МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

ДВУМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КЛАССИФИКАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — I

В. В. Басов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Настоящая работа является первой в цикле работ, посвященном классификации двумерных однородных кубических систем, основанной на разбиении систем на классы линейной эквивалентности. Разрабатываются принципы, позволяющие конструктивно выделять в каждом классе структуру самой простой системы и каноническое множество, определяющее допустимые значения, которые могут принимать ее коэффициенты. Векторный многочлен в правой части такой системы, отождествляемый с $(2{\times}4)$-матрицей, будем называть канонической формой (КФ), а саму систему — кубической нормальной формой.

Одна из основных задач цикла заключается в том, чтобы максимально облегчить сведение системы с однородным кубическим многочленом в невозмущенной части к различным структурам обобщенной нормальной формы (ОНФ). Под ОНФ подразумевается система, возмущенная часть которой имеет в том или ином смысле самый простой вид. Конструктивная реализация процесса нормализации зависит от возможности в явном виде указать условия совместности и всевозможные решения так называемой связующей системы, под которой понимается счетное множество линейных алгебраических систем уравнений, определяющих нормализующие преобразования возмущенной системы. Упомянутые принципы основываются на идее максимально возможного упрощения связующей системы. Это позволяет сначала линейной обратимой заменой переменных сводить исходную систему к системе с какой-либо КФ в невозмущенной части, а затем полученную систему, оптимальную для нормализации, почти тождественными заменами сводить к различным структурам ОНФ.

В данной работе: 1) ставится общая задача, а также формулируются близкие по постановке задачи с описанием имеющихся результатов; 2) выводится связующая система, позволяющая установить эквивалентность двух любых возмущенных систем с одинаковой однородной кубической частью, и обсуждаются возможности ее упрощения, а также определяется ОНФ и приводится метод резонансных уравнений, позволяющий конструктивно получать все ее структуры; 3) вводятся специальные формы записи однородных кубических систем при наличии в их правых частях однородного общего множителя, имеющего степень от единицы до трех; исследуется линейная эквивалентность таких систем, а также систем, не имеющих общего множителя; выделяются основные линейные инварианты. Библиогр. 20 назв.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.201

1. Введение. ***1.1. Постановка задачи.*** В предлагаемом цикле работ рассматривается вещественная двумерная невырожденная однородная кубическая система ОДУ

$$\dot{x} = P(x), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $P = (P_1(x), P_2(x))$, $P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3$, $P_1, P_2 \not\equiv 0$.

Пусть вещественная неособая линейная замена

$$x = Ly \quad (y = (y_1, y_2),\ \det L \neq 0) \tag{1.2}$$

преобразует (1.1) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \quad (\widetilde{P}_i = \tilde{a}_i y_1^3 + \tilde{b}_i y_1^2 y_2 + \tilde{c}_i y_1 y_2^2 + \tilde{d}_i y_2^3, \quad i = 1, 2). \tag{1.3}$$

Перечислим основные задачи, которые будут поставлены и решены в цикле.

1. Осуществить классификацию множества систем (1.1) путем разбиения векторных многочленов $P(x)$ на классы линейной эквивалентности.

2. Для каждого класса разработать структурные и нормировочные принципы, позволяющие вполне упорядочить многочлены $\widetilde{P}$, которые получаются в результате замены (1.2).

3. На основе выбранных принципов выделить в каждом классе образующую — самый простой многочлен $\widetilde{P}$, называемый канонической формой (КФ).

Будет показано, что любую КФ можно отождествить с (2×4)-матрицей коэффициентов многочлена $\widetilde{P}$, расположение нулевых элементов в которой фиксировано, а для ненулевых элементов указаны канонические множества, описывающие все их допустимые значения.

Систему с КФ в правой части естественно назвать кубической нормальной формой.

Наряду с основными задачами будут решены также четыре дополняющие их технические вычислительные задачи, позволяющие эффективно использовать разработанную классификацию на практике. Для каждой КФ в явном виде будут выписаны:

a) условия на коэффициенты векторного многочлена $P(x)$;

b) замена (1.2), преобразующая $P(x)$ при указанных условиях в выбранную КФ;

c) получаемые при этом значения элементов КФ из канонического множества;

d) минимальное каноническое множество, в котором отсутствуют те значения элементов, от которых можно избавиться при помощи замен (1.2), сохраняющих структуру КФ.

Результаты работы помимо самостоятельного значения, связанного с разработкой классификации однородных кубических систем, в первую очередь предназначаются для облегчения нормализации возмущенных систем посредством предварительного сведения их невозмущенной части заменами (1.2) к каноническим формам, а затем уже нормализации возмущений в полученных системах.

Именно эта цель будет положена в основу принципов, позволяющих выделять КФ.

Отметим, что большое число символьных вычислений, связанных со всевозможными линейными преобразованиями однородных кубических систем, их нормировкой и выделением общего множителя различных степеней, а также решений различных алгебраических систем и уравнений невозможно без применения символьной математики. Для этих целей используется аналитический пакет Maple. Написан набор стандартных процедур, на основе которых для доказательства практически каждого утверждения созданы пакеты программ в Maple.

1.2. Формальная эквивалентность возмущенных систем. Рассмотрим двумерную вещественную возмущенную формальную (аналитическую в нуле) систему

$$\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x) \qquad (i = 1, 2), \tag{1.4}$$

где многочлены P_i берутся из системы (1.1), $X_i = \sum_{p=4}^{\infty} X_i^{(p)}(x)$ — возмущения. Здесь и в дальнейшем $Z_i^{(p)}(z) = \sum_{s=0}^{p} Z_i^{(s,p-s)} z_1^s z_2^{p-s}$ — однородный многочлен порядка p.

Пусть вещественная формальная почти тождественная замена переменных

$$x_i = y_i + h_i(y) \tag{1.5}$$

с $h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y)$ преобразует (1.4) в структурно аналогичную ей систему

$$\dot{y}_i = P_i(y) + Y_i(y). \tag{1.6}$$

Продифференцировав по t замену (1.5) в силу систем (1.4) и (1.6) и положив $H_i(y,h) = P_i(h) + \sum_{j=1}^{2} y_j \, \partial P_i(h)/\partial h_j \quad (i = 1, 2)$, получаем два тождества

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} P_j(y) - \frac{\partial P_i(y)}{\partial y_j} h_j(y) \right) + Y_i(y) = X_i(y+h) + H_i(y,h) - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} Y_j(y).$$

Выделяя в них для всякого $p \geq 4$ однородные многочлены порядка p, установим, что однородные многочлены $h_j^{(p-2)}$ и $Y_i^{(p)}$ удовлетворяют рекуррентным тождествам

$$\left(a_1 y_1^3 + b_1 y_1^2 y_2 + c_1 y_1 y_2^2 + d_1 y_2^3\right) \frac{\partial h_i^{(p-2)}}{\partial y_1} + \left(a_2 y_1^3 + b_2 y_1^2 y_2 + c_2 y_1 y_2^2 + d_2 y_2^3\right) \frac{\partial h_i^{(p-2)}}{\partial y_2} -$$
$$- \left(3a_i y_1^2 + 2b_i y_1 y_2 + c_i y_2^2\right) h_1^{(p-2)} - \left(b_i y_1^2 + 2c_i y_1 y_2 + 3d_i y_2^2\right) h_2^{(p-2)} + Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)},$$

в которых $\widetilde{Y}_i^{(p)} = \left\{X_i(y+h) + H_i(y,h) - Y_1 \, \partial h_i/\partial y_1 - Y_2 \, \partial h_i/\partial y_2\right\}^{(p)} \quad (i = 1, 2)$.

Очевидно, что при последовательном относительно $p \geq 4$ определении $h_i^{(p-2)}$ и $Y_i^{(p)}$ однородные многочлены $\widetilde{Y}_i^{(p)}(y)$ становятся известными, так как зависят только от $h_j^{(r-2)}$ и $Y_j^{(r)}$ с $2 \leq r \leq p-1 \quad (j = 1, 2)$.

Приравнивая коэффициенты при $y_1^s y_2^{p-s}$ $(p \geq 4, \ s = \overline{0,p})$, получаем линейную связующую систему $2p+2$ уравнений с $2p-2$ неизвестными $h_i^{(0,p-2)}, \ldots, h_i^{(p-2,0)}$:

$$\begin{gathered} a_2(p-s+1)h_1^{(s-3,p-s+1)} + (a_1(s-2) + b_2(p-s) - 3a_1)h_1^{(s-2,p-s)} + \\ + (b_1(s-1) + c_2(p-s-1) - 2b_1)h_1^{(s-1,p-s-1)} + (c_1 s + d_2(p-s-2) - c_1)h_1^{(s,p-s-2)} + \\ + d_1(s+1)h_1^{(s+1,p-s-3)} - b_1 h_2^{(s-2,p-s)} - 2c_1 h_2^{(s-1,p-s-1)} - 3d_1 h_2^{(s,p-s-2)} = \widehat{Y}_1^{(s,p-s)}, \\ a_2(p-s+1)h_2^{(s-3,p-s+1)} + (a_1(s-2) + b_2(p-s) - b_2)h_2^{(s-2,p-s)} + \\ + (b_1(s-1) + c_2(p-s-1) - 2c_2)h_2^{(s-1,p-s-1)} + (c_1 s + d_2(p-s-2) - 3d_2)h_2^{(s,p-s-2)} + \\ + d_1(s+1)h_2^{(s+1,p-s-3)} - 3a_2 h_1^{(s-2,p-s)} - 2b_2 h_1^{(s-1,p-s-1)} - c_2 h_1^{(s,p-s-2)} = \widehat{Y}_2^{(s,p-s)}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{(s,p-s)} = \widetilde{Y}_i^{(s,p-s)} - Y_i^{(s,p-s)} \quad (i = 1, 2)$.

Таким образом, системы (1.4) и (1.6) эквивалентны, если найдется замена (1.5), коэффициенты которой удовлетворят связующей системе (1.7).

Очевидно, что связующая система (4) в [1] является частным случаем (1.7).

1.3. Метод резонансных уравнений, определение ОНФ. Условия совместности связующей системы для $\forall\, p \geq 4$ записываются в виде n_p линейно независимых линейных уравнений ($n_p \geq 4$), связывающих коэффициенты многочленов $Y_i^{(p)}$ системы (1.6) и называемых резонансными:

$$\sum_{s=0}^{p}\Big(\alpha^p_{\mu s}Y_1^{(s,p-s)}+\beta^p_{\mu s}Y_2^{(s,p-s)}\Big)=\sum_{s=0}^{p}\Big(\alpha^p_{\mu s}\widetilde{Y}_1^{(s,p-s)}+\beta^p_{\mu s}\widetilde{Y}_2^{(s,p-s)}\Big)\quad (\mu=1,\ldots,n_p). \tag{1.8}$$

При этом два счетных набора постоянных векторов α^p_μ и β^p_μ, задающих уравнения (1.8), определяются только коэффициентами $P(x)$ и не зависят от возмущений. Они позволяют установить наличие формальной эквивалентности между любыми двумя системами с одинаковой невозмущенной частью.

Изложим кратко для системы (1.4) введенные ранее (см. библиографию в [1]) понятие резонансного набора, определение обобщенной нормальной формы (ОНФ) и теорему о ее существовании.

Определение 1.1. *Коэффициенты многочленов* $Y_i^{(p)}$ *из* (1.6), *входящие хотя бы в одно из уравнений* (1.8), *и коэффициенты многочленов* $h_i^{(p-2)}$ *из* (1.8), *остающиеся свободными при решении системы* (1.7), *будем называть резонансными, а остальные коэффициенты — нерезонансными.*

Любым n_p различным резонансным коэффициентам $Y^{p,k} = Y_{i_k}^{(s_k,p-s_k)}$ однородных полиномов $Y_1^{(p)}, Y_2^{(p)}$, где $k=\overline{1,n_p},\ i_k\in\{1,2\},\ 0\leq s_k\leq p$, сопоставим матрицу множителей $\Upsilon^p=\{\upsilon^p_{\mu k}\}_{\mu,k=1}^{n_p}$, в которой $\upsilon^p_{\mu k}=\{\alpha^p_{\mu s_k}$ при $i_k=1,\ \ \beta^p_{\mu s_k}$ при $i_k=2\}$.

Определение 1.2. *Для всякого* $p\geq 4$ *семейство резонансных коэффициентов* $\mathcal{Y}^p=\{Y^p_k\}_{k=1}^{n_p}$ *будем называть резонансным p-набором, если* $\det\Upsilon^p\neq 0$.

Таким образом, при любом $p\geq 4$ резонансные уравнения однозначно разрешимы относительно коэффициентов из любого $\mathcal{Y}^p$.

Определение 1.3. *Для любых* $\mathcal{Y}^4,\mathcal{Y}^5,\ldots$ *семейство* $\mathcal{Y}=\bigcup_{p=4}^{\infty}\mathcal{Y}^p$ *будем называть резонансным набором.*

Определение 1.4. *Систему* (1.6) *будем называть ОНФ, если при любом* $p\geq 4$ *все коэффициенты* $Y_i^{(p)}$ *как резонансные, так и нерезонансные, равны нулю, кроме коэффициентов из какого-либо резонансного p-набора* $\mathcal{Y}^p$, *имеющих произвольные значения.*

Тем самым, структуру любой ОНФ порождает какой-либо резонансный набор $\mathcal{Y}$.

Знание резонансных уравнений (1.8) делает очевидными следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Для того чтобы система* (1.6) *была формально эквивалентна исходной системе* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall\, k\geq 2$ *коэффициенты ее однородных многочленов* $Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]}$ *удовлетворяли резонансным уравнениям* (1.8).

Теорема 1.2. *Для любой системы* (1.4) *и для любого выбранного по ее невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *существует почти тождественная замена, преобразующая* (1.4) *в ОНФ* (1.6), *структура которой порождена* $\mathcal{Y}$.

Отметим, что имеются различные определения ОНФ (см., напр., [2–5]), зависящие как от выбора членов, относимых к невозмущенной части исходной системы, так и от требуемой степени ее упрощения. При этом далеко не все определения являются конструктивными, и требуются серьезные усилия для доказательства их корректности и установления самого вида ОНФ. Так, нетривиальный пример полной нормальной формы Белицкого появился в [4] спустя двадцать лет после определения этой ОНФ в [2]. Приведенное в настоящей работе определение ОНФ соответствует определению ОНФ первого порядка из [3].

Понятно, что конструктивное использование вышеизложенного метода получения в явном виде всех возможных структур ОНФ для системы (1.4), называемого автором методом резонансных уравнений, зависит исключительно от возможности выписать условия совместности связующей системы, задающие для каждого порядка p число n_p резонансных уравнений (1.8), и, что значительно сложнее, в явном виде найти векторы α^p и β^p для (1.8), позволяющие выписать все резонансные наборы.

Для успешного решения этой задачи связующая система должна оказаться как можно более простой, для чего векторный многочлен P должен иметь как можно больше нулевых коэффициентов, расположенных, по-возможности, на оптимальных местах, а ненулевые коэффициенты должны быть оптимально нормированы. Поэтому КФ и будут далее введены так, чтобы максимально соответствовать перечисленным требованиям.

1.4. О возможностях упрощения связующей системы. Матрица линейной связующей системы (1.7) определяется восемью коэффициентами многочленов P_1 и P_2 системы (1.4). От того, какие из них равны нулю и в каком количестве, зависит число и вид связей на правые части системы (1.7), описываемых резонансными уравнениями (1.8), и сама возможность эти связи конструктивно найти.

Поэтому изучим структуру связующей системы, чтобы иметь возможность правильно сформулировать принципы выбора тех коэффициентов P, которые линейной неособой заменой переменных следует попытаться сделать нулевыми в первую очередь.

Примем за основу принцип максимальности числа нулевых коэффициентов в векторном многочлене P и рассмотрим их различные расстановки, например, в (1.7_1).

Наличие нулевого коэффициента a_1 на структуру связующей системы практически не влияет. А наиболее благоприятная ситуация возникает, когда $b_1, c_1, d_1 = 0$. Тогда (1.7_1) является независимой линейной системой, имеющей в худшем случае четырехдиагональную матрицу. После исследования ее совместности, нахождения коэффициентов многочлена $h_1^{(p)}$ и подстановки их в (1.7_2) снова возникнет линейная система с матрицей, имеющей не более четырех диагоналей, доступная для исследования.

Принципиально новые проблемы не возникают и в том случае, когда только один из коэффициентов b_1, c_1, d_1 отличен от нуля.

Пусть, например, $b_1 = c_1 = 0$, а $d_1 \neq 0$. Тогда опять можно ограничиться решением линейных систем с диагональными матрицами, число диагоналей которых ограничено. Действительно, для всякого $p \geq 2$ подсистема (1.7_1) разрешима относительно коэффициентов многочлена $h_2^{(p)}$, подставляя которые в (1.7_2), получаем линейную систему относительно коэффициентов $h_1^{(p)}$ с не зависящим от p числом диагоналей.

В то же время, если только один из коэффициентов b_1, c_1, d_1 равен нулю, попытка разрешить подсистему (1.7_1) относительно коэффициентов $h_2^{(p)}$ с их последующей подстановкой в (1.7_2) приводит к потере диагональной структуры получаемой матрицы, делая невозможным конструктивное решение связующей системы.

Поэтому при исследовании совместности (1.7) существенно выполнение или невыполнение следующего условия на коэффициенты невозмущенной части системы (1.4):

$$\left(b_1^2c_1^2 + c_1^2d_1^2 + d_1^2b_1^2\right)\left(a_2^2b_2^2 + b_2^2c_2^2 + c_2^2a_2^2\right) = 0. \tag{1.9}$$

При выполнении этого условия только один из коэффициентов b_1, c_1, d_1 или a_2, b_2, c_2 может быть отличен от нуля.

Помимо условия (1.9), приведем еще ряд соображений, касающихся упрощения исследования совместности и решения связующей системы.

1. Чем более слабосвязаны уравнения невозмущенной системы, т. е. чем меньше максимальная степень переменной x_2 в P_1, а x_1 в P_2, тем меньше диагоналей будет иметь матрица связующей системы.

2. Если возможно выбрать только один нулевой коэффициент, система (1.7) максимально упрощается при $d_1 = 0$ ($a_2 = 0$), так как в этом случае в левой части (1.7_1) исчезнет два слагаемых, а в (1.7_2) — одно.

3. Если же возможно выбирать два нулевых коэффициента, лучше, чтобы ими были пары c_1, d_2 или a_1, b_2. Это дает тот же эффект, что достигается при $d_1 = 0$. Наиболее оптимально, если $b_1 = c_2 = 0$, тогда в каждом уравнении системы (1.7) исчезает по два слагаемых.

Приведенные соображения положены в основу иерархических структурных принципов, которые позволяют разбить множество невозмущенных частей системы (1.4) на классы эквивалентности относительно замен (1.2) с выделением в каждом классе наилучшего представителя — канонической формы — в целях изначального сведения произвольной системы (1.4) линейной неособой заменой к системе (1.6) с КФ в невозмущенной части, а затем уже сведения (1.6) почти тождественной заменой к обобщенной нормальной форме, что дает гораздо больше возможностей конструктивно найти резонансные члены каждого порядка и выписать все резонансные наборы.

1.5. Обзор имеющихся результатов при более общей постановке задачи. Предлагаемый цикл работ завершает решение значительно более общей задачи: выделить все невырожденные КФ, степень которых не превосходит трех и, по возможности, конструктивно получить все ОНФ систем с этими КФ в невозмущенных частях.

При степенях невозмущенной части больших трех технические трудности не позволяют за редким исключением (см., напр., [6, 7]) решать задачу в той же общности.

Итак, рассмотрим, что сделано для вещественной формальной системы

$$\dot{x}_1 = Q_1^{(k)}(x) + X_1(x), \quad \dot{x}_2 = Q_2^{(m)}(x) + X_2(x) \qquad (1 \le k \le m \le 3), \tag{1.10}$$

в которой $Q_i^{(l)}$ — однородный многочлен степени l и $Q_1^{(k)}(x), Q_2^{(m)}(x) \ne 0$, а все члены возмущения X имеют степени в определенном смысле большие, чем $Q = \left(Q_1^{(k)}, Q_2^{(m)}\right)$.

1. Случай $(k, m) = (1, 1)$. Тогда $Q(x) = Ax$ и канонической формой является многочлен Jz, где J — жорданова форма A. Наиболее полно теория нормальных форм для систем (1.10) произвольной размерности при условии, что не все собственные числа A равны нулю, изложена А. Д. Брюно в [8].

Вид канонической формы существенно усложнится, если предположить, что невозмущенная часть Ax системы (1.10) произвольной размерности гамильтонова (см. [9]). Нормализация гамильтоновых систем с простейшими КФ в невозмущенной части встречается уже в [10].

Канонические формы контактных систем, которые в известном смысле можно считать обобщением гамильтоновых, получены В. В. Лычагиным в [11, гл. 3, § 2].

2. Случай $(k,m) = (2,2)$. Тогда $Q_i = a_i x_1^2 + 2b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2$ $(i = 1,2)$. В работе [12] сначала множество однородных квадратичных систем было разбито на девятнадцать классов эквивалентности относительно линейных неособых замен. В каждом классе на основе принципов, позволяющих в дальнейшем получать максимально простую связующую систему, выделена своя КФ и указаны допустимые границы изменения ее элементов. Затем для каждой КФ были явно указаны условия на шесть коэффициентов многочлена Q и замена (1.2), преобразующая Q в выбранную КФ. Наконец, в работах [13–15] для систем (1.10) с одиннадцатью различными КФ в невозмущенной части были в явном виде найдены все структуры ОНФ.

С линейными инвариантами, выделение которых основано на иных принципах, можно ознакомиться в [16].

3. Случай $(k,m) = (3,3)$. Этот случай, очевидно, является темой настоящего исследования, которое в известном смысле продолжает и развивает идеи и методы, использовавшиеся для исследования случая $(k,m) = (2,2)$.

Применение разрабатываемой теории уже имеется. В [1] в качестве P выбрана КФ $(x_2^3, -x_1^3)$, при которой система (1.1) консервативна, и методом резонансных уравнений получены все структуры ОНФ, формально эквивалентных возмущенной системе (1.4).

Соглашение 1.1. *Невозмущенную систему с какой-либо КФ в правой части в случаях 1–3 естественно называть линейной, квадратичной или кубической нормальными формами соответственно.*

В случаях, когда $k < m$, выделение канонических форм для невозмущенной системы $\dot{x} = Q(x)$ в прежнем понимании возможно не всегда, а только при тех значениях коэффициентов, при которых Q удается записать в виде нормированного квазиоднородного многочлена, имеющего определенную обобщенную степень и вес переменных и называемого канонической квазиоднородной формой (ККФ).

4. Случай $(k,m) = (1,2)$. В работе 8 из библиогр. [12] выделены две ККФ и для систем (1.10) с каждой из них в невозмущенной части найдены все возможные структуры ОНФ.

5. Случай $(k,m) = (1,3)$. В работах 1, 2 из библиогр. [6] выделены две ККФ и для каждой решены те же задачи.

6. Случай $(k,m) = (2,3)$. В [17] выделены семь ККФ и для каждой решены те же задачи.

Особое место занимает нормализация систем с вырожденной невозмущенной частью, когда, скажем, в системе (1.10) имеем $Q_2^{(m)} \equiv 0$. Первые серьезные результаты по этой теме были получены в [18, 19]. В [12] выделены пять квадратичных вырожденных КФ и для систем с каждой из них в невозмущенной части выписаны все ОНФ, которые можно получить почти тождественными формальными заменами. А кубические вырожденные КФ выделены и исследованы в настоящей работе.

2. Линейная эквивалентность однородных кубических систем. ***2.1. Запись системы и результант.*** Рассмотрим вещественную двумерную однородную кубическую систему (1.1), записанную в виде

$$\dot{x} = P(x) \ \text{ или } \ \dot{x} = A\, q^{[3]}(x), \tag{2.1}$$

где $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $x = \mathrm{colon}\,(x_1,\, x_2)$, $q^{[3]}(x) = \mathrm{colon}\,(x_1^3,\, x_1^2x_2,\, x_1x_2^2,\, x_2^3)$, причем $A_1, A_2 \neq 0$.

Соглашение 2.1. *В дальнейшем для краткости матрицу коэффициентов A будем отождествлять с системой* (2.1) *или говорить, что матрица A порождает систему* (2.1).

Матрицу A, как и систему (2.1), при желании можно называть невырожденной, так как предполагается, что обе ее строки ненулевые и $A_1, A_2 \neq 0 \Leftrightarrow P_1(x), P_2(x) \not\equiv 0$.

Определение 2.1. *Любой однородный многочлен с вещественными коэффициентами, являющийся общим множителем P_1 и P_2, будем обозначать P_0. Общий множитель P_0 максимальной степени l $(l = 1, 2, 3)$ будем обозначать P_0^l. При отсутствии общего множителя будем считать, что $l = 0$.*

Для векторов $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ введем функцию $\delta_{rs} = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1s_2 - r_2s_1$.

Установить наличие или отсутствие общего множителя любых двух многочленов позволяет функция $R = R(P_1, P_2)$, называемая результантом:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \delta_{ad}^3 + \delta_{ac}^2\delta_{cd} + \delta_{ab}\delta_{bd}^2 - 2\delta_{ab}\delta_{ad}\delta_{cd} - \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{ad}\delta_{bd}.$$

Утверждение 2.1. *Многочлены P_1, P_2 имеют вещественный общий множитель P_0 ненулевой степени тогда и только тогда, когда $R(P_1, P_2) = 0$* (см. в [20, § 50]).

2.2. Линейные преобразования системы. Для упрощения системы (2.1) будем использовать линейные неособые замены

$$\begin{cases} x_1 = r_1y_1 + s_1y_2, \\ x_2 = r_2y_1 + s_2y_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = Ly, \quad L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}, \quad \delta = \det L \neq 0. \tag{2.2}$$

Пусть замена (2.2) преобразует систему (2.1) к виду

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \ \text{ или } \ \dot{y} = \widetilde{A}\, q^{[3]}(y), \tag{2.3}$$

где $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1y_1^3 + \tilde{b}_1y_1^2y_2 + \tilde{c}_1y_1y_2^2 + \tilde{d}_1y_2^3 \\ \tilde{a}_2y_1^3 + \tilde{b}_2y_1^2y_2 + \tilde{c}_2y_1y_2^2 + \tilde{d}_2y_2^3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$.

Для многочленов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ по аналогии с R введем результант $\widetilde{R} = R(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$.

Дифференцируя (2.2) в силу систем (2.1) и (2.3), получаем $P(Ly) = L\widetilde{P}(y)$ или

$$\widetilde{P}(y) = L^{-1}P(Ly) = L^{-1}Aq^{[3]}(Ly). \tag{2.4}$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix}\tilde a_1 y_1^3+\tilde b_1 y_1^2y_2+\tilde c_1 y_1y_2^2+\tilde d_1 y_2^3\\ \tilde a_2 y_1^3+\tilde b_2 y_1^2y_2+\tilde c_2 y_1y_2^2+\tilde d_2 y_2^3\end{pmatrix}=\delta^{-1}\begin{pmatrix}\delta_{as} & \delta_{bs} & \delta_{cs} & \delta_{ds}\\ -\delta_{ar} & -\delta_{br} & -\delta_{cr} & -\delta_{dr}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\,\mathrm{colon}\,\big((r_1y_1+s_1y_2)^3,\ (r_1y_1+s_1y_2)^2(r_2y_1+s_2y_2),\ (r_1y_1+s_1y_2)(r_2y_1+s_2y_2)^2\ ,\ (r_2y_1+s_2y_2)^3\big)\,.$$

Приравнивая в этом тождестве коэффициенты при $y_1^s y_2^{3-s}$ ($s=\overline{0,3}$) и осуществляя должную перегруппировку слагаемых, получаем восемь равенств, записанных в матричном виде:

$$\widetilde{A}=\delta^{-1}\begin{pmatrix}\delta_{P(r)s} & s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}s}+s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}s} & r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}s}+r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}s} & \delta_{P(s)s}\\ -\delta_{P(r)r} & -s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}r}-s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}r} & -r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}r}-r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}r} & -\delta_{P(s)r}\end{pmatrix},\quad (2.5)$$

где, например, в $\tilde b_2$ имеем выражение $\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}r}=(\partial P_1(r_1r_2)/\partial r_1)r_2-(\partial P_2(r_1,r_2)/\partial r_1)r_1=(3a_1r_1^2+2b_1r_1r_2+c_1r_2^2)r_2-(3a_2r_1^2+2b_2r_1r_2+c_2r_2^2)r_1$, а в $\tilde d_2-\delta\tilde d_2=-\delta^{-1}((a_1s_1^3+b_1s_1^2s_2+c_1s_1s_2^2+d_1s_2^3)r_2-(a_2s_1^3+b_2s_1^2s_2+c_2s_1s_2^2+d_2s_2^3)r_1)$.

Утверждение 2.2. *Для систем* (2.1) *и* (2.3) *справедлива формула* $\widetilde{R}=\delta^6R$.

Таким образом, знак результанта инвариантен по отношению к любой линейной неособой замене.

Среди замен (2.2), преобразующих (2.1) в (2.3), выделим две специальные замены:

$$\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix}\text{— нормировка},\qquad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}a_1r_1^2 & b_1r_1s_2 & c_1s_2^2 & d_1s_2^3/r_1\\ a_2r_1^3/s_2 & b_2r_1^2 & c_2r_1s_2 & d_2s_2^2\end{pmatrix};\qquad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\text{— перенумерация},\qquad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}d_2 & c_2 & b_2 & a_2\\ d_1 & c_1 & b_1 & a_1\end{pmatrix}.\qquad (2.7)$$

Замечание 2.1. Нормировка (2.6) имеет следующие особенности:
1) назовем a_2,b_1,c_2,d_1 элементами нечетного зигзага, a_1,b_2,c_1,d_2 — четного, тогда можно одновременно изменить знаки всех элементов нечетного зигзага, а знак любого элемента четного зигзага изменить нельзя;
2) любое из отношений a_1/b_2, b_1/c_2, c_1/d_2 на диагоналях изменить нельзя.

Замечание 2.2. Если в системе, полученной после замены $L=(r,s)$, потребуется перенумерация, нужно в исходной системе сразу сделать замену $L=(s,r)$.

В то же время перенумерация (2.7) позволяет договориться о следующем.

Соглашение 2.2. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе* (2.1) *при* $l\geq 1$, *т. е. при наличии общего множителя, имеем*

$$a_1^2+a_2^2\neq 0,\quad \textit{если}\quad a_1^2+a_2^2+d_1^2+d_2^2\neq 0.\qquad (2.8)$$

2.3. Запись и линейная эквивалентность систем при $l=1$**.** Для системы (2.1) вида $\dot x=P(x)$ имеем $a_1^2+a_2^2\neq 0$ при $l=1$ согласно соглашению 2.2, иначе $P_0=x_1x_2$ и $l\geq 2$, поэтому она может быть записана в виде

$$\dot x=P_0^1(x)\,G\,q^{[2]}(x),\qquad (2.9)$$

где $P_0^1 = x_1 + \beta x_2$ ($\beta \in \mathbb{R}^1$), $G = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{pmatrix}$, $q^{[2]} = \mathrm{colon}\,(x_1^2,\, x_1x_2,\, x_2^2)$. При этом имеем $p_1^2+p_2^2 \neq 0$, $t_1^2+t_2^2 \neq 0$, иначе $l > 1$, а построенный по многочленам $p_iz^2+q_iz+t_i$ $(i = 1, 2)$ результант не равен нулю, т. е. $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0$ (см., напр., [20, § 50]).

Число β и элементы H системы (2.9) однозначно выражаются через элементы A из равенства $\begin{pmatrix} p_1 & q_1+\beta p_1 & t_1+\beta t_1 & \beta t_1 \\ p_2 & q_2+\beta p_2 & t_2+\beta q_2 & \beta t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ (при $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$):

$$\beta = \theta_*, \quad p_i = a_i, \quad q_i = b_i - a_i\theta_*, \quad t_i = c_i - b_i\theta_* + a_i\theta_*^2 \,(= d_i\theta_*^{-1}), \tag{2.10}$$

где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ — общий нуль многочленов $P_i^{(1)}(\theta) = a_i\theta^3 - b_i\theta^2 + c_i\theta - d_i = 0$ $(i = 1, 2)$.

Вещественный общий нуль многочленов $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ существует и единственен, так как он является нулем P_1, P_2, а любой нуль P_i, взятый с обратным знаком, будет нулем $P_i^{(1)}$.

Теорема 2.1. *При $l = 1$ замена (2.2) вида $x = Ly$ преобразует систему (2.1), записанную в виде (2.9) с $P_0^1 = \alpha x_1 + \beta x_2$, в систему (2.3) вида*

$$\dot{y} = \widetilde{P}_0^1(y)\, \tilde{G}q^{[2]}(y). \tag{2.11}$$

Здесь общий множитель $\widetilde{P}_0^1(y) = \tilde{\alpha}y_1 + \tilde{\beta}y_2$, матрица $\widetilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$ и результант $\widetilde{R}_2 = \delta_{\tilde{p}\tilde{t}}^2 - \delta_{\tilde{p}\tilde{q}}\delta_{\tilde{q}\tilde{t}}$ вычисляются по следующим формулам:

$$(\tilde{\alpha},\, \tilde{\beta}) = (\alpha,\, \beta)L \neq 0, \quad \widetilde{G} = L^{-1}GM, \quad M = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{r} \delta_* = r_1s_2 + r_2s_1, \\ \det M = \delta^3; \end{array}$$

$$\widetilde{R}_2 = \delta^2R_2 \neq 0 \quad \text{или} \quad \tilde{\alpha} = \alpha r_1 + \beta r_2, \quad \tilde{\beta} = \alpha s_1 + \beta s_2,$$

$$\delta\,\widetilde{G} = \begin{pmatrix} r_1^2\delta_{ps} + r_1r_2\delta_{qs} + r_2^2\delta_{ts} & 2r_1s_1\delta_{ps} + \delta_*\delta_{qs} + 2r_2s_2\delta_{ts} & s_1^2\delta_{ps} + s_1s_2\delta_{qs} + s_2^2\delta_{ts} \\ r_1^2\delta_{rp} + r_1r_2\delta_{rq} + r_2^2\delta_{rt} & 2r_1s_1\delta_{rp} + \delta_*\delta_{rq} + 2r_2s_2\delta_{rt} & s_1^2\delta_{rp} + s_1s_2\delta_{rq} + s_2^2\delta_{rt} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Покажем сначала, что справедлива формула

$$q^{[2]}(Ly) = Mq^{[2]}(y). \tag{2.13}$$

Так, имеем

$$q^{[2]}(Ly) = \begin{pmatrix} (r_1y_1 + s_1y_2)^2 \\ (r_1y_1 + s_1y_2)(r_2y_1 + s_2y_2) \\ (r_2y_1 + s_2y_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_1y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = Mq^{[2]}(y).$$

Теперь формула (2.11) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\widetilde{P}(y) \overset{(2.4)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(2.9)}{=} L^{-1}((\alpha, \beta)\, Ly)\, Gq^{[2]}(Ly) \overset{(2.13)}{=}$$
$$\overset{(2.13)}{=} ((\alpha, \beta)L\,y)\, L^{-1}GMq^{[2]}(y) \overset{(2.12)}{=} (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\, y\, \tilde{G}q^{[2]}(y). \quad \square$$

2.4. Запись и линейная эквивалентность систем при $l = 2$. Система (2.1) вида $\dot{x} = P(x)$ при $l = 2$ с учетом соглашения 2.2 может быть записана в виде

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \tag{2.14}$$

где $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ и $\det H = \delta_{pq} \neq 0$, вещественный общий множитель $P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = p_0^2\, q^{[2]}(x)$ с $p_0^2 = (\alpha, 2\beta, \gamma)$ имеет дискриминант $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$, причем либо $\alpha = 1$ $(D_0 = \beta^2 - \gamma)$, либо $\alpha, \gamma = 0$, $2\beta = 1$ $(D_0 = 1)$, так как условие (2.8) позволяет исключить случай $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$ (замена (2.7) сводит p_0 к $(\gamma, 2\beta, \alpha)$).

Действительно, строка p_0^2 и элементы H в (2.14) однозначно выражаются через элементы A из равенства $\begin{pmatrix} \alpha p_1 & \alpha q_1 + 2\beta p_1 & 2\beta q_1 + \gamma p_1 & \gamma q_1 \\ \alpha p_2 & \alpha q_2 + 2\beta p_2 & 2\beta q_2 + \gamma p_2 & \gamma q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ по формулам:

1) $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, тогда $\delta_{ab} \neq 0$, $P_1^{(2)}(\theta_*) = P_2^{(2)}(\theta_*) = 0$, где $P_i^{(2)}(\theta) = a_i^2\theta^3 - 2a_i b_i \theta^2 + (a_i c_i + b_i^2)\theta + a_i d_i - b_i c_i$ $(i = 1, 2)$, $2\theta_* = \delta_{ac}\delta_{ab}^{-1}$, и $\alpha = 1$, $2\beta = \theta_*$, $\gamma = \theta_*^2 - (b_i\theta_* - c_i)a_i^{-1}$, $p_i = a_i$, $q_i = b_i - a_i\theta_*$;

2) $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, тогда $b_2 \neq 0, P_1^{(2)}(\theta_*) = 0$, $\theta_*^2 - (b_1\theta_* - c_1)a_1^{-1} = d_2 b_2^{-1}$, где $\theta_* = c_2 b_2^{-1}$, и $\alpha = 1$, $2\beta = \theta_*$, $\gamma = d_2 b_2^{-1}$, $p_1 = a_1$, $q_1 = b_1 - a_1\theta_*$, $p_2 = 0$, $q_2 = b_2$;

3) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, тогда все аналогично случаю 2 со сменой нижних индексов;

4) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, тогда $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $\delta_{bc} \neq 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 0$, $p_i = b_i$, $q_i = c_i$. (2.15)

Здесь в (2.15_1) значение θ_* найдено из равенства правых частей формулы для γ и, если $\theta_* = \delta_{ac} = 0$ и $\delta_{ab} = 0$, строки A_1, A_2 пропорциональны, т. е. $l = 3$; в (2.15_4) $\delta_{bc} = \delta_{pq} \neq 0$.

Собственные числа H и дискриминант характеристического полинома имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{p_1 + q_2 \pm \sqrt{D}}{2} \neq 0, \quad D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq} = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2 q_1. \tag{2.16}$$

Теорема 2.2. *При* $l = 2$ *замена* (2.2) *преобразует систему* (2.1)*, записанную в виде* (2.14)*, в систему* (2.3) *вида*

$$\dot{y} = \widetilde{P}_0^2(y)\, \widetilde{H} y. \tag{2.17}$$

Здесь матрица $\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix}$ *и строка коэффициентов* $\tilde{p}_0^2 = (\tilde{\alpha},\, 2\tilde{\beta},\, \tilde{\gamma})$ *общего множителя* $\widetilde{P}_0^2 = \tilde{\alpha} y_1^2 + 2\tilde{\beta} y_1 y_2 + \tilde{\gamma} y_2^2 = \tilde{p}_0^2\, q^{[2]}(y)$ *вычисляются по следующим формулам:*

$$\begin{gathered} \tilde{p}_0^2 = p_0^2\, M \quad (M \text{ из } (2.12)), \quad \widetilde{H} = L^{-1} H L \quad \text{или} \\ \tilde{\alpha} = \alpha r_1^2 + 2\beta r_1 r_2 + \gamma r_2^2, \quad \tilde{\beta} = \alpha r_1 s_1 + \beta\delta_* + \gamma r_2 s_2, \quad \tilde{\gamma} = \alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2, \\ \widetilde{H} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix} \qquad (\delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = \delta_{pq}). \end{gathered} \tag{2.18}$$

При этом дискриминант $\widetilde{D}_0 = \tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$ *связан с* D_0 *следующим образом:*

$$\widetilde{D}_0 = \delta^2 D_0, \tag{2.19}$$

а собственные числа $\widetilde{H}$ *и дискриминант* $\widetilde{D}$ *совпадают с* λ_1, λ_2 *и* D.

Доказательство. Формула (2.17) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\widetilde{P}(y) \overset{(2.4)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(2.14)}{=} L^{-1}(p_0^2\, q^{[2]}(Ly))\, HLy \overset{(2.13)}{=}$$
$$\overset{(2.13)}{=} (p_0^2\, Mq^{[2]}(y))\, L^{-1}HLy \overset{(2.18)}{=} \tilde{p}_0^2\, q^{[2]}(y)\, \widetilde{H}y.$$

Согласно (2.18) $\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma} = (\alpha r_1 s_1 + \beta\delta_* + \gamma r_2 s_2)^2 - (\alpha r_1^2 + 2\beta r_1 r_2 + \gamma r_2^2)(\alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2) = (\beta^2 - \alpha\gamma)(r_1^2 s_2^2 - 2r_1 s_1 r_2 s_2 + s_1^2 r_2^2) = (\beta^2 - \alpha\gamma)\delta^2$, т. е. формула (2.19) верна. □

2.5. Запись и линейная эквивалентность систем при $l = 3$. В системе (2.1) при $l = 3$ многочлены $P_1, P_2 \not\equiv 0$ пропорциональны, поэтому с учетом соглашения 2.2

$$\exists\, k \neq 0: \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 & kd_1 \end{pmatrix} \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0; \;\; P_2 = kP_1,\; P_0^3 \equiv P_1). \tag{2.20}$$

Покажем, что система (2.20) может быть записана в виде

$$\dot{x} = P_0(x)Hx, \tag{2.21}$$

где $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ kp_1 & kq_1 \end{pmatrix}$ $(p_1^2 + q_1^2 \neq 0,\; k \neq 0,\; \delta_{pq} = 0)$, вещественный общий множитель имеет вид $P_0 = x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$ $\;(D_0 = \beta^2 - \gamma)$.

Собственные числа H и дискриминант характеристического полинома таковы:

$$\lambda_1 = p_1 + kq_1, \quad \lambda_2 = 0, \quad D = \lambda_1^2 \geq 0. \tag{2.22}$$

Структура системы (2.21), предложенная в случае $l = 2$, весьма удобна для дальнейших исследований (в этом уже можно было убедиться), поэтому для системы (2.20) используется аналогичное разложение, основанное на вынесении общего множителя P_0 не максимальной, а только второй степени. Отличия заключаются в том, что в системе (2.14) $\det H = 0$, всегда можно получить $\alpha \neq 0$ и имеется неоднозначность, связанная с возможностью различными способами выносить P_0 из многочлена P_1 системы (2.20).

Уточним принципы выбора квадратичного общего множителя P_0 в (2.20).

Соглашение 2.3. *Будем выносить из* $P_1(x)$ *в системе* (2.20): *1) если возможно, то полный квадрат*; *2) иначе, если возможно, такой* P_0, *при котором в* (2.22) $\lambda_1 \neq 0$; *3) иначе, при наличии, два линейных сомножителя с максимальными нулями.*

Коэффициенты β, γ $(\alpha = 1)$ и элементы p_1, q_1 в (2.21) однозначно выражаются через элементы (2.20) из равенств $a_1 = \alpha p_1$, $b_1 = \alpha q_1 + 2\beta p_1$, $c_1 = 2\beta q_1 + \gamma p_1$, $d_1 = \gamma q_1$ по формулам:

1) $a_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1,\; 2\beta = \theta_*,\; \gamma = (a_1\theta_*^2 - b_1\theta_* + c_1)a_1^{-1},\; p_1 = a_1,\; q_1 = b_1 - a_1\theta_*$, где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ — нуль $P_1^{(2)}(\theta)$ из (2.15), выбранный с учетом соглашения 2.3;
2) $a_1 = 0\; (b_1 \neq 0) \Rightarrow \alpha = 1,\; 2\beta = c_1 b_1^{-1},\; \gamma = d_1 b_1^{-1},\; p_1 = 0,\; q_1 = b_1$.

(2.23)

Остановимся подробнее на выборе θ_* в случае 1.

Наличие кратного корня многочлена $P_1^{(2)}$ равносильно тому, что $\gamma = \beta^2$ при $a_1 \neq 0$, а значит, $\theta_*^{\pm} = 2(b_1 \pm d_*^{1/2})/3$, где $d_* = b_1^2 - 3a_1c_1$. Поэтому, если $d_* \geq 0$ и $d_1 = a_1^{-2}(b_1^3 - 3b_1d_* \mp 2d_*^{3/2})/27$, многочлен $P_1^{(2)}(\theta)$ имеет нуль $\theta_*^{\pm}$ и двукратный нуль $(2b_1 \pm d_*^{1/2})/3$. Если же кратных нулей нет, то выбираем $\theta_* \neq 1 + a_1^{-1}b_1$, если возможно, иначе $p_1 + kq_1 = 0$. И, если выбор еще остается, θ_* — минимальный нуль $P_1^{(2)}(\theta)$.

Возвращаясь к системе (2.21), заметим, что для нее так же, как для системы (2.14) с $l = 2$, справедлива теорема 2.2, в которой $\alpha = 1$ и $\det H = 0$.

2.6. Основные линейные инварианты. Обобщим полученные результаты.

Теорема 2.3. *Степень l ($l = \overline{0,3}$) общего множителя P_0^l, введенного для системы (2.1) в определении 2.1, инвариантна относительно линейных неособых замен. При этом, если $l = 1$, инвариантен знак результанта R_2 ($R_2 \neq 0$) матрицы G системы (2.9), а если $l = 2$ или $l = 3$, инвариантны знаки дискриминанта квадратичного общего множителя P_0 и дискриминанта корней характеристического полинома матрицы H систем (2.14) или (2.21).*

Следствие 2.1. *В случае $l = 2$ или $l = 3$ квадратичный общий множитель P_0, выносимый из многочленов P_1, P_2 системы (2.1), и полученный в результате замены (2.2) общий множитель $\widetilde{P}_0$, выносимый из многочленов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ системы (2.17), одновременно раскладываются или не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами и полные квадраты для них сохраняются.*

В заключение отметим, что дальнейшая работа в конечном итоге будет связана с исследованием совместности, различными упрощениями, разбиениями на частные случаи и решением системы (2.5). При этом (2.5) следует трактовать, как систему восьми уравнений с четырьмя неизвестными r_1, r_2, s_1, s_2 — коэффициентами замены (2.2), имеющую следующую структуру: левая часть является однородным многочленом четвертого порядка относительно r_1, r_2, s_1, s_2 с коэффициентами, являющимися линейными комбинациями восьми коэффициентов исходной системы (2.1), а вектор правой части образуют восемь коэффициентов системы (2.17), умноженные на определитель линейной неособой замены (2.2).

Литература

1. *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$ // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 8. С. 1011–1022.

2. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы относительно фильтрующегося действия группы // Труды ММО. 1979. Т. 40. С. 2–46.

3. *Kokubu H., Oka H., Wang D.* Linear grading function and further redaction of normal forms // J. Diff. Eq. 1996. Vol. 132. P. 293–318.

4. *Брюно А. Д., Петрович В. Ю.* Нормальные формы системы ОДУ // Препринт ИПМ РАН. 2000. № 18. 24 с.

5. *Baider A., Sanders J.* Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form // J. Diff. Eq. 1992. Vol. 99, N 2, P. 205–244.

6. *Басов В. В., Михлин Л. С.* Обобщенные нормальные формы систем ОДУ с невозмущенной частью $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$ // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2 (60), вып. 1. С. 14–22.

7. *Vaganyan A. S.* Generalized normal forms of infinitesimal symplectic and contact transformations in the neighbourhood of a singular point // arXiv:1212.4947. 2013. URL: http://arxiv.org/abs/1212.4947.

8. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды ММО. 1971. Т. 25. С. 119–262; 1972, Т. 26. С. 199–238.

9. *Брюно А. Д.* Нормальная форма системы Гамильтона // УМН. 1988. Т. 43, вып. 1(259). С. 23–56.

10. *Birkhoff G. D.* Dynamical Systems // Amer. Math. Soc., Providence, Colloquium Publications. 1927. Vol. 9. P. xii+305.

11. *Лычагин В. В.* Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // УМН. 1975. Т. 30, вып. 1(181). С. 101–171.

12. *Басов В. В., Федорова Е. В.* Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные НФ // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2010. № 4. С. 49–85. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal.

13. *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением. I, II // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1016–1029; 2005. Т. 41, № 8. С. 1011–1022.

14. *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением. III // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 3. С. 308–319.

15. *Басов В. В., Федорова Е. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением. IV // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 297–313.

16. *Сибирский К. С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев: «Штиинца», 1982. 168 с.

17. *Басов В. В., Петрова С. Е.* Обобщенные нормальные формы систем ОДУ с квадратично-кубической невозмущенной частью // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2012. № 2. С. 154–217. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal.

18. *Takens F.* Singularities of vector fields // IHES. 1974. Vol. 43, N 2. P. 47–100.

19. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков C^{∞}-отображений относительно действия группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 4. С. 855–868.

20. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра. М.; Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1949. 434 с.

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2015 г.

Сведения об авторе

Басов Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент;
vlvlbasov@rambler.ru

TWO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS CUBIC SYSTEMS: CLASSIFICATION AND NORMAL FORMS — I

Vladimir V. Basov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
vlvlbasov@rambler.ru

This work is the first in a series of papers devoted to the classification of two-dimensional homogeneous cubic systems based on the partition into classes of linear equivalence. Principles are developed to constructively distinguish the structure of the simplest system in each class and canonical set that defines the permissible values that can take its coefficients. The polynomial vector in the right part of such system identified with (2×4)-matrix is called the canonical form (CF) and the system itself — the normal cubic form.

One of the main objectives of the series is to simplify the reduction of a system with a homogeneous cubic polynomial in the unperturbed part to the various structures of the generalized normal form (GNF). Under GNF we mean a system, perturbed part of which is in some sense the simplest form. Constructive implementation of the normalization process depends on the ability to explicitly specify the conditions of compatibility and possible solutions of so-called connective system which is understood as a countable set of linear algebraic equations systems that determine the normalizing transformation of the perturbed system. The principles mentioned above are based on the idea of the greatest possible simplification of the connective system. This will allow to reduce the initial perturbed system by an invertible linear substitution to the system with some CF in the unperturbed part, and then reduce the resulting system, optimal for normalization, by almost identical substitutions to various structures of the GNF.

In this paper: 1) the general problem is set, the other problems close to it are formulated with the description of the existing results; 2) the connective system is derived, which determines the equivalence of any two perturbed systems with the same homogeneous cubic part, the possibilities of its simplification are discussed, also the GNF is defined and the method of resonant equations which allows to constructively obtain all of its structures is given; 3) special recording forms of homogeneous cubic systems in the presence of the common homogeneous factor in their right-hand parts having a power from one to three are introduced; the linear equivalence of such systems as well as systems without a common factor is studied; the key linear invariants are offered. Refs 20.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

References

1. Basov V. V., "The generalized normal form and formal equivalence of systems of differential equations with zero approximation $(x_2^3, -x_1^3)$", *Differential Equations* **40**(8), 1073—1085 (2004).

2. Belickii G. R., "Normal forms in relation to the filtering action of the group", *Trudy Mosk. Mat. Obshch.* **40**, 2–46 (1979) [in Russian].

3. Kokubu H., Oka H., Wang D., "Linear grading function and further redaction of normal forms", *J. of Differential Equations* **132**, 293–318 (1996).

4. Bruno A. D., Petrovich V. Yu., "Normal forms of system of ODE", *Preprint Inst. Prikl. Mat. RAN* (18), (Moscow, 2000) [in Russian].

5. Baider A., Sanders J., "Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form", *Journal of Differential Equations* **99**(2), 205–244 (1992).

6. Basov V. V., Mikhlin L. S., "Generalized normal forms of ODE systems with unperturbed part $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$", *Vestnik of Saint-Petersburg University. Ser. 1* **2(60)**, Issue 1, 14–22 (2015) [in Russian].

7. Vaganyan A. S., "Generalized normal forms of infinitesimal symplectic and contact transformations in the neighbourhood of a singular point", *arXiv:1212.4947* (2013), URL: http://arxiv.org/abs/1212.4947.

8. Bruno A. D., "An analytical form of differential equations", *Trudy Mosk. Mat. Obshch.* **25**, 119–262 (1971); **26**, 199–238 (1972) [in Russian].

9. Bruno A. D., "The normal form of a Hamiltonian system", *Russian Mathematical Surveys* **43**, Issue 1, 25–66 (1988).

10 Birkhoff G. D., "Dynamical Systems", *Amer. Math. Soc., Providence, Colloquium Publications* **9**, xii+305 (1927).

11. Lychagin V. V., "Lokal classification of non-lineral first order partial differential equations", *Russian Mathematical Surveys* **30**, Issue 1, 105–175 (1975).

12. Basov V. V., Fedorova E. V., "Two-dimensional real systems of ODE with quadratic unperturbed parts: classification and degenerate generalized normal forms", *Differential equations and control processes* (4), 49–85 (2010). URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal.

13. Basov V. V., Skitovich A. V., "A generalized normal form and formal equivalence of two-dimensional systems with quadratic zero approximation: I, II", *Differential Equations* **39**(8), 1067—1081 (2003); **41**(8), 1061—1074 (2005).

14. Basov V. V., "A generalized normal form and formal equivalence of two-dimensional systems with quadratic zero approximation: III", *Differential Equations* **42**(3), 327—339 (2006).

15. Basov V. V., Fedorova E. V., "A generalized normal form and formal equivalence of two-dimensional systems with quadratic zero approximation: IV", *Differential Equations* **45**(3), 305—322 (2009).

16. Sibirskii K. S., *An introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations* (Izd. Shtiintsa, Kishinev, 1982, 168 p.) [in Russian].

17. Basov V. V., Petrova S. E., "Generalized normal forms of systems of ODE with quadratic-cubic unperturbed parts", *Differential equations and control processes* (2), 154–217 (2012) URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal [in Russian].

18. Takens F., "Singularities of vector fields", *IHES* **43**(2), 47–100 (1974).

19. Belickii G. R., "Normal forms for formal series and germs of C^∞-mappings with respect to the action of a group", *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **10**(4), 809–821 (1976).

20. Okunev L. Ya., *Higher algebra* (Gos. izdat. teh.-teor. lit., Moscow, 1949, 434 p.) [in Russian].