpha\mu\beta^2-4\nu\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\nu\beta^3\Big)\Big)$$

$$0 \qquad \textbf{(3)}$$

Упрощение полученной системы :

```
> (-g*alpha+2*beta*sqrt(beta^2-g*alpha)+2*beta^2)=(beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^2;
  (beta^2+beta*sqrt(beta^2-g*alpha)-g*alpha)=sqrt(beta^2-g*alpha)*(beta+sqrt(beta^2-g*alpha));
  -3*beta*g*alpha-g*alpha*sqrt(beta^2-g*alpha)+4*beta^3+4*beta^2*sqrt(beta^2-g*alpha)=(beta+sqrt
  (beta^2-g*alpha))^3;
  # скобка в b1
  collect(-alpha*mu*g^2-mu*g*alpha^2-2*alpha*g*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*alpha*g*nu*beta+2*mu*g*beta*
  sqrt(beta^2-alpha*g)+2*g*mu*beta^2+2*alpha*mu*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)+2*alpha*mu*beta^2+4*nu*
  beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*nu*beta^3, [mu, nu], factor) = `#mo(" ")`;
  `#mo(" ")` = (beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu + (alpha+g)*mu);
  # скобка в c1
  g^2*beta+g^2*sqrt(beta^2-alpha*g)-g*alpha*sqrt(beta^2-alpha*g)-3*alpha*g*beta+4*beta^2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)+4*beta^3 = g^2*eta + (beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^3;
  # скобка в b2
  g*alpha*sqrt(beta^2-alpha*g)+3*alpha*g*beta-alpha^2*beta-alpha^2*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*beta^2*sqrt
  (beta^2-alpha*g)-4*beta^3 = -alpha^2*eta - (beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^3;
  # скобка в c2
  collect(-alpha*mu*g^2-mu*g*alpha^2+4*alpha*g*nu*beta+2*alpha*g*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)+2*mu*g*beta*
  sqrt(beta^2-alpha*g)+2*g*mu*beta^2+2*alpha*mu*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)+2*alpha*mu*beta^2-4*nu*
  beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*nu*beta^3, [mu, nu], factor) = `#mo(" ")`;
  `#mo(" ")` = (beta+sqrt(beta^2-g*alpha))^2*(-2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu + (alpha+g)*mu);
```

$$-\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\beta^2=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2$$
$$\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g=\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$
$$-3\alpha g\beta-\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\beta^3+4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3$$

$$(g+\alpha)\left(-\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\beta^2\right)\mu+\left(-4\alpha g\beta-2\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\beta^3\right)\nu=$$
$$=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu+(g+\alpha)\mu\right)$$
$$g^2\beta+g^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}-3\alpha g\beta+4\beta^3+4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}=g^2\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)+\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3$$
$$\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+3\alpha g\beta-\alpha^2\beta-\alpha^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}=-\alpha^2\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3$$
$$(g+\alpha)\left(-\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+2\beta^2\right)\mu+\left(4\alpha g\beta+2\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^3\right)\nu=$$
$$=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2\left(-2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu+(g+\alpha)\mu\right) \tag{4}$$

В итоге получаем систему

```
> zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu)/eta,-2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)*s2^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),2*
  r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,s2^2\mu\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$
$$0,\ \frac{2\,r1^2\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ \frac{2\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \tag{5}$$

Случай $\beta<0$.

```
> eta := eta2: r21 := -alpha*r1/eta: s11 := -g*s2/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,-mu,mu,nu, r1,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$
$$-\frac{1}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}\Big(2\,r1\,s2\,(\alpha g-\beta^2)\Big(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha\beta\mu-2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\nu+4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\nu$$
$$+2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta g\mu+\mu g\alpha^2-2\alpha\beta^2\mu+4\alpha\beta g\nu+\alpha g^2\mu-4\beta^3\nu-2\beta^2 g\mu\Big)\Big)$$
$$-\frac{2\,s2^2\mu(\alpha g-\beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2-\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,g^2-3\alpha\beta g+4\beta^3+g^2\beta\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$
$$0$$
$$0$$
$$-\frac{2\,r1^2\mu(\alpha g-\beta^2)\left(\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha^2-\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g+4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2-\alpha^2\beta+3\alpha\beta g-4\beta^3\right)}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}$$
$$\frac{1}{\left(\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-\beta^2\right)\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2}\Big(2\,r1\,s2\,(\alpha g-\beta^2)\Big(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha\beta\mu+2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\alpha g\nu-4\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta^2\nu$$
$$+2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\beta g\mu+\mu g\alpha^2-2\alpha\beta^2\mu-4\alpha\beta g\nu+\alpha g^2\mu+4\beta^3\nu-2\beta^2 g\mu\Big)\Big)$$
$$0 \tag{6}$$

Упрощение полученной системы :

```
> alpha*g+2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-2*beta^2=-(beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^2;
  -beta^2+beta*sqrt(beta^2-alpha*g)+alpha*g=sqrt(beta^2-g*alpha)*(beta-sqrt(beta^2-g*alpha));
  expand((beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^3) = (beta-sqrt(beta^2-g*alpha))^3;
  # скобка в b1
  collect(alpha*mu*g^2+mu*g*alpha^2-2*alpha*g*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)+4*alpha*g*nu*beta+2*mu*g*beta*
  sqrt(beta^2-alpha*g)-2*g*mu*beta^2+2*alpha*mu*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-2*alpha*mu*beta^2-4*nu*
  beta^3+4*nu*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g), [mu, nu], factor) = `#mo(" ")`;
  `#mo(" ")` = eta^2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu - (alpha+g)*mu);
  # скобка в c1
  -g^2*beta+g^2*sqrt(beta^2-alpha*g)-g*alpha*sqrt(beta^2-alpha*g)+3*alpha*g*beta+4*beta^2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)-4*beta^3 = -eta^3 - g^2*eta;
  # скобка в b2
  g*alpha*sqrt(beta^2-alpha*g)-3*alpha*g*beta+alpha^2*beta-alpha^2*sqrt(beta^2-alpha*g)-4*beta^2*sqrt
  (beta^2-alpha*g)+4*beta^3 = eta^3 + alpha^2*eta;
  # скобка в c2
  collect(alpha*mu*g^2+mu*g*alpha^2-4*alpha*g*nu*beta+2*alpha*g*nu*sqrt(beta^2-alpha*g)+2*mu*g*beta*
  sqrt(beta^2-alpha*g)-2*g*mu*beta^2+2*alpha*mu*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-2*alpha*mu*beta^2+4*nu*
  beta^3-4*nu*beta^2*sqrt(beta^2-alpha*g), [mu, nu], factor) = `#mo(" ")`;
  `#mo(" ")` = -eta^2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu + (alpha+g)*mu);
```

$$\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2=-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2$$
$$-\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\alpha g=\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$

$$4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-3\alpha g\beta+\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}=\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3$$
$$(g+\alpha)\left(\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2\right)\mu+\left(-4\beta^3+4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\alpha g\beta\right)\nu=$$
$$=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu-(g+\alpha)\mu\right)$$
$$-g^2\beta+g^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}+3\alpha g\beta+4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^3=-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3-g^2\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$
$$\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}-3\alpha g\beta+\alpha^2\beta-\alpha^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}+4\beta^3=\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^3+\alpha^2\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)$$
$$(g+\alpha)\left(\alpha g+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-2\beta^2\right)\mu+\left(4\beta^3-4\beta^2\sqrt{\beta^2-\alpha g}-4\alpha g\beta+2\alpha g\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)\nu=$$
$$=-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu+(g+\alpha)\mu\right) \quad \mathbf{(7)}$$

В итоге получаем систему

```
> zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta,2*s2^2*mu*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/(eta^2),2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*r1*s2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{2\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\,s2^2\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$
$$0,\ \frac{2\,r1^2\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -\frac{2\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \quad \mathbf{(8)}$$

$3_1)$: $\nu=0,\ \alpha+\gamma=0.$

Случай $\beta\ge 0$. Система (5) принимает следующий вид :

```
> eta := beta + sqrt(beta^2 + alpha^2):
  r21 := -alpha*r1/eta: s11 := alpha*s2/eta: g1 := -alpha:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g1,0,-mu,mu,0, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ -\frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)\mu\, s2^2}{\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ 0$$
$$0,\ \frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)\mu\, r1^2}{\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ 0,\ 0 \quad \mathbf{(9)}$$

Нормировка системы (9).

```
> r11 := sqrt(eta)/(2*sqrt(beta^2+alpha^2)*sqrt(mu)): r21 := -alpha*r11/eta:
  s21 := sqrt(eta)/(2*sqrt(beta^2+alpha^2)*sqrt(mu)): s11 := alpha*s21/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g1,0,-mu,mu,0,r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ 0,\ -1,\ 0$$
$$0,\ 1,\ 0,\ 0 \quad \mathbf{(10)}$$

Случай $\beta<0$. Система (8) принимает следующий вид :

```
> eta := beta - sqrt(beta^2 + alpha^2):
  r21 := -alpha*r1/eta: s11 := alpha*s2/eta: g1 := -alpha:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g1,0,-mu,mu,0, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ \frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)\mu\, s2^2}{-\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ 0$$
$$0,\ -\frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)\mu\, r1^2}{-\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ 0,\ 0 \quad \mathbf{(11)}$$

Нормировка системы (11).

```
> r11 := sqrt(-eta)/(2*sqrt(beta^2+alpha^2)*sqrt(mu)): r21 := -alpha*r11/eta:
  s21 := sqrt(-eta)/(2*sqrt(beta^2+alpha^2)*sqrt(mu)): s11 := alpha*s21/eta:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g1,0,-mu,mu,0, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ 0,\ 1,\ 0$$
$$0,\ -1,\ 0,\ 0 \quad \mathbf{(12)}$$

$3_2)$: $\nu^2+(\alpha+\gamma)^2\ne 0 \iff b_1^2+c_2^2\ne 0.$

$3_2^1)$: $b_1=0.$

Случай $\beta\ge 0$. $b_1=0 \iff 2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\ \nu+(\alpha+\gamma)\mu=0.$

Система (5) принимает следующий вид :

```
> nu1 := -(alpha+g)*mu/(2*sqrt(beta^2-alpha*g)): eta := eta1:
  zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1)/eta,-2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)*s2^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),2*
  r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -\frac{2\,s2^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -\frac{4\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,(\alpha+g)\,\mu}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \textbf{(13)}$$

Нормировка системы (13).

```
> s22 := eta/(sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(eta^2+g^2)):
  zamproc(0,2*r1*s22*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1)/eta,-2*sqrt(beta^2
  -alpha*g)*s22^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),2*
  r1*s22*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -1,\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -\frac{2\,r1\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}\,(-\alpha g+\beta^2)^{1/4}(\alpha+g)}{\sqrt{-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2}},\ 0 \qquad \textbf{(14)}$$

```
> r12 := sqrt(2*beta^2+2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+g^2)
        /(2*sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(alpha+g)):
  zamproc(0,2*r12*s22*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1)/eta,-2*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*s22^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r12^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/
  (eta^2),2*r12*s22*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu1-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -1,\ 0$$

$$0,\ \frac{1}{4}\,\frac{\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)}{(\alpha+g)^2\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -1,\ 0 \qquad \textbf{(15)}$$

Случай $\beta<0$. $b_1=0 <=> 2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\ \nu-(\alpha+\gamma)\mu=0.$

Система (8) принимает следующий вид :

```
> nu2 := (alpha+g)*mu/(2*sqrt(beta^2-alpha*g)): eta := eta2:
  zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2-(alpha+g)*mu)/eta,2*s2^2*mu*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/(eta^2),2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*r1*s2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ -\frac{2\,s2^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ -\frac{4\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,(\alpha+g)\,\mu}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ 0 \qquad \textbf{(16)}$$

Нормировка системы (16).

```
> s22 := eta/(sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)
        *sqrt(2*beta^2-2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+g^2)):
  zamproc(0,2*r1*s22*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2-(alpha+g)*mu)/eta,2*s22^2*mu*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/
  (eta^2),2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1*s22*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ 1,\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ \frac{2\,r1\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}\,(-\alpha g+\beta^2)^{1/4}(\alpha+g)}{\sqrt{-\alpha g+2\beta^2-2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2}},\ 0 \qquad \textbf{(17)}$$

```
> r12 := sqrt(2*beta^2-2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+g^2)
        /(2*sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(alpha+g)):
  zamproc(0,2*r12*s22*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2-(alpha+g)*mu)/eta,2*s22^2*mu*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r12^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/
  (eta^2),2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r12*s22*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu2+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 0,\ 1,\ 0$$

$$0,\ -\frac{1}{4}\,\frac{\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)}{(\alpha+g)^2\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 1,\ 0 \qquad \textbf{(18)}$$

$3^2_2)$: $c_2=0.$

Случай $\beta\ge 0$. $c_2=0 <=> 2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\ \nu-(\alpha+\gamma)\mu=0.$

Система (5) принимает следующий вид :

```
> nu3 := (alpha+g)*mu/(2*sqrt(beta^2-alpha*g)): eta := eta1:
  zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3)/eta,-2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)*s2^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),2*
  r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{4\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,(\alpha+g)\,\mu}{\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,s2^2\,\mu\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0,\ 0 \qquad \textbf{(19)}$$

Нормировка системы (19).

```
> r13 := eta/(sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(eta^2+alpha^2)):
  zamproc(0,2*r13*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3)/eta,-2*sqrt(beta^2
  -alpha*g)*s2^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r13^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),2*
  r13*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}\,(-\alpha g+\beta^2)^{1/4}\,s2\,(\alpha+g)}{\sqrt{-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,s2^2\,\mu\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 0 \qquad \textbf{(20)}$$

```
> s23 := sqrt(2*beta^2+2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+alpha^2)
        /(2*sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(alpha+g)):
  zamproc(0,2*r13*s23*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3)/eta,-2*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*s23^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r13^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/
  (eta^2),2*r13*s23*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu3-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ 1,\ -\frac{1}{4}\ \frac{\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{(\alpha+g)^2\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 0 \qquad \textbf{(21)}$$

Случай $\beta<0$. $b_1=0 \iff 2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\ \nu+(\alpha+\gamma)\mu=0$.

Система (8) принимает следующий вид :

```
> nu4 := -(alpha+g)*mu/(2*sqrt(beta^2-alpha*g)): eta := eta2:
  zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4-(alpha+g)*mu)/eta,2*s2^2*mu*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/(eta^2),2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*r1*s2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{4\,r1\,s2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,(\alpha+g)\,\mu}{-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}},\ -\frac{2\,s2^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0,\ 0 \qquad \textbf{(22)}$$

Нормировка системы (22).

```
> r13 := eta/(sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(eta^2+alpha^2)):
  zamproc(0,2*r13*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4-(alpha+g)*mu)/eta,2*s2^2*mu*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r13^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/(eta^2),2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*r13*s2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}\,(-\alpha g+\beta^2)^{1/4}\,s2\,(\alpha+g)}{\sqrt{-\alpha g+2\beta^2-2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2}},\ -\frac{2\,s2^2\,\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ 0,\ 0 \qquad \textbf{(23)}$$

```
> s23 := sqrt(2*beta^2-2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+alpha^2)
        /(2*sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(alpha+g)):
  zamproc(0,2*r13*s23*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4-(alpha+g)*mu)/eta,2*s23^2*mu*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r13^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/
  (eta^2),2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r13*s23*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu4+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -1,\ \frac{1}{4}\ \frac{\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)}{(\alpha+g)^2\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ 0,\ 0 \qquad \textbf{(24)}$$

$3^3_2)$: $b_1 c_2 \neq 0$.

Случай $\beta \geq 0$. Система (5) :

```
> zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu)/eta1,-2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)*s2^2*mu*(g^2+eta1^2)/(eta1^2),0,0,2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta1^2)/(eta1^2),
  2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta1,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\,r1\,s2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ -\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,s2^2\mu\left(g^2+2\beta^2+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\mu\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(\alpha^2+2\beta^2+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}-\alpha g\right)}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ \frac{2\,r1\,s2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0 \qquad \textbf{(25)}$$

Нормировка системы (25).

```
> eta := eta1: r14 := eta/(sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(eta^2+alpha^2)):
  zamproc(0,2*r14*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu)/eta,-2*sqrt(beta^2-
  alpha*g)*s2^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r14^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),2*
  r14*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{\sqrt{2}\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}s2\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)}{\sqrt{\mu}\sqrt{-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2}},\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,s2^2\mu\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ \frac{\sqrt{2}\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}s2\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)}{\sqrt{\mu}\sqrt{-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2}},\ 0 \qquad \textbf{(26)}$$

```
> s24 := sqrt(mu)*sqrt(2*beta^2+2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+alpha^2)
         /(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-mu*alpha-mu*g)):
  zamproc(0,2*r14*s24*sqrt(beta^2-alpha*g)*((alpha+g)*mu+2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu)/eta,-2*sqrt(beta^2
  -alpha*g)*s24^2*mu*(g^2+eta^2)/(eta^2),0,0,2*r14^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(alpha^2+eta^2)/(eta^2),
  2*r14*s24*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g}{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g},\ -\frac{\mu^2\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2\right)\left(-\alpha g+2\beta^2+2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+g^2\right)}{\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)^2\left(\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ 1,\ 1,\ 0 \qquad \textbf{(27)}$$

Случай $\beta<0$. Система (8) :

```
> zamproc(0,2*r1*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta2,2*s2^2*mu*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*(eta2^2+g^2)/(eta2^2),0,0,-2*r1^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta2^2+alpha^2)/
  (eta2^2),2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r1*s2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+(alpha+g)*mu)/eta2,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{2\,r1\,s2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ -\frac{2\,s2^2\mu\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(-2\beta^2+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\alpha g-g^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ \frac{2\,r1^2\mu\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(-2\beta^2+2\beta\sqrt{\beta^2-\alpha g}+\alpha g-\alpha^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}\right)^2},\ -\frac{2\,r1\,s2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\left(2\sqrt{\beta^2-\alpha g}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)}{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha g}},\ 0 \qquad \textbf{(28)}$$

Нормировка системы (28).

```
> eta := eta2: r14 := eta/(sqrt(2)*sqrt(mu)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*sqrt(eta^2+alpha^2)):
  zamproc(0,2*r14*s2*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta,2*s2^2*mu*sqrt
  (beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r14^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/(eta^2),2*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*r14*s2*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ \frac{\sqrt{2}\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}s2\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g\right)}{\sqrt{\mu}\sqrt{-\alpha g+2\beta^2-2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2}},\ -\frac{2\,s2^2\mu\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)}{\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ \frac{\sqrt{2}\left(-\alpha g+\beta^2\right)^{1/4}s2\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)}{\sqrt{\mu}\sqrt{-\alpha g+2\beta^2-2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha^2}},\ 0 \qquad \textbf{(29)}$$

```
> s24 := -sqrt(mu)*sqrt(2*beta^2-2*beta*sqrt(beta^2-alpha*g)-alpha*g+alpha^2)
         /(sqrt(2)*(beta^2-alpha*g)^(1/4)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+mu*alpha+mu*g)):
  zamproc(0,2*r14*s24*sqrt(beta^2-alpha*g)*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu-(alpha+g)*mu)/eta,2*s24^2*mu*
  sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+g^2)/(eta^2),0,0,-2*r14^2*mu*sqrt(beta^2-alpha*g)*(eta^2+alpha^2)/
  (eta^2),2*sqrt(beta^2-alpha*g)*r14*s24*(2*sqrt(beta^2-alpha*g)*nu+(alpha+g)*mu)/eta,0, 1,0,0,1):
```

$$0,\ -\frac{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu-\alpha\mu-\mu g}{2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g},\ \frac{\mu^2\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}-\alpha^2+\alpha g-2\beta^2\right)\left(2\beta\sqrt{-\alpha g+\beta^2}+\alpha g-2\beta^2-g^2\right)}{\left(2\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\,\nu+\alpha\mu+\mu g\right)^2\left(-\beta+\sqrt{-\alpha g+\beta^2}\right)^2},\ 0$$

$$0,\ -1,\ -1,\ 0 \qquad \textbf{(30)}$$

3.6. Отрицательный дискриминант многочлена P_0^2 ($D_0 < 0$).

3.6.1. Сведение форм с $D \geq 0$ из списка 2.4_1 до $NSF_4^{6,2}$ к предшествующим.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

$NSF_{34,+1}^{4,2<}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,u,1,0,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_8^{4,2}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=1\}, \left\{r1=r2\,RootOf(\_Z^2+1), r2=r2, s1=\frac{s2}{RootOf(\_Z^2+1)}, s2=s2, u=\frac{1}{2}\,\frac{-1+RootOf(\_Z^2+1)^2}{RootOf(\_Z^2+1)^2}\right\} \quad \textbf{(1)}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1 = -r2, r2 = r2, s1 = s2, s2 = s2, u = 1};
  zamproc(0,1,0,1,1,0,1,0, r1,s2,-r1,s2):
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=1\}$$
$$-2\,r1^2, 0, -2\,s2^2, 0$$
$$0, 2\,r1^2, 0, 2\,s2^2 \quad \textbf{(2)}$$

$NSF_7^{5,2<}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,-u,u,0,1,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_8^{4,2}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=\frac{1}{2}\,r1, s1=0, s2=s2, u=3\right\}, \left\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=\frac{1}{2}\,s1, u=3\right\} \quad \textbf{(3)}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> zamproc(3,-3,3,0, 1,0,0,1, 0,2*s2,r2,s2):
```

$$r2^2, 0, 3\,s2^2, 0$$
$$0, 3\,r2^2, 0, 9\,s2^2 \quad \textbf{(4)}$$

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
  solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(3\_Z^2-2-2\_Z)\,r2, r2=r2, s1=-\frac{s2\,RootOf(3\_Z^2-2-2\_Z)}{RootOf(3\_Z^2-2-2\_Z)+1}, s2=s2, u=-1\right\}$$

$$\left\{r1=\frac{1}{3}\,\frac{r2\,(2\,RootOf(2\_Z^2-3+2\_Z)-3)}{RootOf(2\_Z^2-3+2\_Z)}, r2=r2, s2=RootOf(2\_Z^2-3+2\_Z)\,s1, u=\frac{1}{3}\,\frac{(RootOf(2\_Z^2-3+2\_Z)+1)\,(2\,RootOf(2\_Z^2-3+2\_Z)-3)}{RootOf(2\_Z^2-3+2\_Z)}\right\} \quad \textbf{(5)}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
>
```

(6)

```
>
```

(7)

```
>
```

(8)

```
> {r1=(1/3)*r2*(2*RootOf(2*_Z^2-3+2*_Z)-3)/RootOf(2*_Z^2-3+2*_Z),r2=r2,s2=RootOf(2*_Z^2-3+2*_Z)*s1,u=
  (1/3)*(RootOf(2*_Z^2-3+2*_Z)+1)*(2*RootOf(2*_Z^2-3+2*_Z)-3)/RootOf(2*_Z^2-3+2*_Z)};
  solve(2*_Z^2-3+2*_Z);
```

$$\left\{r1=\frac{1}{3}\,\frac{r2\,(2\,RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)-3)}{RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)},\,r2=r2,\,s2=RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)\,s1,\,u=\frac{1}{3}\,\frac{(RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)+1)\,(2\,RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)-3)}{RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7},\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7} \tag{9}$$

```
> z1:=-1/2+(1/2)*sqrt(7): z2:=-1/2-(1/2)*sqrt(7): r11:=(1/3)*r2*(2*z1-3)/z1: s21:=z1*s1:
  u1:=(1/3)*(z1+1)*(2*z1-3)/z1:    zamproc(u1,-u1,u1,0,1,0,0,1, r11,s1,r2,s21):
```

$$0,\,\frac{1}{6}\left(7+5\sqrt{7}\right)r2\,s1,\,0,\,\frac{1}{4}\,\frac{s1^3\left(-7+5\sqrt{7}\right)}{r2}$$

$$\frac{1}{27}\,\frac{\left(-7+13\sqrt{7}\right)r2^3}{s1},\,0,\,\frac{1}{2}\left(-7+3\sqrt{7}\right)r2\,s1,\,0 \tag{10}$$

```
> r11 := (1/3)*r2*(2*z2-3)/z2: s21 := z2*s1: u1 := (1/3)*(z2+1)*(2*z2-3)/z2:
  zamproc(u1,-u1,u1,0,1,0,0,1, r11,s1,r2,s21):
```

$$0,\,-\frac{1}{6}\left(-7+5\sqrt{7}\right)r2\,s1,\,0,\,-\frac{1}{4}\,\frac{s1^3\left(7+5\sqrt{7}\right)}{r2}$$

$$-\frac{1}{27}\,\frac{\left(7+13\sqrt{7}\right)r2^3}{s1},\,0,\,-\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{7}\right)r2\,s1,\,0 \tag{11}$$

$NSF_{22}^{5,2<}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,-u,u,1,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_8^{4,2}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)\,r2,\,r2=r2,\,s1=\frac{3\,RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)\,s2}{2\,RootOf(2\,\_Z^2-3+2\,\_Z)-3},\,s2=s2,\,u=\frac{3}{2}\right\} \tag{12}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> solve(2*_Z^2-3+2*_Z);
```

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7},\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7} \tag{13}$$

```
> z1 := (1/2)*sqrt(7)-1/2: z2 := -(1/2)*sqrt(7)-1/2: r11 := z2*r2: s11 := 3*z2*s2/(2*z2-3):
  zamproc(0,3/2,-3/2,3/2,1,0,0,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$-\frac{1}{4}\left(7+5\sqrt{7}\right)r2^2,\,0,\,-\frac{3}{4}\left(-7+3\sqrt{7}\right)s2^2,\,0$$

$$0,\,\frac{3}{4}\left(7+3\sqrt{7}\right)r2^2,\,0,\,\frac{1}{4}\left(-7+5\sqrt{7}\right)s2^2 \tag{14}$$

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

Поиск замен к $SF_7^{5,2}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,r2,s2});  solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {u,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\,r2=r2,\,s2=RootOf(\_Z^2+1-\_Z)\,s1,\,u=0\},\,\{r1=0,\,r2=r2,\,s2=-s1,\,u=0\},\,\left\{r1=-\frac{1}{3}\,r2\,(3\,RootOf(3\,\_Z^2-1+\_Z)+1),\,r2=r2,\,s2=RootOf(3\,\_Z^2-1+\_Z)\,s1,\,u=-\frac{3\,(RootOf(3\,\_Z^2-1+\_Z)+1)}{RootOf(3\,\_Z^2-1+\_Z)-1}\right\},\,\left\{r1=\frac{4}{3}\,r2,\,r2=r2,\,s2=-\frac{1}{3}\,s1,\,u=6\right\}$$

$$\left\{r2=\frac{3}{4}\,r1,\,s1=-3\,s2,\,s2=s2,\,u=6\right\},\,\{r2=0,\,s1=0,\,s2=s2,\,u=0\},\,\left\{r2=-\frac{3\,r1\,(RootOf(\_Z^2-3-\_Z)+3)}{4\,RootOf(\_Z^2-3-\_Z)+3},\,s1=RootOf(\_Z^2-3-\_Z)\,s2,\,s2=s2,\,u=3+2\,RootOf(\_Z^2-3-\_Z)\right\} \tag{15}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1 = (4/3)*r2, r2 = r2, s2 = -(1/3)*s1, u = 6};  r11 := 4*r2/3: s21 := -s1/3:
  zamproc(0,6,-6,6,1,0,0,1,r11,s1,r2,s21):
```

$$\left\{r1=\frac{4}{3}\,r2,\,r2=r2,\,s2=-\frac{1}{3}\,s1,\,u=6\right\}$$

$$\frac{13}{3}\,r2^2,\,\frac{13}{3}\,s1\,r2,\,\frac{13}{3}\,s1^2,\,0$$

$$\frac{26}{9}\,\frac{r2^3}{s1},\,0,\,0,\,-\frac{26}{9}\,s1^2 \tag{16}$$

```
> {r1 = -(1/3)*r2*(3*RootOf(3*_Z^2-1+_Z)+1), r2 = r2, s2 = RootOf(3*_Z^2-1+_Z)*s1, u = -(3*(RootOf(3*
  _Z^2-1+_Z)+1))/(RootOf(3*_Z^2-1+_Z)-1)};      solve(3*_Z^2-1+_Z);
```

$$\left\{r1 = -\frac{1}{3}\ r2\ (3\ RootOf(3\ \_Z^2 - 1 + \_Z) + 1),\ r2 = r2,\ s2 = RootOf(3\ \_Z^2 - 1 + \_Z)\ s1,\ u = -\frac{3\ (RootOf(3\ \_Z^2 - 1 + \_Z) + 1)}{RootOf(3\ \_Z^2 - 1 + \_Z) - 1}\right\}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13},\ -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13} \qquad (17)$$

```
> z1 := -1/6+(1/6)*sqrt(13): z2 := -1/6-(1/6)*sqrt(13):
  u1 := expand(rationalize(-3*(z1+1)/(z1-1))): r11 := -(3*z1+1)*r2/3: s21 := z1*s1:
  zamproc(0,u1,-u1,u1,1,0,0,1, r11,s1,r2,s21):
```

$$-\frac{4}{9}\ r2^2\left(5 + 2\sqrt{13}\right),\ \frac{2}{3}\ r2\ s1\left(\sqrt{13} + 1\right),\ -\frac{2}{3}\ s1^2\left(-1 + \sqrt{13}\right),\ 0$$

$$\frac{4}{27}\ \frac{r2^3\left(46 + 13\sqrt{13}\right)}{s1},\ 0,\ 0,\ \frac{4}{9}\ s1^2\left(2 + \sqrt{13}\right) \qquad (18)$$

```
> u1 := expand(rationalize(-3*(z2+1)/(z2-1))): r11 := -(3*z2+1)*r2/3: s21 := z2*s1:
  zamproc(0,u1,-u1,u1,1,0,0,1, r11,s1,r2,s21):
```

$$\frac{4}{9}\ r2^2\left(-5 + 2\sqrt{13}\right),\ -\frac{2}{3}\ r2\ s1\left(-1 + \sqrt{13}\right),\ \frac{2}{3}\ s1^2\left(\sqrt{13} + 1\right),\ 0$$

$$-\frac{4}{27}\ \frac{r2^3\left(-46 + 13\sqrt{13}\right)}{s1},\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{9}\ s1^2\left(-2 + \sqrt{13}\right) \qquad (19)$$

```
> {r2=-3*r1*(RootOf(Z^2-3-Z)+3)/(4*RootOf(Z^2-3-Z)+3),s1=RootOf(Z^2-3-Z)*s2,u=3+2*RootOf(Z^2-3-Z)};
  solve(_Z^2-3-_Z);
```

$$\left\{r2 = -\frac{3\ r1\ (RootOf(\_Z^2 - \_Z - 3) + 3)}{4\ RootOf(\_Z^2 - \_Z - 3) + 3},\ s1 = RootOf(\_Z^2 - \_Z - 3)\ s2,\ u = 3 + 2\ RootOf(\_Z^2 - \_Z - 3)\right\}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \qquad (20)$$

```
> z1:=1/2+(1/2)*sqrt(13): z2:=1/2-(1/2)*sqrt(13): u1:=2*z1+3: r21:=-3*(z1+3)*r1/(4*z1+3): s11:=z1*s2:
  zamproc(0,u1,-u1,u1,1,0,0,1, r1,s11,r21,s2):
```

$$-2\left(\sqrt{13} + 1\right) r1^2,\ -2\left(\sqrt{13} + 1\right) s2\ r1,\ -2\left(\sqrt{13} + 1\right) s2^2,\ 0$$

$$-\frac{2\left(3 + \sqrt{13}\right) r1^3}{s2},\ 0,\ 0,\ 2\left(3 + \sqrt{13}\right) s2^2 \qquad (21)$$

```
> u1 := 2*z2+3: r21 := -3*(z2+3)*r1/(4*z2+3): s11 := z2*s2:
  zamproc(0,u1,-u1,u1,1,0,0,1, r1,s11,r21,s2):
```

$$2\left(-1 + \sqrt{13}\right) r1^2,\ 2\left(-1 + \sqrt{13}\right) s2\ r1,\ 2\left(-1 + \sqrt{13}\right) s2^2,\ 0$$

$$\frac{2\left(-3 + \sqrt{13}\right) r1^3}{s2},\ 0,\ 0,\ -2\left(-3 + \sqrt{13}\right) s2^2 \qquad (22)$$

$NSF_1^{6,2<}$($\nu > 1/4$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,u,u*v,0,0,1,1,v, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_8^{4,2}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = r1,\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ u = 1,\ v = -\frac{1}{2}\ \frac{(2\ r1 + r2)\ s1 + r1\ s2}{r2\ s2}\right\},\ \left\{r1 = 0,\ r2 = r2,\ s1 = -\frac{2}{3}\ s2,\ s2 = s2,\ u = 0,\ v = \frac{2}{9}\right\},\ \left\{r1 = -\frac{2}{3}\ r2,\ r2 = r2,\ s1 = 0,\ s2 = s2,\ u = 0,\ v = \frac{2}{9}\right\} \qquad (23)$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1=r1,r2=r2,s1=s1,s2=s2,u=1,v=-(1/2)*((2*r1+r2)*s1+r1*s2)/(r2*s2)};
  s11:=-(2*r2*s2*v+r1*s2)/(2*r1+r2):   zamproc(1,1,v,0,0,1,1,v, r1,s11,r2,s2):
```

$$\left\{r1 = r1,\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ u = 1,\ v = -\frac{1}{2}\ \frac{(2\ r1 + r2)\ s1 + r1\ s2}{r2\ s2}\right\}$$

$$v\ r2^2 + r1^2 + r1\ r2,\ 0,\ \frac{(4\ v - 1)\ (v\ r2^2 + r1^2 + r1\ r2)\ s2^2}{(2\ r1 + r2)^2},\ 0$$

$$0,\ v\ r2^2 + r1^2 + r1\ r2,\ 0,\ \frac{(4\ v - 1)\ (v\ r2^2 + r1^2 + r1\ r2)\ s2^2}{(2\ r1 + r2)^2} \qquad (24)$$

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> simplify([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{r1 = -\frac{r2\ (s2 + s1)}{s2},\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ u = 1,\ v = -\frac{s1\ (s2 + s1)}{s2^2}\right\},\ \left\{r1 = -\frac{r2\ s1}{s2},\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ u = -1,\ v = \frac{s1^2}{s2^2}\right\},\ \{r1 = 0,\ r2 = r2,\ s1 = -s2,\ s2 = s2,\ u = 1,\ v = 0\},\ \{r1 = -2\ r2,\ r2 = r2,\ s1 = 0,\ s2 = s2,\ u = 0,\ v = 0\},\ \{r1 = 0,\ r2 = r2,\ s1 = -2\ s2,\ s2 = s2,\ u = 0,\ v = 0\}\right] \qquad (25)$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1=-s1*r2/s2,r2=r2,s1=s1,s2=s2,u=-1,v=s1^2/s2^2}; s11:=sqrt(v)*s2: r11:=-s11*r2/s2:
  zamproc(-1,-1,-v,0,0,1,1,v, r11,s11,r2,s2):
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,s1}{s2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=-1,\ v=\frac{s1^2}{s2^2}\right\}$$

$$0,\ r2\,s2\,\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}-1\right),\ 0,\ \frac{s2^3\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}+1\right)}{r2}$$

$$\frac{r2^3\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}-1\right)}{s2},\ 0,\ r2\,s2\,\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}+1\right),\ 0 \qquad \textbf{(26)}$$

Получаем $SF_4^{2,2}$ -- замена для другого знака D_0 :

```
> {r1 = -r2*(s1+s2)/s2, r2 = r2, s1 = s1, s2 = s2, u = 1, v = -s1*(s1+s2)/s2^2};
  zamproc(1,1,1*(-s1*(s1+s2)/s2^2),0,0,1,1,-s1*(s1+s2)/s2^2,-r2*(s1+s2)/s2,s1,r2,s2):
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,(s2+s1)}{s2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=1,\ v=-\frac{s1\,(s2+s1)}{s2^2}\right\}$$

$$0,\ -\frac{(s2+2\,s1)^2\,r2}{s2},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -\frac{(s2+2\,s1)^2\,r2}{s2},\ 0 \qquad \textbf{(27)}$$

Поиск замен к $SF_7^{5,2}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{(-3\,u+u^2+3)\,r2}{-3+u},\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{-3\,u+u^2+3}{(-3+u)^2}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=v\},\ \left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1\,(-1+3\,u)}{u},\ s1=s1,\ s2=0,\ u=u,\ v=\frac{-3\,u+1+3\,u^2}{(-1+3\,u)^2}\right\},\ \left\{r1=-\frac{1}{2}\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=1,\ v=\frac{1}{4}\right\},\ \left\{r1=-\frac{1}{2}\,u\,r2,\ r2=r2,\ s1=-\frac{1}{2}\,s2,\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{1}{4}\right\},\ \left\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0,\ v=-\frac{s1\,(s1+s2)}{s2^2}\right\} \qquad \textbf{(28)}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1 = (-3*u+u^2+3)*r2/(-3+u), r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = u, v = (-3*u+u^2+3)/(-3+u)^2};
  r11 := (-3*u+u^2+3)*r2/(-3+u): v1 := (-3*u+u^2+3)/(-3+u)^2:
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,0,r2,s2):
```

$$\left\{r1=\frac{(-3\,u+u^2+3)\,r2}{-3+u},\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{-3\,u+u^2+3}{(-3+u)^2}\right\}$$

$$\frac{(-1+u)^2\,r2^2\,(-3\,u+u^2+3)\,u}{(-3+u)^2},\ \frac{(-1+u)\,s2\,r2\,(-3\,u+u^2+3)\,u}{(-3+u)^2},\ \frac{u\,(-3\,u+u^2+3)\,s2^2}{(-3+u)^2},\ 0$$

$$-\frac{(-1+u)^3\,r2^3\,(-3\,u+u^2+3)}{s2\,(-3+u)^2},\ 0,\ 0,\ \frac{(-3\,u+u^2+3)\,s2^2}{(-3+u)^2} \qquad \textbf{(29)}$$

```
> {r1 = r1, r2 = -r1*(-1+3*u)/u, s1 = s1, s2 = 0, u = u, v = (-3*u+1+3*u^2)/(-1+3*u)^2};
  r21 := -r1*(-1+3*u)/u: v1 := (-3*u+1+3*u^2)/(-1+3*u)^2:
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r1,s1,r21,0):
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1\,(-1+3\,u)}{u},\ s1=s1,\ s2=0,\ u=u,\ v=\frac{-3\,u+1+3\,u^2}{(-1+3\,u)^2}\right\}$$

$$\frac{(-1+u)^2\,r1^2}{u^2},\ -\frac{(-1+u)\,r1\,s1}{u},\ s1^2,\ 0$$

$$\frac{(-1+u)^3\,r1^3}{s1\,u^2},\ 0,\ 0,\ u\,s1^2 \qquad \textbf{(30)}$$

Поиск замен к $SF_{22}^{5,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{1}{2}\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=1,\ v=\frac{1}{4}\right\},\ \left\{r1=-\frac{r2\,(u^2+3\,u+3)}{3\,u^2+8\,u+3},\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,u\,(u^2+3\,u+3)}{3\,u^2+8\,u+3},\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{(u^2+3\,u+3)\,(3\,u^2+3\,u+1)}{(3\,u^2+8\,u+3)^2}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\} \qquad \textbf{(31)}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1=-r2*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3),r2=r2,s1=-s2*u*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3),s2=s2,u=u,v=(u^2+3*u+3)*
  (3*u^2+3*u+1)/(3*u^2+8*u+3)^2};      r11 := -r2*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3):
  s11 := -s2*u*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3): v1 := (u^2+3*u+3)*(3*u^2+3*u+1)/(3*u^2+8*u+3)^2:
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,(u^2+3\,u+3)}{3\,u^2+8\,u+3},\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,u\,(u^2+3\,u+3)}{3\,u^2+8\,u+3},\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{(u^2+3\,u+3)\,(3\,u^2+3\,u+1)}{(3\,u^2+8\,u+3)^2}\right\}$$

$$0,\ -\frac{r2\,u\,(u^2+3\,u+3)\,s2\,(-1+u)^2}{(3\,u^2+8\,u+3)^2},\ \frac{(u^2+3\,u+3)\,s2^2\,u\,(u+1)\,(-1+u)^2}{(3\,u^2+8\,u+3)^2},\ -\frac{(-1+u)^2\,(u+1)^2\,(u^2+3\,u+3)\,u\,s2^3}{r2\,(3\,u^2+8\,u+3)^2}$$

$$\frac{(u^2+3\,u+3)\,r2^3\,(-1+u)^2}{s2\,(3\,u^2+8\,u+3)^2},\ 0,\ 0,\ \frac{(u^2+3\,u+3)\,s2^2\,(-1+u)^2\,(u+1)^3}{(3\,u^2+8\,u+3)^2} \tag{32}$$

$NSF_3^{6,2} <_{=}$ (u = 1, v > 1/4). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(1,1-v,0,-v^2,0,1,1,v, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_8^{4,2}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=-\frac{r1\,s2}{r2+2\,r1},\ s2=s2,\ v=0\right\} \tag{33}$$

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ v=0\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ v=0\} \tag{34}$$

Поиск замен к $SF_7^{5,2}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=1\},\ \left\{r1=-\frac{1}{3}\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=\frac{1}{3}\right\},\ \left\{r1=-\frac{3}{4}\,r2,\ r2=r2,\ s1=-\frac{1}{2}\,s2,\ s2=s2,\ v=\frac{1}{4}\right\} \tag{35}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1 = -(1/3)*r2, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, v = 1/3};
  zamproc(1,2/3,0,-1/9,0,1,1,1/3, r1,s1,-3*r1,0):
```

$$\left\{r1=-\frac{1}{3}\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=\frac{1}{3}\right\}$$

$$r1^2,\ -s1\,r1,\ s1^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3}{s1},\ 0,\ 0,\ s1^2 \tag{36}$$

Поиск замен к $SF_{22}^{5,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {v,r1,s1,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{1}{2}\,RootOf(3\,\_Z^2-21-22\,\_Z)\,r2,\ s1=-\frac{1}{6}\,\frac{s2\,(43\,RootOf(3\,\_Z^2-21-22\,\_Z)+21)}{RootOf(3\,\_Z^2-21-22\,\_Z)-3},\ s2=s2,\ v=\frac{7}{3}\,\frac{3+4\,RootOf(3\,\_Z^2-21-22\,\_Z)}{RootOf(3\,\_Z^2-21-22\,\_Z)-3}\right\} \tag{37}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> solve(3*_Z^2-21-22*_Z);
```

$$\frac{11}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{46},\ \frac{11}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{46} \tag{38}$$

```
> z1:=11/3+(2/3)*sqrt(46): z2:=11/3-(2/3)*sqrt(46): v1:=expand(rationalize((7/3)*(4*z1+3)/(z1-3))):
  r11 := z1*r2/2: s11:= expand(rationalize((-(1/6)*(43*z1+21)/(z1-3))))*s2:
  zamproc(1,1-v1,0,-v1^2,0,1,1,v1, r11,s11,r2,s2):
```

$$0,\ -\frac{7}{36}\left(95+14\sqrt{46}\right)s2\,r2,\ \frac{7}{18}\left(95+14\sqrt{46}\right)s2^2,\ -\frac{7}{9}\,\frac{\left(95+14\sqrt{46}\right)s2^3}{r2}$$

$$\frac{7}{36}\,\frac{\left(95+14\sqrt{46}\right)r2^3}{s2},\ 0,\ 0,\ \frac{14}{9}\left(95+14\sqrt{46}\right)s2^2 \tag{39}$$

```
> v1 := expand(rationalize((7/3)*(4*z2+3)/(z2-3))):
  r11 := z2*r2/2: s11:= expand(rationalize((-(1/6)*(43*z2+21)/(z2-3))))*s2:
  zamproc(1,1-v1,0,-v1^2,0,1,1,v1, r11,s11,r2,s2):
```

$$0,\ \frac{7}{36}\left(-95+14\sqrt{46}\right)s2\,r2,\ -\frac{7}{18}\left(-95+14\sqrt{46}\right)s2^2,\ \frac{7}{9}\,\frac{\left(-95+14\sqrt{46}\right)s2^3}{r2}$$

$$-\frac{7}{36}\,\frac{\left(-95+14\sqrt{46}\right)r2^3}{s2},\ 0,\ 0,\ -\frac{14}{9}\left(-95+14\sqrt{46}\right)s2^2 \tag{40}$$

Поиск замен к $SF_1^{6,2}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,1]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=0\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=-\frac{s1\,(s1+s2)}{s2^2}\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=-\frac{r1\,(r1+r2)}{r2^2}\right\},\ \left\{r1=-\frac{r2\,(s1+s2)}{s2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=-\frac{s1\,(s1+s2)}{s2^2}\right\} \tag{41}$$

Решения не определены при v > 1/4 :

```
> solve(v = -s1*(s1+s2)/s2^2, s1);
```

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4v}\right)s2,\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4v}\right)s2 \tag{42}$$

$NSF^{6,2\,<=}_{4,+1}$ (u = 1). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(1,v,1,v,0,1,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF^{4,2}_{8}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,r2}{r1},\ s2=s2,\ v=0\right\} \tag{43}$$

Поиск замен к $SF^{4,2}_{34}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-RootOf(\_Z^2+1)\,r2,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2+1)\,s2,\ s2=s2,\ v=0\} \tag{44}$$

Поиск замен к $SF^{5,2}_{7}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=RootOf(3\,\_Z^2-1)\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=-2\,RootOf(3\,\_Z^2-1)\} \tag{45}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> z1 := 1/sqrt(3): z2 := -1/sqrt(3): v1 := -2*z1: r11 := z1*r2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\begin{matrix}\frac{4}{3}\,r2^2,\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r2\,s1,\ s1^2,\ 0\\ -\frac{8}{9}\,\frac{r2^3\sqrt{3}}{s1},\ 0,\ 0,\ s1^2\end{matrix} \tag{46}$$

```
> v1 := -2*z2: r11 := z2*r2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\begin{matrix}\frac{4}{3}\,r2^2,\ -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,r2\,s1,\ s1^2,\ 0\\ \frac{8}{9}\,\frac{r2^3\sqrt{3}}{s1},\ 0,\ 0,\ s1^2\end{matrix} \tag{47}$$

Поиск замен к $SF^{5,2}_{22}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {v,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r2=\frac{1}{2}\,RootOf(\_Z^2-3)\,r1,\ s1=-\frac{5}{3}\,s2\,RootOf(\_Z^2-3),\ s2=s2,\ v=-\frac{7}{3}\,RootOf(\_Z^2-3)\right\} \tag{48}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> z1 := sqrt(3): z2 := -sqrt(3): v1 := -7*z1/3: r11 := 2*r2/z1: s11 := -5*z1*s2/3:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\begin{matrix}0,\ -\frac{7}{3}\,r2\,s2,\ \frac{14}{3}\,s2^2,\ -\frac{28}{3}\,\frac{s2^3}{r2}\\ \frac{7}{3}\,\frac{r2^3}{s2},\ 0,\ 0,\ \frac{56}{3}\,s2^2\end{matrix} \tag{49}$$

```
> v1 := -7*z2/3: r11 := 2*r2/z2: s11 := -5*z2*s2/3:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\begin{matrix}0,\ -\frac{7}{3}\,r2\,s2,\ \frac{14}{3}\,s2^2,\ -\frac{28}{3}\,\frac{s2^3}{r2}\\ \frac{7}{3}\,\frac{r2^3}{s2},\ 0,\ 0,\ \frac{56}{3}\,s2^2\end{matrix} \tag{50}$$

Поиск замен к $SF^{6,2}_{1}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,1]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=0\},\ \{r1=r1,\ r2=0,\ s1=RootOf(\_Z^2+1)\,s2,\ s2=s2,\ v=v\},\ \{r1=RootOf(\_Z^2+1)\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=v\},\ \{r1=RootOf(\_Z^2+1,\ label=\_L52)\,r2,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2+1,\ label=\_L53)\,s2,\ s2=s2,\ v=v\} \tag{51}$$

Поиск замен к $SF^{6,2}_{3}$.

```
> solve([M[1,3],M[2,1]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=-\frac{1}{2}\,\frac{s1^2+s2^2}{s1\,s2}\right\},\ \left\{r1=-\frac{(RootOf((s1^2+9\,s2^2)\,\_Z^2+1-2\,s1\,\_Z)\,s1^2-s1+3\,RootOf((s1^2+9\,s2^2)\,\_Z^2+1-2\,s1\,\_Z)\,s2^2)\,r2}{(2\,RootOf((s1^2+9\,s2^2)\,\_Z^2+1-2\,s1\,\_Z)\,s1+1)\,s2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=\frac{RootOf((s1^2+9\,s2^2)\,\_Z^2+1-2\,s1\,\_Z)\,(s1^2+s2^2)}{s2}\right\},\ \{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2+1)\,s2,\ s2=s2,\ v=0\} \tag{52}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1 = r1, r2 = 0, s1 = s1, s2 = s2, v = -(1/2)*(s1^2+s2^2)/(s2*s1)};
  solve(v = -(1/2)*(s1^2+s2^2)/(s1*s2), s1);
```

$$\left\{r1=r1, r2=0, s1=s1, s2=s2, v=-\frac{1}{2}\,\frac{s1^2+s2^2}{s2\,s1}\right\}$$

$$\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)s2,\ \left(-v-\sqrt{v^2-1}\right)s2 \tag{53}$$

```
> s11 := (-v+sqrt(v^2-1))*s2:
  zamproc(1,v,1,v,0,1,0,1, r1,s11,0,s2):
```

$$r1^2,\ s2\,r1\left(-v+2\sqrt{v^2-1}\right),\ 0,\ -\frac{2\,s2^3\,v^2\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)}{r1}$$

$$0,\ r1^2,\ 2\,r1\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)s2,\ -2\,s2^2\,v\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right) \tag{54}$$

Решение не определено:

```
> {r1 = -(RootOf((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*s1*_Z)*s1^2-s1+3*RootOf((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*s1*_Z)*s2^2)*
  r2/((2*RootOf((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*s1*_Z)*s1+1)*s2), r2 = r2, s1 = s1, s2 = s2, v = RootOf(
  (s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*s1*_Z)*(s1^2+s2^2)/s2};
  solve((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*_Z*s1, _Z);
```

$$\left\{r1=-\frac{\left(s1^2\,RootOf\left(\left(s1^2+9\,s2^2\right)\_Z^2+1-2\,\_Z\,s1, label=\_L34\right)-s1+3\,RootOf\left(\left(s1^2+9\,s2^2\right)\_Z^2+1-2\,\_Z\,s1, label=\_L34\right)s2^2\right)r2}{\left(2\,RootOf\left(\left(s1^2+9\,s2^2\right)\_Z^2+1-2\,\_Z\,s1, label=\_L34\right)s1+1\right)s2}, r2=r2, s1=s1, s2=s2, v=\frac{RootOf\left(\left(s1^2+9\,s2^2\right)\_Z^2+1-2\,\_Z\,s1, label=\_L34\right)\left(s1^2+s2^2\right)}{s2}\right\}$$

$$\frac{s1+3\,\mathrm{I}\,s2}{s1^2+9\,s2^2},\ -\frac{-s1+3\,\mathrm{I}\,s2}{s1^2+9\,s2^2} \tag{55}$$

3.6.2. Теорема 2.4, случай D > 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

В рассматриваемой системе $D>0$, поэтому у H есть два различных вещественных собственных числа λ_1, λ_2.
Система заменой J_1^2 приведена к следующему виду :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\,\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\,\lambda 1,\ 2\,\beta\,\lambda 1,\ g\,\lambda 1,\ 0$$
$$0,\ \alpha\,\lambda 2,\ 2\,\beta\,\lambda 2,\ g\,\lambda 2 \qquad \textbf{(1)}$$

1_1) $\beta = 0$. Система (1) принимает вид

```
> l2syst(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda2);
```

$$\alpha\,\lambda 1,\ 0,\ g\,\lambda 1,\ 0$$
$$0,\ \alpha\,\lambda 2,\ 0,\ g\,\lambda 2 \qquad \textbf{(2)}$$

Нормировка системы (2).

```
> zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda2, r1,0,0,s2):
```

$$\alpha\,\lambda 1\, r1^2,\ 0,\ g\,\lambda 1\, s2^2,\ 0$$
$$0,\ \alpha\,\lambda 2\, r1^2,\ 0,\ g\,\lambda 2\, s2^2 \qquad \textbf{(3)}$$

```
> r11 := 1/sqrt(alpha*abs(lambda2)): s21 := 1/sqrt(g*abs(lambda2)):
  zamprocl2(alpha,0,g,lambda1,0,0,lambda2, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{\lambda 1}{|\lambda 2|},\ 0,\ \frac{\lambda 1}{|\lambda 2|},\ 0$$
$$0,\ \frac{\lambda 2}{|\lambda 2|},\ 0,\ \frac{\lambda 2}{|\lambda 2|} \qquad \textbf{(4)}$$

1_2) $\beta \neq 0$. Нормировка системы (1).

```
> zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, r1,0,0,s2):
```

$$\alpha\,\lambda 1\, r1^2,\ 2\,\beta\,\lambda 1\, r1\, s2,\ g\,\lambda 1\, s2^2,\ 0$$
$$0,\ \alpha\,\lambda 2\, r1^2,\ 2\,\beta\,\lambda 2\, r1\, s2,\ g\,\lambda 2\, s2^2 \qquad \textbf{(5)}$$

```
> r11 := 1/sqrt(alpha*abs(lambda2)):
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, r11,0,0,s2):
```

$$\frac{\lambda 1}{|\lambda 2|},\ \frac{2\,\beta\,\lambda 1\, s2}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{|\lambda 2|}},\ g\,\lambda 1\, s2^2,\ 0$$
$$0,\ \frac{\lambda 2}{|\lambda 2|},\ \frac{2\,\beta\,\lambda 2\, s2}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{|\lambda 2|}},\ g\,\lambda 2\, s2^2 \qquad \textbf{(6)}$$

```
> s21 := sqrt(alpha)/(sqrt(abs(lambda2))*2*beta):
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,lambda1,0,0,lambda2, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{\lambda 1}{|\lambda 2|},\ \frac{\lambda 1}{|\lambda 2|},\ \frac{1}{4}\,\frac{g\,\lambda 1\,\alpha}{|\lambda 2|\,\beta^2},\ 0$$
$$0,\ \frac{\lambda 2}{|\lambda 2|},\ \frac{\lambda 2}{|\lambda 2|},\ \frac{1}{4}\,\frac{g\,\lambda 2\,\alpha}{|\lambda 2|\,\beta^2} \qquad \textbf{(7)}$$

Таким образом система (1) сводится или к $NSF_{8,+1}^{4,2\,<,>}$, или к $NSF_1^{6,2\,<,>}$ (системы (4) и (7) соответственно).
Остается указать условия, при которых полученная $NSF_1^{6,2\,<,>}$ может быть сведена к предшествующим.
Согласно разделу 3.6.1 существуют замены к $SF_{34}^{4,2}$, $SF_7^{5,2}$, $SF_{22}^{5,2}$.

Результат произвольной замены в $NSF_1^{6,2\,<,>}$ ($u \neq 1$, $v > 1/4$) :

```
> M := zamproc(u,u,u*v,0,0,1,1,v, r1,s1,r2,s2):
```

1_2^a) Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> simplify([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {r1,s1,r2,s2,u,v})]);
```

$$\left[\left\{r1=-\frac{r2\,(s2+s1)}{s2},\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=s2,\, u=1,\, v=-\frac{s1\,(s2+s1)}{s2^2}\right\},\, \{r1=-2\,r2,\, r2=r2,\, s1=0,\, s2=s2,\, u=0,\, v=0\},\, \left\{r1=-\frac{r2\,s1}{s2},\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=s2,\, u=-1,\, v=\frac{s1^2}{s2^2}\right\},\, \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=-s2,\, s2=s2,\, u=1,\, v=0\},\, \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=-2\,s2,\, s2=s2,\, u=0,\, v=0\}\right] \quad \mathbf{(8)}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1=-r2*s1/s2,r2=r2,s1=s1,s2=s2,u=-1,v=s1^2/s2^2}; s11 := sqrt(v)*s2: r11 := -r2*s11/s2:
  zamproc(-1,-1,-v,0,0,1,1,v, r11,s11,r2,s2):
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,s1}{s2},\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=s2,\, u=-1,\, v=\frac{s1^2}{s2^2}\right\}$$

$$0,\, r2\,s2\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}-1\right),\, 0,\, \frac{s2^3\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}+1\right)}{r2}$$

$$\frac{r2^3\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}-1\right)}{s2},\, 0,\, r2\,s2\sqrt{v}\,\left(2\sqrt{v}+1\right),\, 0 \quad \mathbf{(9)}$$

Нормировка системы (9).

```
> s21 := 1/(r2*sqrt(v)*(2*sqrt(v)+1)): s11 := sqrt(v)*s21: r11 := -r2*s11/s21:
  zamproc(-1,-1,-v,0,0,1,1,v, r11,s11,r2,s21):
```

$$0,\, \frac{2\sqrt{v}-1}{2\sqrt{v}+1},\, 0,\, \frac{1}{v\,r2^4\left(2\sqrt{v}+1\right)^2}$$

$$r2^4\,v\,(4\,v-1),\, 0,\, 1,\, 0 \quad \mathbf{(10)}$$

```
> r21:=(v*(4*v-1))^(-1/4): s21:=1/(r21*sqrt(v)*(2*sqrt(v)+1)): s11:=sqrt(v)*s21: r11:=-r21*s11/s21:
  zamproc(-1,-1,-v,0,0,1,1,v, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\, \frac{2\sqrt{v}-1}{2\sqrt{v}+1},\, 0,\, \frac{4\,v-1}{\left(2\sqrt{v}+1\right)^2}$$

$$1,\, 0,\, 1,\, 0 \quad \mathbf{(11)}$$

1_2^b) Поиск замен к $SF_7^{5,2}$.

```
> simplify([solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {r1,s1,r2,s2,u,v})]);
```

$$\left[\left\{r1=\frac{(-3\,u+3+u^2)\,r2}{-3+u},\, r2=r2,\, s1=0,\, s2=s2,\, u=u,\, v=\frac{-3\,u+3+u^2}{(-3+u)^2}\right\},\, \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=0,\, v=v\},\, \left\{r1=r1,\, r2=-\frac{r1\,(-1+3\,u)}{u},\, s1=s1,\, s2=0,\, u=u,\, v=\frac{3\,u^2-3\,u+1}{(-1+3\,u)^2}\right\},\, \left\{r1=-\frac{1}{2}\,r2,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=s2,\, u=1,\, v=\frac{1}{4}\right\},\, \left\{r1=-\frac{1}{2}\,u\,r2,\, r2=r2,\, s1=-\frac{1}{2}\,s2,\, s2=s2,\, u=u,\, v=\frac{1}{4}\right\},\, \left\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=s2,\, u=0,\, v=-\frac{s1\,(s2+s1)}{s2^2}\right\}\right] \quad \mathbf{(12)}$$

Рассмотрение возможных решений.

Решение определено при $u \neq 3$:

```
> {r1 = (-3*u+u^2+3)*r2/(-3+u), r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = u, v = (-3*u+u^2+3)/(-3+u)^2};
  v1 := (-3*u+u^2+3)/(-3+u)^2: r11 := (-3*u+u^2+3)*r2/(-3+u):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,0,r2,s2):
```

$$\left\{r1=\frac{(-3\,u+3+u^2)\,r2}{-3+u},\, r2=r2,\, s1=0,\, s2=s2,\, u=u,\, v=\frac{-3\,u+3+u^2}{(-3+u)^2}\right\}$$

$$\frac{(u-1)^2\,r2^2\,(-3\,u+3+u^2)\,u}{(-3+u)^2},\, \frac{(u-1)\,s2\,r2\,(-3\,u+3+u^2)\,u}{(-3+u)^2},\, \frac{u\,(-3\,u+3+u^2)\,s2^2}{(-3+u)^2},\, 0$$

$$-\frac{(u-1)^3\,r2^3\,(-3\,u+3+u^2)}{s2\,(-3+u)^2},\, 0,\, 0,\, \frac{(-3\,u+3+u^2)\,s2^2}{(-3+u)^2} \quad \mathbf{(13)}$$

Нормировка системы (13).

```
> s21 := (-3+u)/sqrt(-3*u+u^2+3):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,0,r2,s21):
```

$$\frac{(u-1)^2\,r2^2\,(-3\,u+3+u^2)\,u}{(-3+u)^2},\, \frac{r2\sqrt{-3\,u+3+u^2}\,u\,(u-1)}{-3+u},\, u,\, 0$$

$$-\frac{(-3\,u+3+u^2)^{3/2}\,r2^3\,(u-1)^3}{(-3+u)^3},\, 0,\, 0,\, 1 \quad \mathbf{(14)}$$

```
> r21 := (3-u)*(u-1)^(-1)*(-3*u+u^2+3)^(-1/2): r11 := (-3*u+u^2+3)*r21/(-3+u):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,0,r21,s21):
```

$$u,\ -u,\ u,\ 0$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 1 \tag{15}$$

Решение определено при $u \neq 1/3$:

```
> {r1 = r1, r2 = -r1*(-1+3*u)/u, s1 = s1, s2 = 0, u = u, v = (-3*u+1+3*u^2)/(-1+3*u)^2};
  v1 := (-3*u+1+3*u^2)/(-1+3*u)^2: r21 := -r1*(-1+3*u)/u:
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r1,s1,r21,0):
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1\,(-1+3\,u)}{u},\ s1=s1,\ s2=0,\ u=u,\ v=\frac{3\,u^2-3\,u+1}{(-1+3\,u)^2}\right\}$$

$$\frac{(u-1)^2\,r1^2}{u^2},\ -\frac{(u-1)\,s1\,r1}{u},\ s1^2,\ 0$$

$$\frac{(u-1)^3\,r1^3}{s1\,u^2},\ 0,\ 0,\ s1^2\,u \tag{16}$$

Нормировка системы (16).

```
> s11 := 1/sqrt(abs(u)):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r1,s11,r21,0):
```

$$\frac{(u-1)^2\,r1^2}{u^2},\ -\frac{(u-1)\,r1}{u\sqrt{|u|}},\ \frac{1}{|u|},\ 0$$

$$\frac{r1^3\,(u-1)^3\sqrt{|u|}}{u^2},\ 0,\ 0,\ \frac{u}{|u|} \tag{17}$$

```
> r11 := (u-1)^(-1)*u*abs(u)^(-1/2): r21 := -r11*(-1+3*u)/u:
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,s11,r21,0):
```

$$\frac{1}{|u|},\ -\frac{1}{|u|},\ \frac{1}{|u|},\ 0$$

$$\frac{u}{|u|},\ 0,\ 0,\ \frac{u}{|u|} \tag{18}$$

1_2^c) Поиск замен к $SF_{22}^{5,2}$.

```
> simplify([solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {r1,s1,r2,s2,u,v})]);
```

$$\left[\left\{r1=-\frac{1}{2}\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=1,\ v=\frac{1}{4}\right\},\ \left\{r1=-\frac{r2\,(u^2+3\,u+3)}{3\,u^2+8\,u+3},\ r2=r2,\ s1=-\frac{u\,(u^2+3\,u+3)\,s2}{3\,u^2+8\,u+3},\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{(u^2+3\,u+3)\,(3\,u^2+3\,u+1)}{(3\,u^2+8\,u+3)^2}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\}\right] \tag{19}$$

Рассмотрение возможных решений.

```
> {r1=-r2*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3),r2=r2,s1=-s2*u*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3),s2=s2,u=u,v=(u^2+3*u+3)*
  (3*u^2+3*u+1)/(3*u^2+8*u+3)^2};    v1 := (u^2+3*u+3)*(3*u^2+3*u+1)/(3*u^2+8*u+3)^2:
  r11 := -r2*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3): s11 := -s2*u*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,(u^2+3\,u+3)}{3\,u^2+8\,u+3},\ r2=r2,\ s1=-\frac{u\,(u^2+3\,u+3)\,s2}{3\,u^2+8\,u+3},\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{(u^2+3\,u+3)\,(3\,u^2+3\,u+1)}{(3\,u^2+8\,u+3)^2}\right\}$$

$$0,\ -\frac{r2\,u\,(u^2+3\,u+3)\,s2\,(u-1)^2}{(3\,u^2+8\,u+3)^2},\ \frac{(u^2+3\,u+3)\,u\,s2^2\,(u+1)\,(u-1)^2}{(3\,u^2+8\,u+3)^2},\ -\frac{(u-1)^2\,(u+1)^2\,s2^3\,(u^2+3\,u+3)\,u}{r2\,(3\,u^2+8\,u+3)^2}$$

$$\frac{(u^2+3\,u+3)\,r2^3\,(u-1)^2}{s2\,(3\,u^2+8\,u+3)^2},\ 0,\ 0,\ \frac{(u^2+3\,u+3)\,s2^2\,(u-1)^2\,(u+1)^3}{(3\,u^2+8\,u+3)^2} \tag{20}$$

Нормировка системы (20).

```
> s21 := (u-1)^(-1)*abs(u+1)^(-1/2)*(u^2+3*u+3)^(-1/2)*(3*u^2+8*u+3)*(u+1)^(-1):
  s11 := -s21*u*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,s11,r2,s21):
```

$$0,\ -\frac{(u-1)\sqrt{u^2+3\,u+3}\;u\,r2}{\sqrt{|u+1|}\,(u+1)\,(3\,u^2+8\,u+3)},\ \frac{u}{|u+1|\,(u+1)},\ -\frac{u\,(3\,u^2+8\,u+3)}{r2\sqrt{u^2+3\,u+3}\;|u+1|^{3/2}\,(u^2-1)}$$

$$\frac{(u+1)\sqrt{|u+1|}\,(u-1)^3\,(u^2+3\,u+3)^{3/2}\,r2^3}{(3\,u^2+8\,u+3)^3},\ 0,\ 0,\ \frac{u+1}{|u+1|} \tag{21}$$

```
> r21 := (3*u^2+8*u+3)/((u-1)*sqrt(u^2+3*u+3)*sqrt(abs(u+1))): r11 := -r21*(u^2+3*u+3)/(3*u^2+8*u+3):
  zamproc(u,u,u*v1,0,0,1,1,v1, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{u}{|u+1|\,(u+1)},\ \frac{u}{|u+1|\,(u+1)},\ -\frac{u}{|u+1|\,(u+1)}$$

$$\frac{u+1}{|u+1|},\ 0,\ 0,\ \frac{u+1}{|u+1|} \qquad \textbf{(22)}$$

Вычисление значений параметра u , при которых форма (22) сводится к предшествующей.

```
> solve(-u/(u+1)^2 = 3/2);
```

$$-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{7},\ -\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{7} \qquad \textbf{(23)}$$

```
> solve(-u/(u+1)^2 = 6);
```

$$-\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3} \qquad \textbf{(24)}$$

```
> expand(rationalize([solve(-u/(u+1)^2 = 4-sqrt(13))]));
```

$$\left[-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13},\ -\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{13}\right] \qquad \textbf{(25)}$$

```
> expand(rationalize([solve(-u/(u+1)^2 = 4+sqrt(13))]));
```

$$\left[-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ -\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{13}\right] \qquad \textbf{(26)}$$

3.6.3. Теорема 2.4, случай D = 0.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

В рассматриваемой системе D = 0, поэтому у матрицы H собственные числа совпадают и равны ν.

2_1) : $q_1 \neq 0$ или $q_1 = 0,\ p_2 \neq 0$.

Система заменой J^2_{2a} или J^2_{2b} соответственно приведена к следующему виду :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,nu,0,1,nu, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha, 2\,\beta, g];\ H = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 1 & \nu \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\,\nu,\ 2\,\beta\,\nu,\ g\,\nu,\ 0$$

$$\alpha,\ \alpha\,\nu + 2\,\beta,\ 2\,\beta\,\nu + g,\ g\,\nu \qquad (1)$$

Замена, сводящая систему (1) к $SF_4^{6,2}$:

```
> s21 := -(beta/g)*s1:
  zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,1,nu,0,s1,r2,s21):
```

$$g\,\nu\,r2^2,\ s1\,r2\,g,\ \frac{s1^2\,\nu\,(-\beta^2 + g\,\alpha)}{g},\ \frac{s1^3\,(-\beta^2 + g\,\alpha)}{g\,r2}$$

$$0,\ g\,\nu\,r2^2,\ 0,\ \frac{s1^2\,\nu\,(-\beta^2 + g\,\alpha)}{g} \qquad (2)$$

Нормировка системы (2).

```
> s11 := g^(1/2)*abs(nu)^(-1/2)*(alpha*g-beta^2)^(-1/2): r21 := g^(-1/2)*abs(nu)^(-1/2):
  s21 := -(beta/g)*s11:      zamprocl2(alpha,2*beta,g,nu,0,1,nu,0,s11,r21,s21):
```

$$\frac{\nu}{|\nu|},\ \frac{g}{|\nu|\,\sqrt{-\beta^2 + g\,\alpha}},\ \frac{\nu}{|\nu|},\ \frac{g}{|\nu|\,\sqrt{-\beta^2 + g\,\alpha}}$$

$$0,\ \frac{\nu}{|\nu|},\ 0,\ \frac{\nu}{|\nu|} \qquad (3)$$

Таким образом система (1) сводится к $NSF^{6,2\,<=}_{4,+1}$ (система (3)).

Остается указать условия, при которых полученная $NSF^{6,2\,<=}_{4,+1}$ может быть сведена к предшествующим.

Согласно разделу 3.6.1 существуют замены к $SF_7^{5,2}$, $SF_{22}^{5,2}$, $SF_3^{6,2}$.

Результат произвольной замены в $NSF^{6,2\,<=}_{4,+1}$ (u = 1) :

```
> M := zamproc(1,v,1,v,0,1,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_7^{5,2}$.

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = RootOf(3\,\_Z^2 - 1)\,r2,\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = 0,\ v = -2\,RootOf(3\,\_Z^2 - 1)\} \qquad (4)$$

```
> z1 := 1/sqrt(3): z2 := -1/sqrt(3): v1 := -2*z1: r11 := z1*r2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\frac{4}{3}\,r2^2,\ \frac{2}{3}\,\sqrt{3}\,r2\,s1,\ s1^2,\ 0$$

$$-\frac{8}{9}\,\frac{r2^3\,\sqrt{3}}{s1},\ 0,\ 0,\ s1^2 \qquad (5)$$

Нормировка системы (5).

```
> s11 := -1: r21 := sqrt(3)/2: r11 := z1*r21:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s11,r21,0):
```

$$1,\ -1,\ 1,\ 0$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 1 \qquad (6)$$

```
> v1 := -2*z2: r11 := z2*r2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\frac{4}{3}\,r2^2,\ -\frac{2}{3}\,\sqrt{3}\,r2\,s1,\ s1^2,\ 0$$

$$\frac{8}{9}\,\frac{r2^3\,\sqrt{3}}{s1},\ 0,\ 0,\ s1^2 \qquad (7)$$

Нормировка системы (7).

```
> s11 := -1: r21 := -sqrt(3)/2: r11 := z2*r21:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s11,r21,0):
```

$$1,\ -1,\ 1,\ 0$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 1 \tag{8}$$

Поиск замен к $SF_{22}^{5,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {v,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r2=\frac{1}{2}\ RootOf(\_Z^2-3)\ r1,\ s1=-\frac{5}{3}\ s2\ RootOf(\_Z^2-3),\ s2=s2,\ v=-\frac{7}{3}\ RootOf(\_Z^2-3)\right\} \tag{9}$$

```
> z1 := sqrt(3): z2 := -sqrt(3): v1 := -7*z1/3: s11 := -5*z1*s2/3: r21 := z1*r1/2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ -\frac{7}{6}\ r1\sqrt{3}\ s2,\ \frac{14}{3}\ s2^2,\ -\frac{56}{9}\ \frac{s2^3\sqrt{3}}{r1}$$

$$\frac{7}{8}\ \frac{\sqrt{3}\ r1^3}{s2},\ 0,\ 0,\ \frac{56}{3}\ s2^2 \tag{10}$$

Нормировка системы (10).

```
> s21 := sqrt(3/56): s11 := -5*z1*s21/3:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r1,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{1}{8}\ r1\sqrt{14},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{28}\ \frac{\sqrt{14}}{r1}$$

$$\frac{7}{4}\ r1^3\sqrt{14},\ 0,\ 0,\ 1 \tag{11}$$

```
> r11 := sqrt(2)/sqrt(7): r21 := z1*r11/2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 1 \tag{12}$$

```
> v1 := -7*z2/3: s11 := -5*z2*s2/3: r21 := z2*r1/2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\ \frac{7}{6}\ r1\sqrt{3}\ s2,\ \frac{14}{3}\ s2^2,\ \frac{56}{9}\ \frac{s2^3\sqrt{3}}{r1}$$

$$-\frac{7}{8}\ \frac{\sqrt{3}\ r1^3}{s2},\ 0,\ 0,\ \frac{56}{3}\ s2^2 \tag{13}$$

Нормировка системы (13).

```
> s21 := sqrt(3/56): s11 := -5*z2*s21/3:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r1,s11,r21,s21):
```

$$0,\ \frac{1}{8}\ r1\sqrt{14},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{28}\ \frac{\sqrt{14}}{r1}$$

$$-\frac{7}{4}\ r1^3\sqrt{14},\ 0,\ 0,\ 1 \tag{14}$$

```
> r11 := -sqrt(2)/sqrt(7): r21 := z2*r11/2:
  zamproc(1,v1,1,v1,0,1,0,1, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 1 \tag{15}$$

Поиск замен к $SF_3^{6,2}$.

```
> solve([M[1,3],M[2,1]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=-\frac{1}{2}\ \frac{s1^2+s2^2}{s1\ s2}\right\},\ \left\{r1=-\frac{(RootOf((s1^2+9\,s2^2)\ \_Z^2+1-2\ \_Z\,s1)\ s1^2-s1+3\ RootOf((s1^2+9\,s2^2)\ \_Z^2+1-2\ \_Z\,s1)\ s2^2)\ r2}{(2\ s1\ RootOf((s1^2+9\,s2^2)\ \_Z^2+1-2\ \_Z\,s1)+1)\ s2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=\frac{RootOf((s1^2+9\,s2^2)\ \_Z^2+1-2\ \_Z\,s1)\ (s1^2+s2^2)}{s2}\right\},\ \{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2+1)\ s2,\ s2=s2,\ v=0\} \tag{16}$$

Рассмотрение возможных решений.

Решение определено при $|v| \geq 1$:

```
> {r1 = r1, r2 = 0, s1 = s1, s2 = s2, v = -(1/2)*(s1^2+s2^2)/(s1*s2)};
  solve(v = -(1/2)*(s1^2+s2^2)/(s1*s2),s1);
```

$$\left\{r1 = r1, r2 = 0, s1 = s1, s2 = s2, v = -\frac{1}{2}\,\frac{s1^2+s2^2}{s1\,s2}\right\}$$

$$\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)s2,\ \left(-v-\sqrt{v^2-1}\right)s2 \tag{17}$$

```
> s11 := (-v+sqrt(v^2-1))*s2:    zamproc(1,v,1,v,0,1,0,1, r1,s11,0,s2):
```

$$r1^2,\ r1\,s2\left(-v+2\sqrt{v^2-1}\right),\ 0,\ -\frac{2\,s2^3\,v^2\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)}{r1}$$

$$0,\ r1^2,\ 2\,r1\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)s2,\ -2\,s2^2\,v\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right) \tag{18}$$

Нормировка системы (18).

```
> r11 := 1: s21 := rationalize(1/(2*r11*(-v+sqrt(v^2-1)))): s11 := evala((-v+sqrt(v^2-1))*s21):
  zamproc(1,v,1,v,0,1,0,1, r11,s11,0,s21):
```

$$1,\ -\frac{1}{2}\,v\sqrt{v^2-1}-\frac{1}{2}\,v^2+1,\ 0,\ -\frac{1}{4}\,v^2\left(2\,v^2+2\,v\sqrt{v^2-1}-1\right)$$

$$0,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{2}\,v\left(v+\sqrt{v^2-1}\right) \tag{19}$$

Вычисление значений параметра v, при которых форма (19) сводится к предшествующей.

```
> solve(-(1/2)*v*(-v+sqrt((v-1)*(1+v)))=1/3);
  solve(-(1/2)*v*(-v+sqrt((v-1)*(1+v)))=(49+7*sqrt(46))/6);
  solve(-(1/2)*v*(-v+sqrt((v-1)*(1+v)))=(49-7*sqrt(46))/6);
```

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$-\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{7}{3}\sqrt{3} \tag{20}$$

Решение не определено:

```
> {r1 = -(RootOf((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*_Z*s1)*s1^2-s1+3*RootOf((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*_Z*s1)*s2^2)*
  r2/((2*s1*RootOf((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*_Z*s1)+1)*s2), r2 = r2, s1 = s1, s2 = s2, v = RootOf(
  (s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*_Z*s1)*(s1^2+s2^2)/s2}:
  solve((s1^2+9*s2^2)*_Z^2+1-2*_Z*s1,_Z);
```

$$\frac{3\,\mathrm{I}\,s2+s1}{s1^2+9\,s2^2},\ -\frac{3\,\mathrm{I}\,s2-s1}{s1^2+9\,s2^2} \tag{21}$$

$2_2)$: $q_1 = 0,\ p_2 = 0,\ q_2 = p_1.$

В системе матрица H диагональная :

```
> l2syst(alpha,2*beta,g,p1,0,0,p1, full = true);
```

$$\textit{Initial coefficients: } p_0^2 = [\alpha,\ 2\,\beta,\ g];\ H = \begin{bmatrix} p1 & 0 \\ 0 & p1 \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$$\alpha\,p1,\ 2\,\beta\,p1,\ g\,p1,\ 0$$

$$0,\ \alpha\,p1,\ 2\,\beta\,p1,\ g\,p1 \tag{22}$$

Замена, сводящая систему (22) к $SF_8^{4,2}$:

```
> r11 := -beta*r2:    zamprocl2(1,2*beta,g,p1,0,0,p1, r11,s1,r2,0):
```

$$p1\,r2^2\left(-\beta^2+g\right),\ 0,\ p1\,s1^2,\ 0$$

$$0,\ p1\,r2^2\left(-\beta^2+g\right),\ 0,\ p1\,s1^2 \tag{23}$$

Нормировка системы (23).

```
> s11 := abs(p1)^(-1/2): r21 := abs(p1)^(-1/2)*(g-beta^2)^(-1/2): r11 := -beta*r21:
  zamprocl2(1,2*beta,g,p1,0,0,p1, r11,s11,r21,0):
```

$$\frac{p1}{|p1|},\ 0,\ \frac{p1}{|p1|},\ 0$$

$$0,\ \frac{p1}{|p1|},\ 0,\ \frac{p1}{|p1|} \tag{24}$$

3.6.4. Сведение форм с $D < 0$ из списка 2.4_{II} к предшествующим.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

$NSF_{12}^{6,2<,<}$ $(v > 4^{-\frac{1}{3}},\ v \neq 1,\ 4u > v^{-3})$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,-u*v,u,-u*v^2,1,0,v-v^(-2),1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_{11}^{6,2}$.

```
> solve([M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=s2, u=0, v=v\}, \left\{r1=\frac{r2\,(-2\,s2\,v^2+s1)}{2\,s1\,v-s2}, r2=r2, s1=s1, s2=s2, u=-\frac{(s1\,v+s2)\,(-2\,s2\,v^2+s1)}{s2\,v^2\,(2\,s1\,v-s2)}, v=v\right\}, \left\{r1=r1, r2=r2, s1=2\,RootOf(4\_Z^3-1)^2\,s2, s2=s2, u=\frac{6\,r1\,\left(RootOf(4\_Z^3-1)^2\,r2^2+RootOf(4\_Z^3-1)\,r1^2-r1\,r2\right)}{r2\,\left(4\,r1\,r2\,RootOf(4\_Z^3-1)^2-r2^2\,RootOf(4\_Z^3-1)-r1^2\right)}, v=RootOf(4\_Z^3-1)\right\}, \left\{r1=r1, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^2\,v+v^2-\_Z)\,s2, s2=s2, u=-\left(r1\,(RootOf(\_Z^2\,v+v^2-\_Z)\,r2^2\,v^3+3\,RootOf(\_Z^2\,v+v^2-\_Z)\,r1^2\,v^2+2\,r1\,r2\,v^3+3\,r2^2\,v^2-RootOf(\_Z^2\,v+v^2-\_Z)\,r2^2-2\,r1\,r2)\right)\Big/\left(r2\,v^2\,(2\,RootOf(\_Z^2\,v+v^2-\_Z)\,r1\,r2\,v+3\,r2^2\,v^2-RootOf(\_Z^2\,v+v^2-\_Z)\,r2^2+r1^2\,v-2\,r1\,r2)\right), v=v\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=3\,s2\,RootOf(9\_Z^3-2)^2, s2=s2, u=u, v=RootOf(9\_Z^3-2)\}, \{r1=2\,r2\,RootOf(4\_Z^3-1)^2, r2=r2, s1=-2\,s2\,RootOf(4\_Z^3-1)^2\,(u+2), s2=s2, u=u, v=RootOf(4\_Z^3-1)\} \tag{1}$$

```
> {r1=r2*(-2*v^2*s2+s1)/(2*v*s1-s2),r2=r2,s1=s1,s2=s2,u=-(v*s1+s2)*(-2*v^2*s2+s1)/(s2*v^2*(2*v*s1-s2)
  ),v=v}; r11 := r2*(-2*v^2*s2+s1)/(2*v*s1-s2):
  u1 := -(v*s1+s2)*(-2*s2*v^2+s1)/(s2*v^2*(-s2+2*v*s1)):
  zamproc(0,-u1*v,u1,-u1*v^2,1,0,v-v^(-2),1,r11,s1,r2,s2, lbl = true):
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,(-2\,s2\,v^2+s1)}{2\,s1\,v-s2}, r2=r2, s1=s1, s2=s2, u=-\frac{(s1\,v+s2)\,(-2\,s2\,v^2+s1)}{s2\,v^2\,(2\,s1\,v-s2)}, v=v\right\}$$

$$\frac{(4\,v^3-1)\,(s2^2\,v^2+s1^2\,v-s1\,s2)\,r2^2}{v^2\,(2\,s1\,v-s2)^2}$$

$$\frac{(4\,v^3-1)\,(s1\,v+s2)\,(s2^2\,v^2+s1^2\,v-s1\,s2)\,r2}{v^2\,(2\,s1\,v-s2)^2}$$

$$\frac{s2^2\,v^2+s1^2\,v-s1\,s2}{v^2}$$

$$\frac{(s1\,v+s2)\,(s2^2\,v^2+s1^2\,v-s1\,s2)}{r2\,v^2}$$

$$\frac{(4\,v^3-1)\,(s2^2\,v^2+s1^2\,v-s1\,s2)\,r2^3\,(-2\,s2\,v^2+s1)}{s2\,v\,(2\,s1\,v-s2)^3}$$

$$0$$

$$\frac{(s2^2\,v^2+s1^2\,v-s1\,s2)\,r2\,(-2\,s2\,v^2+s1)}{v\,s2\,(2\,s1\,v-s2)}$$

$$0 \tag{2}$$

Выражаем s_1 через u :

```
> s1=[solve(u = -(v*s1+s2)*(-2*v^2*s2+s1)/(s2*v^2*(2*v*s1-s2)),s1)];
```

$$s1=\left[\frac{1}{2}\,\frac{\left(2\,v^3-2\,u\,v^3-1+\sqrt{4\,v^6-8\,v^6\,u+4\,v^3+4\,u^2\,v^6+8\,u\,v^3+1}\right)s2}{v}, -\frac{1}{2}\,\frac{\left(-2\,v^3+2\,u\,v^3+1+\sqrt{4\,v^6-8\,v^6\,u+4\,v^3+4\,u^2\,v^6+8\,u\,v^3+1}\right)s2}{v}\right] \tag{3}$$

У подкоренного выражения в (3) нет вещественных корней относительно u, следовательно оно положительно.

```
> Ds1=collect(4*v^6-8*v^6*u+4*v^3+4*u^2*v^6+8*u*v^3+1,u,factor);
  u=[solve(4*u^2*v^6-8*v^3*(v-1)*(v^2+v+1)*u+(2*v^3+1)^2,u)];
```

$$Ds1=4\,u^2\,v^6-8\,v^3\,(v-1)\,(v^2+v+1)\,u+(2\,v^3+1)^2$$

$$u=\left[\frac{-1+v^3+\frac{1}{2}\,\sqrt{3-12\,v^3}}{v^3}, \frac{-1+v^3-\frac{1}{2}\,\sqrt{3-12\,v^3}}{v^3}\right] \tag{4}$$

```
> s11:=(1/2)*(2*v^3-2*u*v^3-1+sqrt(4*v^6-8*v^6*u+4*v^3+4*u^2*v^6+8*u*v^3+1))*s2/v:
  r11:=rationalize(r2*(-2*v^2*s2+s11)/(2*v*s11-s2)):
  zamproc(0,-u*v,u,-u*v^2,1,0,v-v^(-2),1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\frac{1}{9}\,\frac{1}{\left(-u\,v^3+v^3+\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-1\right)v^3}\Big(r2^2\big(2\,u^3\,v^9-6\,u^2\,v^9+6\,u\,v^9 +\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^2\,v^6-2\,v^9+6\,u^2\,v^6-2\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^6-12\,v^6\,u +\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^6+6\,v^6+2\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^3+6\,u\,v^3 +10\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^3-6\,v^3-2\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}+2\big)\Big),$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{-u\,v^3+v^3+\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-1}\Big(r2\,s2\big(2\,u^3\,v^6+14\,u^2\,v^6-34\,v^6\,u +u^2\,v^3\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}+18\,v^6+u^2\,v^3-10\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^3+38\,u\,v^3 +9\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^3+9\,v^3+4\,u\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-4\,u\big)\Big),$$

$$\frac{1}{\left(-u\,v^3+v^3+\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-1\right)v^3}\Big(\big(-6\,u^3\,v^9+18\,u^2\,v^9-18\,u\,v^9 +3\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^2\,v^6+6\,v^9-18\,u^2\,v^6-6\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^6+20\,v^6\,u +3\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^6-2\,v^6+6\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^3-14\,u\,v^3 -2\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^3-2\,v^3+2\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-2\big)\,s2^2\Big),$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(-u\,v^3+v^3+\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-1\right)r2}\Big(\big(-8\,u^4\,v^9+32\,u^3\,v^9-48\,u^2\,v^9 +4\,u^3\,v^6\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}+32\,u\,v^9-26\,u^3\,v^6-12\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^2\,v^6-8\,v^9 +50\,u^2\,v^6+12\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^6-22\,v^6\,u-4\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^6 +9\,u^2\,v^3\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-2\,v^6-23\,u^2\,v^3-10\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^3+6\,u\,v^3 +\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^3+v^3+4\,u\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-4\,u\big)\,s2^3\Big)$$

$$-\frac{1}{54}\,\frac{1}{s2\left(-u\,v^3+v^3+\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-1\right)v^3}\Big(r2^3\big(8\,u^4\,v^{12}-32\,u^3\,v^{12}+48\,u^2\,v^{12} +4\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^3\,v^9-32\,u\,v^{12}+26\,u^3\,v^9-12\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^2\,v^9+8\,v^{12} -18\,u^2\,v^9+12\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^9-42\,u\,v^9-4\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^9 +9\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^2\,v^6+34\,v^9+15\,u^2\,v^6+6\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^6+90\,v^6\,u -15\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^6+39\,v^6-16\,u\,v^3-12\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^3+4\,v^3 +4\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-4\big)\Big),\ 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{\left(-u\,v^3+v^3+\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-1\right)v^3}\Big(r2\,s2\big(-18\,u^3\,v^9+34\,u^2\,v^9-14\,u\,v^9 +9\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u^2\,v^6-2\,v^9-49\,u^2\,v^6-10\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^6+10\,v^6\,u +\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^6-9\,v^6+16\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;u\,v^3-32\,u\,v^3 +4\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}\;v^3-12\,v^3+4\sqrt{4\,u^2\,v^6-8\,u\,v^6+4\,v^6+8\,u\,v^3+4\,v^3+1}-4\big)\Big),\ 0$$

Упрощение частей выражений элементов матрицы (5) :

```
> a1kus=collect(-6*v^9*u^2+6*v^9*u-2*v^9+2*u^3*v^9-12*v^6*u+u^2*v^6*x-2*v^6*u*x+v^6*x+6*u^2*v^6+6*
  v^6+2*u*v^3*x+6*u*v^3+10*v^3*x-6*v^3+2-2*x,[x,u],factor);
  b1kus=collect(18*v^6+2*u^3*v^6-34*v^6*u+14*u^2*v^6-10*u*v^3*x+9*v^3*x+v^3*u^2+38*u*v^3+u^2*v^3*x+9*
  v^3-4*u+4*u*x,[x,u],factor);
  c1kus=collect(6*v^9-18*v^9*u+18*v^9*u^2-6*u^3*v^9-2*v^6+3*u^2*v^6*x+3*v^6*x-18*u^2*v^6+20*v^6*u-6*
```

```
v^6*u*x+6*u*v^3*x-14*u*v^3-2*v^3*x-2*v^3-2+2*x,[x,u],factor);
d1kus=collect(-26*u^3*v^6-8*u^4*v^9+32*v^9*u-48*v^9*u^2-22*v^6*u+32*u^3*v^9+50*u^2*v^6+v^3-23*v^3*
u^2+6*u*v^3-2*v^6-8*v^9-4*u+v^3*x-4*v^6*x-10*u*v^3*x+4*u*x+12*v^6*u*x+9*u^2*v^3*x+4*u^3*v^6*x-12*
u^2*v^6*x,[x,u],factor);
a2kus=collect(-32*v^12*u^3+8*u^4*v^12+8*v^12+48*v^12*u^2-32*v^12*u-42*v^9*u+26*u^3*v^9+4*u^3*v^9*
x+34*v^9-18*v^9*u^2-12*v^9*u^2*x-4*v^9*x+12*v^9*u*x+39*v^6+15*u^2*v^6+90*v^6*u-15*v^6*x+9*u^2*v^6*
x+6*v^6*u*x-12*v^3*x-16*u*v^3+4*v^3-4+4*x,[x,u],factor);
c2kus=collect(-2*v^9+34*v^9*u^2-18*u^3*v^9-14*v^9*u+10*v^6*u-9*v^6-10*v^6*u*x+9*u^2*v^6*x+v^6*x-49*
u^2*v^6+16*u*v^3*x-12*v^3+4*v^3*x-32*u*v^3+4*x-4,[x,u],factor);
```

$$a1kus=\left(u^2 v^6-2 v^3 (v-1)(v^2+v+1) u+v^6+10 v^3-2\right) x+2 u^3 v^9-6 v^6 (v-1)(v^2+v+1) u^2+6 v^3 (v-1)^2 (v^2+v+1)^2 u-2 (v-1)^3 (v^2+v+1)^3$$

$$b1kus=\left(v^3 u^2+(-10 v^3+4) u+9 v^3\right) x+2 u^3 v^6+v^3 (1+14 v^3) u^2-2 (v-1)(17 v^3-2)(v^2+v+1) u+9 v^3 (2 v^3+1)$$

$$c1kus=\left(3 u^2 v^6-6 v^3 (v-1)(v^2+v+1) u+3 v^6-2 v^3+2\right) x-6 u^3 v^9+18 v^6 (v-1)(v^2+v+1) u^2-2 v^3 (9 v^6-10 v^3+7) u+2 (v-1)(v^2+v+1)(3 v^6+2 v^3+1)$$

$$d1kus=\left(4 u^3 v^6-3 v^3 (-3+4 v^3) u^2+(-10 v^3+4+12 v^6) u-v^3 (-1+4 v^3)\right) x-8 u^4 v^9+2 v^6 (16 v^3-13) u^3-v^3 (23-50 v^3+48 v^6) u^2+(-22 v^6+6 v^3-4+32 v^9) u-v^3 (2 v^3+1)(-1+4 v^3)$$

$$a2kus=\left(4 u^3 v^9-3 v^6 (-3+4 v^3) u^2+6 v^6 (2 v^3+1) u-(-1+4 v^3)(2+v^3)^2\right) x+8 u^4 v^{12}-2 v^9 (16 v^3-13) u^3+3 v^6 (5-6 v^3+16 v^6) u^2-2 v^3 (v-1)(v^2+v+1)(16 v^6+37 v^3-8) u+(2 v^3+1)(-1+4 v^3)(2+v^3)^2$$

$$c2kus=\left(9 u^2 v^6-2 v^3 (-8+5 v^3) u+(2+v^3)^2\right) x-18 u^3 v^9+v^6 (-49+34 v^3) u^2-2 v^3 (7 v^6+16-5 v^3) u-(2 v^3+1)(2+v^3)^2 \quad \textbf{(6)}$$

Выражение нормировочной замены через элементы матрицы (5) :

```
> unassign('r21','s21');   a11:=a1*r21^2; b11:=b1*r21*s21; c11:=c1*s21^2; d11:=d1*r21^(-1)*s21^3;
  a21:=a2*r21^3*s21^(-1); c21:=c2*r21*s21;
```

$$a11 := a1\, r21^2$$

$$b11 := b1\, r21\, s21$$

$$c11 := c1\, s21^2$$

$$d11 := \frac{d1\, s21^3}{r21}$$

$$a21 := \frac{a2\, r21^3}{s21}$$

$$c21 := c2\, r21\, s21 \quad \textbf{(7)}$$

```
> s21:=(c2*r21)^(-1);   a11:=a1*r21^2; b11:=b1*r21*s21; c11:=c1*s21^2; d11:=d1*r21^(-1)*s21^3; a21:=
  a2*r21^3*s21^(-1); c21:=c2*r21*s21;
```

$$s21 := \frac{1}{c2\, r21}$$

$$a11 := a1\, r21^2$$

$$b11 := \frac{b1}{c2}$$

$$c11 := \frac{c1}{c2^2\, r21^2}$$

$$d11 := \frac{d1}{r21^4\, c2^3}$$

$$a21 := a2\, r21^4\, c2$$

$$c21 := 1 \quad \textbf{(8)}$$

```
> r21:=(a2*c2)^(-1/4); s21:=(c2*r21)^(-1);  a11:=a1*r21^2; b11:=b1*r21*s21; c11:=c1*s21^2; d11:=d1*
  r21^(-1)*s21^3; a21:=a2*r21^3*s21^(-1); c21:=c2*r21*s21;
```

$$r21 := \frac{1}{(a2\, c2)^{1/4}}$$

$$s21 := \frac{(a2\, c2)^{1/4}}{c2}$$

$$a11 := \frac{a1}{\sqrt{a2\, c2}}$$

$$b11 := \frac{b1}{c2}$$

$$c11 := \frac{c1\sqrt{a2\,c2}}{c2^2}$$

$$d11 := \frac{d1\,a2}{c2^2}$$

$$a21 := 1$$

$$c21 := 1 \qquad \textbf{(9)}$$

$NSF_{13}^{6,2<,<}$ $(v < -\frac{4}{3},\ 4u > (u+v+1)^2)$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,0,u*v,u*v^2*(v+1),1,1,0,v*(v+1)^2, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_{11}^{6,2}$.

```
> solve([M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=s2, u=0, v=v\}, \left\{r1=r1, r2=\frac{r1\,(-s2\,v+2\,s1)}{v\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)}, s1=s1, s2=s2, u = \frac{(s2\,v+s1+s2)\,v\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)}{(s2\,v+s1)\,(-s2\,v+2\,s1)}, v=v\right\}, \left\{r1=r1, r2=r2, s1=-\frac{2}{3}\,s2, s2=s2, u=\frac{1}{2}\,\frac{r1}{r2}, v=-\frac{4}{3}\right\}, \left\{r1=r1, r2=r2, s1 = RootOf(\_Z^2-\_Z\,v+v^2+v)\,s2, s2=s2, u = \frac{r1\,(3\,r2^2\,v^3+6\,r2^2\,v^2+3\,RootOf(\_Z^2-\_Z\,v+v^2+v)\,r1^2+2\,RootOf(\_Z^2-\_Z\,v+v^2+v)\,r1\,r2+3\,r2^2\,v+r1^2)}{r2\,(3\,r2^2\,v^3+RootOf(\_Z^2-\_Z\,v+v^2+v)\,r2^2\,v+3\,r2^2\,v^2+3\,RootOf(\_Z^2-\_Z\,v+v^2+v)\,r1^2+2\,r1\,r2\,v)}, v=v\right\}, \left\{r1=r1, r2=0, s1=-\frac{1}{3}\,s2, s2=s2, u=u, v=-\frac{2}{3}\right\}, \left\{r1=r1, r2=0, s1=-\frac{1}{3}\,s2, s2=s2, u=u, v=\frac{1}{3}\,RootOf(\_Z^2+4\,\_Z+1)\right\}, \left\{r1=0, r2=r2, s1=\frac{2}{3}\,s2, s2=s2, u=u, v=-\frac{2}{3}\right\}, \left\{r1=0, r2=r2, s1=\frac{1}{3}\,s2\,RootOf(\_Z^2+4\,\_Z+1)+\frac{1}{3}\,s2, s2=s2, u=u, v=\frac{1}{3}\,RootOf(\_Z^2+4\,\_Z+1)\right\}, \left\{r1=-\frac{2}{3}\,r2, r2=r2, s1=\frac{2}{3}\,\frac{s2\,(6\,u+1)}{3\,u+2}, s2=s2, u=u, v=-\frac{4}{3}\right\}, \left\{r1=-\frac{2}{3}\,r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=-\frac{2}{3}, v=-\frac{4}{3}\right\} \qquad \textbf{(10)}$$

```
> {r1=r1,r2=(2*s1-v*s2)*r1/(v*(-2*s2-2*v*s2+s1)),s1=s1,s2=s2,u=(s1+v*s2+s2)*v*(-2*s2-2*v*s2+s1)/((s1+
  v*s2)*(2*s1-v*s2)),v=v};  r21:=(2*s1-v*s2)*r1/(v*(-2*s2-2*v*s2+s1)):
  u1:=(s1+v*s2+s2)*v*(-2*s2-2*v*s2+s1)/((s1+v*s2)*(2*s1-v*s2)):
  zamproc(u1,0,u1*v,u1*v^2*(v+1),1,1,0,v*(v+1)^2, r1,s1,r21,s2, lbl = true):
```

$$\left\{r1=r1, r2=\frac{r1\,(-s2\,v+2\,s1)}{v\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)}, s1=s1, s2=s2, u=\frac{(s2\,v+s1+s2)\,v\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)}{(s2\,v+s1)\,(-s2\,v+2\,s1)}, v=v\right\}$$

$$\frac{(3\,v+4)\,(3\,v+2)\,(s2^2\,v^2-s1\,s2\,v+s2^2\,v+s1^2)\,(-s2^2\,v^2-s2^2\,v+s1^2)\,r1^2}{v\,(s2\,v+s1)\,(-s2\,v+2\,s1)\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)^2}$$

$$\frac{r1\,(3\,v+4)\,(s2\,v+s1+s2)\,(s2^2\,v^2-s1\,s2\,v+s2^2\,v+s1^2)}{(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)\,(-s2\,v+2\,s1)}$$

$$\frac{(3\,v+2)\,(s2^2\,v^2-s1\,s2\,v+s2^2\,v+s1^2)\,(-s2^2\,v^2-s2^2\,v+s1^2)}{(s2\,v+s1)\,(-s2\,v+2\,s1)}$$

$$\frac{(s2\,v+s1+s2)\,(s2^2\,v^2-s1\,s2\,v+s2^2\,v+s1^2)\,v\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)}{r1\,(-s2\,v+2\,s1)}$$

$$-\frac{r1^3\,(3\,v+4)\,(s2^2\,v^2-s1\,s2\,v+s2^2\,v+s1^2)}{v\,(-2\,s2\,v+s1-2\,s2)^2\,(s2\,v+s1)}$$

$$0$$

$$-\frac{(s2^2\,v^2-s1\,s2\,v+s2^2\,v+s1^2)\,r1}{s2\,v+s1}$$

$$0 \qquad \textbf{(11)}$$

Выражаем s_2 через u :

```
> s2=[solve(u = (s1+v*s2+s2)*v*(-2*s2-2*v*s2+s1)/((s1+v*s2)*(2*s1-v*s2)),s1)];
```

$$s2 = \left[\frac{1}{2}\,\frac{\left(-u\,v-v^2-v+\sqrt{9\,u^2\,v^2-18\,u\,v^3+9\,v^4-30\,u\,v^2+18\,v^3-16\,u\,v+9\,v^2}\right)s2}{2\,u-v}, -\frac{1}{2}\,\frac{\left(u\,v+v^2+\sqrt{9\,u^2\,v^2-18\,u\,v^3+9\,v^4-30\,u\,v^2+18\,v^3-16\,u\,v+9\,v^2}+v\right)s2}{2\,u-v}\right] \qquad \textbf{(12)}$$

У подкоренного выражения в (12) нет вещественных корней относительно u, следовательно оно положительно.

```
> Ds2=collect(9*u^2*v^2-18*u*v^3-30*u*v^2+9*v^4+18*v^3+9*v^2-16*u*v,u,factor);
  u=[solve(9*u^2*v^2-18*u*v^3-30*u*v^2+9*v^4+18*v^3+9*v^2-16*u*v,u)];
  Du=27*v^3+72*v^2+60*v+16;    solve(27*v^3+72*v^2+60*v+16,v);
```

$$Ds2=9\,u^2\,v^2-2\,v\,(9\,v^2+15\,v+8)\,u+9\,v^2\,(v+1)^2$$

$$u=\left[\frac{1}{9}\,\frac{9\,v^2+2\sqrt{27\,v^3+72\,v^2+60\,v+16}+15\,v+8}{v},-\frac{1}{9}\,\frac{-9\,v^2+2\sqrt{27\,v^3+72\,v^2+60\,v+16}-15\,v-8}{v}\right]$$

$$Du=27\,v^3+72\,v^2+60\,v+16$$

$$-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3} \qquad \textbf{(13)}$$

```
> s11:=-(1/2)*(u*v+v^2+v+sqrt(9*u^2*v^2-18*u*v^3-30*u*v^2+9*v^4+18*v^3+9*v^2-16*u*v))*s2/(2*u-v);
  r21:= rationalize((2*s11-v*s2)*r1/(v*(-2*s2-2*v*s2+s11)));
  factor(32*v*u^2-16*u*v^2+72*u^2*v^2-36*u*v^3+36*u^2*v^3-18*u*v^4);
```

$$s11:=-\frac{1}{2}\,\frac{\left(u\,v+v^2+v+\sqrt{9\,u^2\,v^2-18\,u\,v^3-30\,u\,v^2+9\,v^4+18\,v^3+9\,v^2-16\,u\,v}\right)s2}{2\,u-v}$$

$$r21:=\frac{1}{32\,u^2\,v-16\,u\,v^2+72\,u^2\,v^2-36\,u\,v^3+36\,u^2\,v^3-18\,u\,v^4}\Big(r1\,\big(3\,u\,v+v+\sqrt{9\,u^2\,v^2-18\,u\,v^3-30\,u\,v^2+9\,v^4+18\,v^3+9\,v^2-16\,u\,v}\big)\,\big(8\,u-3\,v+9\,u\,v-3\,v^2-\sqrt{9\,u^2\,v^2-18\,u\,v^3-30\,u\,v^2+9\,v^4+18\,v^3+9\,v^2-16\,u\,v}\big)\Big)$$

$$2\,u\,v\,(3\,v+4)\,(2+3\,v)\,(2\,u-v) \qquad \textbf{(14)}$$

```
> #zamproc(u,0,u*v,u*v^2*(v+1),1,1,0,v*(v+1)^2, r1,s11,r21,s2):
```

$NSF_{15}^{6,2\,<,<}$ $(v\ \notin[0,\frac{4}{3}],\ 4u\ <-(v-1)^2$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,u*v,u*v*(v-1),1,1,0,-v*(v-1)^2, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_{11}^{6,2}$.

```
> solve([M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,r2=r2,s1=s1,s2=s2,u=0,v=v\},\left\{r1=r1,r2=-\frac{(s2\,v+2\,s1)\,r1}{v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)},s1=s1,s2=s2,u=-\frac{(-s2\,v+s1+s2)\,v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)}{s2\,(s2\,v+2\,s1)},v=v\right\},\left\{r1=r1,r2=r2,s1=RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,s2,s2=s2,u=\frac{r1\,(-3\,r2^2\,v^3+6\,r2^2\,v^2+3\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,r1^2+2\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,r1\,r2-3\,r2^2\,v+r1^2)}{r2\,(RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,r2^2\,v+3\,r2^2\,v^2+2\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,r1\,r2+2\,r1\,r2\,v-3\,r2^2\,v+r1^2)},v=v\right\},\{r1=0,r2=r2,s1=s1,s2=0,u=u,v=0\},\left\{r1=0,r2=r2,s1=-\frac{6}{7}\,s2,s2=s2,u=u,v=\frac{9}{7}\right\},\left\{r1=RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,r2,r2=r2,s1=-\frac{s2\,v\,(3\,v^2+RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)-5\,v+2)}{3\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,v+3\,v^2-2\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)-3\,v},s2=s2,u=\frac{3\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,v^2+6\,v^3-4\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)\,v-11\,v^2+2\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)+5\,v}{3\,RootOf(\_Z^2+\_Z\,v+v^2-v)+2},v=v\right\},\left\{r1=r1,r2=0,s1=-\frac{1}{3}\,s2,s2=s2,u=u,v=\frac{2}{3}\right\},\left\{r1=r1,r2=0,s1=-\frac{1}{3}\,s2,s2=s2,u=u,v=\frac{1}{3}\,RootOf(\_Z^2-4\,\_Z+1)\right\},\left\{r1=r1,r2=r2,s1=-\frac{2}{3}\,s2,s2=s2,u=-\frac{r1}{r2},v=\frac{4}{3}\right\},\left\{r1=-\frac{2}{3}\,r2,r2=r2,s1=-\frac{1}{6}\,s2\,(-2+9\,u),s2=s2,u=u,v=\frac{4}{3}\right\} \qquad \textbf{(15)}$$

```
> {r1=r1,r2=-(2*s1+v*s2)*r1/(v*(-2*s2+2*v*s2+s1)),s1=s1,s2=s2,u=-(s1+s2-v*s2)*v*(-2*s2+2*v*s2+s1)/(s2*
  (2*s1+v*s2)),v=v};  u1:=-(s1+s2-s2*v)*v*(-2*s2+2*s2*v+s1)/(s2*(2*s1+s2*v)):
  r21:=-(2*s1+s2*v)*r1/(v*(-2*s2+2*s2*v+s1)):
  zamproc(0,u1,u1*v,u1*v*(v-1),1,1,0,-v*(v-1)^2, r1,s1,r21,s2, lbl = true):
```

$$\left\{r1=r1,r2=-\frac{(s2\,v+2\,s1)\,r1}{v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)},s1=s1,s2=s2,u=-\frac{(-s2\,v+s1+s2)\,v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)}{s2\,(s2\,v+2\,s1)},v=v\right\}$$

$$-\frac{(v-1)\,(3\,v-4)\,(s2^2\,v^2+s1\,s2\,v-s2^2\,v+s1^2)\,r1^2}{v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)^2}$$

$$-\frac{(3\,v-4)\,(-s2\,v+s1+s2)\,(s2^2\,v^2+s1\,s2\,v-s2^2\,v+s1^2)\,r1}{(s2\,v+2\,s1)\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)}$$

$$-(v-1)\,(s2^2\,v^2+s1\,s2\,v-s2^2\,v+s1^2)$$

$$-\frac{(-s2\,v+s1+s2)\,v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)\,(s2^2\,v^2+s1\,s2\,v-s2^2\,v+s1^2)}{r1\,(s2\,v+2\,s1)}$$

$$\frac{(3\,v-4)\,(s2^2\,v^2+s1\,s2\,v-s2^2\,v+s1^2)\,r1^3}{v\,(2\,s2\,v+s1-2\,s2)^2\,s2}$$

$$0$$

$$\frac{(s2^2\,v^2+s1\,s2\,v-s2^2\,v+s1^2)\,r1}{s2}$$

$$0 \qquad (16)$$

Выражаем s_1 через u :

```
> solve(u = -(s1+s2-v*s2)*v*(-2*s2+2*v*s2+s1)/(s2*(2*s1+v*s2)),s1);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(-v^2-2\,u+v+\sqrt{9\,v^4-18\,v^3+4\,u^2-4\,u\,v+9\,v^2}\right)s2}{v},\ -\frac{1}{2}\,\frac{\left(v^2+\sqrt{9\,v^4-18\,v^3+4\,u^2-4\,u\,v+9\,v^2}+2\,u-v\right)s2}{v} \qquad (17)$$

У подкоренного выражения в (17) нет вещественных корней относительно u, следовательно оно положительно.

```
> collect(4*u^2-4*u*v+9*v^2-18*v^3+9*v^4,u,factor); solve(4*u^2-4*u*v+9*v^2*(v-1)^2,u);
```

$$4\,u^2-4\,u\,v+9\,v^2\,(v-1)^2$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-9\,v^2+18\,v-8}\right)v,\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-9\,v^2+18\,v-8}\right)v \qquad (18)$$

```
> s11:=(1/2)*(-2*u+v-v^2+sqrt(4*u^2-4*u*v+9*v^2-18*v^3+9*v^4))*s2/v;
  r21:=rationalize(-(2*s11+v*s2)*r1/(v*(-2*s2+2*v*s2+s11))); #factor(-8*u*v^2+6*u*v^3);
```

$$s11 := \frac{1}{2}\,\frac{\left(-v^2-2\,u+v+\sqrt{9\,v^4-18\,v^3+4\,u^2-4\,u\,v+9\,v^2}\right)s2}{v}$$

$$r21 := -\frac{\left(\sqrt{9\,v^4-18\,v^3+4\,u^2-4\,u\,v+9\,v^2}-2\,u+v\right)r1\left(-3\,v^2+\sqrt{9\,v^4-18\,v^3+4\,u^2-4\,u\,v+9\,v^2}+2\,u+3\,v\right)}{6\,u\,v^3-8\,u\,v^2} \qquad (19)$$

```
> #zamproc(0,u,u*v,u*v*(v-1),1,1,0,-v*(v-1)^2, r1,s11,r21,s2):
```

$NSF_{15}^{6,2\,<,<}$ $(v>\frac{1}{4},\ u<0)$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,u,u*v,1,1,v,0, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> solve([M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,s2\,u}{s1},\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=s2,\,u=u,\,v=-\frac{1}{2}\,\frac{2\,s1\,s2\,u+s2^2\,u+s1^2}{s1\,s2}\right\},\left\{r1=r1,\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,u=0,\,v=-\frac{1}{2}\,\frac{r1}{r2}\right\},\left\{r1=r1,\right.$$
$$\left.r2=r2,\,s1=s1,\,s2=s2,\,u=\frac{r1\,(3\,r1\,s1\,s2+r1\,s2^2+r2\,s1^2+r2\,s1\,s2)}{r2\,s2\,(r1\,s2+3\,r2\,s1+2\,r2\,s2)},\,v=-\frac{s1\,(s1+s2)}{s2^2}\right\},\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=-\frac{2}{3}\,s2,\,s2=s2,\,u=u,\right.$$
$$\left.v=\frac{2}{9}\right\},\left\{r1=r1,\,r2=0,\,s1=s1,\,s2=-3\,s1,\,u=u,\,v=\frac{2}{9}\right\},\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=s2,\,u=0,\,v=v\} \qquad (20)$$

```
> {r1=s2*u*r2/s1,r2=r2,s1=s1,s2=s2,u=u,v=-(1/2)*(s1^2+2*u*s1*s2+u*s2^2)/(s1*s2)}; r11:=s2*u*r2/s1:
  v1 := -(1/2)*(s1^2+2*u*s1*s2+u*s2^2)/(s1*s2):   zamproc(0,u,u,u*v1,1,1,v1,0, r11,s1,r2,s2):
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,s2\,u}{s1},\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=s2,\,u=u,\,v=-\frac{1}{2}\,\frac{2\,s1\,s2\,u+s2^2\,u+s1^2}{s1\,s2}\right\}$$

$$0,\ -\frac{1}{2}\,\frac{(2\,s2\,u+s1)\,(-s2^2\,u+s1^2)\,r2}{s1\,s2},\ 0,\ \frac{1}{2}\,\frac{(-s2^2\,u+s1^2)\,(2\,s1+s2)}{r2}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(-s2^2\,u+s1^2)\,(2\,s2\,u+s1)\,u\,r2^3}{s1^3\,s2},\ 0,\ \frac{1}{2}\,\frac{(-s2^2\,u+s1^2)\,(2\,s1+s2)\,r2\,u}{s1^2},\ 0 \qquad (21)$$

Выражаем s_1 через v :

```
> solve(v = -(1/2)*(s1^2+2*u*s1*s2+u*s2^2)/(s1*s2),s1);
```

$$\left(-u-v+\sqrt{u^2+2\,u\,v+v^2-u}\right)s2,\ \left(-u-v-\sqrt{u^2+2\,u\,v+v^2-u}\right)s2 \qquad (22)$$

Подкоренное выражение в (22) положительно.

```
> s11 := (-u-v-sqrt(u^2+2*u*v+v^2-u))*s2; r11 := rationalize(s2*u*r2/s11);
```

$$s11 := \left(-u-v-\sqrt{u^2+2\,u\,v+v^2-u}\right)s2$$

$$r11 := r2\left(-u-v+\sqrt{u^2+2\,u\,v+v^2-u}\right) \qquad (23)$$

```
> #zamproc(0,u,u,u*v,1,1,v,0, r11,s11,r2,s2):
```

3.6.5. Сведение форм с D < 0 из списка 2.4_1 до $NSF^{6,2<,<}_{11,+1}$ к предшествующим.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

В разделе 3.6.1 показано, что из $NSF^{5,2<}_{22}$ нет замен в $SF^{4,2}_{34}$.

$NSF^{6,2<,<}_{6}$ (0 < v < 1). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,u*(1/v^2-v),0,u/v^3,1,0,1/v-v^2,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF^{4,2}_{34}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {r1,s2,r2,u,v});
```

$$\{r1=r2, r2=r2, s2=-s1, u=-1, v=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\}, \{r1=-r2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)-r2, r2=r2, s2=-s1\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1), u=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1, v=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\}, \{r1=r2, r2=r2, s2=-s1, u=-1, v=1\}, \{r1=r2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1), r2=r2, s2=s1\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+s1, u=-RootOf(\_Z^2+\_Z+1), v=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\}, \{r1=2\,r2\,RootOf(4\,\_Z^3-1), r2=r2, s2=-2\,RootOf(4\,\_Z^3-1)^2\,s1, u=-RootOf(4\,\_Z^3-1), v=RootOf(4\,\_Z^3-1)\}, \{r1=r2\,(RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1), r2=r2, s2=s1\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1), u=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1, v=1\}, \{r1=-r2, r2=r2, s2=s1, u=-1, v=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\}, \Big\{r1=\frac{r2\,(2\,RootOf(\_Z^2-v)\,v^4-v^3-5\,RootOf(\_Z^2-v)\,v-2)}{-2\,v^5+RootOf(\_Z^2-v)\,v^3+5\,v^2+2\,RootOf(\_Z^2-v)}, r2=r2, s2=RootOf(\_Z^2-v)\,s1, u=\frac{v^2\,(RootOf(\_Z^2-v)\,v+1)\,(2\,RootOf(\_Z^2-v)\,v^4-v^3-5\,RootOf(\_Z^2-v)\,v-2)}{(-2\,v^5+RootOf(\_Z^2-v)\,v^3+5\,v^2+2\,RootOf(\_Z^2-v))\,(v^2+RootOf(\_Z^2-v))}, v=v\Big\}, \{r1=r2\,(RootOf(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L14)+1), r2=r2, s2=RootOf(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L14)\,s1, u=RootOf(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L14)+1, v=RootOf(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L12)\}, \{r1=r2\,(RootOf(\_Z^2-\_Z+1)-1), r2=r2, s2=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,s1, u=-RootOf(\_Z^2-\_Z+1)+1, v=1\}, \Big\{r1=-\frac{1}{2}\,r2\,RootOf(\_Z^3-4), r2=r2, s2=\frac{1}{2}\,RootOf(\_Z^3-4)^2\,s1, u=-RootOf(\_Z^3-4), v=RootOf(\_Z^3-4)\Big\} \tag{1}$$

Рассмотрение возможных решений.

а) :

```
> {r1=r2*(2*RootOf(_Z^2-v)*v^4-5*RootOf(_Z^2-v)*v-2-v^3)/(RootOf(_Z^2-v)*v^3+2*RootOf(_Z^2-v)-2*v^5+5*
  v^2),r2=r2,s2=RootOf(_Z^2-v)*s1,u=v^2*(RootOf(_Z^2-v)*v+1)*(2*RootOf(_Z^2-v)*v^4-5*RootOf(_Z^2-v)*
  v-2-v^3)/((RootOf(_Z^2-v)*v^3+2*RootOf(_Z^2-v)-2*v^5+5*v^2)*(RootOf(_Z^2-v)+v^2)),v=v};
```

$$\Big\{r1=\frac{r2\,(2\,RootOf(\_Z^2-v)\,v^4-5\,RootOf(\_Z^2-v)\,v-2-v^3)}{RootOf(\_Z^2-v)\,v^3+2\,RootOf(\_Z^2-v)-2\,v^5+5\,v^2}, r2=r2, s2=RootOf(\_Z^2-v)\,s1, u=\frac{v^2\,(RootOf(\_Z^2-v)\,v+1)\,(2\,RootOf(\_Z^2-v)\,v^4-5\,RootOf(\_Z^2-v)\,v-2-v^3)}{(RootOf(\_Z^2-v)\,v^3+2\,RootOf(\_Z^2-v)-2\,v^5+5\,v^2)\,(RootOf(\_Z^2-v)+v^2)}, v=v\Big\} \tag{2}$$

```
> kk1:=sqrt(v): r11:=r2*evala((2*kk1*v^4-5*kk1*v-v^3-2)/(kk1*v^3+2*kk1-2*v^5+5*v^2)): s21:=kk1*s1:
  u1 := evala(v^2*(kk1*v+1)*(2*kk1*v^4-5*kk1*v-v^3-2)/((kk1*v^3+2*kk1-2*v^5+5*v^2)*(kk1+v^2))):
  zamproc(u1,u1*(1/v^2-v),0,u1/v^3,1,0,1/v-v^2,1,r11,s1,r2,s21):
```

$$0,\ \frac{r2\,s1\,(v^3+3\,v^{3/2}+2)}{v},\ 0,\ \frac{s1^3\,(v^{3/2}-v^3+2)}{r2}$$
$$\frac{r2^3\,(v^3+v^{3/2}-2)}{v^2\,s1},\ 0,\ \frac{r2\,s1\,(-v^3+3\,v^{3/2}-2)}{v},\ 0 \tag{3}$$

Нормировка системы (3).

```
> s11 := r2^3*(v^(3/2)-2+v^3)/v^2:  s21 := kk1*s11:
  zamproc(u1,u1*(1/v^2-v),0,u1/v^3,1,0,1/v-v^2,1,r11,s11,r2,s21):
```

$$0,\ \frac{\left(v^{7/2}+3\,v^2+2\,\sqrt{v}\right)(v^3+v^{3/2}-2)\,r2^4}{v^{7/2}},\ 0,\ \frac{(v^{3/2}-v^3+2)\,(v^3+v^{3/2}-2)^3\,r2^8}{v^6}$$
$$1,\ 0,\ -\frac{\left(v^{7/2}-3\,v^2+2\,\sqrt{v}\right)(v^3+v^{3/2}-2)\,r2^4}{v^{7/2}},\ 0 \tag{4}$$

```
> # -(2*sqrt(v)+v^(7/2)-3*v^2)*(v^(3/2)-2+v^3)*r2^4/v^(7/2)>0 при 0<v<1
> r21 := v^(7/8)/((2*sqrt(v)+v^(7/2)-3*v^2)^(1/4)*(2-v^(3/2)-v^3)^(1/4)): r11 := -r21/sqrt(v):
  s11 := r21^3*(v^(3/2)-2+v^3)/v^2: s21 := kk1*s11:
  zamproc(u1,u1*(1/v^2-v),0,u1/v^3,1,0,1/v-v^2,1,r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{(v^3+3\,v^{3/2}+2)\,\sqrt{v}}{v^{7/2}-3\,v^2+2\,\sqrt{v}},\ 0,\ -\frac{(v^{3/2}-v^3+2)\,(v^3+v^{3/2}-2)\,\left(v^{7/2}-3\,v^2+2\,\sqrt{v}\right)}{(-v^3+3\,v^{3/2}-2)^3\,\sqrt{v}}$$
$$-\frac{v^{7/2}-3\,v^2+2\,\sqrt{v}}{\sqrt{v}\,(-v^3+3\,v^{3/2}-2)},\ 0,\ -\frac{\sqrt{v}\,(-v^3+3\,v^{3/2}-2)}{v^{7/2}-3\,v^2+2\,\sqrt{v}},\ 0 \tag{5}$$

Упрощение системы (5).

```
> a2=simplify(-(2*sqrt(v)+v^(7/2)-3*v^2)/(sqrt(v)*(-2-v^3+3*v^(3/2)))-1)+1;
  c2=simplify(-sqrt(v)*(-2-v^3+3*v^(3/2))/(2*sqrt(v)+v^(7/2)-3*v^2)-1)+1;
  b1=evala(-(3*v^(3/2)+2+v^3)*sqrt(v)/(2*sqrt(v)+v^(7/2)-3*v^2));
  d1=evala(-(2-v^3+v^(3/2))*(v^(3/2)-2+v^3)*(2*sqrt(v)+v^(7/2)-3*v^2)/((-2-v^3+3*v^(3/2))^3*sqrt(v)));
```

```
# r1=simplify((-v^(3/8)/(v^(1/8)*(2+v^3-3*v^(3/2))^(1/4)*(-v^(3/2)+2-v^3)^(1/4))));
# s1=(-v^(5/8)*(-v^(3/2)+2-v^3)^(1/4)/(v^(3/8)*(2+v^3-3*v^(3/2))^(3/4)));
# r2=v^(7/8)/(v^(1/8)*(2+v^3-3*v^(3/2))^(1/4)*(-v^(3/2)+2-v^3)^(1/4));
# s2=-v^(9/8)*(-v^(3/2)+2-v^3)^(1/4)/(v^(3/8)*(2+v^3-3*v^(3/2))^(3/4));
```

$$a2=1$$

$$c2=1$$

$$b1=-\frac{v^6+6v^{9/2}+13v^3+12v^{3/2}+4}{v^6-5v^3+4}$$

$$d1=-\frac{v^6+6v^{9/2}+13v^3+12v^{3/2}+4}{v^6-5v^3+4} \qquad \textbf{(6)}$$

b) : частный случай a)

```
> {r1=2*r2*RootOf(4*_Z^3-1),r2=r2,s2=-2*RootOf(4*_Z^3-1)^2*s1,u=-RootOf(4*_Z^3-1),v=RootOf(4*_Z^3-1)};
  r11 := 2*r2*2^(-2/3): s21 := -2^(-1/3)*s1: u1 := -2^(-2/3): v1 := 2^(-2/3):
  zamproc(u1,u1*(1/v1^2-v1),0,u1/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s1,r2,s21):
```

$$\{r1=2\,r2\,RootOf(4\_Z^3-1),\ r2=r2,\ s2=-2\,RootOf(4\_Z^3-1)^2\,s1,\ u=-RootOf(4\_Z^3-1),\ v=RootOf(4\_Z^3-1)\}$$

$$0,\ \frac{3}{4}\,2^{2/3}\,r2\,s1,\ 0,\ \frac{5}{4}\,\frac{s1^3}{r2}$$

$$-\frac{9}{2}\,\frac{r2^3\,2^{1/3}}{s1},\ 0,\ -\frac{15}{4}\,2^{2/3}\,r2\,s1,\ 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Поиск замен к $SF^{5,2}_{22}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {r1,s1,u,v});
```

$$\Big\{r1=RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)\,r2,\ s1 \qquad \textbf{(8)}$$

$$=\Big(s2\,\big(2\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)^2 v^5$$

$$-2\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)^2 v^2$$

$$-RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)\,v^3$$

$$-2\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)$$

$$-3v\big)\Big)\Big/\Big(RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5$$

$$-12v^2)\_Z^3\big)\,v\,\big(3\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5$$

$$-12v^2)\_Z^3\big)\,v^2-2v^3+2\big)\,\big(RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8$$

$$-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)+v\big)\Big),\ u=\Big(\big(2\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3$$

$$-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)\,v^3-2\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6-33v^3$$

$$-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)-3v\big)\,v\Big)\Big/\Big(\big(3\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9-21v^6$$

$$-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)\,v^2-2v^3+2\big)\,RootOf\big((9v^7-9v^4)\_Z^4+9v^5-9v^2+(6v^7-21v^4-12v)\_Z+(4v^9$$

$$-21v^6-33v^3-4)\_Z^2+(6v^8-21v^5-12v^2)\_Z^3\big)\Big),\ v=v\Big\},\ \Big\{r1=-2\,r2\,RootOf(4\_Z^3-1),\ s1=2\,RootOf\big(RootOf(4\_Z^3-1)^2$$

$$-3\,RootOf(4\_Z^3-1)\,\_Z+\_Z^2\big)\,s2,\ u=-RootOf\big(RootOf(4\_Z^3-1)^2-3\,RootOf(4\_Z^3-1)\,\_Z+\_Z^2\big),\ v=RootOf(4\_Z^3-1)\Big\},\ \{r1$$

$$=-r2,\ s1=s1,\ u=-1,\ v=1\},\ \Big\{r1=-r2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1),\ s1=s1,\ u=\frac{s2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+s1}{s1\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+s1-s2},\ v=RootOf(\_Z^2+\_Z$$

$$+1)\Big\},\ \{r1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,r2,\ s1=s1,\ u=RootOf(\_Z^2-\_Z+1),\ v=1\},\ \{r1=-r2,\ s1=s1,\ u=-1,\ v=RootOf(\_Z^2+\_Z$$

$$+1)\},\ \Big\{r1=r2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+r2,\ s1=s1,\ u=\frac{s2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)-s1+s2}{s1\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+s2},\ v=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\Big\},\ \Big\{r1$$

$$=\frac{1}{2}\,r2\,RootOf(\_Z^3-4),\ s1=s1,\ u=-\frac{RootOf(\_Z^3-4)^2\,s1^2+s2^2\,RootOf(\_Z^3-4)-4\,s1\,s2}{RootOf(\_Z^3-4)^2\,s1\,s2-s1^2\,RootOf(\_Z^3-4)-s2^2},\ v=RootOf(\_Z^3-4)\Big\}$$

Рассмотрение возможных решений.

a) : первое решение не поддается проверке из-за сложности формул.

b) :

```
> {r1=-2*r2*RootOf(4*_Z^3-1),r2=r2,s1=-2*RootOf(RootOf(4*_Z^3-1)^2+3*RootOf(4*_Z^3-1)*_Z+_Z^2)*s2,s2=
  s2,u=RootOf(RootOf(4*_Z^3-1)^2+3*RootOf(4*_Z^3-1)*_Z+_Z^2),v=RootOf(4*_Z^3-1)};
  solve(_Z^2 + 3*2^(-2/3)*_Z + 2^(-4/3));
```

$$\{r1 = -2\,r2\,RootOf(4\_Z^3-1),\, r2=r2,\, s1=-2\,RootOf\big(RootOf(4\_Z^3-1)^2+3\,RootOf(4\_Z^3-1)\,\_Z+\_Z^2\big)\,s2,\, s2=s2,\, u = RootOf\big(RootOf(4\_Z^3-1)^2+3\,RootOf(4\_Z^3-1)\,\_Z+\_Z^2\big),\, v=RootOf(4\_Z^3-1)\}$$

$$-\frac{3}{4}\,2^{1/3}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\,2^{1/3},\, -\frac{3}{4}\,2^{1/3}-\frac{1}{4}\sqrt{5}\,2^{1/3} \quad \textbf{(9)}$$

```
> r11 := -2*r2*2^(-2/3): kk1 := -(3/4)*2^(1/3)-(1/4)*sqrt(5)*2^(1/3):
  s11 := -2*kk1*s2: u1 := kk1: v1 := 2^(-2/3): evalf((u1-v1)^2 + 4*u1*v1^(-2)):
  zamproc(u1,u1*(1/v1^2-v1),0,u1/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s11,r2,s2):
```

$$0,\, \frac{15}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)r2\,s2,\, -\frac{15}{2}\left(\sqrt{5}+2\right)s2^2,\, \frac{15}{4}\,\frac{\left(7+3\sqrt{5}\right)s2^3}{r2}$$

$$-\frac{5}{2}\,\frac{r2^3}{s2},\, 0,\, 0,\, -\frac{5}{2}\left(\sqrt{5}+2\right)s2^2 \quad \textbf{(10)}$$

Нормировка системы (10).

```
> s21 := 1/sqrt(5/2*(sqrt(5)+2)): s11 := -2*kk1*s21:
  zamproc(u1,u1*(1/v1^2-v1),0,u1/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s11,r2,s21):
```

$$0,\, \frac{3}{4}\sqrt{20+10\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)r2,\, -3,\, -\frac{3}{10}\,\frac{\sqrt{20+10\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-3\right)}{r2}$$

$$-\frac{5}{4}\sqrt{20+10\sqrt{5}}\,r2^3,\, 0,\, 0,\, -1 \quad \textbf{(11)}$$

```
> r21 := ((5/4)*sqrt(20+10*sqrt(5)))^(-1/3): r11 := -2*r21*2^(-2/3):
  zamproc(u1,u1*(1/v1^2-v1),0,u1/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\, 3,\, -3,\, 3$$

$$-1,\, 0,\, 0,\, -1 \quad \textbf{(12)}$$

```
> # r1=-radnormal(((2/25)*5^(2/3)*(20+10*sqrt(5))^(5/6)-(1/5)*5^(1/6)*(20+10*sqrt(5))^(5/6))^6)^(1/6);
  # s1=radnormal((-2^(1/3)*sqrt(20+10*sqrt(5))/10+2^(1/3)*sqrt(20+10*sqrt(5))*sqrt(5)/10)^2)^(1/2);
  # r2=radnormal(((3/10)*sqrt(20+10*sqrt(5))-(1/10)*sqrt(20+10*sqrt(5))*sqrt(5))^2)^(1/2);
  # s2=radnormal((-(2/5)*sqrt(20+10*sqrt(5))+(1/5)*sqrt(20+10*sqrt(5))*sqrt(5))^2)^(1/2);
> r11 := -2*r2*2^(-2/3): kk2 := -(3/4)*2^(1/3)+(1/4)*sqrt(5)*2^(1/3):
  s12 := -2*kk2*s2: u2 := kk2: v1 := 2^(-2/3): evalf((u2-v1)^2 + 4*u2*v1^(-2)):
  zamproc(u2,u2*(1/v1^2-v1),0,u2/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s12,r2,s2):
```

$$0,\, -\frac{15}{4}\left(\sqrt{5}-3\right)r2\,s2,\, \frac{15}{2}\left(-2+\sqrt{5}\right)s2^2,\, -\frac{15}{4}\,\frac{\left(-7+3\sqrt{5}\right)s2^3}{r2}$$

$$-\frac{5}{2}\,\frac{r2^3}{s2},\, 0,\, 0,\, \frac{5}{2}\left(-2+\sqrt{5}\right)s2^2 \quad \textbf{(13)}$$

Нормировка системы (13).

```
> s22 := 1/sqrt(5/2*(-2+sqrt(5))): s12 := -2*kk2*s22:
  zamproc(u2,u2*(1/v1^2-v1),0,u2/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s12,r2,s22):
```

$$0,\, \frac{3}{4}\sqrt{-20+10\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+1\right)r2,\, 3,\, \frac{3}{10}\,\frac{\sqrt{-20+10\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)}{r2}$$

$$-\frac{5}{4}\sqrt{-20+10\sqrt{5}}\,r2^3,\, 0,\, 0,\, 1 \quad \textbf{(14)}$$

```
> r22 := -((5/4)*sqrt(-20+10*sqrt(5)))^(-1/3): r11 := -2*r22*2^(-2/3):
  zamproc(u2,u2*(1/v1^2-v1),0,u2/v1^3,1,0,1/v1-v1^2,1,r11,s12,r22,s22):
```

$$0,\, -3,\, 3,\, -3$$

$$1,\, 0,\, 0,\, 1 \quad \textbf{(15)}$$

```
> # r1=radnormal(((2/25)*5^(2/3)*(-20+10*sqrt(5))^(5/6)+5^(1/6)*(-20+10*sqrt(5))^(5/6)/5)^6)^(1/6);
  # s1=radnormal((2^(1/3)*sqrt(-20+10*sqrt(5))/10+2^(1/3)*sqrt(-20+10*sqrt(5))*sqrt(5)/10)^2)^(1/2);
  # r2=-radnormal((-(3/10)*sqrt(-20+10*sqrt(5))-(1/10)*sqrt(-20+10*sqrt(5))*sqrt(5))^2)^(1/2);
  # s2=radnormal(((2/5)*sqrt(-20+10*sqrt(5))+(1/5)*sqrt(-20+10*sqrt(5))*sqrt(5))^2)^(1/2);
```

$NSF_7^{6,2\,<,<}$ (v < 0). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,-v,u+v,1,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> simplify([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {r1,s1,u,v})]);
```

$$\Big[\{r1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,r2,\, s1=-s2\,(RootOf(\_Z^2-\_Z+1)-1),\, u=2,\, v=-3\},\, \{r1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,r2,\, s1=-s2\,RootOf(\_Z^2-\_Z+1),\, u=RootOf(\_Z^2-\_Z+1),\, v=0\},\, \{r1=RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\,r2,\, s1=-s2\,RootOf(\_Z^2+\_Z+1),\, u=-RootOf(\_Z^2+\_Z+1),\, v=0\},\, \{r1=-r2,\, s1=s2,\, u=-1,\, v=0\},\, \left\{r1=r1,\, s1=\frac{s2\,(r1-2\,r2)}{2\,r1-r2},\, u=-1,\, v=\frac{3\,(r1^2-r2^2)}{r2\,(2\,r1-r2)}\right\}\Big] \quad \textbf{(16)}$$

Рассмотрение возможных решений.

a) :

```
> {r1 = r1, s1 = s2*(r1-2*r2)/(2*r1-r2), u = -1, v = (3*(r1^2-r2^2))/(r2*(2*r1-r2))};
  solve(v = (3*(r1^2-r2^2))/(r2*(2*r1-r2)), r1);
```

$$\left\{r1=r1,\, s1=\frac{s2\,(r1-2\,r2)}{2\,r1-r2},\, u=-1,\, v=\frac{3\,(r1^2-r2^2)}{r2\,(2\,r1-r2)}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{3}\,v+\frac{1}{3}\,\sqrt{v^2-3\,v+9}\right)r2,\, \left(\frac{1}{3}\,v-\frac{1}{3}\,\sqrt{v^2-3\,v+9}\right)r2 \qquad \mathbf{(17)}$$

Рассмотрение первого значения r_1 из (17) :

```
> r11:=((1/3)*v+(1/3)*sqrt(v^2-3*v+9))*r2: s11:=rationalize(simplify(-(-s2*r11+2*r2*s2)/(2*r11-r2))):
  s11 := factor(simplify(expand((v+sqrt(v^2-3*v+9)-6)*(-2*v+3+2*sqrt(v^2-3*v+9))*s2/27))):
  zamproc(-1,v,-v,-1+v,1,0,0,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$0,\, \frac{1}{3}\,r2\,s2\,\sqrt{v^2-3\,v+9}\,\left(\sqrt{v^2-3\,v+9}+v-3\right),\, 0,\, \frac{1}{27}\,\frac{s2^3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}\,\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+3\,v-9\right)}{r2}$$

$$\frac{1}{27}\,\frac{r2^3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}\,\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-3\,v+9\right)}{s2},\, 0,\, \frac{1}{3}\,r2\,s2\,\sqrt{v^2-3\,v+9}\,\left(\sqrt{v^2-3\,v+9}-v+3\right),\, 0 \qquad \mathbf{(18)}$$

Нормировка системы (18).

```
> r21 := 3*s2^(1/3)/((v^2-3*v+9)^(1/6)*(4*v^2-3*v+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*sqrt(v^2-3*v+9)+9)^(1/3)):
  r11 := ((1/3)*v+(1/3)*sqrt(v^2-3*v+9))*r21:
  zamproc(-1,v,-v,-1+v,1,0,0,1, r11,s11,r21,s2, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{s2^{4/3}\,(v^2-3\,v+9)^{1/3}\,\left(\sqrt{v^2-3\,v+9}+v-3\right)}{\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-3\,v+9\right)^{1/3}}$$

$$0$$

$$\frac{1}{81}\,s2^{8/3}\,(v^2-3\,v+9)^{2/3}\,\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+3\,v-9\right)\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-3\,v+9\right)^{1/3}$$

$$1$$

$$0$$

$$\frac{(v^2-3\,v+9)^{1/3}\,\left(\sqrt{v^2-3\,v+9}-v+3\right)s2^{4/3}}{\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-3\,v+9\right)^{1/3}}$$

$$0 \qquad \mathbf{(19)}$$

Положительность выражения в знаменателе элемента c_2 в (19) :

```
> simplify((4*v^2-3*v+9)^2 - ((4*v+3)*sqrt(v^2-3*v+9))^2);
```

$$-243\,v \qquad \mathbf{(20)}$$

```
> s21 := (4*v^2-3*v+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*sqrt(v^2-3*v+9)+9)^(1/4)
        /((v^2-3*v+9)^(1/4)*(-v+3+sqrt(v^2-3*v+9))^(3/4)):
  r21 := 3*s21^(1/3)/((v^2-3*v+9)^(1/6)*(4*v^2-3*v+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*sqrt(v^2-3*v+9)+9)^(1/3)):
  r21 := 3*(4*v^2-3*v+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*sqrt(v^2-3*v+9)+9)^(-1/4)*(v^2-3*v+9)^(-1/4)
        *(-v+sqrt(v^2-3*v+9)+3)^(-1/4):     r11 := ((1/3)*v+(1/3)*sqrt(v^2-3*v+9))*r21:
  s11 := -(1/27)*s21*(v+sqrt(v^2-3*v+9)-6)*(2*v-3-2*sqrt(v^2-3*v+9)):
  zamproc(-1,v,-v,-1+v,1,0,0,1,r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{\sqrt{v^2-3\,v+9}+v-3}{\sqrt{v^2-3\,v+9}-v+3}$$

$$0$$

$$\frac{1}{81}\,\frac{\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+3\,v-9\right)\left(4\,v\,\sqrt{v^2-3\,v+9}+4\,v^2+3\,\sqrt{v^2-3\,v+9}-3\,v+9\right)}{\left(\sqrt{v^2-3\,v+9}-v+3\right)^2}$$

$$1$$

$$0$$

$$1$$

$$0 \qquad \mathbf{(21)}$$

```
> u = rationalize((sqrt(v^2-3*v+9)+v-3)/(-v+sqrt(v^2-3*v+9)+3));
```

$$u=\frac{1}{3}\,\frac{\left(\sqrt{v^2-3\,v+9}+v-3\right)^2}{v} \qquad \mathbf{(22)}$$

Второе значение r_1 из (17) :

```
> r11 := (v-sqrt(v^2-3*v+9))/3*r2: s11 := rationalize(simplify(-(-s2*r11+2*r2*s2)/(2*r11-r2))):
  s11 := factor(simplify(expand(-(1/27)*s2*(v-sqrt(v^2-3*v+9)-6)*(2*v+2*sqrt(v^2-3*v+9)-3)))):
```

```
zamproc(-1,v,-v,-1+v,1,0,0,1,r11,s11,r2,s2):
```

$$0,\ \frac{1}{3}\ r2\, s2 \sqrt{v^2-3v+9}\left(\sqrt{v^2-3v+9}-v+3\right),\ 0,\ \frac{1}{27}\ \frac{s2^3\sqrt{v^2-3v+9}\left(4v\sqrt{v^2-3v+9}+4v^2+3\sqrt{v^2-3v+9}-3v+9\right)}{r2}$$

$$\frac{1}{27}\ \frac{r2^3\sqrt{v^2-3v+9}\left(4v\sqrt{v^2-3v+9}-4v^2+3\sqrt{v^2-3v+9}+3v-9\right)}{s2},\ 0,\ \frac{1}{3}\ r2\, s2\sqrt{v^2-3v+9}\left(\sqrt{v^2-3v+9}+v-3\right),\ 0 \qquad (23)$$

Нормировка системы (23).

```
> s21 := r2^3*sqrt(v^2-3*v+9)*(-4*v^2+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*v-9+3*sqrt(v^2-3*v+9))/27:
  s11 := ((1/3)*v+(1/3)*sqrt(v^2-3*v+9))*s21:
  zamproc(-1,v,-v,-1+v,1,0,0,1,r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{1}{81}\left(v^2-3v+9\right)\left(\sqrt{v^2-3v+9}-v+3\right)\left(4v\sqrt{v^2-3v+9}-4v^2+3\sqrt{v^2-3v+9}+3v-9\right)r2^4$$

$$0$$

$$-\frac{1}{2187}\ v\left(v^2-3v+9\right)^2\left(32v^3\sqrt{v^2-3v+9}-32v^4+48v^3+54v\sqrt{v^2-3v+9}-162v^2+54\sqrt{v^2-3v+9}-135v-162\right)r2^8$$

$$1$$

$$0$$

$$\frac{1}{81}\left(v^2-3v+9\right)\left(\sqrt{v^2-3v+9}+v-3\right)\left(4v\sqrt{v^2-3v+9}-4v^2+3\sqrt{v^2-3v+9}+3v-9\right)r2^4$$

$$0 \qquad (24)$$

```
> r21 := 3*(-(-4*v^2+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*v-9+3*sqrt(v^2-3*v+9)))^(-1/4)*(v^2-3*v+9)^(-1/4)
         *(-sqrt(v^2-3*v+9)-v+3)^(-1/4):        r11 := ((1/3)*v-(1/3)*sqrt(v^2-3*v+9))*r21:
  s21 := r21^3*sqrt(v^2-3*v+9)*(-4*v^2+4*v*sqrt(v^2-3*v+9)+3*v-9+3*sqrt(v^2-3*v+9))/27:
  s11 := ((1/3)*v+(1/3)*sqrt(v^2-3*v+9))*s21:
  zamproc(-1,v,-v,-1+v,1,0,0,1,r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{\sqrt{v^2-3v+9}-v+3}{\sqrt{v^2-3v+9}+v-3}$$

$$0$$

$$\frac{1}{81}\ \frac{\left(4v\sqrt{v^2-3v+9}-4v^2+3\sqrt{v^2-3v+9}+3v-9\right)\left(4v\sqrt{v^2-3v+9}+4v^2+3\sqrt{v^2-3v+9}-3v+9\right)}{\left(\sqrt{v^2-3v+9}+v-3\right)^2}$$

$$1$$

$$0$$

$$1$$

$$0 \qquad (25)$$

```
> u = rationalize((-v+3+sqrt(v^2-3*v+9))/(v-3+sqrt(v^2-3*v+9)));
```

$$u=\frac{1}{3}\ \frac{\left(v-3-\sqrt{v^2-3v+9}\right)^2}{v} \qquad (26)$$

Поиск замен к $SF_{22}^{5,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=-1,\ v=0\},\ \left\{r1=\frac{(v-3)\,r2}{v+3},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=\frac{6\,s1}{v+3},\ u=-\frac{1}{3}\ v-1,\ v=v\right\},\ \left\{r1=\frac{1}{3}\ v\,r2-r2,\ r2=r2,\ s1=\frac{s2\,(-6+v)}{v-3},\ s2=s2,\ u=-\frac{2v-3}{v-3},\ v=v\right\},\ \{r1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\ r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=RootOf(\_Z^2-\_Z+1),\ v=0\},\ \{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0,\ v=v\} \qquad (27)$$

Рассмотрение возможных решений.

а) :

```
> {r1 = r2*(v-3)/(3+v), r2 = r2, s1 = s1, s2 = 6*s1/(3+v), u = -1-(1/3)*v, v = v};
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,(v-3)}{3+v},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=\frac{6\,s1}{3+v},\ u=-1-\frac{1}{3}\ v,\ v=v\right\} \qquad (28)$$

Выразим v через u в (28).

```
> v1 := -3*(u+1):
  {r1 = simplify(r2*(v1-3)/(3+v1)), r2 = r2, s1 = s1, s2 = 6*s1/(3+v1), v = v1, u = u};
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,(u+2)}{u},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=-\frac{2\,s1}{u},\ u=u,\ v=-3u-3\right\} \qquad (29)$$

```
> solve(4*v1 + (u+1)^2 < 0, u); r11 := r2*(u+2)/u: s21 := -2*s1/u:
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1,r11,s1,r2,s21):
```

$$RealRange(Open(-1),\ Open(11))$$

$$0,\ \frac{3\,(u^2+2\,u+4)\,s1\,r2}{u^2},\ \frac{3\,(u^2+2\,u+4)\,s1^2}{u^2},\ \frac{3\,(u^2+2\,u+4)\,s1^3}{u^2\,r2}$$

$$-\frac{(u^2+2\,u+4)\,(u+1)\,r2^3}{u^2\,s1},\ 0,\ 0,\ \frac{(u+1)\,(u^2+2\,u+4)\,s1^2}{u^2} \qquad \textbf{(30)}$$

Нормировка системы (30).

```
> s11 := u/((u+1)^(1/2)*(2*u+4+u^2)^(1/2)): s21 := -2*s11/u:
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1,r11,s11,r2,s21):
```

$$0,\ \frac{3\,r2\,\sqrt{u^2+2\,u+4}}{u\,\sqrt{u+1}},\ \frac{3}{u+1},\ \frac{3\,u}{\sqrt{u^2+2\,u+4}\,(u+1)^{3/2}\,r2}$$

$$-\frac{(u^2+2\,u+4)^{3/2}\,(u+1)^{3/2}\,r2^3}{u^3},\ 0,\ 0,\ 1 \qquad \textbf{(31)}$$

```
> r21 := -u/((u+1)^(1/2)*(2*u+4+u^2)^(1/2)): r11 := r21*(u+2)/u:
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1,r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{3}{u+1},\ \frac{3}{u+1},\ -\frac{3}{u+1}$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 1 \qquad \textbf{(32)}$$

b) :

```
> {r1 = (1/3)*v*r2-r2, r2 = r2, s1 = s2*(v-6)/(-3+v), s2 = s2, u = -(2*v-3)/(-3+v), v = v};
```

$$\left\{r1=\frac{1}{3}\,v\,r2-r2,\ r2=r2,\ s1=\frac{s2\,(v-6)}{-3+v},\ s2=s2,\ u=-\frac{2\,v-3}{-3+v},\ v=v\right\} \qquad \textbf{(33)}$$

Выразим v через u в (33).

```
> solve(u = -(2*v-3)/(-3+v), v): v1 := (3*(u+1))/(u+2):
  {r1 = simplify((1/3)*v1*r2-r2), r2 = r2, s1 = simplify(s2*(v1-6)/(-3+v1)), s2 = s2, u = u, v = v1};
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{u+2},\ r2=r2,\ s1=(u+3)\,s2,\ s2=s2,\ u=u,\ v=\frac{3\,(u+1)}{u+2}\right\} \qquad \textbf{(34)}$$

```
> solve(4*v1 + (u+1)^2 < 0, u); r11 := -r2/(u+2): s11 := (u+3)*s2:
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1,r11,s11,r2,s2):
```

$$RealRange(Open(-2),\ Open(-1))$$

$$0,\ \frac{3\,(u^2+5\,u+7)\,r2\,s2}{(u+2)^2},\ -\frac{3\,(u^2+5\,u+7)\,s2^2}{u+2},\ \frac{3\,(u^2+5\,u+7)\,s2^3}{r2}$$

$$\frac{r2^3\,(u+1)\,(u^2+5\,u+7)}{s2\,(u+2)^3},\ 0,\ 0,\ (u+1)\,(u^2+5\,u+7)\,s2^2 \qquad \textbf{(35)}$$

Нормировка системы (35).

```
> s21 := (7+u^2+5*u)^(-1/2)*(-u-1)^(-1/2):  s11 := (u+3)*s21:
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1,r11,s11,r2,s21):
```

$$0,\ \frac{3\,r2\,\sqrt{u^2+5\,u+7}}{\sqrt{-u-1}\,(u+2)^2},\ \frac{3}{(u+2)\,(u+1)},\ \frac{3}{\sqrt{u^2+5\,u+7}\,(-u-1)^{3/2}\,r2}$$

$$-\frac{(u^2+5\,u+7)^{3/2}\,r2^3\,(-u-1)^{3/2}}{(u+2)^3},\ 0,\ 0,\ -1 \qquad \textbf{(36)}$$

```
> r21 := (u+2)*(7+u^2+5*u)^(-1/2)*(-u-1)^(-1/2): r11 := -r21/(u+2):
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1,r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{3}{(u+2)\,(u+1)},\ \frac{3}{(u+2)\,(u+1)},\ -\frac{3}{(u+2)\,(u+1)}$$

$$-1,\ 0,\ 0,\ -1 \qquad \textbf{(37)}$$

Поиск замен к $SF_6^{6,2}$.

```
> solve([M[1,3], M[2,2]], {r1,s1,v});
```

$$\Big\{r1=RootOf\big((2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\,\_Z+(\qquad \textbf{(38)}$$

$$-s1^2\,s2\,u+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\,\_Z^2\big)\,r2,\ s1=s1,\ v=\frac{1}{s2\,(s1^2-s1\,s2-2\,s2^2)}\,\Big(3\,\big(2\,RootOf\big((2\,s1^2\,s2$$
$$-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\,\_Z+(-s1^2\,s2\,u$$
$$+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\,\_Z^2\big)^2\,s1^2\,s2-RootOf\big((2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3$$
$$+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\,\_Z+(-s1^2\,s2\,u+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\,\_Z^2\big)^2\,s1\,s2^2$$
$$-RootOf\big((2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\,\_Z$$
$$+(-s1^2\,s2\,u+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\,\_Z^2\big)\,s1^2\,s2\,u+RootOf\big((2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3$$
$$+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\,\_Z+(-s1^2\,s2\,u+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\,\_Z^2\big)\,s1\,s2^2\,u$$
$$+RootOf\big((2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\,\_Z$$
$$+(-s1^2\,s2\,u+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\,\_Z^2\big)\,s1^3-RootOf\big((2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2)\,\_Z^3+s1\,s2^2\,u-u\,s2^3-s1\,s2^2+3\,s2^3$$

$$+(s1^2\,s2\,u-3\,s1\,s2^2\,u+s2^3\,u-s1^3+3\,s1^2\,s2+s1\,s2^2-s2^3)\ \_Z+(-s1^2\,s2\,u+s1\,s2^2\,u+2\,s1^3-3\,s1^2\,s2+3\,s1\,s2^2)\ \_Z^2)\ s1^2\,s2$$
$$+u\,s2^3+s1\,s2^2-s2^3)\,)\},\ \left\{r1=u\,r2,\ s1=-\frac{s2\,(u^2-2\,u+3)}{2\,u-1},\ v=\frac{3\,(u^5-4\,u^4+10\,u^3-8\,u^2+5\,u+1)}{2\,u^3-3\,u^2-3\,u+2}\right\}$$

Рассмотрение возможных решений.

a) : первое решение не поддается проверке из-за сложности формул.

b) :

```
> {r1 = -r2*(3+u^2-2*u)/(2*u-1), s1 = s2*u, v = (3*(u^5-4*u^4+10*u^3-8*u^2+5*u+1))/(2*u^3-3*u^2-3*u+2)
  };
  r11 := -r2*(3+u^2-2*u)/(2*u-1): s11 := s2*u:
  v1 := (3*(u^5-4*u^4+10*u^3-8*u^2+5*u+1))/(2*u^3-3*u^2-3*u+2):
  evalf(solve((u+1)^2 + 4*v1 < 0, u));
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,(u^2-2\,u+3)}{2\,u-1},\ s1=s2\,u,\ v=\frac{3\,(u^5-4\,u^4+10\,u^3-8\,u^2+5\,u+1)}{2\,u^3-3\,u^2-3\,u+2}\right\}$$

$$RealRange(Open(-1.),\ Open(-0.1705322165)),\ RealRange(Open(0.5000000000),\ Open(2.))$$

$$-\frac{r2^2\,(u^2-u+1)\,(u^2-u+7)\,(u^3-3\,u^2+6\,u+1)}{(u-2)\,(2\,u-1)^2\,(u+1)}$$
$$\frac{3\,s2\,r2\,(u^2-u+1)\,(u^3-3\,u^2+6\,u+1)}{(2\,u-1)^2}$$
$$0$$
$$-\frac{(u^2-u+1)\,(u^3-3\,u^2+6\,u+1)\,s2^3}{r2\,(u-2)\,(u+1)}$$
$$\frac{r2^3\,(u^2-u+1)^2\,(u^2-u+7)^2}{s2\,(u-2)\,(2\,u-1)^3\,(u+1)}$$
$$0$$
$$-\frac{3\,s2\,r2\,(u^2-u+1)^2}{2\,u-1}$$
$$\frac{s2^2\,(2\,u-1)\,(u^2-u+1)^2}{(u-2)\,(u+1)} \qquad \textbf{(39)}$$

Нормировка системы (39).

```
> s21 := abs(u+1)^(1/2)*abs(u-2)^(1/2)/(abs(2*u-1)^(1/2)*(u^2-u+1)): s11 := s21*u:
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{r2^2\,(u^2-u+1)\,(u^2-u+7)\,(u^3-3\,u^2+6\,u+1)}{(u-2)\,(2\,u-1)^2\,(u+1)}$$
$$\frac{3\,r2\,(u^3-3\,u^2+6\,u+1)\left|\frac{\sqrt{u-2}\,\sqrt{u+1}}{\sqrt{2\,u-1}}\right|}{(2\,u-1)^2}$$
$$0$$
$$-\frac{\left|\frac{(u-2)^{3/2}\,(u+1)^{3/2}}{(2\,u-1)^{3/2}}\right|(u^3-3\,u^2+6\,u+1)}{r2\,(u-2)\,(u+1)\,(u^2-u+1)^2}$$
$$\frac{(u^2-u+7)^2\,(u^2-u+1)^3\,r2^3\left|\frac{\sqrt{2\,u-1}}{\sqrt{u-2}\,\sqrt{u+1}}\right|}{(u-2)\,(2\,u-1)^3\,(u+1)}$$
$$0$$
$$-\frac{3\,r2\,(u^2-u+1)\left|\frac{\sqrt{u-2}\,\sqrt{u+1}}{\sqrt{2\,u-1}}\right|}{2\,u-1}$$
$$\frac{(2\,u-1)\left|\frac{(u-2)\,(u+1)}{2\,u-1}\right|}{(u-2)\,(u+1)} \qquad \textbf{(40)}$$

```
> r21 := abs(2*u-1)^(5/6)*abs(u-2)^(1/2)*abs(u+1)^(1/2)/((u^2-u+7)^(2/3)*(u^2-u+1)):
  r11 := -r21*(3+u^2-2*u)/(2*u-1):
  zamproc(u,v1,-v1,u+v1,1,0,0,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{(u^3-3\,u^2+6\,u+1)\,|(u-2)\,(u+1)\,(2\,u-1)^{5/3}|}{(2\,u-1)^2\,(u^2-u+1)\,(u^2-u+7)^{1/3}\,(u-2)\,(u+1)}$$
$$\frac{3\,(u^3-3\,u^2+6\,u+1)\,|(2\,u-1)^{1/3}\,(u-2)\,(u+1)|}{(2\,u-1)^2\,(u^2-u+1)\,(u^2-u+7)^{2/3}}$$
$$0$$

$$-\frac{(u^2-u+7)^{2/3}\,(u^3-3u^2+6u+1)\left|\frac{(u-2)\,(u+1)}{(2u-1)^{7/3}}\right|}{(u-2)\,(u+1)\,(u^2-u+1)}$$
$$\frac{|(u-2)\,(2u-1)^3\,(u+1)|}{(u-2)\,(2u-1)^3\,(u+1)}$$
$$0$$
$$-\frac{3\,|(2u-1)^{1/3}\,(u-2)\,(u+1)|}{(2u-1)\,(u^2-u+7)^{2/3}}$$
$$\frac{(2u-1)\left|\frac{(u-2)\,(u+1)}{2u-1}\right|}{(u-2)\,(u+1)} \tag{41}$$

Упрощение полученных значений u и v в системе (41).

```
> # u = simplify((-(u^3-3*u^2+6*u+1)*abs((2*u-1)^(5/3)*(u-2)*(u+1))/((2*u-1)^2*(1+u^2-u)*(u^2-u+7)^
  (1/3)*(u-2)*(u+1)))/(abs((u-2)*(2*u-1)^3*(u+1))/((u-2)*(2*u-1)^3*(u+1))));
  u = -(u^3-3*u^2+6*u+1)/((1+u^2-u)*(u^2-u+7)^(1/3)*(2*u-1)^(1/3));
  # v = simplify((-(u^3-3*u^2+6*u+1)*abs((2*u-1)^(5/3)*(u-2)*(1+u))/((2*u-1)^2*(1+u^2-u)*(u^2-u+7)^
  (1/3)*(u-2)*(1+u)))/(-(u^2-u+7)^(2/3)*(u^3-3*u^2+6*u+1)*abs((u-2)*(1+u)/(2*u-1)^(7/3))/((1+u^2-u)*
  (1+u)*(u-2))))^(1/3);
  v = ((2*u-1)^2/((u^2-u+7)))^(1/3);
```

$$u=-\frac{u^3-3u^2+6u+1}{(u^2-u+1)\,(u^2-u+7)^{1/3}\,(2u-1)^{1/3}}$$
$$v=\left(\frac{(2u-1)^2}{u^2-u+7}\right)^{1/3} \tag{42}$$

$NSF^{6,2<,<}_{11,+1}$ ($v<0$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,u,v,1,0,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF^{4,2}_{34}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {r1,s1,u,v});
```

$$\left\{r1=RootOf(\_Z^2+1)\,r2,\,s1=\frac{s2}{RootOf(\_Z^2+1)},\,u=0,\,v=-1\right\},\left\{r1=RootOf(\_Z^2+1)\,r2,\,s1=-\frac{1}{3}\,RootOf(\_Z^2+1)\,s2,\,u=-\frac{1}{RootOf(\_Z^2+1)},\,v=0\right\},\left\{r1=\frac{1}{3}\,RootOf(\_Z^2+1)\,r2,\,s1=\frac{s2}{RootOf(\_Z^2+1)},\,u=-\frac{1}{4}\,\frac{3\,RootOf(\_Z^2+1)^2-1}{RootOf(\_Z^2+1)},\,v=0\right\},\left\{r1=r1,\,s1=-\frac{r2\,s2}{r1},\,u=0,\,v=-1\right\} \tag{43}$$

Поиск замен к $SF^{5,2}_{22}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {r1,s1,s2,r2,v});
```

$$\left\{r1=r1,\,r2=\frac{RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)\,r1}{u},\,s1=\frac{s2\,(-2u^2+RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)+2)}{u},\,s2=s2,\,v=\frac{3\,(RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)\,u^4-5u^4+6\,RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)\,u^2+5u^2+RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)+2)}{-3u^4+8\,RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)\,u^2-8u^2+11\,RootOf(\_Z^2-3u^2+4\_Z+4)+16}\right\} \tag{44}$$

```
> solve(_Z^2-3*u^2+4+4*_Z, _Z);
  z1 := -2+sqrt(3)*u: z2 := -2-sqrt(3)*u:
```

$$-2+\sqrt{3}\,u,\ -2-\sqrt{3}\,u \tag{45}$$

Решение (44) с первым значением корня из (45) :

```
> r21 := z1*r1/u: s11 := (z1 - 2*u^2 + 2)*s2/u:
  v1 :=factor(normal(simplify(3*(u^4*z1+z1+6*u^2*z1-5*u^4+5*u^2+2)/(11*z1+8*u^2*z1+16-3*u^4-8*u^2)))):
  solve(u^2 + 4*v1 < 0, u);
  zamproc(u,v1,u,v1,1,0,1,0, r1,s11,r21,s2):
```

$$RealRange\left(Open(0),\,Open\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{111}\right)\right),\,RealRange\left(Open\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right),\,Open\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{111}\right)\right)$$

$$0,\ \frac{4\sqrt{3}\,r1\,s2\left(-3u+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,u-u^2-1\right)}{\left(-3u+2\sqrt{3}\right)u},\ -\frac{4\sqrt{3}\left(-3u+\sqrt{3}\right)s2^2\left(\sqrt{3}\,u-u^2-1\right)}{-3u+2\sqrt{3}},\ \frac{4\sqrt{3}\left(-3u+\sqrt{3}\right)u\left(\sqrt{3}\,u-u^2-1\right)s2^3}{r1\left(-3u+2\sqrt{3}\right)}$$
$$-\frac{4\left(\sqrt{3}\,u-u^2-1\right)r1^3}{s2\,u^2},\ 0,\ 0,\ -4\,u\,s2^2\left(\sqrt{3}\,u-u^2-1\right) \tag{46}$$

Нормировка системы (46).

```
> s21 := 1/(2*(u^2-sqrt(3)*u+1)^(1/2)*u^(1/2)): s11 := (z1-2*u^2+2)*s21/u:
  zamproc(u,v1,u,v1,1,0,1,0, r1,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$0$$

$$-\frac{6\,r1\left(7\sqrt{3}\,u^4-3\,u^5+11\sqrt{3}\,u^2-21\,u^3+\sqrt{3}-9\,u\right)}{\sqrt{-\sqrt{3}\,u+u^2+1}\;u^{3/2}\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,u^2+\sqrt{3}-3\,u\right)}$$

$$\frac{\left(-3\,u+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)u}$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{7\sqrt{3}\,u^4-3\,u^5+11\sqrt{3}\,u^2-21\,u^3+\sqrt{3}-9\,u}{\sqrt{u}\left(-\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)^{3/2}\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)r1\left(\sqrt{3}\,u^2+\sqrt{3}-3\,u\right)}$$

$$-\frac{24\,r1^3\left(\sqrt{3}\,u^5+9\sqrt{3}\,u^3-8\,u^4+5\sqrt{3}\,u-16\,u^2-2\right)\sqrt{-\sqrt{3}\,u+u^2+1}}{u^{3/2}\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,u^2+\sqrt{3}-3\,u\right)}$$

$$0$$

$$0$$

$$1 \qquad \textbf{(47)}$$

Упрощение выражения элемента a_2 в системе (47) :

```
> # ((-u^2+sqrt(3)*u-1)*(-3*u+2*sqrt(3))*(-3*u+sqrt(3)+sqrt(3)*u^2)/3) = (expand((-u^2+sqrt(3)*u-1)*
  (-3*u+2*sqrt(3))*(-3*u+sqrt(3)+sqrt(3)*u^2)))/3;
  # a2 = -24*r1^3*(5*sqrt(3)*u-2-16*u^2+9*u^3*sqrt(3)-8*u^4+sqrt(3)*u^5)*sqrt(u^2-sqrt(3)*u+1)/(u^
  (3/2)*(-3*u+2*sqrt(3))*(-3*u+sqrt(3)+sqrt(3)*u^2));
  a2 = 8*r1^3*(u^2-sqrt(3)*u+1)^(3/2)/u^(3/2);
```

$$a2=\frac{8\,r1^3\left(-\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)^{3/2}}{u^{3/2}} \qquad \textbf{(48)}$$

```
> r11 := u^(1/3)*u^(1/6)/(2*(u^2-sqrt(3)*u+1)^(1/2)): r21 := z1*r11/u:
  zamproc(u,v1,u,v1,1,0,1,0, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\,-\frac{\left(-3\,u+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)u},\,\frac{\left(-3\,u+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)u},\,-\frac{\left(-3\,u+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\left(-3\,u+2\sqrt{3}\right)u}$$

$$1,\,0,\,0,\,1 \qquad \textbf{(49)}$$

Решение (44) со вторым значением корня из (45) :

```
> r22 := z2*r1/u: s12 := (z2-2*u^2+2)*s2/u:
  v2 :=factor(normal(simplify(3*(u^4*z2+z2+6*u^2*z2-5*u^4+5*u^2+2)/(11*z2+8*u^2*z2+16-3*u^4-8*u^2)))):
  solve(u^2+4*v2<0, u);
  zamproc(u,v2,u,v2,1,0,1,0, r1,s12,r22,s2):
```

$$RealRange\left(Open\left(-\frac{7}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{111}\right),Open\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\right),RealRange\left(Open\left(-\frac{7}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{111}\right),Open(0)\right)$$

$$0,\,\frac{4\sqrt{3}\,r1\,s2\left(3\,u+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)}{\left(3\,u+2\sqrt{3}\right)u},\,-\frac{4\sqrt{3}\left(3\,u+\sqrt{3}\right)s2^2\left(\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)}{3\,u+2\sqrt{3}},\,\frac{4\sqrt{3}\left(3\,u+\sqrt{3}\right)u\left(\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)s2^3}{r1\left(3\,u+2\sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{4\left(\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)r1^3}{s2\,u^2},\,0,\,0,\,4\,u\,s2^2\left(\sqrt{3}\,u+u^2+1\right) \qquad \textbf{(50)}$$

Нормировка системы (50).

```
> s22 := 1/(2*(u^2+sqrt(3)*u+1)^(1/2)*(-u)^(1/2)): s12 := (z2 - 2*u^2 + 2)*s22/u:
  zamproc(u,v2,u,v2,1,0,1,0, r1,s12,r22,s22, lbl = true):
```

$$0$$

$$-\frac{6\,r1\left(7\sqrt{3}\,u^4+3\,u^5+11\sqrt{3}\,u^2+21\,u^3+\sqrt{3}+9\,u\right)}{(-u)^{3/2}\sqrt{\sqrt{3}\,u+u^2+1}\left(3\,u+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,u^2+\sqrt{3}+3\,u\right)}$$

$$\frac{\left(3\,u+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\left(3\,u+2\sqrt{3}\right)u}$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{7\sqrt{3}\,u^4+3\,u^5+11\sqrt{3}\,u^2+21\,u^3+\sqrt{3}+9\,u}{\left(\sqrt{3}\,u+u^2+1\right)^{3/2}\sqrt{-u}\left(3\,u+2\sqrt{3}\right)r1\left(\sqrt{3}\,u^2+\sqrt{3}+3\,u\right)}$$

$$\frac{24\,r1^3\left(\sqrt{3}\,u^5+9\sqrt{3}\,u^3+8\,u^4+5\sqrt{3}\,u+16\,u^2+2\right)\sqrt{\sqrt{3}\,u+u^2+1}}{(-u)^{3/2}\left(3\,u+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,u^2+\sqrt{3}+3\,u\right)}$$

$$0$$

$$0$$

$$-1 \qquad \textbf{(51)}$$

Упрощение выражения элемента a_2 в системе (51) :

```
> # expand((u^2+sqrt(3)*u+1)*(3*u+2*sqrt(3))*(3*u+sqrt(3)+sqrt(3)*u^2))/3 = (u^2+sqrt(3)*u+1)*(3*u+2*
  sqrt(3))*(3*u+sqrt(3)+sqrt(3)*u^2)/3;
  a2 = 8*r1^3*(u^2+sqrt(3)*u+1)^(3/2)*sqrt(-u)/u^2;
```

$$a2 = \frac{8\, r1^3 \left(\sqrt{3}\, u + u^2 + 1\right)^{3/2} \sqrt{-u}}{u^2} \tag{52}$$

```
> r12 := u^(1/3)*(-u)^(1/6)/(2*(u^2+sqrt(3)*u+1)^(1/2)): r22 := z2*r12/u:
  zamproc(u,v2,u,v2,1,0,1,0, r12,s12,r22,s22, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{3\left(7\sqrt{3}\, u^4 + 3\, u^5 + 11\sqrt{3}\, u^2 + 21\, u^3 + \sqrt{3} + 9\, u\right)}{u^{2/3}\, (-u)^{1/3} \left(\sqrt{3}\, u^2 + \sqrt{3} + 3\, u\right)\left(3\, u + 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\, u + u^2 + 1\right)}$$

$$\frac{\left(3\, u + \sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\left(3\, u + 2\sqrt{3}\right) u}$$

$$\frac{3\left(7\sqrt{3}\, u^4 + 3\, u^5 + 11\sqrt{3}\, u^2 + 21\, u^3 + \sqrt{3} + 9\, u\right)(-u)^{1/3}}{u^{4/3}\left(\sqrt{3}\, u + u^2 + 1\right)\left(3\, u + 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\, u^2 + \sqrt{3} + 3\, u\right)}$$

$$-1$$

$$0$$

$$0$$

$$-1 \tag{53}$$

Скобка в b_1 и d_1 :

```
> factor(11*sqrt(3)*u^2+7*u^4*sqrt(3)+21*u^3+sqrt(3)+9*u+3*u^5);
```

$$\left(3\, u + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\, u + u^2 + 1\right)^2 \tag{54}$$

Поиск замен к $SF_6^{6,2}$.

```
> solve([M[1,3],M[2,2]], {r1,s1,r2,s2,v});
```

$$\Big\{r1 = RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 \tag{55}$$

$$+ 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)\, r2,\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ v = -\frac{1}{2}\ \Big(3\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u$$

$$+ 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)^2\, s1^2\, s2\, u + RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u$$

$$+ 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)^2\, s2^3\, u + 6\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3$$

$$+ u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)^2\, s1^3$$

$$+ 8\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3$$

$$+ 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)^2\, s1\, s2^2 - 4\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u$$

$$+ s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)\, s1\, s2^2\, u + 10\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z$$

$$+ (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)\, s1^2\, s2 + 6\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2$$

$$+ 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)\, s2^3 + 3\, u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2\Big) \Big/ \Big(s1\, s2\, \big(RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3$$

$$+ u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3 + 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)^2\, s2$$

$$+ 2\, RootOf(6\, s1^2\, s2\, \_Z^3 + u\, s1^2\, s2 - 3\, s2^3\, u + 6\, s1\, s2^2 + (-8\, s1\, s2^2\, u + 12\, s1^2\, s2 + 6\, s2^3)\, \_Z + (-3\, s1^2\, s2\, u + s2^3\, u + 6\, s1^3$$

$$+ 12\, s1\, s2^2)\, \_Z^2)\, s1 + 3\, s2\big)\Big)\Big\},\ \left\{r1 = r2\, u,\ r2 = r2,\ s1 = -\frac{1}{2}\ \frac{s2\,(u^2+3)}{u},\ s2 = s2,\ v = \frac{3}{2}\ \frac{u^4 + 6\, u^2 + 5}{u^2 - 3}\right\}$$

Рассмотрение возможных решений.

a) : первое решение не поддается проверке из-за сложности формул.

b) :

```
> {r1 = -(1/2)*r2*(u^2+3)/u, r2 = r2, s1 = u*s2, s2 = s2, v = (3/2)*(u^4+6*u^2+5)/(u^2-3)};
  r11 := -(1/2)*r2*(u^2+3)/u: s11 := u*s2: v1 := (3/2)*(u^4+6*u^2+5)/(u^2-3):
  solve(u^2 + 4*v1 < 0, u);
  zamproc(u,v1,u,v1,1,0,1,0, r11,s11,r2,s2):
```

$$\left\{r1 = -\frac{1}{2}\ \frac{r2\,(u^2+3)}{u},\ r2 = r2,\ s1 = u\, s2,\ s2 = s2,\ v = \frac{3}{2}\ \frac{u^4 + 6\, u^2 + 5}{u^2 - 3}\right\}$$

$$RealRange\left(Open\left(-\sqrt{3}\right), Open\left(\sqrt{3}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{4}\ \frac{(u^2+5)\,(u^2+9)\,(u^2+1)\, r2^2}{u\,(u^2-3)},\ \frac{3}{4}\ \frac{s2\, r2\,(u^2+5)\,(u^2+1)}{u},\ 0,\ -\frac{u\,(u^2+5)\,(u^2+1)\, s2^3}{r2\,(u^2-3)}$$

$$\frac{1}{8}\ \frac{(u^2+9)^2\,(u^2+1)^2\, r2^3}{u^3\, s2\,(u^2-3)},\ 0,\ -\frac{3}{2}\ \frac{s2\, r2\,(u^2+1)^2}{u},\ \frac{2\,(u^2+1)^2\, u\, s2^2}{u^2-3} \tag{56}$$

Нормировка системы (56).

```
> s21 := sqrt(3-u^2)/(sqrt(2)*(u^2+1)*sqrt(abs(u))): s11 := u*s21:
  zamproc(u,v1,u,v1,1,0,1,0, r11,s11,r2,s21):
```

$$-\frac{1}{4}\,\frac{(u^2+5)\,(u^2+9)\,(u^2+1)\,r2^2}{u\,(u^2-3)},\ \frac{3}{8}\,\frac{(u^2+5)\,r2\,\sqrt{2}\,\sqrt{-u^2+3}}{u\,\sqrt{|u|}},\ 0,\ \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{-u^2+3}\,(u^2+5)\,u}{(u^2+1)^2\,r2\,|u|^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{|u|}\,(u^2+1)^3\,(u^2+9)^2\,r2^3\,\sqrt{2}}{u^3\,(-u^2+3)^{3/2}},\ 0,\ -\frac{3}{4}\,\frac{r2\,(u^2+1)\,\sqrt{2}\,\sqrt{-u^2+3}}{u\,\sqrt{|u|}},\ -\frac{u\,\sqrt{-(u^2-3)^3}}{(-u^2+3)^{3/2}\,|u|} \tag{57}$$

```
> r21 := 2^(5/6)*sqrt(3-u^2)*abs(u)^(1/6)*u^(2/3)/((u^2+1)*(u^2+9)^(2/3)):
  r11 := -(1/2)*r21*(u^2+3)/u:
  zamproc(u,v1,u,v1,1,0,1,0, r11,s11,r21,s21):
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{2^{2/3}\,u^{1/3}\,|u|^{1/3}\,(u^2+5)}{(u^2+1)\,(u^2+9)^{1/3}},\ -\frac{3}{4}\,\frac{(u^2-3)\,2^{1/3}\,(u^2+5)}{(u^2+9)^{2/3}\,(u^2+1)\,u^{1/3}\,|u|^{1/3}},\ 0,\ \frac{1}{8}\,\frac{2^{2/3}\,(u^2+9)^{2/3}\,u^{1/3}\,(u^2+5)}{(u^2+1)\,|u|^{5/3}}$$

$$-\frac{|u|}{u},\ 0,\ \frac{3}{2}\,\frac{2^{1/3}\,(u^2-3)}{|u|^{1/3}\,u^{1/3}\,(u^2+9)^{2/3}},\ -\frac{u}{|u|} \tag{58}$$

Значение v в полученной системе :

```
> v=((-(1/2)*2^(2/3)*(u^2+5)*u^(2/3)/((u^2+1)*(u^2+9)^(1/3)))/(-(1/8)*2^(2/3)*(u^2+9)^(2/3)*(u^2+5)/
  (u^(4/3)*(u^2+1))))^(1/3);
```

$$v=4^{1/3}\left(\frac{u^2}{u^2+9}\right)^{1/3} \tag{59}$$

Поиск замен к $SF_7^{6,2}$.

```
> solve([M[2,2],M[2,3]], {r1,s1,s2,r2,v});
```

$$\{r1=r2\,u,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v=0\},\ \Big\{r1=\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ v \tag{60}$$

$$=\Big(27\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1^4\,s2\,u-6\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1^2\,s2^3\,u$$

$$-\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s2^5\,u+9\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1^5$$

$$+54\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1^3\,s2^2+13\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1\,s2^4$$

$$-9\,s1^5\,u+18\,s1^3\,s2^2\,u-5\,s1\,s2^4\,u-9\,s1^4\,s2+26\,s1^2\,s2^3+3\,s2^5\Big)\Big/\Big((3\,s1^2-s2^2)\,\big(3\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2$$

$$+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1^3-5\,\mathrm{RootOf}\big((3\,s1^2-s2^2)\,\_Z^2-s1^2+3\,s2^2+8\,\_Z\,s1\,s2\big)\,s1\,s2^2+5\,s1^2\,s2-3\,s2^3\big)\Big)\Big\}$$

Второе решение не поддается проверке из-за сложности формул.

3.6.6. Сведение $NSF_2^{7,2\,<,<}$ из списка 2.4_1 к предшествующим.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

В данном разделе не показаны результаты действия процедуры *solve*, ввиду их большого объема.
Поэтому решения, очевидно не подходящие по области определения, и сложные решения, не поддающиеся проверке, не выписаны.

$NSF_2^{7,2\,<,<}$ $(v \in (0,1) \cup (1, \sqrt[3]{4}),\ w \neq -u\,(v - v^{-2}),\ 4w < -(u+v)^2)$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,w,u/v-v*(u*v+w),u+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r1,s1,r2,s2):
```

Поиск замен к $SF_{34}^{4,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,4]], {r1,s1,r2,s2,v,u,w}):
```

Рассмотрение возможных решений.

a) : решение не определено на допустимых значениях параметров.

```
> {r1 = r1, r2 = r1*RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*v, s1 = RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*s2, s2 = s2, u = 2*v, v =
  v, w = -(1+2*v^3)/v};
  solve(v*_Z^2+1-v^2*_Z, _Z);
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=r1\,RootOf(\_Z^2\,v+1-\_Z\,v^2)\,v,\ s1=RootOf(\_Z^2\,v+1-\_Z\,v^2)\,s2,\ s2=s2,\ u=2\,v,\ v=v,\ w=-\frac{1+2\,v^3}{v}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2+\sqrt{v^4-4\,v}}{v},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-v^2+\sqrt{v^4-4\,v}}{v} \qquad \textbf{(1)}$$

b) : частный случай ухода a) в $SF_{11}^{6,2}$.

```
> {r1 = r2*(s1*v^2-2*s2)/(v*(2*s1-v*s2)), r2 = r2, s1 = s1, s2 = s2, u = -v, v = v, w = (3*s1^2*v^2+2*
  s1*v^3*s2-2*s1*s2-s2^2*v^4-2*v*s2^2)/(s2*v*(2*s1-v*s2))};
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,(s1\,v^2-2\,s2)}{v\,(2\,s1-v\,s2)},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=-v,\ v=v,\ w=\frac{3\,s1^2\,v^2+2\,s1\,v^3\,s2-2\,s1\,s2-s2^2\,v^4-2\,v\,s2^2}{s2\,v\,(2\,s1-v\,s2)}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

```
> r11 := r2*(s1*v^2-2*s2)/(v*(2*s1-v*s2)): u1 := -v:
  w1 := (3*s1^2*v^2+2*s1*v^3*s2-2*s1*s2-s2^2*v^4-2*v*s2^2)/(s2*v*(2*s1-v*s2)):
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s1,r2,s2):
```

$$0,\ -\frac{(v^3-4)\,(s2\,v+s1)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,r2}{v^2\,(-s2\,v+2\,s1)^2},\ 0,\ \frac{(s2\,v+s1)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)}{r2\,v}$$

$$-\frac{(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,(v^3-4)\,(-s2\,v^3+3\,s1\,v^2-2\,s2)\,r2^3}{v^3\,s2\,(-s2\,v+2\,s1)^3},\ 0,\ \frac{r2\,(-s2\,v^3+3\,s1\,v^2-2\,s2)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)}{v^2\,s2\,(-s2\,v+2\,s1)},\ 0 \qquad \textbf{(3)}$$

```
> solve(w = (3*s1^2*v^2+2*s1*v^3*s2-2*s1*s2-s2^2*v^4-2*v*s2^2)/(s2*v*(2*s1-v*s2)), s1);
  kk1 := (1/3)*(-v^3+w*v+1+sqrt(4*v^6-5*w*v^4+4*v^3+w^2*v^2+2*w*v+1))/v^2:
  kk2 := -(1/3)*(v^3-w*v-1+sqrt(4*v^6-5*w*v^4+4*v^3+w^2*v^2+2*w*v+1))/v^2:
```

$$\frac{1}{3}\,\frac{\left(-v^3+v\,w+\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}+1\right)s2}{v^2},\ -\frac{1}{3}\,\frac{\left(v^3-v\,w+\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}-1\right)s2}{v^2} \qquad \textbf{(4)}$$

```
> u1 := -v:   solve((u1+v)^2 +4*w < 0, w);
  s11 := kk1*s2:  r11 := r2*(s11*v^2-2*s2)/(v*(2*s11-v*s2)):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$RealRange(-\infty, Open(0))$$

$$0,\ -\frac{1}{3}\,\frac{1}{v^3\left(-5\,v^3+2\,v\,w+2\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}+2\right)}\Big(r2\,s2\,(v^3-4)\,\big(4\,v^6-5\,v^4\,w$$
$$+2\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^3+v^2\,w^2+\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v\,w+4\,v^3+2\,v\,w$$
$$+\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}+1\big)\Big),\ 0,\ \frac{1}{27}\,\frac{1}{r2\,v^6}\Big(\big(-5\,v^3+2\,v\,w+2\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}$$
$$+2\big)\big(4\,v^6-5\,v^4\,w+2\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^3+v^2\,w^2+\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v\,w+4\,v^3+2\,v\,w$$
$$+\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}+1\big)\,s2^3\Big)$$
$$-\frac{1}{s2\left(-5\,v^3+2\,v\,w+2\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}+2\right)^3}\Big(3\,r2^3\,v\,(v^3-4)\,\big(-36\,v^8+61\,v^6\,w \qquad \textbf{(5)}$$
$$+18\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^5-29\,v^4\,w^2-19\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^3\,w-36\,v^5+4\,v^2\,w^3$$
$$+4\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v\,w^2-2\,v^3\,w+9\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^2+8\,v\,w^2$$
$$+4\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,w-9\,v^2+4\,w\big)\Big),\ 0,$$
$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{v^2\left(-5\,v^3+2\,v\,w+2\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}+2\right)}\Big(r2\,s2\,\big(-36\,v^8+61\,v^6\,w$$
$$+18\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^5-29\,v^4\,w^2-19\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^3\,w-36\,v^5+4\,v^2\,w^3$$
$$+4\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v\,w^2-2\,v^3\,w+9\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,v^2+8\,v\,w^2$$
$$+4\,\sqrt{4\,v^6-5\,v^4\,w+v^2\,w^2+4\,v^3+2\,v\,w+1}\,w-9\,v^2+4\,w\big)\Big),\ 0$$

Упрощение частей выражений элементов матрицы (5) :

```
> b1p = (4-v^3)*collect((4*v^6-5*w*v^4+4*v^3+2*v^3*x+w^2*v^2+2*w*v+w*v*x+x+1), [x,w], factor);
  a2p = v*(4-v^3)*collect((-36*v^8+61*v^6*w-36*v^5+18*v^5*x-29*v^4*w^2-2*v^3*w-19*v^3*w*x-9*v^2+4*w^3*
  v^2+9*v^2*x+8*w^2*v+4*w^2*v*x+4*w*x+4*w), [x,w], factor);
  c2p = collect(-36*v^8+61*v^6*w-36*v^5+18*v^5*x-29*v^4*w^2-2*v^3*w-19*v^3*w*x-9*v^2+4*w^3*v^2+9*v^2*
  x+8*w^2*v+4*w^2*v*x+4*w*x+4*w, [x,w], factor);
```

$$b1p=(-v^3+4)\left((2v^3+vw+1)x+w^2v^2-v(5v^3-2)w+(2v^3+1)^2\right)$$

$$a2p=v(-v^3+4)\left((4w^2v+(-19v^3+4)w+9v^2(2v^3+1))x+4w^3v^2-v(29v^3-8)w^2+(61v^6-2v^3+4)w-9v^2(2v^3+1)^2\right)$$

$$c2p=(4w^2v+(-19v^3+4)w+9v^2(2v^3+1))x+4w^3v^2-v(29v^3-8)w^2+(61v^6-2v^3+4)w-9v^2(2v^3+1)^2 \tag{6}$$

Выражение нормировочной замены через элементы матрицы (5) :

```
> b11 := b1*r2*s2; d11 := d1*s2^3; a21 := a2*r2^3/s2; c21 := c2*r2*s2;
```

$$b11 := b1\,r2\,s2$$

$$d11 := d1\,s2^3$$

$$a21 := \frac{a2\,r2^3}{s2}$$

$$c21 := c2\,r2\,s2 \tag{7}$$

```
> s21 := a2*r2^3; a21 := a2*r2^3/s21; c21 := c2*r2*s21;
```

$$s21 := a2\,r2^3$$

$$a21 := 1$$

$$c21 := c2\,r2^4\,a2 \tag{8}$$

```
> r21 := (a2*c2)^(-1/4); s21 := a2*r21^3; c21 := c2*r21*s21; b11 := b1*r21*s21;
```

$$r21 := \frac{1}{(a2\,c2)^{1/4}}$$

$$s21 := \frac{a2}{(a2\,c2)^{3/4}}$$

$$c21 := 1$$

$$b11 := \frac{b1}{c2} \tag{9}$$

Поиск замен к $SF_{22}^{5,2}$.

```
> solve([M[1,1],M[2,2],M[2,3]], {r1,s1,r2,s2,v,w});
```

Рассмотрение возможных решений.

a) :

```
> {r1=-r2*RootOf(7*_Z^3-1),r2=r2,s1=s1,s2=0,u=u,v=RootOf(7*_Z^3-1),w=3*u*RootOf(7*_Z^3-1)+3*RootOf(7*
  _Z^3-1)^2}; r11 := -r2*7^(-1/3): v1 := 7^(-1/3): w1 := 3*u*7^(-1/3) + 3*7^(-2/3):
  solve((u+v1)^2 + 4*w1 < 0, u);
  zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\{r1=-r2\,RootOf(7\_Z^3-1),\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=u,\, v=RootOf(7\_Z^3-1),\, w=3\,RootOf(7\_Z^3-1)\,u+3\,RootOf(7\_Z^3-1)^2\}$$

$$RealRange\left(Open\left(-\frac{13}{7}\,7^{2/3}\right), Open\left(-\frac{1}{7}\,7^{2/3}\right)\right)$$

$$0,\ \frac{9}{7}\,r2\,7^{1/3}\,s1,\ -\frac{3}{7}\,7^{2/3}\,s1^2,\ \frac{s1^3}{r2}$$

$$\frac{27}{49}\,\frac{r2^3\,(7^{2/3}+7u)}{s1},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{7}\,s1^2\,(7^{2/3}+7u) \tag{10}$$

Нормировка системы (11).

```
> s11 := 7^(1/2)*(-(7*u+7^(2/3)))^(-1/2):
  zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,0):
```

$$0,\ \frac{9}{7}\,\frac{r2\,7^{5/6}}{\sqrt{-7^{2/3}-7u}},\ \frac{3\,7^{2/3}}{7^{2/3}+7u},\ \frac{7\sqrt{7}}{(-7^{2/3}-7u)^{3/2}\,r2}$$

$$-\frac{27}{343}\,r2^3\sqrt{7}\,(-7^{2/3}-7u)^{3/2},\ 0,\ 0,\ -1 \tag{11}$$

```
> r21 := 7^(5/6)*(-(7*u+7^(2/3)))^(-1/2)/3: r11 := -r21*7^(-1/3):
  zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r21,0):
```

$$0,\ -\frac{3\,7^{2/3}}{7^{2/3}+7u},\ \frac{3\,7^{2/3}}{7^{2/3}+7u},\ -\frac{3\,7^{2/3}}{7^{2/3}+7u}$$

$$-1,\ 0,\ 0,\ -1 \tag{12}$$

b) : частный случай ухода a) в $SF_7^{6,2}$.

```
> {r1 = r2*(RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)*v^2-6+v^3)/(v*(2*RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)-v)), r2 = r2, s1
  = RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)*s2, s2 = s2, u = (RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)*v^2-6+v^3)/(v*(2*RootOf
  (_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)-v)), v = v, w = (3*(RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)*v^2-2))/v};
```

$$\left\{r1=\frac{r2\,(RootOf(\_Z^2v+v^3-3-\_Zv^2)\,v^2-6+v^3)}{v\,(2\,RootOf(\_Z^2v+v^3-3-\_Zv^2)-v)},\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2v+v^3-3-\_Zv^2)\,s2,\ s2=s2,\ u\right. \tag{13}$$

$$\left.=\frac{RootOf(\_Z^2v+v^3-3-\_Zv^2)\,v^2-6+v^3}{v\,(2\,RootOf(\_Z^2v+v^3-3-\_Zv^2)-v)},\ v=v,\ w=\frac{3\,(RootOf(\_Z^2v+v^3-3-\_Zv^2)\,v^2-2)}{v}\right\}$$

```
> solve(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2, _Z);
  kk1 := (1/2)*(v^2+sqrt(3)*sqrt(v)*sqrt(4-v^3))/v:
  kk2 := -(1/2)*(-v^2+sqrt(3)*sqrt(v)*sqrt(4-v^3))/v:
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2+\sqrt{-3\,v^4+12\,v}}{v},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-v^2+\sqrt{-3\,v^4+12\,v}}{v} \qquad \textbf{(14)}$$

Решение (13) с первым значением корня из (14) :

```
> r11 := (r2*(kk1*v^2-6+v^3)/(v*(2*kk1-v))): s11 := kk1*s2:
  u1 := simplify((kk1*v^2-6+v^3)/(v*(2*kk1-v))): w1 := (3*(kk1*v^2-2))/v:
  solve((u1+v)^2 + 4*w1 < 0, v);
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$RealRange(Open(0),\ Open(1))$$

$$0$$

$$\frac{(-v^3+4)^{3/2}\sqrt{3}\;r2\,s2}{v^{3/2}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}\;s2^2\,(-v^3+4)^{3/2}}{v^{3/2}}$$

$$\frac{(-v^3+4)^{3/2}\sqrt{3}\;s2^3}{r2\,v^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\;v^{9/2}\sqrt{-v^3+4}+v^6-4\sqrt{3}\;v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}-8\,v^3+16\right)r2^3}{v^{3/2}\,s2\sqrt{-v^3+4}}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{3}\;v^{7/2}\sqrt{-v^3+4}-3\,v^5-4\sqrt{3}\sqrt{v}\sqrt{-v^3+4}+12\,v^2\right)v^3\,s2^2\sqrt{v^5}}{\sqrt{v^{15}}} \qquad \textbf{(15)}$$

Нормировка системы (16).

```
> solve(v^(3/2)*sqrt(3)-sqrt(4-v^3) < 0, v);
  s21 := sqrt(2)*v^(3/4)/(3^(1/4)*(4-v^3)^(1/2)*(-v^(3/2)*sqrt(3) + sqrt(-v^3+4))^(1/2)):
  s11 := kk1*s21:
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$RealRange(0,\ Open(1))$$

$$0$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,(v^3-4)\,3^{1/4}\,r2}{\sqrt{-\sqrt{3}\;v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}}\;v^{3/4}}$$

$$\frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\;v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}}$$

$$\frac{2}{3}\,\frac{v^{3/4}\,3^{3/4}\sqrt{2}}{r2\left(-\sqrt{3}\;v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{3}\;v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}}\;3^{3/4}\left(\sqrt{3}\;v^{9/2}\sqrt{-v^3+4}+v^6-4\sqrt{3}\;v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}-8\,v^3+16\right)r2^3}{v^{9/4}}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}-3\,v^{3/2}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\;v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}} \qquad \textbf{(16)}$$

Упрощение скобки в элементе a_2 системы (16).

```
> (v^6+v^(9/2)*sqrt(3)*sqrt(-v^3+4)-8*v^3-4*v^(3/2)*sqrt(3)*sqrt(-v^3+4)+16) = factor(v^6-8*v^3+16) +
  factor(v^(9/2)*sqrt(3) - 4*v^(3/2)*sqrt(3))*sqrt(-v^3+4);
  v^6+v^(9/2)*sqrt(3)*sqrt(-v^3+4)-8*v^3-4*v^(3/2)*sqrt(3)*sqrt(-v^3+4)+16 = (4-v^3)*(4-v^3-v^(3/2)*
  sqrt(3)*sqrt(-v^3+4));
  v^6+v^(9/2)*sqrt(3)*sqrt(-v^3+4)-8*v^3-4*v^(3/2)*sqrt(3)*sqrt(-v^3+4)+16 = (-v^3+4)^(3/2)*(sqrt(-
  v^3+4) - v^(3/2)*sqrt(3));
```

$$v^6+v^{9/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}-8\,v^3-4\,v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}+16=(v^3-4)^2+v^{3/2}\sqrt{3}\,(v^{3/2}-2)\,(v^{3/2}+2)\sqrt{-v^3+4}$$

$$v^6+v^{9/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}-8\,v^3-4\,v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}+16=(-v^3+4)\left(-v^3-v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}+4\right)$$

$$v^6+v^{9/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}-8\,v^3-4\,v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{-v^3+4}+16=(-v^3+4)^{3/2}\left(\sqrt{-v^3+4}-v^{3/2}\sqrt{3}\right) \qquad \textbf{(17)}$$

```
> r21 := sqrt(2)*v^(3/4)/(3^(1/4)*(4-v^3)^(1/2)*(-v^(3/2)*sqrt(3) + sqrt(-v^3+4))^(1/2)):
  r11 := (r21*(kk1*v^2-6+v^3)/(v*(2*kk1-v))):
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ -\frac{2\,(v^3-4)^4\,v^2\sqrt{v^5}}{\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}\right)\sqrt{v^9}\,\sqrt{-(v^3-4)^7}},\ \frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\,v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}},\ -\frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\,v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}\,v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}+v^3-4}{\sqrt{-v^3+4}\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}\right)},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3}\,\frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{v}\sqrt{-v^3+4}-3\,v^2\right)\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}-\sqrt{-v^3+4}\right)\sqrt{v}} \qquad \textbf{(18)}$$

```
> u_new = ((4-v^3)*(v^2*((v^2+(12*v-3*v^4)^(1/2))*(2*v)^(-1))-2)^(-1));
```

$$u\_new=\frac{-v^3+4}{\frac{1}{2}\,v\left(v^2+\sqrt{-3\,v^4+12\,v}\right)-2} \qquad \textbf{(19)}$$

Решение (13) со вторым значением корня из (14) :

```
> r12 := (r2*(kk2*v^2-6+v^3)/(v*(2*kk2-v))): s12 := kk2*s2:
  u2 := (kk2*v^2-6+v^3)/(v*(2*kk2-v)): w2 := (3*(kk2*v^2-2))/v: solve((u2+v)^2 + 4*w2 < 0, v);
  zamproc(u2,w2,u2/v-v*(u2*v+w2),u2+w2/v,1,0,1/v-v^2,1, r12,s12,r2,s2):
```

$$RealRange\left(Open(0),\ Open\left(\frac{1}{13}\,7^{2/3}\,13^{2/3}\right)\right)$$

$$0,\ \frac{(v^3-4)^3\,v^{3/2}\sqrt{3}\,s2\,r2\sqrt{v^5}}{\sqrt{-(v^3-4)^3}\,\sqrt{v^{11}}},\ \frac{\sqrt{3}\,s2^2\,(-v^3+4)^{3/2}}{v^{3/2}},\ -\frac{(-v^3+4)^{3/2}\,v^{3/2}\sqrt{3}\,s2^3\sqrt{v^3}}{r2\sqrt{v^9}}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{3}\,v^{9/2}\sqrt{-v^3+4}-v^6-4\sqrt{3}\,v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}+8\,v^3-16\right)\sqrt{3}\,r2^3}{v^{3/2}\,s2\sqrt{-v^3+4}},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}-v^3+4\right)\sqrt{-v^3+4}\,\sqrt{3}\,s2^2}{v^{3/2}} \qquad \textbf{(20)}$$

Нормировка системы (20).

```
> s22 := sqrt(2)*v^(3/4)/(3^(1/4)*(4-v^3)^(1/2)*(v^(3/2)*sqrt(3)+sqrt(-v^3+4))^(1/2)): s12 := kk2*s22:
  zamproc(u2,w2,u2/v-v*(u2*v+w2),u2+w2/v,1,0,1/v-v^2,1, r12,s12,r2,s22, lbl = true):
```

$$0$$

$$\frac{\sqrt{2}\,(v^3-4)\,3^{1/4}\,r2}{\sqrt{\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}}\;v^{3/4}}$$

$$\frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}}$$

$$-\frac{2}{3}\,\frac{v^{3/4}\,3^{3/4}\sqrt{2}}{r2\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}}\left(\sqrt{3}\,v^{9/2}\sqrt{-v^3+4}-v^6-4\sqrt{3}\,v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}+8\,v^3-16\right)3^{3/4}\,r2^3}{v^{9/4}}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{v}\sqrt{-v^3+4}+3\,v^2\right)\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}\right)\sqrt{v}} \qquad \textbf{(21)}$$

Упрощение скобки в элементе a_2 системы (21).

```
> -v^6+v^(9/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3)+8*v^3-4*v^(3/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3)-16 = factor(-v^6 + 8*v^3 - 16)
  + factor(v^(9/2) - 4*v^(3/2))*sqrt(3)*sqrt(4-v^3);
  -v^6+v^(9/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3)+8*v^3-4*v^(3/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3)-16 = (4 - v^3)*(-(4-v^3) - v^
  (3/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3));
  -v^6+v^(9/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3)+8*v^3-4*v^(3/2)*sqrt(3)*sqrt(4-v^3)-16 = -(4 - v^3)^(3/2)*(v^(3/2)*
  sqrt(3)+sqrt(4-v^3));
```

$$-v^6+v^{9/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}+8\,v^3-4\,v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}-16=-(-4+v^3)^2+v^{3/2}\,(v^{3/2}-2)\,(v^{3/2}+2)\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}$$

$$-v^6+v^{9/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}+8\,v^3-4\,v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}-16=(4-v^3)\left(v^3-v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}-4\right)$$

$$-v^6+v^{9/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}+8\,v^3-4\,v^{3/2}\sqrt{3}\sqrt{4-v^3}-16=-(4-v^3)^{3/2}\left(v^{3/2}\sqrt{3}+\sqrt{4-v^3}\right) \qquad \textbf{(22)}$$

```
> r22 := sqrt(2)*v^(3/4)/(3^(1/4)*sqrt((v^(3/2)*sqrt(3)+sqrt(4-v^3)))*(4-v^3)^(1/2)):
  r12 := (r22*(kk2*v^2-6+v^3)/(v*(2*kk2-v))):
  zamproc(u2,w2,u2/v-v*(u2*v+w2),u2+w2/v,1,0,1/v-v^2,1, r12,s12,r22,s22):
```

$$0,\ -\frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}},\ \frac{2\,v\sqrt{v^5}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{v^7}\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}\right)},\ -\frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}}$$

$$\frac{\sqrt{3}\,v^{3/2}\sqrt{-v^3+4}-v^3+4}{\sqrt{-v^3+4}\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}\right)},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3}\,\frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{v}\sqrt{-v^3+4}+3\,v^2\right)\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}\right)\sqrt{v}} \qquad \textbf{(23)}$$

```
> u_new = -2*sqrt(4-v^3)/(v^(3/2)*sqrt(3)+sqrt(4-v^3));
```

$$u\_new=-\frac{2\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{3}\,v^{3/2}+\sqrt{-v^3+4}} \qquad \textbf{(24)}$$

c) :

```
> {r1 = -(1/8)*r2*u, r2 = r2, s1 = RootOf(16*_Z^2*u+u^3+192+4*u^2*_Z)*s2, s2 = s2, v = -(1/4)*u, w = -
  (3/8*(-u+RootOf(16*_Z^2*u+u^3+192+4*u^2*_Z)))*u};
```

$$\left\{r1 = -\frac{1}{8}\, r2\, u, r2 = r2, s1 = RootOf(16\,\_Z^2\, u + u^3 + 192 + 4\, u^2\,\_Z)\, s2, s2 = s2, v = -\frac{1}{4}\, u, w = -\frac{3}{8}\,(-u + RootOf(16\,\_Z^2\, u + u^3 + 192 + 4\, u^2\,\_Z))\, u\right\} \quad (25)$$

Выразим в (25) v через u.

```
> u1 := -4*v:    {r1=-(1/8)*r2*u1,r2=r2,s1=RootOf(16*_Z^2*u1+u1^3+192+4*u1^2*_Z)*s2,s2=s2,u=-4*v,w=-
  (3/8*(-u1+RootOf(16*_Z^2*u1+u1^3+192+4*u1^2*_Z)))*u1};
```

$$\left\{r1 = \frac{1}{2}\, v\, r2, r2 = r2, s1 = RootOf(\_Z^2\, v - \_Z\, v^2 + v^3 - 3)\, s2, s2 = s2, u = -4\, v, w = \frac{3}{2}\,(4\, v + RootOf(\_Z^2\, v - \_Z\, v^2 + v^3 - 3))\, v\right\} \quad (26)$$

```
> solve(_Z^2*v+v^3-3-v^2*_Z, _Z);
  kk1 := -(1/2)*(-v^2+sqrt(-3*v^4+12*v))/v:  kk2 := (1/2)*(v^2+sqrt(-3*v^4+12*v))/v:
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2 + \sqrt{-3\, v^4 + 12\, v}}{v}, -\frac{1}{2}\,\frac{-v^2 + \sqrt{-3\, v^4 + 12\, v}}{v} \quad (27)$$

Решение (26) со вторым значением корня из (27) :

```
> w1 := simplify((3/2*(4*v+kk1))*v): solve((u1+v)^2+4*w1<0,v); r11 := v*r2/2: s11 := kk1*s2:
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$RealRange\left(Open(0), Open\left(\frac{1}{7}\, 28^{1/3}\right)\right)$$

$$0$$

$$-\frac{1}{8}\,\frac{r2\, s2\,(v^3-4)\left(3\sqrt{-v\,(v^3-4)}\,\sqrt{3}\, v + v^3 - 4\right)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{s2^2\,(v^3-4)\left(3\sqrt{-v\,(v^3-4)}\,\sqrt{3}\, v + v^3 - 4\right)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{s2^3\,(v^3-4)\left(3\sqrt{-v\,(v^3-4)}\,\sqrt{3}\, v + v^3 - 4\right)\sqrt{3}}{v\, r2\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{3}{8}\,\frac{r2^3\,(v^3-4)}{s2}$$

$$0$$

$$0$$

$$3\, s2^2\,(v^3-4) \quad (28)$$

```
> s21 := 1/(3^(1/2)*(4-v^3)^(1/2)): s11 := kk1*s21:
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s21):
```

$$0, \frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{-v^3+4}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v + v^3 - 4\right) r2}{v\sqrt{-v\,(v^3-4)}}, \frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v + v^3 - 4\right)}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v}, \frac{1}{6}\,\frac{3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v + v^3 - 4}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, r2\,\sqrt{-v^3+4}\, v},$$

$$\frac{3}{8}\,\sqrt{3}\,(-v^3+4)^{3/2}\, r2^3, 0, 0, -1 \quad (29)$$

```
> r21 := -2/(sqrt(3)*(4-v^3)^(1/2)): r11 := v*r21/2:
  zamproc(u1,w1,u1/v-v*(u1*v+w1),u1+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r21,s21):
```

$$0, -\frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v + v^3 - 4\right)}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v}, \frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v + v^3 - 4\right)}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v}, -\frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v + v^3 - 4\right)}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\, v}$$

$$-1, 0, 0, -1 \quad (30)$$

```
> u_new = (1/12)*(9*v^2-sqrt(3)*sqrt(-v*(v^3-4)))/v^2;
```

$$u\_new = \frac{1}{12}\,\frac{9\, v^2 - \sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}}{v^2} \quad (31)$$

Решение (26) с первым значением корня из (27) не определено :

```
> u1 := -4*v: w2 := simplify((3/2*(4*v+kk2))*v):
  solve((u1+v)^2 + 4*w2 < 0, v); simplify((u1+v)^2 + 4*w2); # D > 0 !!!
```

$$36\, v^2 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)} \quad (32)$$

d) : частный случай ухода b) в $SF_7^{6,2}$.

```
> {r1 = r2*u, r2 = r2, s1 = s2*(-u+RootOf(u^2*_Z-_Z^2*u+_Z^3-3)), s2 = s2, v = RootOf(u^2*_Z-_Z^2*u+
  _Z^3-3), w = -2*u^2-u*RootOf(u^2*_Z-_Z^2*u+_Z^3-3)+RootOf(u^2*_Z-_Z^2*u+_Z^3-3)^2};
```

$$\{r1 = r2\, u, r2 = r2, s1 = s2\,(-u + RootOf(u^2\,\_Z - \_Z^2\, u + \_Z^3 - 3)), s2 = s2, v = RootOf(u^2\,\_Z - \_Z^2\, u + \_Z^3 - 3), w = -2\, u^2 - u\, RootOf(u^2\,\_Z - \_Z^2\, u + \_Z^3 - 3) + RootOf(u^2\,\_Z - \_Z^2\, u + \_Z^3 - 3)^2\} \quad (33)$$

У кубического многочлена из (33) один вещественный корень :

```
> solve(u^2*_Z-_Z^2*u+_Z^3-3, _Z);  diff(u^2*_Z-_Z^2*u+_Z^3-3, _Z)=(_Z-u)^2 + 2*_Z^2;
  kk1 := (1/6)*(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)-(4/3)*u^2/(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*
  u^3+81))^(1/3)+(1/3)*u:
```

$$\frac{1}{6}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}-\frac{4}{3}\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}u,\ -\frac{1}{12}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}+\frac{2}{3}\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}u+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}+\frac{4}{3}\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}\right),\ -\frac{1}{12}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}+\frac{2}{3}\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}u-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}+\frac{4}{3}\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}\right)$$

$$3\_Z^2-2\_Z\,u+u^2=(\_Z-u)^2+2\_Z^2 \tag{34}$$

```
> r11:=r2*u: s11:=s2*(-u+kk1): v1:=evala(kk1): w1:=(-2*u^2-u*kk1+kk1^2): solve((u+v1)^2+4*w1<0,u);
  radnormal(((1/2305927260)*(26896688+2533986*sqrt(114))^(4/3)-(1424/69615)*(26896688+2533986*sqrt
  (114))^(1/3))^3)^(1/3);   solve(v1 < 4^(1/3), u);
  # zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$RealRange(-\infty, Open(-1)),\ RealRange\left(Open\left(\frac{1}{2305927260}\left(26896688+2533986\sqrt{114}\right)^{4/3}-\frac{1424}{69615}\left(26896688+2533986\sqrt{114}\right)^{1/3}\right),\ \infty\right)$$

$$\frac{1}{91}\,125^{1/3}\,91^{2/3}$$

$$RealRange(-\infty, Open(0)),\ RealRange\left(Open(0), Open\left(\frac{1}{2}2^{2/3}\right)\right),\ RealRange\left(Open\left(\frac{1}{2}2^{2/3}\right), \infty\right) \tag{35}$$

Обозначим вещественный корень из (34) за θ :

```
> r11 := r2*u: s11 := s2*(-u+theta): v1 := theta: w1 := (-2*u^2-u*theta+theta^2):
  zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
  #pm2(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1);
```

$$0$$
$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^2u-\theta u^2-1)\,r2\,s2}{\theta}$$
$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^3-2\theta^2u+2\theta u^2-2)\,s2^2}{\theta}$$
$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^2u-\theta u^2-1)\,s2^3}{r2\,\theta}$$
$$-\frac{r2^3(u+\theta)(\theta^2u-\theta u^2-1)}{s2\,\theta}$$
$$-\frac{(u+\theta)(\theta^3-\theta^2u+\theta u^2-3)\,r2^2}{\theta}$$
$$-\frac{(u+\theta)(\theta^3-\theta^2u+\theta u^2-3)\,r2\,s2}{\theta}$$
$$-\frac{(u+\theta)(\theta^2u-\theta u^2-1)\,s2^2}{\theta} \tag{36}$$

```
> solve(u^2*theta-u*theta^2+1, theta);
```

$$\frac{1}{2}\frac{u^2+\sqrt{u^4+4u}}{u},\ -\frac{1}{2}\frac{-u^2+\sqrt{u^4+4u}}{u} \tag{37}$$

```
> s21:=abs(theta)^(1/2)/(abs(u+theta)^(1/2)*abs(u^2*theta-u*theta^2+1)^(1/2)): s11:=s21*(-u+theta):
  zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$0$$
$$-\frac{r2\,(-2u+\theta)(\theta^2u-\theta u^2-1)\left|\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{u+\theta}\,\sqrt{\theta^2u-\theta u^2-1}}\right|}{\theta}$$
$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^3-2\theta^2u+2\theta u^2-2)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\left|\frac{\theta^{3/2}}{(u+\theta)^{3/2}(\theta^2 u-\theta u^2-1)^{3/2}}\right|}{r2\,\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,r2^3\left|\frac{\sqrt{u+\theta}\,\sqrt{\theta^2 u-\theta u^2-1}}{\sqrt{\theta}}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3)\,r2^2}{\theta}$$

$$-\frac{r2\,(u+\theta)(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3)\left|\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{u+\theta}\,\sqrt{\theta^2 u-\theta u^2-1}}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta} \tag{38}$$

```
> r21:=abs(theta)^(1/2)/(abs(u+theta)^(1/2)*abs(u^2*theta-u*theta^2+1)^(1/2)): r11:=r21*u:
  zamproc(u,w1,u/v1-v1*(u*v1+w1),u+w1/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$0$$

$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^3-2\theta^2 u+2\theta u^2-2)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(-2u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta}$$

$$-\frac{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(\theta^2 u-\theta u^2-1)}\right|}{\theta} \tag{39}$$

Значение параметра u в системе (39) и упрощение σ :

```
> u_new = (2*u-theta)/(u+theta);
  sigma = (u+theta)*(u^2*theta-u*theta^2+1)*abs(theta/((u+theta)*(u^2*theta-u*theta^2+1)))/theta;
  # plot((u+kk1)*(u^2*kk1-u*kk1^2+1), u = -2..2); solve((u+kk1)*(u^2*kk1-u*kk1^2+1)=0, u);
  sigma = sgn(u+1);
```

$$u\_new=\frac{2u-\theta}{u+\theta}$$

$$\sigma=\frac{(u+\theta)(-\theta^2 u+\theta u^2+1)\left|\frac{\theta}{(u+\theta)(-\theta^2 u+\theta u^2+1)}\right|}{\theta}$$

$$\sigma=sgn(u+1) \tag{40}$$

Поиск замен к $SF_6^{6,2}$.

```
> solve([M[1,3], M[2,2]], {r1,s1,r2,s2,u,v,w}):
  solve([M[1,3], M[2,2]], {r1,s1,r2,s2,v,w}):
> {r1=-r2*(u^2*v-2*v^2*u+3)/(v*(2*u-v)), r2=r2, s1=s2*u, s2=s2, v=v, w=(3*(5*u+2*v-v^3*u+6*u^3*v-6*
  u^2*v^2-v^4+u^5*v^2-4*u^4*v^3+4*v^4*u^3-2*v^5*u^2+v^6*u))/(v*(u^2*v-v^2*u-3+v^3)*(2*u-v))};
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,(u^2 v-2 v^2 u+3)}{v\,(2 u-v)},\ r2=r2,\ s1=s2\,u,\ s2=s2,\ v=v,\ w=\frac{3\,(5 u+2 v-v^3 u+6 u^3 v-6 u^2 v^2-v^4+u^5 v^2-4 u^4 v^3+4 v^4 u^3-2 v^5 u^2+v^6 u)}{v\,(u^2 v-v^2 u-3+v^3)\,(2 u-v)}\right\} \tag{41}$$

```
> r11 := -r2*(u^2*v-2*v^2*u+3)/(v*(2*u-v)): s11 := u*s2:
  w1 := (3*(5*u+2*v-v^3*u+6*u^3*v-6*u^2*v^2-v^4+u^5*v^2-4*u^4*v^3+4*v^4*u^3-2*v^5*u^2+v^6*u))/(v*(u^2*
  v-v^2*u-3+v^3)*(2*u-v)):
  zamproc(u,w1,u/v-v*(u*v+w1),u+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$-\frac{(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\,r2^2}{v^2\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)\,(2 u-v)^2}$$

$$\frac{3\,s2\,r2\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)}{v^2\,(2 u-v)^2}$$

$$0$$

$$-\frac{(u^2 v-u v^2+1)\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\,s2^3}{v\,r2\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)}$$

$$\frac{(u^2 v-u v^2+1)^2\,(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)^2\,r2^3}{v^3\,s2\,(2 u-v)^3\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)}$$

$$0$$

$$-\frac{3\,r2\,s2\,(u^2 v-u v^2+1)^2}{v^2\,(2 u-v)}$$

$$\frac{s2^2\,(u^2 v-u v^2+1)^2\,(2 u-v)}{v\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)} \tag{42}$$

Нормировка системы (42).

```
> s21 := sqrt(v)*sqrt(abs(u^2*v-v^2*u-3+v^3))/((u^2*v-v^2*u+1)*sqrt(abs(2*u-v))): s11 := u*s21:
  zamproc(u,w1,u/v-v*(u*v+w1),u+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\,r2^2}{v^2\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)\,(2 u-v)^2}$$

$$\frac{3\,r2\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\left|\dfrac{\sqrt{u^2 v-u v^2+v^3-3}}{\sqrt{2 u-v}}\right|}{v^{3/2}\,(2 u-v)^2}$$

$$0$$

$$-\frac{\sqrt{v}\left|\dfrac{(u^2 v-u v^2+v^3-3)^{3/2}}{(2 u-v)^{3/2}}\right|(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)}{(u^2 v-u v^2+v^3-3)\,r2\,(u^2 v-u v^2+1)^2}$$

$$\frac{(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)^2\,(u^2 v-u v^2+1)^3\,r2^3\left|\dfrac{\sqrt{2 u-v}}{\sqrt{u^2 v-u v^2+v^3-3}}\right|}{(u^2 v-u v^2+v^3-3)\,(2 u-v)^3\,v^{7/2}}$$

$$0$$

$$-\frac{3\,r2\,(u^2 v-u v^2+1)\left|\dfrac{\sqrt{u^2 v-u v^2+v^3-3}}{\sqrt{2 u-v}}\right|}{v^{3/2}\,(2 u-v)}$$

$$\frac{(2 u-v)\left|\dfrac{u^2 v-u v^2+v^3-3}{2 u-v}\right|}{u^2 v-u v^2+v^3-3} \tag{43}$$

```
> r21 := v^(7/6)*sqrt(abs(u^2*v-v^2*u-3+v^3))*abs(2*u-v)^(5/6)/((u^2*v-v^2*u+1)*(9-2*v^3-v^2*u+u^2*v)^
  (2/3)):   r11 := -r21*(u^2*v-2*v^2*u+3)/(v*(2*u-v)):
  zamproc(u,w1,u/v-v*(u*v+w1),u+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{v^{1/3}\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\,\left|(2 u-v)^{5/3}\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)\right|}{(2 u-v)^2\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)^{1/3}\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)}$$

$$\frac{3\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\,\left|(2 u-v)^{1/3}\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)\right|}{v^{1/3}\,(2 u-v)^2\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)^{2/3}}$$

$$0$$

$$-\frac{(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)^{2/3}\,(u^3 v-3 u^2 v^2+u v^3-v^4+5 u+2 v)\left|\dfrac{u^2 v-u v^2+v^3-3}{(2 u-v)^{7/3}}\right|}{v^{2/3}\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)}$$

$$\frac{\left|(2 u-v)^3\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)\right|}{(2 u-v)^3\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)}$$

$$0$$

$$-\frac{3\,\left|(2 u-v)^{1/3}\,(u^2 v-u v^2+v^3-3)\right|}{v^{1/3}\,(2 u-v)\,(u^2 v-u v^2-2 v^3+9)^{2/3}}$$

$$\frac{(2u-v)\left|\frac{u^2 v-u v^2+v^3-3}{2u-v}\right|}{u^2 v-u v^2+v^3-3} \tag{44}$$

Значения параметров в системе (44):

```
> u_new = simplify(-v^(1/3)*(u^3*v-3*u^2*v^2+v^3*u+5*u-v^4+2*v)/((2*u-v)^(1/3)*(u^2*v-v^2*u+1)*(u^2*
  v+9-v^2*u-2*v^3)^(1/3)));
  #v_new = simplify((-v^(1/3)*(u^3*v-3*u^2*v^2+v^3*u+5*u-v^4+2*v)*abs((2*u-v)^(5/3)*(u^2*v-v^2*u-3+
  v^3))/((2*u-v)^2*(u^2*v-v^2*u+1)*(u^2*v+9-v^2*u-2*v^3)^(1/3)*(u^2*v-v^2*u-3+v^3)))/(-(u^2*v+9-v^2*
  u-2*v^3)^(2/3)*(u^3*v-3*u^2*v^2+v^3*u+5*u-v^4+2*v)*abs((u^2*v-v^2*u-3+v^3)/(2*u-v)^(7/3))/(v^(2/3)*
  (u^2*v-v^2*u+1)*(u^2*v-v^2*u-3+v^3))))^(1/3);
  v_new = (v*(2*u-v)^2/((u^2*v+9-v^2*u-2*v^3)))^(1/3);
  sigma = (2*u-v)*abs((u^2*v-v^2*u-3+v^3)/(2*u-v))/(u^2*v-v^2*u-3+v^3);
  # solve(u^2*v-u*v^2-3+v^3, u);
```

$$u\_new = -\frac{v^{1/3}\,(u^3 v-3u^2v^2+u v^3-v^4+5u+2v)}{(2u-v)^{1/3}\,(u^2 v-u v^2+1)\,(u^2v-uv^2-2v^3+9)^{1/3}}$$

$$v\_new = \left(\frac{v\,(2u-v)^2}{u^2v-uv^2-2v^3+9}\right)^{1/3}$$

$$\sigma = \frac{(2u-v)\left|\frac{u^2 v-u v^2+v^3-3}{2u-v}\right|}{u^2 v-u v^2+v^3-3} \tag{45}$$

Поиск замен к $SF_7^{6,2}$.

```
> solve([M[2,2], M[2,3]], {r1,s1,r2,s2,u,v,w}):
  solve([M[2,2], M[2,3]], {r1,s1,r2,s2,v,w}):
```

Рассмотрение возможных решений.

а) :

```
> {r1 = r2*(v^2*RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)-6+v^3)/(v*(2*RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)-v)), r2 = r2, s1
  = RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)*s2, s2 = s2, u = (v^2*RootOf(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)-6+v^3)/(v*(2*RootOf
  (_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2)-v)), v = v, w = w};
```

$$\left\{r1 = \frac{r2\,(v^2\,RootOf(\_Z^2 v+v^3-3-\_Z v^2)-6+v^3)}{v\,(2\,RootOf(\_Z^2 v+v^3-3-\_Z v^2)-v)}, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^2 v+v^3-3-\_Z v^2)\,s2, s2=s2, u = \frac{v^2\,RootOf(\_Z^2 v+v^3-3-\_Z v^2)-6+v^3}{v\,(2\,RootOf(\_Z^2 v+v^3-3-\_Z v^2)-v)}, v=v, w=w\right\} \tag{46}$$

```
> solve(_Z^2*v+v^3-3-_Z*v^2, _Z);
  kk1 := (1/2)*(v^2+sqrt(-3*v^4+12*v))/v: kk2 := -(1/2)*(-v^2+sqrt(-3*v^4+12*v))/v:
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2+\sqrt{-3v^4+12v}}{v},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-v^2+\sqrt{-3v^4+12v}}{v} \tag{47}$$

Решение (46) с первым значением корня из (47) :

```
> r11 := r2*evala((v^2*kk1-6+v^3)/(v*(2*kk1-v))): s11 := kk1*s2:
  u1 := evala((v^2*kk1-6+v^3)/(v*(2*kk1-v))):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{6}\,\frac{r2^2\,(v^3-4)\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v+3v^3-2vw-12\right)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v}$$

$$\frac{r2\,s2\,(v^3-4)^2\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v}$$

$$-\frac{s2^2\,(v^3-4)^2\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{s2^3\,(v^3-4)\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v-3v^3-2vw+12\right)\sqrt{3}}{v\,r2\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{r2^3\,w\,(v^3-4)\sqrt{3}}{s2\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{s2^2\,w\,(v^3-4)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}} \tag{48}$$

Нормировка системы (48).

```
> s21 := 3^(1/4)*v^(1/4)/(sqrt(-w)*(-v^3+4)^(1/4)): s11 := kk1*s21:
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{6}\,\frac{r2^2\,(v^3-4)\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v+3v^3-2vw-12\right)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v}$$

$$\frac{r2\, 3^{3/4}\,(-v^3+4)^{7/4}}{\sqrt{-w}\; v^{3/4}\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{3\,(-v^3+4)^{3/2}}{\sqrt{v}\; w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{3^{1/4}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v-3\,v^3-2\,v\,w+12\right)(-v^3+4)^{1/4}}{v^{1/4}\,(-w)^{3/2}\, r2\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{3^{1/4}\, r2^3\,(-w)^{3/2}\,(-v^3+4)^{5/4}}{v^{1/4}\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}} \qquad \textbf{(49)}$$

```
> r21:=3^(1/4)*v^(1/4)/((-w)^(1/2)*(-v^3+4)^(1/4)): r11:=r21*evala((v^2*kk1-6+v^3)/(v*(2*kk1-v))):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v+3\,v^3-2\,v\,w-12\right)\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{v}\; w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{3\,(-v^3+4)^{3/2}}{\sqrt{v}\; w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{3\,(-v^3+4)^{3/2}}{\sqrt{v}\; w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v-3\,v^3-2\,v\,w+12\right)\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{v}\; w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}} \qquad \textbf{(50)}$$

Значения параметров в системе (50):

```
> u_new = ((1/2)*(3*v^3-2*w*v+3*v*sqrt(3)*sqrt(-v*(-4+v^3))-12)/(v*w));
  v_new = 3*(4-v^3)/(v*w);  sigma = -1;
```

$$u\_new=\frac{1}{2}\,\frac{3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v+3\,v^3-2\,v\,w-12}{v\,w}$$

$$v\_new=\frac{3\,(-v^3+4)}{v\,w}$$

$$\sigma=-1 \qquad \textbf{(51)}$$

Решение (46) со вторым значением корня из (47) :

```
> r11 := r2*evala((v^2*kk2-6+v^3)/(v*(2*kk2-v))): s11 := kk2*s2:
  u1 := evala((v^2*kk2-6+v^3)/(v*(2*kk2-v))):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{6}\,\frac{r2^2\,(v^3-4)\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v-3\,v^3+2\,v\,w+12\right)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v}$$

$$-\frac{r2\,s2\,(v^3-4)^2\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v}$$

$$\frac{s2^2\,(v^3-4)^2\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{s2^3\,(v^3-4)\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\; v+3\,v^3+2\,v\,w-12\right)\sqrt{3}}{v\, r2\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{r2^3\, w\,(v^3-4)\sqrt{3}}{s2\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{s2^2\,w\,(v^3-4)\,\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}} \quad \textbf{(52)}$$

Нормировка системы (52).

```
> s21 := 3^(1/4)*v^(1/4)/((-w)^(1/2)*(-v^3+4)^(1/4)): s11 := kk2*s21:
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{6}\,\frac{r2^2\,(v^3-4)\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v-3\,v^3+2\,v\,w+12\right)\sqrt{3}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v}$$

$$-\frac{r2\,3^{3/4}\,(-v^3+4)^{7/4}}{\sqrt{-w}\;v^{3/4}\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{3\,(-v^3+4)^{3/2}}{\sqrt{v}\;w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{3^{1/4}\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v+3\,v^3+2\,v\,w-12\right)(-v^3+4)^{1/4}}{v^{1/4}\,(-w)^{3/2}\,r2\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{3^{1/4}\,r2^3\,(-w)^{3/2}\,(-v^3+4)^{5/4}}{v^{1/4}\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}} \quad \textbf{(53)}$$

```
> r21:=3^(1/4)*v^(1/4)/((-w)^(1/2)*(-v^3+4)^(1/4)): r11:=r21*evala((v^2*kk2-6+v^3)/(v*(2*kk2-v))):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v-3\,v^3+2\,v\,w+12\right)\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{v}\;w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{3\,(-v^3+4)^{3/2}}{\sqrt{v}\;w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{3\,(-v^3+4)^{3/2}}{\sqrt{v}\;w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v+3\,v^3+2\,v\,w-12\right)\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{v}\;w\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{\sqrt{-v\,(v^3-4)}} \quad \textbf{(54)}$$

Значения параметров в системе (54):

```
> u_new = (1/2)*(3*v^3-3*v*sqrt(3)*sqrt(-v*(-4+v^3))-2*w*v-12)/(v*w);
  v_new = 3*(4-v^3)/(v*w);  sigma = 1;
```

$$u\_new=\frac{1}{2}\,\frac{-3\sqrt{3}\,\sqrt{-v\,(v^3-4)}\;v+3\,v^3-2\,v\,w-12}{v\,w}$$

$$v\_new=\frac{3\,(-v^3+4)}{v\,w}$$

$$\sigma=1 \quad \textbf{(55)}$$

b) :

```
> {r1=r2*u,r2=r2,s1=s2*(-u+RootOf(u^2*_Z-u*_Z^2+_Z^3-3)),s2=s2,v=RootOf(u^2*_Z-u*_Z^2+_Z^3-3),w=w};
```

$$\{r1=r2\,u,\,r2=r2,\,s1=s2\,(-u+RootOf(u^2\,\_Z-u\,\_Z^2+\_Z^3-3)),\,s2=s2,\,v=RootOf(u^2\,\_Z-u\,\_Z^2+\_Z^3-3),\,w=w\} \quad \textbf{(56)}$$

```
> solve(u^2*_Z-u*_Z^2+_Z^3-3, _Z);    kk1 := (1/6)*(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)-(4/3)*
  u^2/(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)+(1/3)*u:
```

$$\frac{1}{6}\left(-28\,u^3+324+36\sqrt{u^6-14\,u^3+81}\right)^{1/3}-\frac{4}{3}\,\frac{u^2}{\left(-28\,u^3+324+36\sqrt{u^6-14\,u^3+81}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}\,u,\;-\frac{1}{12}\left(-28\,u^3+324\right. \quad \textbf{(57)}$$

$$\left.+36\sqrt{u^6-14\,u^3+81}\right)^{1/3}+\frac{2}{3}\,\frac{u^2}{\left(-28\,u^3+324+36\sqrt{u^6-14\,u^3+81}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}\,u+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-28\,u^3+324\right.\right.$$

$$+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\Big)^{1/3}+\frac{4}{3}\,\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}\Bigg),\ -\frac{1}{12}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}$$
$$+\frac{2}{3}\,\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}u-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\,\frac{u^2}{\left(-28u^3+324+36\sqrt{u^6-14u^3+81}\right)^{1/3}}\right)$$

Положительность вещественного корня в (57):

```
> minimize((1/6)*(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)-(4/3)*u^2/(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*
  u^3+81))^(1/3)+(1/3)*u);
  # plot((1/6)*(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)-(4/3)*u^2/(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*
  u^3+81))^(1/3)+(1/3)*u, u = -100..100);
  #minimize((1/6)*(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)-(4/3)*u^2/(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*
  u^3+81))^(1/3)+(1/3)*u+u);
  #maximize((1/6)*(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*u^3+81))^(1/3)-(4/3)*u^2/(-28*u^3+324+36*sqrt(u^6-14*
  u^3+81))^(1/3)+(1/3)*u+u);
```

$$0 \tag{58}$$

Обозначим вещественный корень из (57) за θ :

```
> r11 := r2*u: s11 := s2*(-u+theta): v1 := theta:
  zamproc(u,w,u/v1-v1*(u*v1+w),u+w/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$-\frac{r2^2\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)\left(\theta^2-\theta u-2u^2-w\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{r2\,s2\left(\theta^5-\theta^4u-5\theta^3u^2+9\theta^2u^3-6\theta u^4-\theta^3w+\theta^2uw-\theta u^2w-4\theta^2+7\theta u+2u^2+3w\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{s2^2\left(2\theta^5-8\theta^4u+14\theta^3u^2-15\theta^2u^3+6\theta u^4-\theta^3w+\theta^2uw-\theta u^2w-5\theta^2+11\theta u-2u^2+3w\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{s2^3\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)\left(2\theta^2-5\theta u+2u^2-w\right)}{\theta\,r2\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{r2^3w\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)}{\theta\,s2\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{r2^2w\left(\theta^3-\theta^2u+\theta u^2-3\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{r2\,s2\,w\left(\theta^3-\theta^2u+\theta u^2-3\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{s2^2w\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)} \tag{59}$$

Нормировка системы (59).

```
> s21 := abs(theta)^(1/2)*abs(2*u-theta)^(1/2)/((-w)^(1/2)*abs(u^2*theta-u*theta^2+1)^(1/2)):
  s11 := s21*(-u+theta):
  zamproc(u,w,u/v1-v1*(u*v1+w),u+w/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{r2^2\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)\left(\theta^2-\theta u-2u^2-w\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{r2\left(\theta^5-\theta^4u-5\theta^3u^2+9\theta^2u^3-6\theta u^4-\theta^3w+\theta^2uw-\theta u^2w-4\theta^2+7\theta u+2u^2+3w\right)\left|\frac{\sqrt{\theta}\sqrt{-2u+\theta}}{\sqrt{\theta^2u-\theta u^2-1}}\right|}{\theta\sqrt{-w}\left(-2u+\theta\right)}$$
$$\frac{\left(2\theta^5-8\theta^4u+14\theta^3u^2-15\theta^2u^3+6\theta u^4-\theta^3w+\theta^2uw-\theta u^2w-5\theta^2+11\theta u-2u^2+3w\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2u-\theta u^2-1}\right|}{\theta w\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{\left|\frac{\theta^{3/2}\left(-2u+\theta\right)^{3/2}}{\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)^{3/2}}\right|\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)\left(2\theta^2-5\theta u+2u^2-w\right)}{(-w)^{3/2}\,\theta\,r2\left(-2u+\theta\right)}$$
$$\frac{\left(\theta^2u-\theta u^2-1\right)r2^3\,(-w)^{3/2}\left|\frac{\sqrt{\theta^2u-\theta u^2-1}}{\sqrt{\theta}\sqrt{-2u+\theta}}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$
$$-\frac{r2^2w\left(\theta^3-\theta^2u+\theta u^2-3\right)}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{r2\sqrt{-w}\left(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3\right)\left|\frac{\sqrt{\theta}\sqrt{-2u+\theta}}{\sqrt{\theta^2 u-\theta u^2-1}}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^2 u-\theta u^2-1\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)} \qquad \mathbf{(60)}$$

```
> r21 := abs(theta)^(1/2)*abs(2*u-theta)^(1/2)/((-w)^(1/2)*abs(u^2*theta-u*theta^2+1)^(1/2)):
  r11 := r21*u:
  zamproc(u,w,u/v1-v1*(u*v1+w),u+w/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$\frac{\left(\theta^2 u-\theta u^2-1\right)\left(\theta^2-\theta u-2u^2-w\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta w\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^5-\theta^4 u-5\theta^3 u^2+9\theta^2 u^3-6\theta u^4-\theta^3 w+\theta^2 u w-\theta u^2 w-4\theta^2+7\theta u+2u^2+3w\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta w\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(2\theta^5-8\theta^4 u+14\theta^3 u^2-15\theta^2 u^3+6\theta u^4-\theta^3 w+\theta^2 u w-\theta u^2 w-5\theta^2+11\theta u-2u^2+3w\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta w\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^2 u-\theta u^2-1\right)\left(2\theta^2-5\theta u+2u^2-w\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta w\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^2 u-\theta u^2-1\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)}$$

$$\frac{\left(\theta^2 u-\theta u^2-1\right)\left|\frac{\theta\left(-2u+\theta\right)}{\theta^2 u-\theta u^2-1}\right|}{\theta\left(-2u+\theta\right)} \qquad \mathbf{(61)}$$

Значение параметров u и v в системе (61) и упрощение σ :

```
> u_new = -(2*u^2+u*theta-theta^2+w)/w;
  v_new = collect(-3*w+4*theta^2-2*u^2+theta^3*w+6*u^4*theta-u*theta^2*w+w*u^2*theta-theta^5-7*u*
  theta+5*theta^3*u^2-9*u^3*theta^2+theta^4*u,w,factor)/(w*(u^2*theta-u*theta^2+1));
  #plot((2*u-kk1)*(u^2*kk1-u*kk1^2+1), u = -1..2);
  #plot((2*u-kk1)*(u^2*kk1-u*kk1^2+1), u = 1..100);
  #plot((2*u-kk1)*(u^2*kk1-u*kk1^2+1), u = -100..-1);
  sigma = sgn(u-2^(-1/3));
```

$$u\_new=-\frac{-\theta^2+\theta u+2u^2+w}{w}$$

$$v\_new=\frac{w\left(\theta^3-\theta^2 u+\theta u^2-3\right)-\left(-2u+\theta\right)\left(\theta^4+\theta^3 u-3\theta^2 u^2+3\theta u^3-4\theta-u\right)}{w\left(-\theta^2 u+\theta u^2+1\right)}$$

$$\sigma=sgn\left(u-\frac{1}{2}\,2^{2/3}\right) \qquad \mathbf{(62)}$$

Поиск замен к $SF^{6,2}_{11}$.

```
> solve([M[2,2], M[2,4]], {r1,s1,r2,s2,u,v,w}):
  solve([M[2,2], M[2,4]], {r1,s1,r2,s2,v,w}):
```

Рассмотрение возможных решений.

a) :

```
> {r1 = r2*(s1*v^2-2*s2)/(v*(2*s1-s2*v)), r2 = r2, s1 = s1, s2 = s2, u = u, v = v, w = -(2*u*s1^2*v-
  s1^2*v^2-s1*v^3*s2+s1*u*s2*v^2+2*s1*s2-s2^2*u*v^3+2*s2^2*v)/(v*s2*(2*s1-s2*v))};
```

$$\left\{r1=\frac{r2\left(s1\,v^2-2\,s2\right)}{v\left(2\,s1-s2\,v\right)},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=u,\ v=v,\ w=-\frac{2u\,s1^2 v-s1^2 v^2-s1\,v^3 s2+s1\,u\,s2\,v^2+2\,s1\,s2-s2^2 u v^3+2\,s2^2 v}{v\,s2\left(2\,s1-s2\,v\right)}\right\} \qquad \mathbf{(63)}$$

```
> collect(2*u*s1^2*v-s1^2*v^2-s1*v^3*s2+s1*u*s2*v^2+2*s1*s2-s2^2*u*v^3+2*s2^2*v, [s1,s2], factor);
```

$$v\left(-v+2u\right)s1^2+\left(2+u v^2-v^3\right)s2\,s1-v\left(u v^2-2\right)s2^2 \qquad \mathbf{(64)}$$

a$_1$) : $v=2u$. Для этого случая есть более простая замена c).

```
> v1 := 2*u:    w = simplify(-(2*u*s1^2*v1-s1^2*v1^2-s1*v1^3*s2+s1*u*s2*v1^2+2*s1*s2-s2^2*u*v1^3+2*
  s2^2*v1)/(v1*s2*(2*s1-s2*v1)));
  solve(w = (1/2)*(2*s1*u^3-s1+4*s2*u^4-2*s2*u)/(u*(s1-s2*u)), s1);
```

$$w=\frac{1}{2}\,\frac{4\,s2\,u^4+2\,s1\,u^3-2\,s2\,u-s1}{u\,(-s2\,u+s1)}$$

$$-\frac{2\,s2\,u\,(2\,u^3+u\,w-1)}{2\,u^3-2\,u\,w-1} \qquad \textbf{(65)}$$

a$_2$) : $v\neq 2\,u$.

```
> r11 := r2*(s1*v^2-2*s2)/(v*(2*s1-s2*v)):
  w1 := -(2*u*s1^2*v-s1^2*v^2-s1*v^3*s2+s1*u*s2*v^2+2*s1*s2-s2^2*u*v^3+2*s2^2*v)/(v*s2*(2*s1-s2*v)):
  zamproc(u,w1,u/v-v*(u*v+w1),u+w1/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s1,r2,s2):
```

$$-\frac{(v^3-4)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,(u+v)\,r2^2}{v^2\,(-s2\,v+2\,s1)^2},\ -\frac{(v^3-4)\,(s2\,v+s1)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,r2}{v^2\,(-s2\,v+2\,s1)^2},\ \frac{(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,(u+v)}{v},$$

$$\frac{(s2\,v+s1)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)}{v\,r2}$$

$$\frac{(v^3-4)\,(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,(-s2\,u\,v^2+2\,s1\,u\,v-s1\,v^2+2\,s2)\,r2^3}{v^3\,s2\,(-s2\,v+2\,s1)^3},\ 0, \qquad \textbf{(66)}$$

$$-\frac{(-s1\,s2\,v^2+s1^2\,v+s2^2)\,(-s2\,u\,v^2+2\,s1\,u\,v-s1\,v^2+2\,s2)\,r2}{v^2\,s2\,(-s2\,v+2\,s1)},\ 0$$

При $u=-v$ получается уход b) в $SF^{4,2}_{34}$.

```
> s1 = [solve(w = -(2*u*s1^2*v-s1^2*v^2-s1*v^3*s2+s1*u*s2*v^2+2*s1*s2-s2^2*u*v^3+2*s2^2*v)/(v*s2*(2*s1
  -s2*v)), s1)];
```

$$s1=\left[\frac{1}{2}\,\frac{\left(-u\,v^2+v^3-2\,v\,w-2+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\right)s2}{v\,(2\,u-v)},\right. \qquad \textbf{(67)}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,\frac{\left(u\,v^2-v^3+2\,v\,w+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}+2\right)s2}{v\,(2\,u-v)}\right]$$

Подкоренное выражение в (67) -- квадратный многочлен от w :

```
> D_s = collect(4*w^2*v^2+8*w*v+12*w*v^3*u-8*w*v^4+4-12*u*v^2+4*v^3+9*v^4*u^2-6*u*v^5+v^6, w, factor);
```

$$D\_s=4\,v^2\,w^2+4\,v\,(3\,u\,v^2-2\,v^3+2)\,w+(3\,u\,v^2-v^3-2)^2 \qquad \textbf{(68)}$$

```
> solve(4*w^2*v^2+8*w*v+12*w*v^3*u-8*w*v^4+4-12*u*v^2+4*v^3+9*v^4*u^2-6*u*v^5+v^6, w);
  factor(-6*u*v^5+24*u*v^2+3*v^6-12*v^3);
```

$$\frac{-\frac{3}{2}\,u\,v^2+v^3-1+\frac{1}{2}\,\sqrt{-6\,u\,v^5+24\,u\,v^2+3\,v^6-12\,v^3}}{v},\ \frac{-\frac{3}{2}\,u\,v^2+v^3-1-\frac{1}{2}\,\sqrt{-6\,u\,v^5+24\,u\,v^2+3\,v^6-12\,v^3}}{v}$$

$$-3\,v^2\,(v^3-4)\,(-v+2\,u) \qquad \textbf{(69)}$$

```
> s11 := (1/2)*(v^3-2-v^2*u-2*w*v+sqrt(v^6+4*v^3-6*v^5*u-8*v^4*w+4-12*v^2*u+8*w*v+9*v^4*u^2+12*v^3*u*
  w+4*w^2*v^2))*s2/(v*(-v+2*u)):
  r11 := r2*(s11*v^2-2*s2)/(v*(2*s11-s2*v)):
  zamproc(u,w,u/v-v*(u*v+w),u+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\frac{1}{2}\,\Big(r2^2\,(v^3-4)\,(u+v)\,\Big(-7\,u^2\,v^4+7\,u\,v^5-2\,v^6-12\,u\,v^3\,w+8\,v^4\,w$$

$$+3\,\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ u\,v^2$$

$$-2\,\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ v^3-4\,v^2\,w^2$$

$$+2\,\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ v\,w-8\,u^2\,v+8\,u\,v^2-8\,v\,w$$

$$+2\,\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}-4\Big)\Big)\Big/\Big(v\,\Big(-3\,u\,v^2+2\,v^3-2\,v\,w$$

$$+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}-2\Big)^2\Big),\ \frac{1}{2}\,\Big(r2\,s2\,(v^3-4)\,\Big(3\,u^3\,v^3-4\,u^2\,v^4$$

$$+u\,v^5+2\,u^2\,v^2\,w-5\,u\,v^3\,w+3\,v^4\,w+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ u^2\,v$$

$$-\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ u\,v^2-2\,v^2\,w^2$$

$$+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ v\,w-2\,u^2\,v+5\,u\,v^2-v^3-4\,v\,w$$

$$+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}-2\Big)\Big)\Big/\Big(v^2\,\Big(-3\,u\,v^2+2\,v^3-2\,v\,w$$

$$+\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}-2\Big)\,(2\,u-v)\Big),\ -\frac{1}{2}\,\frac{1}{v^2\,(2\,u-v)^2}\,\Big(s2^2\,(u$$

$$+v)\,\Big(-7\,u^2\,v^4+7\,u\,v^5-2\,v^6-12\,u\,v^3\,w+8\,v^4\,w$$

$$+3\,\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ u\,v^2$$

$$-2\,\sqrt{9\,u^2\,v^4-6\,u\,v^5+v^6+12\,u\,v^3\,w-8\,v^4\,w+4\,v^2\,w^2-12\,u\,v^2+4\,v^3+8\,v\,w+4}\ v^3-4\,v^2\,w^2$$

$$+2\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v w-8 u^{2} v+8 u v^{2}-8 v w$$
$$+2\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}-4\big)\big),\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{v^{3}\, r2\,(2 u-v)^{3}}\ \Big(s2^{3}\big(3 u^{3} v^{3}$$
$$-4 u^{2} v^{4}+u v^{5}+2 u^{2} v^{2} w-5 u v^{3} w+3 v^{4} w+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u^{2} v$$
$$-\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v^{2}-2 v^{2} w^{2}$$
$$+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v w-2 u^{2} v+5 u v^{2}-v^{3}-4 v w$$
$$+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}-2\big)\big(-3 u v^{2}+2 v^{3}-2 v w$$
$$+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}-2\big)\big)$$
$$\frac{1}{2}\ \big(r2^{3}\,(2 u-v)\,(v^{3}-4)\,\big(2 v^{2}-8 w+5 v^{5}-16 v w^{2}+8 w v^{3}+8 u^{2} \qquad \textbf{(70)}$$
$$+2\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v^{5}$$
$$+4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u^{2}$$
$$+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v^{2}$$
$$+4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; w$$
$$+8\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u^{2} v^{3}$$
$$-8\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v^{4}$$
$$-7\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v^{3} w$$
$$+4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v w^{2}$$
$$-4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v$$
$$+12\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v^{2} w+2 v^{8}-52 u^{2} v^{4} w+55 u v^{5} w-8 u^{2} v w$$
$$-36 u v^{3} w^{2}-24 u^{3} v^{5}+32 u^{2} v^{6}-14 u v^{7}-12 u^{3} v^{2}+22 v^{4} w^{2}-15 v^{6} w-8 v^{2} w^{3}+32 u^{2} v^{3}-23 u v^{4}-8 u v-4 u v^{2} w\big)\big)\Big/$$
$$\Big(s2\,\big(-3 u v^{2}+2 v^{3}-2 v w+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}-2\big)^{3}\Big),\ 0,$$
$$-\frac{1}{2}\ \big(r2\, s2\,\big(2 v^{2}-8 w+5 v^{5}-16 v w^{2}+8 w v^{3}+8 u^{2}$$
$$+2\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v^{5}$$
$$+4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u^{2}$$
$$+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v^{2}$$
$$+4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; w$$
$$+8\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u^{2} v^{3}$$
$$-8\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v^{4}$$
$$-7\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v^{3} w$$
$$+4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; v w^{2}$$
$$-4\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v$$
$$+12\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}\; u v^{2} w+2 v^{8}-52 u^{2} v^{4} w+55 u v^{5} w-8 u^{2} v w$$
$$-36 u v^{3} w^{2}-24 u^{3} v^{5}+32 u^{2} v^{6}-14 u v^{7}-12 u^{3} v^{2}+22 v^{4} w^{2}-15 v^{6} w-8 v^{2} w^{3}+32 u^{2} v^{3}-23 u v^{4}-8 u v-4 u v^{2} w\big)\big)\Big/\Big(v\big($$
$$-3 u v^{2}+2 v^{3}-2 v w+\sqrt{9 u^{2} v^{4}-6 u v^{5}+v^{6}+12 u v^{3} w-8 v^{4} w+4 v^{2} w^{2}-12 u v^{2}+4 v^{3}+8 v w+4}-2\big)\,(2 u-v)\Big),\ 0$$

Отсутствие корней у знаменателя в элементах матрицы (70):

```
> solve(2*v^3-2-3*u*v^2-2*w*v+sqrt(4+8*w*v-12*u*v^2+4*v^3+4*w^2*v^2+12*w*v^3*u-8*w*v^4+9*u^2*v^4-6*u*
  v^5+v^6), {u,v,w});
```

$$\{u=u,\ v=0,\ w=w\},\ \{u=u,\ v=2^{2/3},\ w=w\},\ \left\{u=u,\ v=-\frac{1}{2}\,2^{2/3}+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,2^{2/3},\ w=w\right\},\ \left\{u=u,\ v=-\frac{1}{2}\,2^{2/3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,2^{2/3},\ w=w\right\},\ \{u=u,\ v=2 u,\ w=w\} \qquad \textbf{(71)}$$

Упрощение частей выражений элементов матрицы (70) :

```
> a1p = (v^3-4)*(u+v)*collect(-7*v^4*u^2-8*u^2*v+7*u*v^5-12*w*v^3*u+8*u*v^2+3*v^2*x*u-2*v^6+8*w*v^4-2*
  v^3*x-4*w^2*v^2-8*w*v+2*w*v*x+2*x-4, [x, w], factor);
  b1p = (v^3-4)*collect(u*v^5+3*w*v^4-4*v^4*u^2-5*w*v^3*u+3*v^3*u^3-v^3+5*u*v^2-2*w^2*v^2-v^2*x*u+2*
  v^2*w*u^2+w*v*x-2*u^2*v-4*w*v+v*x*u^2+x-2, [x, w], factor);
  c1p = (u+v)*collect(-7*v^4*u^2-8*u^2*v+7*u*v^5-12*w*v^3*u+8*u*v^2+3*v^2*x*u-2*v^6+8*w*v^4-2*v^3*x-4*
  w^2*v^2-8*w*v+2*w*v*x+2*x-4, [x, w], factor);
  d1p = collect(u*v^5+3*w*v^4-4*v^4*u^2-5*w*v^3*u+3*v^3*u^3-v^3+5*u*v^2-2*w^2*v^2-v^2*x*u+2*v^2*w*u^2+
```

```
w*v*x-2*u^2*v-4*w*v+v*x*u^2+x-2, [x, w], factor)*(-2*w*v-2-3*u*v^2+2*v^3+x);
a2p = (2*u-v)*(v^3-4)*collect(-8*u*v+2*v^2-8*w+5*v^5-15*v^6*w+8*v^3*u^2*x+8*u^2-7*w*v^3*x-4*v*x*u-8*
v^4*u*x+4*v*w^2*x+v^2*x+4*w*x+4*u^2*x+2*v^5*x-8*w^3*v^2+12*v^2*x*u*w+32*v^3*u^2+55*v^5*w*u-12*u^3*
v^2-24*u^3*v^5+8*w*v^3-16*v*w^2+22*v^4*w^2-23*v^4*u+32*v^6*u^2-14*v^7*u-4*v^2*w*u-52*u^2*v^4*w-8*
u^2*w*v-36*v^3*w^2*u+2*v^8, [x,w], factor);
c2p = collect(-8*u*v+2*v^2-8*w+5*v^5-15*v^6*w+8*v^3*u^2*x+8*u^2-7*w*v^3*x-4*v*x*u-8*v^4*u*x+4*v*w^2*
x+v^2*x+4*w*x+4*u^2*x+2*v^5*x-8*w^3*v^2+12*v^2*x*u*w+32*v^3*u^2+55*v^5*w*u-12*u^3*v^2-24*u^3*v^5+8*
w*v^3-16*v*w^2+22*v^4*w^2-23*v^4*u+32*v^6*u^2-14*v^7*u-4*v^2*w*u-52*u^2*v^4*w-8*u^2*w*v-36*v^3*w^2*
u+2*v^8, [x,w], factor);
```

$$a1p = (v^3-4)\,(u+v)\,((3\,u\,v^2-2\,v^3+2\,v\,w+2)\,x-4\,v^2\,w^2-4\,v\,(3\,u\,v^2-2\,v^3+2)\,w-7\,u^2\,v^4+7\,u\,v^5-2\,v^6-8\,u^2\,v+8\,u\,v^2-4)$$

$$b1p = (v^3-4)\,((u^2\,v-u\,v^2+v\,w+1)\,x-2\,v^2\,w^2+v\,(2\,u^2\,v-5\,u\,v^2+3\,v^3-4)\,w+(3\,u\,v^2-v^3-2)\,(u^2\,v-u\,v^2+1))$$

$$c1p = (u+v)\,((3\,u\,v^2-2\,v^3+2\,v\,w+2)\,x-4\,v^2\,w^2-4\,v\,(3\,u\,v^2-2\,v^3+2)\,w-7\,u^2\,v^4+7\,u\,v^5-2\,v^6-8\,u^2\,v+8\,u\,v^2-4)$$

$$d1p = ((u^2\,v-u\,v^2+v\,w+1)\,x-2\,v^2\,w^2+v\,(2\,u^2\,v-5\,u\,v^2+3\,v^3-4)\,w+(3\,u\,v^2-v^3-2)\,(u^2\,v-u\,v^2+1))\,(-3\,u\,v^2+2\,v^3-2\,v\,w+x-2)$$

$$a2p = (2\,u-v)\,(v^3-4)\,((4\,v\,w^2+(12\,u\,v^2-7\,v^3+4)\,w+(2\,v^3+1)\,(2\,u-v)^2)\,x-8\,v^2\,w^3-2\,v\,(18\,u\,v^2-11\,v^3+8)\,w^2+(-52\,u^2\,v^4+55\,u\,v^5-15\,v^6-8\,u^2\,v-4\,u\,v^2+8\,v^3-8)\,w-(2\,v^3+1)\,(3\,u\,v^2-v^3-2)\,(2\,u-v)^2)$$

$$c2p = (4\,v\,w^2+(12\,u\,v^2-7\,v^3+4)\,w+(2\,v^3+1)\,(2\,u-v)^2)\,x-8\,v^2\,w^3-2\,v\,(18\,u\,v^2-11\,v^3+8)\,w^2+(-52\,u^2\,v^4+55\,u\,v^5-15\,v^6-8\,u^2\,v-4\,u\,v^2+8\,v^3-8)\,w-(2\,v^3+1)\,(3\,u\,v^2-v^3-2)\,(2\,u-v)^2 \qquad \textbf{(72)}$$

Выражение нормировочной замены через элементы матрицы (70) :

```
> unassign('r21','s21');   a11:=a1*r21^2; b11:=b1*r21*s21; c11:=c1*s21^2; d11:=d1*r21^(-1)*s21^3;
  a21:=a2*r21^3*s21^(-1); c21:=c2*r21*s21;
```

$$a11 := a1\,r21^2$$
$$b11 := b1\,r21\,s21$$
$$c11 := c1\,s21^2$$
$$d11 := \frac{d1\,s21^3}{r21}$$
$$a21 := \frac{a2\,r21^3}{s21}$$
$$c21 := c2\,r21\,s21 \qquad \textbf{(73)}$$

```
> s21 := 1/(c2*r21);  a11:=a1*r21^2; b11:=b1*r21*s21; c11:=c1*s21^2; d11:=d1*r21^(-1)*s21^3; a21:=a2*
  r21^3*s21^(-1); c21:=c2*r21*s21;
```

$$s21 := \frac{1}{c2\,r21}$$
$$a11 := a1\,r21^2$$
$$b11 := \frac{b1}{c2}$$
$$c11 := \frac{c1}{c2^2\,r21^2}$$
$$d11 := \frac{d1}{r21^4\,c2^3}$$
$$a21 := a2\,r21^4\,c2$$
$$c21 := 1 \qquad \textbf{(74)}$$

```
> r21 := (a2*c2)^(-1/4); s21 := 1/(c2*r21);   a11:=a1*r21^2; b11:=b1*r21*s21; c11:=c1*s21^2; d11:=d1*
  r21^(-1)*s21^3; a21:=a2*r21^3*s21^(-1); c21:=c2*r21*s21;
```

$$r21 := \frac{1}{(a2\,c2)^{1/4}}$$
$$s21 := \frac{(a2\,c2)^{1/4}}{c2}$$
$$a11 := \frac{a1}{\sqrt{a2\,c2}}$$
$$b11 := \frac{b1}{c2}$$
$$c11 := \frac{c1\,\sqrt{a2\,c2}}{c2^2}$$
$$d11 := \frac{d1\,a2}{c2^2}$$
$$a21 := 1$$
$$c21 := 1 \qquad \textbf{(75)}$$

b) : решение не определено.

```
> {r1 = r1, r2 = r2, s1 = RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*s2, s2 = s2, u = u, v = v, w = (3*RootOf(_Z^2*v+1-
  _Z*v^2)*r1^3*v+2*r1^2*r2-2*r1^2*r2*v^3+RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*r1*r2^2-RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*r1*
  r2^2*v^3+3*r1*r2^2*v-3*u*r1^2*RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*r2*v-2*r1*r2^2*u+2*r1*r2^2*v^3*u-RootOf(_Z^2*
  v+1-_Z*v^2)*r2^3*u+RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*r2^3*v^3*u-3*r2^3*u*v)/(r2*(3*r2^2-2*r1*r2*v^2+2*r1*
  RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*r2*v+r1^2*v-RootOf(_Z^2*v+1-_Z*v^2)*r2^2*v^2))};
```

$$\{r1=r1, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, s2, s2=s2, u=u, v=v, w=\big(3\, RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r1^3 v+2\, r1^2 r2-2\, r1^2 r2\, v^3 + RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r1\, r2^2 - RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r1\, r2^2 v^3 + 3\, r1\, r2^2 v - 3\, u\, r1^2\, RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r2\, v - 2\, r1\, r2^2 u + 2\, r1\, r2^2 v^3 u - RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r2^3 u + RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r2^3 v^3 u - 3\, r2^3 u\, v\big) \Big/ \big(r2\, (3\, r2^2 - 2\, r1\, r2\, v^2 + 2\, r1\, RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r2\, v + r1^2 v - RootOf(\_Z^2 v+1-\_Z v^2)\, r2^2 v^2)\big)\} \quad (76)$$

```
> solve(_Z^2*v+1-_Z*v^2, _Z);    # v in (0, 4^(1/3))
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2+\sqrt{v^4-4v}}{v},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-v^2+\sqrt{v^4-4v}}{v} \quad (77)$$

c) :

```
> {r1 = (1/2)*r2*v, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = (1/2)*v, v = v, w = w};
```

$$\left\{r1=\frac{1}{2}\, r2\, v, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=\frac{1}{2}\, v, v=v, w=w\right\} \quad (78)$$

```
> r11 := (1/2)*r2*v: u1 := v/2:   solve((u1+v)^2 + 4*w < 0);
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\left\{v=v, w<-\frac{9}{16}\, v^2\right\}$$

$$-\frac{3}{8}\, r2^2\, (v^3-4),\ -\frac{1}{4}\,\frac{r2\, s1\, (v^3-4)}{v},\ \frac{3}{2}\, s1^2\, v,\ \frac{s1^3}{r2}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{r2^3\, w\, (v^3-4)}{v\, s1},\ 0,\ w\, s1\, r2,\ 0 \quad (79)$$

```
> s11 := 1/(w*r2):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r2,0):
```

$$-\frac{3}{8}\, r2^2\, (v^3-4),\ -\frac{1}{4}\,\frac{v^3-4}{w\, v},\ \frac{3}{2}\,\frac{v}{r2^2\, w^2},\ \frac{1}{w^3\, r2^4}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{r2^4\, (v^3-4)\, w^2}{v},\ 0,\ 1,\ 0 \quad (80)$$

```
> r21 := 2^(1/2)*v^(1/4)/((-w)^(1/2)*(4-v^3)^(1/4)): r11 := (1/2)*r21*v: s11 := 1/(w*r21):
  zamproc(u1,w,u1/v-v*(u1*v+w),u1+w/v,1,0,1/v-v^2,1, r11,s11,r21,0):
```

$$-\frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{w},\ -\frac{1}{4}\,\frac{v^3-4}{w\, v},\ -\frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{v}\,\sqrt{-v^3+4}}{w},\ -\frac{1}{4}\,\frac{v^3-4}{w\, v}$$

$$1,\ 0,\ 1,\ 0 \quad (81)$$

d) : решение не определено.

```
> {r1 = RootOf(_Z^2*v-2*v^3+9-_Z*v^2)*r2, r2 = r2, s1 = s2*(RootOf(_Z^2*v-2*v^3+9-_Z*v^2)*v^2+6-2*v^3)
  /(v*(2*RootOf(_Z^2*v-2*v^3+9-_Z*v^2)-v)), s2 = s2, u = RootOf(_Z^2*v-2*v^3+9-_Z*v^2), v = v, w = w};
```

$$\left\{r1=RootOf(\_Z^2 v-2v^3+9-\_Z v^2)\, r2, r2=r2, s1=\frac{s2\,(RootOf(\_Z^2 v-2v^3+9-\_Z v^2)\, v^2+6-2v^3)}{v\,(2\, RootOf(\_Z^2 v-2v^3+9-\_Z v^2)-v)}, s2=s2, u=RootOf(\_Z^2 v-2v^3+9-\_Z v^2), v=v, w=w\right\} \quad (82)$$

```
> solve(_Z^2*v-2*v^3+9-_Z*v^2, _Z);    # v in (0, 4^(1/3))
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2+3\sqrt{v^4-4v}}{v},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-v^2+3\sqrt{v^4-4v}}{v} \quad (83)$$

e) :

```
> {r1 = u*r2, r2 = r2, s1 = (1/3)*s2*(-u+2*RootOf(-u^2*_Z+_Z^2*u+2*_Z^3-9)), s2 = s2, v = RootOf(-u^2*
  _Z+_Z^2*u+2*_Z^3-9), w = w};
```

$$\left\{r1=u\, r2, r2=r2, s1=\frac{1}{3}\, s2\,(-u+2\, RootOf(-u^2\,\_Z+\_Z^2 u+2\,\_Z^3-9)), s2=s2, v=RootOf(-u^2\,\_Z+\_Z^2 u+2\,\_Z^3-9), w=w\right\} \quad (84)$$

```
> solve(-u^2*_Z+_Z^2*u+2*_Z^3-9, _Z);
  kk1 := (1/6)*(-10*u^3+486+9*sqrt(-3*u^6-120*u^3+2916))^(1/3)+(7/6)*u^2/(-10*u^3+486+9*sqrt(-3*u^6
  -120*u^3+2916))^(1/3)-(1/6)*u:
```

$$\frac{1}{6}\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}+\frac{7}{6}\,\frac{u^2}{\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}}-\frac{1}{6}\,u,\ -\frac{1}{12}\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}-\frac{7}{12}\,\frac{u^2}{\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}}-\frac{1}{6}\,u+\frac{1}{2}\, I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}-\frac{7}{6}\,\frac{u^2}{\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}}\right),\ -\frac{1}{12}\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}-\frac{7}{12}\,\frac{u^2}{\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}}-\frac{1}{6}\,u-\frac{1}{2}\, I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}-\frac{7}{6}\,\frac{u^2}{\left(-10u^3+486+9\sqrt{-3u^6-120u^3+2916}\right)^{1/3}}\right) \quad (85)$$

Обозначим вещественный корень из (85) за θ :

```
> r11 := u*r2: s11 := (1/3)*s2*(-u+2*theta): v1 := theta:
  zamproc(u,w,u/v1-v1*(u*v1+w),u+w/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s2, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{r2^2\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,(2\,\theta^2-2\,\theta u-4\,u^2-3\,w)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{r2\,s2\,(4\,\theta^5+2\,\theta^4 u-32\,\theta^3 u^2+30\,\theta^2 u^3-12\,\theta u^4-6\,\theta^3 w-3\,\theta^2 u w+3\,\theta u^2 w-22\,\theta^2+34\,\theta u+20\,u^2+27\,w)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{s2^2\,(8\,\theta^5-22\,\theta^4 u+20\,\theta^3 u^2-18\,\theta^2 u^3+4\,\theta u^4-8\,\theta^3 w+5\,\theta^2 u w-5\,\theta u^2 w-26\,\theta^2+50\,\theta u+4\,u^2+27\,w)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{1}{54}\,\frac{s2^3\,(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)\,(10\,\theta^2-22\,\theta u+4\,u^2-9\,w)}{\theta\,r2\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{r2^3\,w\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)}{\theta\,s2\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{r2^2\,w\,(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{r2\,s2\,w\,(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{s2^2\,w\,(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)}{\theta\,(-2\,u+\theta)} \qquad \textbf{(86)}$$

```
> s21 := -(3/2)*r2^3*w*(u^2*theta-u*theta^2+1)/(theta*(2*u-theta)): s11 := (1/3)*s21*(-u+2*theta):
  zamproc(u,w,u/v1-v1*(u*v1+w),u+w/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r2,s21, lbl = true):
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{r2^2\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,(2\,\theta^2-2\,\theta u-4\,u^2-3\,w)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{(4\,\theta^5+2\,\theta^4 u-32\,\theta^3 u^2+30\,\theta^2 u^3-12\,\theta u^4-6\,\theta^3 w-3\,\theta^2 u w+3\,\theta u^2 w-22\,\theta^2+34\,\theta u+20\,u^2+27\,w)\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,w\,r2^4}{\theta^2\,(-2\,u+\theta)^2}$$

$$-\frac{3}{8}\,\frac{(8\,\theta^5-22\,\theta^4 u+20\,\theta^3 u^2-18\,\theta^2 u^3+4\,\theta u^4-8\,\theta^3 w+5\,\theta^2 u w-5\,\theta u^2 w-26\,\theta^2+50\,\theta u+4\,u^2+27\,w)\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)^2\,w^2\,r2^6}{\theta^3\,(-2\,u+\theta)^3}$$

$$\frac{1}{16}\,\frac{(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)\,(10\,\theta^2-22\,\theta u+4\,u^2-9\,w)\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)^3\,w^3\,r2^8}{\theta^4\,(-2\,u+\theta)^4}$$

$$1$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{r2^2\,w\,(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,w^2\,r2^4}{\theta^2\,(-2\,u+\theta)^2}$$

$$-\frac{3}{8}\,\frac{(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)^2\,w^3\,r2^6}{\theta^3\,(-2\,u+\theta)^3} \qquad \textbf{(87)}$$

```
> r21 := 2^(1/2)*(-theta^2*(2*u-theta)^2/((5*u^2*theta-5*u*theta^2+8*theta^3-27)*(u^2*theta-u*
  theta^2+1)))^(1/4)/(-w)^(1/2): r11 := u*r21:
  s21 := -(3/2)*r21^3*w*(u^2*theta-u*theta^2+1)/(theta*(2*u-theta)): s11 := (1/3)*s21*(-u+2*theta):
  zamproc(u,w,u/v1-v1*(u*v1+w),u+w/v1,1,0,1/v1-v1^2,1, r11,s11,r21,s21, lbl = true):
```

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\theta^2\,(-2\,u+\theta)^2}{(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)}}\;(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,(2\,\theta^2-2\,\theta u-4\,u^2-3\,w)}{\theta\,(-2\,u+\theta)\,w}$$

$$\frac{4\,\theta^5+2\,\theta^4 u-32\,\theta^3 u^2+30\,\theta^2 u^3-12\,\theta u^4-6\,\theta^3 w-3\,\theta^2 u w+3\,\theta u^2 w-22\,\theta^2+34\,\theta u+20\,u^2+27\,w}{w\,(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)}$$

$$\frac{1}{\theta\,(-2\,u+\theta)\,(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)\,w}\Bigg(3\,(\theta^2 u-\theta u^2-1)\sqrt{\frac{\theta^2\,(-2\,u+\theta)^2}{(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)}}\;(8\,\theta^5-22\,\theta^4 u$$
$$+20\,\theta^3 u^2-18\,\theta^2 u^3+4\,\theta u^4-8\,\theta^3 w+5\,\theta^2 u w-5\,\theta u^2 w-26\,\theta^2+50\,\theta u+4\,u^2+27\,w)\Bigg)$$

$$\frac{(\theta^2 u-\theta u^2-1)\,(2\,\theta^3+\theta^2 u-\theta u^2-9)\,(10\,\theta^2-22\,\theta u+4\,u^2-9\,w)}{w\,(8\,\theta^3-5\,\theta^2 u+5\,\theta u^2-27)^2}$$

$$1$$

$$\frac{\left(2\,\theta^3+\theta^2\,u-\theta\,u^2-9\right)\sqrt{\frac{\theta^2\,(-2\,u+\theta)^2}{\left(\theta^2\,u-\theta\,u^2-1\right)\left(8\,\theta^3-5\,\theta^2\,u+5\,\theta\,u^2-27\right)}}}{\theta\,(-2\,u+\theta)}$$

$$1$$

$$\frac{3\left(\theta^2\,u-\theta\,u^2-1\right)\sqrt{\frac{\theta^2\,(-2\,u+\theta)^2}{\left(\theta^2\,u-\theta\,u^2-1\right)\left(8\,\theta^3-5\,\theta^2\,u+5\,\theta\,u^2-27\right)}}\left(2\,\theta^3+\theta^2\,u-\theta\,u^2-9\right)}{\theta\,(-2\,u+\theta)\left(8\,\theta^3-5\,\theta^2\,u+5\,\theta\,u^2-27\right)} \tag{88}$$

Значение параметров u и v в системе (88):

```
> u_new = -(u^2*theta-u*theta^2+1)*(4*u^2+2*u*theta-2*theta^2+3*w)*sqrt(-theta^2*(2*u-theta)^2/((u^2*
  theta-u*theta^2+1)*(5*u^2*theta-5*u*theta^2+8*theta^3-27)))/(theta*(2*u-theta)*w);
  v_new = collect(-(-30*u^3*theta^2-2*theta^4*u-27*w+3*u*theta^2*w+12*u^4*theta-3*w*u^2*theta+32*
  theta^3*u^2+22*theta^2-20*u^2+6*theta^3*w-4*theta^5-34*u*theta), w, factor)/(w*(5*u^2*theta-5*u*
  theta^2+8*theta^3-27));
```

$$u\_new=-\frac{\left(-\theta^2\,u+\theta\,u^2+1\right)\left(-2\,\theta^2+2\,\theta\,u+4\,u^2+3\,w\right)\sqrt{-\frac{\theta^2\,(2\,u-\theta)^2}{\left(8\,\theta^3-5\,\theta^2\,u+5\,\theta\,u^2-27\right)\left(-\theta^2\,u+\theta\,u^2+1\right)}}}{w\,\theta\,(2\,u-\theta)}$$

$$v\_new=\frac{\left(-6\,\theta^3-3\,\theta^2\,u+3\,\theta\,u^2+27\right)w+2\,(-2\,u+\theta)\left(2\,\theta^4+5\,\theta^3\,u-6\,\theta^2\,u^2+3\,\theta\,u^3-11\,\theta-5\,u\right)}{w\left(8\,\theta^3-5\,\theta^2\,u+5\,\theta\,u^2-27\right)} \tag{89}$$