УДК 519.22

К ИСТОРИИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. IV

Характеризация распределений и предельные теоремы в статистике

А. Ю. Зайцев[1,2], А. М. Каган[3], Я. Ю. Никитин[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

[2]Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки, 27

[3]Мэрилендский университет, США, 20742, Мэриленд, Колледж-Парк

E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru, amk@math.umd.edu, y.nikitin@spbu.ru

Четвертая статья из серии обзоров, посвященных научным достижениям Ленинградской–Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики в период с 1947 по 2017 г. Она посвящена характеризации распределений, предельным теоремам для ядерных оценок плотности и асимптотической эффективности статистических критериев. Характеризационные результаты связаны с независимостью и равнораспределенностью линейных форм от выборочных значений, а также с регрессионными соотношениями, допустимосью и оптимальностью статистических оценок. При вычислении асимптотической эффективности по Бахадуру особое внимание уделяется логарифмической асимптотике вероятностей больших уклонений тестовых статистик при основной гипотезе. Рассматривается также построение новых критериев согласия и симметрии, основанных на характеризациях, и исследуется их асимптотическое поведение. Изучаются также условия локальной асимптотической оптимальности разнообразных непараметрических статистических критериев. Библиогр. 136 назв.

Ключевые слова: характеризация распределений, регрессия, равнораспределенность, эмпирический процесс, ядерная оценка плотности, асимптотическая эффективность, большие уклонения, U-статистика, нормальная аппроксимация.

Данная статья продолжает серию обзоров, посвященных достижениям Ленинградской и Санкт–Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики (см. [1]–[3]). Раздел 1 подготовлен А. М. Каганом, раздел 2 — Я. Ю. Никитиным, а раздел 3 — А. Ю. Зайцевым.

[1]© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

[2] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-01-00367 и 16-01-00258), гранта СПбГУ–ННИО 6.65.37.2017 и при поддержке программы Президиума РАН N 01 "Фундаментальная математика и ее приложения" (грант PRAS-18-01).

1 Характеризационные задачи математической статистики

Характеризационные задачи являются разделом аналитической статистики и могут быть описаны как приложение продвинутых математических методов к анализу статистических моделей. Типичная характеризационная теорема устанавливает, что свойство статистической процедуры характеризует определенную статистическую модель или целый класс моделей.

В настоящей работе представлены результаты в этой области, полученные школой Ю. В. Линника. Не будет преувеличением сказать, что эта школа определила уровень исследований в этом разделе статистики в СССР и многих других странах. В истории математики принято считать, что одна из первых работ в рассматриваемой области, принадлежащая С. Н. Бернштейну [4], была выполнена в Ленинграде (независимо от работы Каца [5]). Мы начнем обзор с классического обобщения теоремы Бернштейна–Каца.

1.1 Независимость линейных форм от независимых случайных величин

В начале 50-х годов прошлого века Ю. В. Линник предложил своему аспиранту В. П. Скитовичу исследовать условия независимости n линейных форм

$$L_i = a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

от независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Ожидалось, в соответствии с результатом Бернштейна–Каца, что при разумных условиях на коэффициенты линейных форм, их взаимная независимость повлечет за собой нормальное распределение (гауссовость) исходных случайных величин.

Результат Скитовича [6, 7] (полученный независимо также Дармуа [8]) оказался большой неожиданностью.

Теорема 1. *Независимость двух линейных форм $L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ от независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ влечет за собой гауссовость тех X_i, для которых $a_ib_i \neq 0$.*

Многомерный вариант теоремы Скитовича–Дармуа был получен в [7].

Независимость линейных форм от счетного числа независимых случайных величин изучался Л. В. Мамай [9], результат которой был усилен Рамачандраном [10]. Недавно И. А. Ибрагимов [11] получил более сильный результат.

Теорема 2. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины, а ряды в линейных формах $L_1 = \sum_1^\infty a_iX_i$ и $L_2 = \sum_1^\infty b_iX_i$ сходятся с вероятностью 1. Если коэффициенты a_i, b_i таковы, что хотя бы одна из последовательностей $\{a_i/b_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ и $\{b_i/a_i, i = 1, 2, \ldots\}$ ограничена, то независимость L_1 и L_2 влечет за собой гауссовость всех X_i.*

Комбинируя вопрос Линника о независимости нескольких линейных форм с теоремой Скитовича–Дармуа, Каган изучил в [12] аналитическое обобщение условия независимости. Если совместная характеристическая функция $f(t_1,\dots,t_m)$ для $m \geq 2$ линейных форм от n независимых случайных величин $X_1,\dots,X_n$ факторизуется в виде

$$f(t_1,\dots,t_m) = \prod_{j_1,\dots,j_k} h_{j_1,\dots,j_k}(t_{j_1},\dots,t_{j_k})$$

при $k < m$, то все X_i, отвечающие ненулевым коэффициентам по крайней мере в $k+1$ форме, имеют нормальное распределение. Теорема Скитовича–Дармуа является частным случаем этого результата при $m = 2$.

Обобщение теоремы Скитовича–Дармуа на функции от независимых случайных величин, обладающие свойством алгебраического сложения, содержится в [13, гл. 3]. Линник [14] использовал теорему Скитовича–Дармуа для получения закона Максвелла распределения скоростей молекул в газе при более слабых условиях, чем принято в статистической физике.

Исследователи харьковской школы получили варианты теоремы Скитовича–Дармуа для независимых случайных элементов со значениями в группах, удовлетворяющих определенным условиям.

1.2 Независимость нелинейных функций от независимых случайных величин

Для характеризации гауссовости посредством независимости важна линейность формы. В работе Кагана, Лаги и Рохатги [15] построен пример независимых, но негауссовских случайных величин X_1, X_2, для которых $X_1 + X_2$ и $|X_1 - X_2|$ независимы.

Однако независимость некоторых специальных нелинейных статистик также является исключительным свойством нормальных случайных величин. Пусть $X_1,\dots,X_n$, $n \geq 2$, — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n, \quad s^2 = \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1).$$

Лукач доказал в [16], что если $\mathbf{E}\,X_1^2 < \infty$, то независимость $\bar{X}$ и s^2 справедлива лишь если X_i имеют нормальное распределение. В сущности, он установил, что при сохранении условия $\mathbf{E}\,X_1^2 < \infty$ независимость может быть заменена даже более слабым условием $\mathbf{E}\,(s^2|\bar{X}) = c$, где $c = \mathbf{E}s^2$.

Для того, чтобы избавиться от условия $\mathbf{E}\,X_1^2 < \infty$, потребовался детальный анализ функционального уравнения для целой функции $\mathbf{E}\,\exp(itX_1 - X_1^2)$. Он был осуществлен Каватой и Сакамото [17] в Японии и независимо Зингером в [18].

В серии работ Зингера [19, 20, 21], а также Зингера и Линника [22, 23] был изучен феномен независимости полиномиальных и квазиполиномиальных статистик от независимых случайных величин. Статистика $S(X_1,\dots,X_n)$ называется квазиполиномиальной, если существует непрерывная функция φ и неотрицательные полиномы $r(x_1,\dots,x_n)$ и $R(x_1,\dots,x_n)$, такие что для всех $x_1,\dots,x_n$ выполняются следующие неравенства:

$$r(x_1,\dots,x_n) \leq \varphi(S(x_1,\dots,x_n)) \leq R(x_1,\dots,x_n).$$

Зингер показал, что при слабых условиях на квазиполиномы S_1 и S_2 их независимость приводит к следующим оценкам хвостов функций распределения $F_i(x)$ случайных величин X_i:

$$1 - F_i(-x) + F_i(x) = O(\exp(-x^a)), \quad i = 1,\dots,n,$$

для некоторой константы $a > 0$ и всех $x > 0$.

В частности, все моменты у X_i конечны. Если один из квазиполиномов является линейной формой с ненулевыми коэффициентами, то характеристические функции X_i являются целыми функциями конечного порядка. При дополнительном условии отсутствия нулей у характеристической функции X_i оказывается, что X_i имеют нормальное распределение.

Эта техника оказалась эффективной также при замене квазиполиномов на линейные формы со случайными коэффициентами. Пусть

$$L_1 = u_1X_1 + \cdots + \cdots + u_nX_n, \quad L_2 = v_1X_1 + \cdots + v_nX_n,$$

где $X_1, \ldots, X_n$ независимы, а случайный вектор $(u_1, \ldots, v_n)$ не зависит от $X_1, \ldots, X_n$.

В работе Зингера и Линника [24] было показано (при некоторых условиях на коэффициенты, обеспечивающие их ограниченность с вероятностью 1), что независимость L_1 и L_2 влечет за собой условие $\mathbf{E}\,|X_i|^m < \infty$ для всех $m > 0$. Если дополнительно предположить, что коэффициенты одной из форм ненулевые константы, то оказывается, что характеристические функции X_i — целые функции конечного порядка.

Если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены и если один из квазиполиномов является полиномом $P(x_1, \ldots, x_n)$, то условия, при которых выполняется независимость $P(X_1, \ldots, X_n)$ и суммы $X_1 + \cdots + X_n$, легко проверяются. Они выполнены для третьего центрального выборочного момента $m_3 = n^{-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^3$ при $n \geq 3$, для четвертого центрального выборочного момента m_4 при $n \geq 4$, а для m_5 при $n \geq 5$.

Таким образом, независимость выборочного среднего и третьего (а также четвертого и пятого) центрального выборочного момента является характеристическим свойством нормальных случайных величин X_i.

Если $X_1, \ldots, X_n$ не предполагаются независимыми, то из независимости пары форм L_1, L_2 можно извлечь немногое. Исключением служит следующий впечатляющий результат, принадлежащий А. М. Вершику [25]. Пусть матрица ковариаций случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ при условии $\mathbf{E}\,|\mathbf{X}|^2 < \infty$ имеет ранг ≥ 2 (чтобы исключить случай векторов вида (aX, bX) для некоторой случайной величины X).

Теорема 3. *Некоррелированность любой пары линейных форм $L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ влечет за собой их независимость тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{X}$ имеет многомерное нормальное распределение.*

1.3 Постоянство регрессии

Если предположить условие $\mathbf{E}\,|X_i| < \infty$, то естественным ослаблением свойства независимости линейных форм $L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ и $L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ является постоянство регрессии

$$\mathbf{E}\,(L_1|L_2) = \mathrm{const}.$$

Следующий результат, известный как КЛР-теорема [26], стимулировал изучение свойства постоянства регрессии.

Теорема 4. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 3$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{E}\,|X_i| < \infty$. Соотношение*

$$\mathbf{E}\,(\bar{X}\ |X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X}) = \mathrm{const}$$

справедливо в том и только том случае, когда все X_i имеют нормальное распределение.

Этот результат был обобщен в различных направлениях, см. [13, гл. 5]. Одно из элегантных обобщений выглядит так. Пусть $L_i = a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n$, $i = 1, \ldots, n$, являются n линейно независимыми формами от n независимых (но необязательно одинаково распределенных) случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Если $a_{11} \cdots a_{1n} \neq 0$, то соотношение

$$\mathbf{E}\,(L_1 | L_2, \ldots, L_n) = \text{const}$$

влечет за собой гауссовость X_i.

Обратимся к квадратичным полиномам. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых $\mathbf{E}\,|X_1|^2 < \infty$. Если полином

$$Q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j,k} a_{jk} X_j X_k + \sum_j b_j X_j$$

таков, что $\sum_j a_{jj} \neq 0$, $\sum_{j,k} a_{jk} = 0$, $\sum_j b_j = 0$, то условие $\mathbf{E}\,(Q | X_1 + \cdots + X_n) = \text{const}$ влечет за собой гауссовость X_i.

Для произвольных (необязательно независимых) $X_1, \ldots, X_n$ справедлив следующий аналог теоремы 3 (Вершик [25]) при тех же условиях на вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Теорема 5. *Некоррелированность линейных форм $L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ влечет за собой условие $\mathbf{E}\,(L_1 | L_2) = \text{const}$, если и только если вектор $\mathbf{X}$ имеет многомерное сферически симметричное распределение.*

1.4 Равнораспределенность линейных форм

Первый достаточно общий результат о равнораспределенности линейных форм от независимых случайных величин принадлежит Марцинкевичу [27]. Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{E}\,|X_1|^m < \infty$ при всех $m = 1, 2, \ldots$, а линейные формы

$$L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n, \quad L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$$

с условием $\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} \neq \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$ одинаково распределены, то X_i имеют нормальное распределение.

Специальный случай был рассмотрен ранее Пойа [28], который доказал, что если X_1, X_2 независимы и одинаково распределены, то равнораспределенность X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ является характеристическим свойством нормально распределенных случайных величин X_1.

Изучение феномена равнораспределенности без условия существования всех моментов потребовало изощренных аналитических методов, развитых в работах Линника [29, 30], в которых была прояснена роль моментных условий в характеризации нормальности. Близкие результаты были получены Каганом [31].

1.5 Допустимость и оптимальность оценок

Известно, что в схеме прямых измерений параметра θ

$$X_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ошибки измерений ε_i независимы и однаково распределены, причем $\mathbf{E}\,\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}(\varepsilon_i) = \sigma^2 < \infty$, выборочное среднее $\bar{X}$ имеет наименьшую дисперсию в классе линейных несмещенных оценок θ для любой функции распределения F ошибок ε_i. Если же F — гауссовская, то $\bar{X}$ обладает минимальной дисперсией в классе всех несмещенных оценок θ. Это непосредственно следует из неравенства Рао–Крамера, при слабых условиях на F. Из КЛР-теоремы (см. §1.3 выше) вытекает, что без каких-либо условий на F выборочное среднее $\bar{X}$ минимизирует дисперсию в классе эквивариантных оценок параметра, и это свойство является характеристическим для гауссовской F. Для линейных оценок несмещенность эквивалентна эквивариантности.

Опираясь на два этих крайних утверждения, Линник предположил, что существует монотонная последовательность классов оценок $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \ldots$ и двойственная последовательность классов распределений $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots$, такая что $\bar{X}$ обладает минимальной дисперсией в $\mathcal{C}_k$ в том и только том случае, когда функция распределения F ошибки ε_i принадлежит $\mathcal{F}_k$.

Класс $\mathcal{C}_1$ состоит из всех линейных несмещенных оценок, а $\mathcal{F}_1$ — из всех распределений с конечными вторыми моментами. В то же время $\lim \mathcal{C}_k = \bigcup_1^\infty \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_\infty$ содержит "почти все" несмещенные оценки, а $\lim \mathcal{F}_k = \bigcap_1^\infty \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_\infty$ состоит только из нормальных распределений.

Программа Линника была реализована Каганом в [32]. В этой работе $\mathcal{C}_k$ был классом оценок вида $\bar{x} + Q(x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$, где $Q(y_1, \ldots, y_n)$ — полином степени k. Класс $\mathcal{F}_k$ состоял из таких F с $\int x^{2k}\, dF(x) < \infty$, что первые $k+1$ моментов F совпадали с соответствующими моментами гауссовского распределения. Для любого $F \in \mathcal{F}_k$ наилучшая оценка в $\mathcal{C}_k$ — это та, которую можно назвать оценкой Линника–Питмена, а именно $\bar{x} - \hat{E}_k(\bar{x}|x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$, где $\hat{E}_k$ есть проекция в пространстве $L^2(x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$ на подпространство полиномов степени k.

Расширение программы Линника на семейства распределений, зависящие от произвольного (необязательно сдвигового) параметра, было осуществлено Каганом в [33]. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из совокупности с плотностью $p(x;\theta)$. Обозначим $\mathbf{E}\,X = \mu(\theta)$, $\mathbf{D}(X) = \sigma^2(\theta)$, и пусть фишеровский информант $J(x;\theta) = \partial \ln p(x;\theta)/\partial\theta$ принадлежит $L^2_\theta(X)$.

Оценка метода моментов для θ, получаемая из уравнения $\bar{X} = \mu(\theta)$, использует лишь минимальную информацию о модели и наблюдениях. С другой стороны, оценка максимума правдоподобия, которую находят из уравнения $\sum_1^n J(X_i;\theta) = 0$, использует максимум информации о модели и данных.

Заметим, что наилучшая в среднем квадратичном линейная аппроксимация для $J(X;\theta)$ в пространстве $L^2_\theta(X)$ — это оценка $(X - \mu(\theta))/\sigma^2(\theta)$, тогда как наилучший аппроксимирующий полином степени k есть $J_k(X;\theta) = \hat{E}_\theta(J(X;\theta)|M_k)$, где $M_k = \mathrm{span}(1, X, \ldots, X^k)$, в предположении, что $\mathbf{E}\,X^{2k} < \infty$.

Более или менее прямым аналогом введенного выше класса $\mathcal{C}_k$ является класс $\tilde{\mathcal{C}}_k$ оценок, определяемых уравнениями $\sum_1^n Q(X_i;\theta) = 0$, где $Q(x;\theta)$ — полиномы от X степени k с коэффициентами, зависящими от θ. Асимптотически наилучшая при $n \to \infty$ оценка, аналог оценки Линника–Питмена, имеет вид $\sum_1^n J_k(X_i;\theta) = 0$ и является полиномиальным аналогом оценки максимума правдоподобия.

Оценка метода моментов является наилучшей в наименьшем классе $\tilde{\mathcal{C}}_1$, тогда как оценка максимума правдоподобия — наилучшая в самом широком классе $\bigcup_1^\infty \tilde{\mathcal{C}}_k$, если только все моменты X существуют.

Ряд характеризационных результатов показывает экстремальные свойства оценки метода наименьших квадратов (МНК) в стандартной линейной модели

$$X = A\,\theta + \varepsilon,$$

где A — известная $n \times m$ матрица плана, θ — m-мерный параметр, подлежащий оценке, а ε – n-мерный вектор ошибок с независимыми компонентами, $\varepsilon_i \sim F(x)$, $i = 1, \ldots, n$. В работе Петрова [34] при слабых ограничениях на F было доказано, что оценка МНК для θ эффективна в смысле Крамера–Рао для всех A в том и только том случае, когда F гауссовская. В работе Кагана и Шалаевского [35] результат Петрова был усилен. Если $n \geq 2m + 1$ (это условие убрать нельзя) и оценка МНК допустима для матрицы A полного ранга, то F – гауссовская.

В [36, 37] было доказано, что допустимость выборочного среднего как оценки параметра сдвига при неквадратичной функции потерь является характеристическим свойством нормального закона. Сходные характеризации были получены в [38, 39], где, помимо структурного параметра сдвига, присутствовал и мешающий параметр масштаба. В работе Зингера и Кагана [40] была обнаружена тесная связь между гауссовским распределением и поведением оценки МНК при неквадратических функциях потерь.

Что касается другого интересного параметра — параметра масштаба σ, то Каган и Рухин в [41] дали характеризацию гамма-распределения в классе распределений на положительной полупрямой посредством допустимости $c\bar{X}$ как оценки σ.

Устойчивость в КЛР-теореме означает, что ε-допустимость $\bar{X}$ как оценки параметра сдвига влечет за собой $C(\varepsilon)$-нормальность наблюдений. Следующее утверждение в этой проблеме принадлежит Кагану [42].

Теорема 6. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 3$, — выборка с генеральным распределением $F(x - \theta)$, где $F(x)$ симметрична и $\int x^2 dF(x) = \sigma^2 < \infty$. Если $\bar{X}$ является $\varepsilon^2\sigma^2/n$-допустимой, т.е. не существует оценки $\tilde{\theta}$, такой что*

$$\mathbf{E}\,(\tilde{\theta} - \theta)^2 < \mathbf{E}\,(\bar{X} - \theta)^2 - \varepsilon^2\sigma^2/n$$

для всех θ, то $\max|F(x) - \Phi(x/\sigma)| \leq C(\ln(1/\varepsilon))^{-1/2}$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, а C — абсолютная константа.

Порядок близости в этой теореме такой же, как у Сапогова [43, 44], который изучал устойчивость в классической теореме Крамера о компонентах гауссовского закона.

1.6 Разное

Если $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормальной совокупности, то известно, что вектор

$$\Big(Z_1 = \frac{X_1 - \bar{X}}{s},\ \ldots,\ Z_n = \frac{X_n - \bar{X}}{s}\Big)$$

стьюдентизированных разностей при $n \geq 4$ равномерно распределен на $(n-2)$-мерной сфере $z_1 + \cdots + z_n = 0$, $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 1$. Вопрос Колмогорова о том, характеризует ли это свойство нормальный закон, получил положительный ответ в работе Зингера [45] для $n \geq 7$. Аналитическое усиление этого результата содержится в работе Зингера и Линника [46].

Характеризации гауссовского и гамма распределений свойствами фишеровской информации тесно связаны со свойствами $\bar{X}$ и $c\bar{X}$ как оценок параметров сдвига и масштаба, описанных в §1.5.

Если распределение X задается плотностью $p(x-\theta)$, то фишеровская информация о параметре θ, содержащаяся в наблюдении X, $I(\theta)=\int(p'/p)^2\,p(x)\,dx$ не зависит от θ. В классе наблюдений X с заданной дисперсией σ^2 минимум $I(\theta)$ достигается на гауссовском наблюдении X и равен $1/\sigma^2$ (доказательство см. в [13, гл. 13]).

Если же распределение наблюдения $X>0$ имеет плотность $(1/\sigma)\,p(x/\sigma)$, то фишеровская информация о параметре σ имеет вид

$$I(\sigma)=(1/\sigma^2)\int(1+xp'/p)^2\,p(x)\,dx.$$

При условиях на $p(x)$, контролирующих поведение этой плотности при $x\to 0$ и $x\to\infty$, в [47] было доказано, что в классе плотностей на $(0,\infty)$ с заданными первым и вторым моментом α_1 и α_2, $I(\sigma)$ минимизируется равномерно по σ на гамма-распределении с моментами α_1 и α_2.

Интересная характеризация нормального закона свойствами критерия, основанного на $\bar{X}$, была получена Морозенским [48]. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка с функцией распределения $F(x-\theta)$, удовлетворяющей условиям $\int x\,dF(x)=0$, $\int x^2\,dF(x)<\infty$. Нулевая гипотеза $H_0:\theta=0$ проверяется против альтернативы $H_1:\theta>0$. Критерий, отвергающий H_0 при $\bar{X}>c_\alpha$, где порог c_α определяется уровнем α, является равномерно наиболее мощным для всех α в классе критериев уровня $\le\alpha$ тогда и только тогда, когда F – гауссовская.

Следующий факт важен для теории критерия хи-квадрат. Если $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из нормальной совокупности $N(0,\sigma^2)$, то распределение статистики $\chi_n^2=\sum_1^n(X_i+a_i)^2$ зависит от $a_1,\ldots,a_n$ при $n\ge 2$ только через параметр нецентральности $\sum_1^n a_i^2$. В работе Кагана и Шалаевского [49] доказано, что это свойство характеристическое. Иначе говоря, для независимых одинаково распределенных наблюдений $X_1,\ldots,X_n$ распределение суммы $\sum_1^n(X_i+a_i)^2$ зависит при $n\ge 2$ только от $\sum_1^n a_i^2$ тогда и только тогда, когда $X_i\sim N(0,\sigma^2)$ при некотором σ^2.

2 Построение и асимптотическое сравнение статистических критериев

2.1 Асимптотическая эффективность критериев

Одна из классических и наиболее известных задач математической статистики — это задача обоснованного выбора статистического критерия из нескольких критериев, имеющихся в наличии у статистика. В рамках параметрической статистики задача не является особенно острой, поскольку здесь существуют критерии отношения правдоподобия и байесовские критерии, которые обычно оказываются асимптотически оптимальными в том или ином смысле.

Однако при проверке непараметрических гипотез предложено множество разнообразных критериев, причем постоянно появляются новые критерии. В литературе описаны сотни разнообразных непараметрических критериев. Как сравнивать между собой критерии, предложенные для проверки одной и той же гипотезы и какие рекомендации давать для статистиков-практиков?

Один путь состоит в моделировании мощностей сравниваемых критериев при различных уровнях значимости, различных объемах выборки и различных альтернативах.

В результате получаются объемные таблицы, в которых очень нелегко найти ответ. Другой путь заключается в вычислении асимптотической эффективности данной последовательности тестовых статистик — числовой характеристики, позволяющей оценить качество рассматриваемого критерия при объеме выборки, стремящемся к бесконечности.

Первый подход к вычислению асимптотической эффективности критериев принадлежит Э. Питмену [50] и появился в конце 40-х годов прошлого века. Ограничением при вычислении питменовской эффективности является требование асимптотической нормальности последовательности статистик как при основной гипотезе, так и при альтернативе. Вскоре появились другие виды асимптотической эффективности, не предполагающие таких ограничений, но взамен требующие сведений о больших уклонениях статистик при основной гипотезе и при альтернативе. Эти подходы предлагались Р. Бахадуром [51], Дж. Ходжесом и Э. Леманом [52] и Г. Черновым [53]. Позже появились еще более сложные эффективности: по Калленбергу (или промежуточная эффективность) [54] и по Боровкову–Могульскому [55].

В середине 70-х годов прошлого века И. А. Ибрагимов привез из США лекции Бахадура [51] и предложил своему ученику Я. Ю. Никитину разобраться в соответствующей теории и попытаться применить ее к разнообразным статистическим критериям. В процессе работы Я. Ю. Никитин овладел техникой вычисления асимптотической эффективности критериев в различных постановках и вычислил ее для ряда уже известных, а также построенных им и его учениками и соавторами статистических критериев. Результаты были изложены им в монографии [56], вскоре переведенной на английский язык [57]. Свыше 20 лет после ее выхода на кафедре теории вероятностей и математической статистики продолжается работа по изучению свойств различных видов асимптотической эффективности и ее вычислению для разнообразных статистических критериев. При этом основное внимание было сосредоточено на бахадуровской эффективности.

Ключевым понятием бахадуровской эффективности последовательности тестовых статистик $\{T_n\}$ при альтернативе, определяемой параметром θ является *точный наклон* $c_T(\theta)$. Это положительная и конечная вещественная функция параметра, описывающая скорость экспоненциального убывания вероятности достигаемого уровня при фиксированных альтернативе и мощности. Для вычисления точного наклона нужна в первую очередь и главным образом логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений черновского типа (т.е. порядка $O(\sqrt{n})$) при основной гипотезе для изучаемой последовательности статистик. Известно [51], что точный наклон не превосходит удвоенного расстояния Кульбака–Лейблера между альтернативой и нулевой гипотезой.

Бахадуровская (абсолютная) эффективность последовательности статистик $\{T_n\}$ определяется как отношение точного наклона к удвоенному расстоянию Кульбака–Лейблера между альтернативой и нулевой гипотезой, она зависит от альтернативы θ и всегда не превосходит 1. Чаще всего вычисляют локальную бахадуровскую эффективность, которая является пределом абсолютной эффективности при $\theta \to 0$ и является числом.

2.2 Большие уклонения тестовых статистик

Для вычисления больших уклонений линейных статистик типа выборочного среднего обычно используется теорема Чернова [53] и ее многочисленные обобщения. В работе

Абрахамсон [58] предложен прием получения с помощью теоремы Чернова грубых, или логарифмических больших уклонений для статистик Колмогорова–Смирнова. Развитие этого приема позволило решить аналогичную задачу в значительно более сложном случае статистик Колмогорова–Смирнова для проверки независимости [59], а также для семейств U-статистик [60].

Другой подход был разработан Сановым [61], который связал вероятности больших уклонений функционалов от эмпирической меры с минимизацией информации Кульбака–Лейблера на соответствующем множестве вероятностных мер. Теорема Санова неоднократно обобщалась, в частности, в важной работе [62], и постепенно стала основным способом явного вычисления грубой асимптотики больших уклонений, необходимого для расчета бахадуровской эффективности. Как указывается в монографии [63, с. 23], "из грубых теорем о больших уклонениях можно вывести больше интересных грубых следствий, чем точных следствий из точных теорем".

В работах Я. Ю. Никитина [64, 65] был разработан метод решения этой задачи для интегральных статистик $\omega_{n,q}^k = \int_0^1 (F_n(t)-t)^k\, q(t)\, dt$, где эмпирическая функция распределения F_n построена по равномерно распределенной выборке на $[0,1]$, k — натуральное число, а q — положительный суммируемый вес на $[0,1]$. Рассмотрим при любом $a>0$ следующее множество Ω_a абсолютно непрерывных функций распределения F на $[0,1]$:

$$\Omega_a = \Big\{ F : \int_0^1 (F(t)-t)^k\, q(t)\, dt \geq a \Big\}$$

и определим на нем информацию Кульбака–Лейблера

$$K(\Omega_a) = \inf \Big\{ \int_0^1 F'(s)\, \ln F'(s)\, ds : F \in \Omega_a \Big\}. \tag{1}$$

Если доказать, что $K(\Omega_a)$ непрерывна по a, то из [62] можно вывести, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{\omega_{n,q}^k \geq a\} = -K(\Omega_a). \tag{2}$$

В [64, 65] был предложен метод решения вариационной задачи (1) при вычислении $K(\Omega_a)$ и было доказано, что при достаточно малых $a>0$

$$K(\Omega_a) = -\frac{1}{2}\, \lambda_0(q,k)\, a^{2/k} + \sum_{j=3} c_j a^{j/k}, \tag{3}$$

где ряд с числовыми коэффициентами c_j сходится, а $\lambda_0(q,k)$ — первое собственное число нелинейной задачи

$$y'' - \lambda\, y^{k-1} q = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y^k\, q\, dt = 1. \tag{4}$$

Разработанный при этом метод оказался очень мощным. Суть его заключается в том, что возникающее при условной минимизации информации Кульбака–Лейблера уравнение Эйлера–Лагранжа вместе с краевыми и нормировочными условиями рассматривается как неявный аналитический оператор с малым параметром $\varepsilon = \sqrt{a}$, действующий в подходящем банаховом пространстве. Можно ожидать, что решения такого уравнения также разлагаются в ряд по целым или дробным степеням этого малого параметра. Проблему при доказательстве этого разложения представляет то, что у получающихся операторов производная по Фреше при $\varepsilon = 0$ может быть необратимой. Поэтому утверждать, что решения будут аналитичными по ε, нельзя.

Для устранения этого препятствия используется теория ветвления решений нелинейных уравнений Ляпунова–Шмидта [66]. Изучение так называемого уравнения разветвления совместно с условиями нормировки позволяет построить решения уравнения Эйлера–Лагранжа в виде рядов по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Сходимость построенных решений в некоторой окрестности нуля следует из общих теорем [66]. Для получения искомой асимптотики достаточно подставить найденные решения в минимизируемый функционал. Поскольку из (3) следует, что $K(\Omega_a)$ непрерывно по a, то справедливо (2).

Этот "вариационный" метод позволил извлечь нужную информацию о больших уклонениях для вычисления локальной бахадуровской эффективности многих интегральных статистик: Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Хмаладзе–Аки и других [57]. Впервые результат типа (2) в простейшем случае $k = 2$, $q \equiv 1$ был получен в [67]. В этом случае задача (4) решается в синусах, что резко упрощает дело.

Развитие указанного метода позволило описать логарифмические большие уклонения для интегральных статистик при проверке однородности, симметрии и независимости, см., например, [65], [68], [69]. Поскольку закон больших чисел при альтернативе легко проверяется с помощью вариантов теоремы Гливенко–Кантелли, это позволило впервые вычислить локальную бахадуровскую эффективность для большого числа интегральных статистик для проверки согласия, однородности, симметрии и независимости. Ее значения для ряда альтернатив приведены в [57].

Вариационный метод дал также возможность вычислить логарифмическую асимптотику *при альтернативе* линейных ранговых статистик для проверки однородности и симметрии при некоторых ограничениях на функцию меток [70], [71]. Это позволило найти локальную асимптотическую эффективность соответствующих статистик по Чернову и Ходжесу–Леману. Между тем неожиданно оказалось, что широкий класс *двусторонних статистик* асимптотически оптимален по Ходжесу–Леману [72], [73]. Предположение о справедливости этого свойства для статистик Колмогорова высказывалось ранее Тушнади [74]. Это обесценивает эффективность по Ходжесу–Леману и выдвигает на первый план эффективности по Бахадуру и Питмену.

2.3 Большие уклонения U-статистик и функционалов фон Мизеса

Другое применение вариационный метод нашел при исследовании больших уклонений U и V-статистик, которые также называют функционалами фон Мизеса. U и V-статистики изучались Хёфдингом в [75] и фон Мизесом в [76] и играют важную роль в современной теории вероятностей и математической статистике, поскольку в этих терминах можно представить многие оценки и статистики для проверки гипотез.

Реализация вариационного метода в этих обстоятельствах оказывается более трудной и громоздкой. При этом принцип Лагранжа приводит к сложному интегро-дифференциальному уравнению, рассматриваемому вместе с условиями нормировки. Нахождение экстремали в виде сходящегося ряда по малому параметру снова проводится средствами нелинейного функционального анализа, в частности, с помощью теории Ляпунова–Шмидта.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с непрерывной функцией распределения F. Для $n \geq m$ определим U-статистику

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}), \tag{5}$$

где $\Phi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ — симметричная относительно любой перестановки m переменных функция. Функционал фон Мизеса, или V-статистика V_n, определяется с помощью формулы

$$V_n = n^{-m} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}). \tag{6}$$

Функция Φ называется ядром, а натуральное число m — степенью U-статистики (или функционала фон Мизеса).

Мы рассматриваем грубые черновские большие уклонения для U-статистик с нулевым средним, и нас интересует при $a > 0$ предел

$$h_U(a) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{U_n \geq a\}.$$

Ряд авторов занимались изучением больших уклонений невырожденных U-статистик в более узких зонах крамеровских и умеренных уклонений. Случай черновских уклонений впервые рассмотрен в работах Никитина и Поникарова [77], [78].

Ниже всегда подразумевается, что исходные наблюдения равномерно распределены на $[0,1]$ (это не ограничивает общности, если произвести преобразование Смирнова и допустить усложнение ядра). Если $m = 1$, то U-статистики совпадают с V-статистиками и являются фактически суммами независимых случайных величин. Поэтому далее всегда $m \geq 2$.

В сравнительно простом случае невырожденных ядер справедлив следующий результат.

Теорема 7. *Пусть U-статистика* (5) *имеет ограниченное ядро ранга* 1, *то есть* $\sigma^2 = \mathbf{E}\,\varphi^2(X_1) > 0$, *где* $\varphi(x) = \mathbf{E}\,(\Phi(X_1, \ldots, X_m) \,|\, X_1 = x)$. *Тогда для любой вещественной последовательности* $\{\gamma_n\}$, *такой что* $\gamma_n \to 0$, *верно соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{U_n \geq a + \gamma_n\} = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a^j, \tag{7}$$

где ряд в (7) *сходится при достаточно малых* $a > 0$, *причем* $b_2 = -\frac{1}{2m^2\sigma^2}$.

Если же ядро слабо вырождено, то есть имеет ранг 2, то формулировка несколько усложняется. Положим

$$\Phi^*(s_1, s_2) = \begin{cases} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Phi(s_1, \ldots, s_m)\, ds_3 \cdots ds_m, & \text{если} \quad m > 2; \\ \Phi(s_1, s_2), & \text{если} \quad m = 2. \end{cases}$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 8. *Пусть ядро U-статистики* (5) *ограничено и имеет ранг* 2. *Пусть* ν_0 — *наименьшее из чисел* ν, *удовлетворяющих условию*

$$x(s_1) = \nu \int_0^1 \Phi^*(s_1, s_2)\, x(s_2)\, ds_2,$$

причем ν_0 является простым характеристическим числом линейного интегрального оператора с ядром Φ^*, действующего из $L^2[0,1]$ в $L^2[0,1]$.

Тогда для любой вещественной последовательности γ_n, такой что $\gamma_n \to 0$, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{U_n \geq a + \gamma_n\} = \sum_{j=2}^{\infty} c_j\, a^{j/2},$$

где ряд справа сходится при достаточно малых $a > 0$, причем $b_2 = -\frac{\nu_0}{2C_m^2}$.

Точно такие же утверждения справедливы для функционалов фон Мизеса (6). Аналогичные результаты для двухвыборочных ядер получены в [79]. Большие уклонения для ядер с более сильным вырождением, а также для неограниченных ядер являются открытой проблемой.

2.4 Вычисление бахадуровской эффективности

Доказанные теоремы позволили вычислить бахадуровскую эффективность многих ранее не изученных статистик, см., например, [80], [81]. В качестве примеров альтернатив рассматривались альтернативы сдвига, масштаба, загрязнения и лемановские.

Изучению эффективностей классических статистик при мало изученных скошенных (в смысле Аззалини) альтернатив посвящены работы Дурио и Никитина [82]–[84]. В работе [85] рассматривались интегральные статистики ω_n^p при любом $p \geq 1$ и вычислялась их приближенная асимптотическая бахадуровская эффективность при различных альтернативах, а также аналоги таких статистик для проверки независимости. Близким задачам посвящены работы [86]–[88]. Асимптотическая логнормальность P-значений статистик для проверки согласия исследовалась Р. С. Леонтьевым, см., например, [89].

Серия работ была выполнена Я. Ю. Никитиным и его соавторами по вычислению асимптотических эффективностей последовательностей статистик, являющихся функционалами от преобразованного эмпирического процесса. Так, в [87] были рассмотрены статистики, основанные на преобразовании Хмаладзе, а в [90] — на преобразовании Деовельса. Были также подробно исследованы статистики, основанные на проинтегрированном эмпирическом процессе [91], [92], и их двухвыборочные варианты [93].

В работе [94] были изучены большие уклонения и асимптотическая эффективность знаменитого критерия Лиллиефорса для проверки сложной гипотезы экспоненциальности. Это стало возможно за счет использования сильного результата А. В. Чириной [95] о больших уклонениях сумм функций от гамма-распределенных случайных величин, нормализованных своим выборочным средним. Отметим также работы по изучению эффективности отношения концентрации Джини как статистики для проверки экспоненциальности [96], а также рангового коэффициента корреляции Джини и "простого правила" Спирмена как критериев независимости в [97].

В [98] рассматривался критерий для проверки экспоненциальности против специальных альтернатив, основанный на эмпирическом преобразовании Лапласа, и вычислялась его локальная бахадуровская эффективность при стандартных альтернативах к экспоненциальности. Сходная программа для проверки гипотезы о пуассоновости, основанная на эмпирической производящей функции, была реализована в [99].

Несколько работ были посвящены проверке независимости и вычислению асимптотической эффективности соответствующих критериев, обычно ранговых. В работе

Н. А. Степановой [100] вычислялась питменовская эффективность многомерного варианта рангового коэффициентов корреляции Спирмена, ее продолжением является работа [101]. Взвешенные ранговые коэффициенты корреляции для проверки независимости изучались в [102].

Помимо бахадуровской эффективности изучались питменовская и черновская эффективности ряда статистик. Примерами могут служить работы [103] — [105].

2.5 Локальная асимптотическая оптимальность критериев и характеризация распределений

В начале 80-х годов Я. Ю. Никитин заинтересовался задачей отыскания альтернатив, для которых данная последовательность статистик $\{T_n\}$ является локально асимптотически оптимальной (ЛАО) по Бахадуру, то есть для нее выполняется соотношение

$$c_T(\theta) \sim 2\,K(\theta),\ \ \theta \to 0,$$

где $K(\theta)$ — расстояние Кульбака–Лейблера между альтернативной функцией распределения $G(x,\theta)$ с параметром θ и нулевой гипотезой, при которой наблюдения имеют функцию распределения $G(x,0)$. При некоторых априорных условиях регулярности на семейство функций распределения $G(x,\theta)$ ему удалось описать эти условия в терминах введенных им "ведущих" функций последовательностей статистик [57], [106], [107]. При дальнейшей конкретизации структуры семейства альтернатив получаются новые характеризации "наиболее благоприятных" распределений свойством ЛАО последовательности тестовых статистик.

Рассмотрим в качестве примера сдвиговое семейство $G(x-\theta)$. Тогда статистика Колмогорова является ЛАО лишь если G — распределение Лапласа, статистика ω^2 является ЛАО только для распределения гиперболического косинуса (или Чампернауна), статистика Андерсона–Дарлинга — только для логистического распределения, а статистика Ватсона — только для распределения Коши. При рассмотрении скошенных альтернатив, как выяснено в [82, 83], результаты о наиболее благоприятных распределениях совершенно другие — например, для статистики Колмогорова область ЛАО пуста, а для статистики ω^2 неожиданно появляется распределение арксинуса на симметричном интервале вокруг нуля.

Похожие результаты получены для критериев однородности, симметрии и независимости, в частности для разнообразных линейных ранговых критериев и ранговых коэффициентов корреляции. Полученные описания областей ЛАО частично переносятся на эффективности по Питмену, Ходжесу–Леману и Чернову, см., например, [108]. Отдельно изучен вопрос о ЛАО в случае критериев согласия и симметрии, основанных на U и V-статистиках [109], в двухвыборочном случае этому посвящена работа [80]. Экстремальные задачи, возникающие при этих рассмотрениях, были предметом изучения в [110], а также в [101].

2.6 Критерии согласия и симметрии, основанные на характеризациях

С конца 90-х годов Я. Ю. Никитин стал систематически изучать критерии согласия и симметрии, основанные на характеризациях. Идея восходит к Ю. В. Линнику, который писал в [30]: "...можно поставить вопрос о построении критериев согласия выборки со сложной гипотезой, основанных на одинаковой распределенности двух соответствующих статистик $g_1(x_1, \dots x_r)$ и $g_2(x_1, \dots x_r)$ и на сведении, таким образом, вопроса к критерию однородности".

Проиллюстрируем этот подход следующим образом. Рассмотрим характеризацию некоторого закона одинаковой распределенностью двух статистик $g_1(X_1, \dots, X_r)$ и $g_2(X_1, \dots, X_s)$. Предположим, что мы располагаем выборкой $X_1, \dots, X_n$ независимых одинаково распределенных наблюдений, имеющих непрерывную функцию распределения F и проверяем сложную гипотезу согласия $H_0 : F \in \mathcal{F}_0$, где $\mathcal{F}_0$ — "нулевой" класс распределений, отвечающий упомянутому закону, против альтернативы $H_1 : F \notin \mathcal{F}_0$.

В соответствии с характеризацией построим две U-эмпирические функции распределения

$$L_n^1(t) = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} \mathbf{1}\{g_1(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) < t\}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$L_n^2(t) = \binom{n}{s}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} \mathbf{1}\{g_2(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) < t\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

По теореме Гливенко–Кантелли для U-эмпирических функций распределения [111] функция $L_n^1(t)$ равномерно сходится к функции $L^1(t) = \mathbf{P}\{g_1(X_1, \dots, X_r) < t\}$ при больших n, и аналогично функция $L_n^2(t)$ равномерно сходится к функции $L^2(t)$. Поскольку при нулевой гипотезе $L^1(t) \equiv L^2(t)$, то мы можем заключить, что при гипотезе H_0

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left| L_n^1(t) - L_n^2(t) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому можно построить тестовые статистики, основываясь на близости статистик $L_n^1(t)$ и $L_n^2(t)$, например, интегральную статистику

$$T_n = \int_{\mathbf{R}} \left(L_n^1(t) - L_n^2(t) \right) dF_n(t), \tag{8}$$

а также статистику типа Колмогорова

$$K_n = \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| L_n^1(t) - L_n^2(t) \right|. \tag{9}$$

При альтернативной гипотезе значения тестовых статистик оказываются большими и позволяют отвергнуть нулевую гипотезу.

Статистика вида (8) обычно асимптотически эквививалентна некоторой U-статистике, а статистика (9) является супремумом семейства U-статистик. Для таких объектов предельная теория известна, а асимптотика больших уклонений может быть извлечена из работ [60] и [78]. Все это позволяет использовать введенные статистики для проверки гипотез в больших выборках и вычислять их асимптотическую эффективность.

В литературе существуют сотни различных характеризаций вероятностных распределений, см., например, [13] и [112]. Многие из них могут быть использованы для построения статистических критериев. Такие критерии привлекательны тем, что они отражают скрытые, внутренние свойства распределений, связанные с данной характеризацией, и потому могут оказаться более эффективными или более робастными, чем другие. Кроме того, для проверки и принятия статистических гипотез требуется несколько разнообразных критериев, поэтому построение новых критериев безусловно полезно.

Пусть X и Y — независимые случайные величины с одним и тем же распределением и нулевым средним. Пользуясь указанным выше подходом, Никитин и Мульере [113] построили интегральный критерий нормальности (с нулевым средним), основанный на знаменитой характеризации Пойа [28] нормального закона свойством равнораспределенности случайных величин X и $(X+Y)/\sqrt{2}$, и изучили его свойства. Позже Литвинова и Никитин [114] рассмотрели соответствующий критерий Колмогорова, основанный на обобщении этой характеризации. Аналогичные результаты были получены Волковой и Никитиным в [115] для критериев, основанных на характеризации нормальности свойством

$$2XY/\sqrt{X^2+Y^2} \stackrel{d}{=} X,$$

обнаруженной Шеппом. Для характеристики эффективности этих критериев отметим, что интегральные критерии имеют при альтернативе сдвига и скошенной альтернативе весьма высокие локальные бахадуровские эффективности 0.967 и 0.955. Эффективность колмогоровского критерия существенно ниже и составляет соответственно 0.328 и 0.637.

Экспоненциальный закон имеет, по-видимому, больше характеризаций, чем какой-либо иной. Некоторые характеризации, основанные в основном на свойствах порядковых статистик в малых выборках, послужили основой для построения критериев экспоненциальности с неопределенным масштабным параметром и вычисления их бахадуровской эффективности в работах Волковой и Никитина [116], [117], [118]. Критерии экспоненциальности, основанные на недавней характеризации Арнольда и Вилласеньора [119] были разработаны в [120]. Значения эффективностей здесь довольно различны и зависят от типа альтернатив.

Рассматривались также критерии, основанные на характеризациях закона Коши [121], степенного закона [122], равномерного закона [123] и закона Парето [124], и вычислялись их эффективности.

На основе характеризаций можно проверять не только согласие, но и симметрию. Пусть снова X и Y — независимые случайные величины с одним и тем же непрерывным распределением. Барингхауз и Хенце [125] предложили характеризацию симметрии свойством $|\max(X,Y)| \stackrel{d}{=} |X|$. Интегральный критерий симметрии, основанный на ней, был разработан и изучен Литвиновой [126], а критерий Колмогорова был построен и исследован Никитиным [60], [127]. Никитин и Ахсануллах построили и исследовали семейство критериев, использующих характеризацию симметрии равнораспределенностью крайних порядковых статистик [128], что обобщает характеризацию Барингхауза–Хенце. Эффективность этих критериев при скошенных альтернативах изучалась в [129]. Обобщение на необязательно крайние порядковые статистики получено Милошевич и Обрадовичем [130].

При исследовании всех описанных выше критериев, основанных на характеризациях, изучались условия их ЛАО. При этом появлялись неожиданные распределения. Так, например, локальная оптимальность критерия симметрии типа Колмогорова, основанного на характеризации Барингхауза–Хенце при альтернативе сдвига, возможна лишь если плотность исходных наблюдений — это гибрид равномерного распределения и распределения Лапласа с плотностью

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{если } |x| \le 2; \\ \\ \frac{e^2}{6}\exp(-|x|), & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

Подробный обзор критериев, основанных на характеризациях, и ряд открытых проблем приводится в [131].

3 Оценки точности аппроксимации в центральной предельной теореме для L_1-нормы ядерных оценок плотностей

Пусть $X,\ X_1,\ X_2,\dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения f. Пусть $\{h_n\}_{n\ge 1}$ — последовательность положительных постоянных, такая что $h_n \to 0$ при $n \to \infty$. Классическая ядерная оценка плотности определяется как

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n} K\Big(\frac{x-X_j}{h_n}\Big) \quad \text{при } x \in R,$$

где K — ядро, удовлетворяющее соотношениям

$$\int_{\mathbf{R}} K(u)\,du = 1, \qquad K(u) = 0 \quad \text{при } |u| > 1,$$

$$0 < \sup_{u\in R}|K(u)| < \infty.$$

Пусть $\|\cdot\|$ обозначает L_1-норму.

Центральная предельная теорема для $\|f_n - \mathbf{E}\,f_n\|$ при *произвольных* плотностях f в описанных выше условиях была получена Д. Мейсоном (см. теорему 8.9 в монографии [132]). Ему удалось доказать, что для любой последовательности положительных констант $\{h_n\}_{n\ge1}$, удовлетворяющей соотношениям $h_n \to 0$ и $nh_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, закон распределения случайной величины

$$\frac{\|f_n - \mathbf{E}\,f_n\| - \mathbf{E}\,\|f_n - \mathbf{E}\,f_n\|}{\sqrt{\mathbf{D}(\|f_n - \mathbf{E}\,f_n\|)}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному распределению.

А. Ю. Зайцев [133], [134], [135] получил оценки точности аппроксимации в этой теореме. Были получены оценки точности сильной аппроксимации, когда соответствующие случайные величины строятся достаточно близкими на одном вероятностном пространстве. В качестве следствий получены оценки расстояния Прохорова и оценки вероятностей умеренных уклонений. При этом стремящиеся к нулю содержательные оценки точности аппроксимации получены для произвольных плотностей f. Общность оценок привела к тому, что их формулировки в общем виде оказались довольно громоздкими. Естественным образом возник вопрос об упрощении оценок для достаточно регулярных плотностей.

В работе [134] рассмотрены различные естественные классы плотностей, с ограничениями на гладкость, рост, убывание и размеры носителя. Получены оценки расстояния Прохорова и размеров зон, в которых справедлива нормальная аппроксимация для вероятностей больших уклонений. В совместной работе А. Ю. Зайцева с Э. Жине и Д. Мейсоном [136] центральная предельная теорема для центрированных и нормированных ядерных оценок произвольной плотности перенесена на случайные процессы, индексированные ядрами.

Заключение

Итак, Ленинградская–Санкт-Петербургская школа теории вероятностей внесла значительный вклад в характеризацию распределений разнообразными свойствами статистик. Разработано построение новых критериев согласия и симметрии, основанных на характеризациях, изучено их асимптотическое поведение. Были получены многочисленные результаты по вычислению асимптотической эффективности статистических критериев, доказан ряд предельных теорем в статистике.

В следующем выпуске данной серии статей будут изложены результаты в области асимптотической теории оценивания и асимптотической проверки гипотез.

Список литературы

[1] *Зайцев А. Ю., Зингер А. А., Лифшиц М. А., Никитин Я. Ю., Петров В. В.* К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. I. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Вестник С.-Петербург. ун-та. 2018. Т. 5(63). Вып. 2. С. 201–232.

[2] *Запорожец Д. Н., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., Назаров А. И.* К истории Санкт- Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. II. Случайные процессы и зависимые величины // Вестник С.-Петербург. ун-та. 2018. X. С. 00–00.

[3] *Бородин А. Н.. Давыдов Ю. А., Невзоров В. Б.* К истории Санкт- Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. III. Распределения функционалов от процессов, стохастическая геометрия и экстремумы. // Вестник С.-Петербург. ун-та. 2018. X. С. 00–00.

[4] *Бернштейн С. Н.* Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса // Тр. Ленингр. политех. института. 1941. 3-С. С.21–22. {*Собрание сочинений*, т. IV, Наука, М., (1964), 314–315}.

[5] *Кас М.* On a characterization of the normal distribution // Amer. J. Math. 1939. Vol. 61. P. 726–728.

[6] *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. N 2. С. 217–219.

[7] *Скитович В. П.* Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения // Известия РАН. Сер. матем. 1954. Т. 18. N 2. С. 185–200.

[8] *Darmois G.* Analyse générale des liaisons stochastiques // Rev. Inst. Intern. Statist. 1953. Vol. 21. P. 2–8.

[9] *Мамай Л. В.* К теории характеристических функций // Вестник ЛГУ. 1960. Т. 1. С. 85-99.

[10] *Ramachandran B.* Advanced Theory of Characteristic Functions // Statistical Publishing Society: Calcutta, 1967.

[11] *Ибрагимов И. А.* О теореме Скитовича—Дармуа—Рамачандрана // Теория вероятн. и ее примен. 2012. Т. 57. N 3. С. 418–426.

[12] *Каган А. М.* Новые классы зависимых случайных величин и обобщение теоремы Дармуа—Скитовича на несколько форм // Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33. N 2. С. 305–314.

[13] *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука. 1972.

[14] *Линник Ю. В.* Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла // Докл. АН СССР. 1951. Т. LXXXV. N 6. С. 1252–1254.

[15] *Kagan A., Laha R. G., Rohatgi V.* Independence of the sum and absolute difference of independent random variables does not imply their normality // Math. Meth. Statist. 1997. Vol. 6. N 2. P. 263–265.

[16] *Lukacs E.* A characterization of the normal distribution // Ann. Math. Statist. 1942. Vol. 13. N 1. P. 91–94.

[17] *Kawata T., Sakamoto H.* On the characterization of independence of the sample mean and the sample variance // J. Math. Soc. Japan. 1949. Vol. 1. N 2. P. 111–115.

[18] *Зингер А. А.* О независимых выборках из нормальной совокупности // Успехи матем. наук. 1951. Т. 6. №. 5 (45). С. 172–175.

[19] *Зингер А. А.* Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1958. Т. 3. №. 3. С. 265–284.

[20] *Зингер А. А.* О распределениях полиномиальных статистик в выборках из нормальной совокупности // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. №. 1. С. 20–21.

[21] *Зингер А. А.* О распределении полиномиальных статистик в выборках из нормальной и родственных с ней совокупностей // Труды Матем. ин-та им. Стеклова. 1965. Т. 79. С. 150–159.

[22] *Зингер А. А., Линник Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений и его применении к некоторым вопросам теории регрессии // Вестник Ленингр. ун-та. 1957. №. 7. С. 121–130.

[23] *Зингер А. А., Линник Ю. В.* О полиномиальных статистиках нормальной выборки // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. №. 4. С. 766–767.

[24] *Зингер А. А., Линник Ю. В.* Нелинейные статистики и случайные линейные формы // Труды Матем. ин-та им. Стеклова. 1970. Т. 111. С. 23–39.

[25] *Вершик А. М.* Несколько характеристических свойств гауссовских случайных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. №. 2. С. 390–394.

[26] *Kagan, A. M., Linnik, Y. V., Rao, C. R.* On a characterization of the normal law based on a property of the sample average // Sankhyā. 1965. Vol. A27. N 3—4. P. 405–406.

[27] *Marcinkiewicz J.* Sur une propriété de la loi de Gauss // Math. Zeitschrift. 1938. Vol. 44. N 4–5. P. 622–638.

[28] *Pólya G.* Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung // Math. Zeitschrift. 1923. Vol. 18. № 1. P. 96–108.

[29] *Линник Ю. В.* О некоторых одинаково распределенных статистиках // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. N 1. С. 9–11.

[30] *Линник Ю. В.* Линейные формы и статистические критерии // Укр. матем. журн. 1953. Т. 5. N 2. С. 207–243; N 3. С. 247–290.

[31] *Каган А. М.* Обобщенное условие одинаковой распределенности случайных векторов в связи с аналитической теорией линейных форм от независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Vol. 34. N 2. P. 370–375.

[32] *Kagan A. M.* On the estimation theory of a location parameter // Sankhyā. 1966. Vol. A28. N 4. P. 335–352.

[33] *Каган А. М.* Фишеровская информация, содержащаяся в конечномерном линейном пространстве, и корректный вариант метода моментов // Проблемы передачи информации. 1976. Т. 12. N 2. С. 20–42.

[34] *Петров В. В.* О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9. N 1. С. 41–62.

[35] *Каган А. М., Шалаевский О. В.* Допустимость оценок наименьших квадратов — исключительное свойство нормального закона // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 1. С. 81–89.

[36] *Зингер А. А., Каган А. М., Клебанов Л. Б.* Выборочное среднее как оценка параметра сдвига при некоторых ущербах, отличных от квадратического // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189. № 1. С. 29–30.

[37] *Kagan A. M., Zinger A. A.* Sample mean as an estimator of a location parameter. Case of nonquadratic loss functions // Sankhyā. 1971. Vol. A33. N 3. C.351–358.

[38] *Kagan A. M., Zinger A. A.* Sample mean as an estimator of the location parameter in presence of the nuisance scale parameter // Sankhyā. 1973. Vol. A35. N 4. P. 447–454.

[39] *Kagan A. M., Melamed I. A., Zinger A. A.* A class of estimators of a location parameter in presence of a nuisance scale parameter. // In: Statistics and Probability: Essays in honor of C. R. Rao. 1982. North-Holland: Amsterdam-New York. P. 359–368.

[40] *Зингер А. А., Каган А. М.* Оценка наименьших квадратов, неквадратичные ущербы и гауссовское распределение // Теория вероятн. и ее примен. 1991. Т. 36. № 1. С. 34–41.

[41] *Каган А. М., Рухин А. Л.* К теории оценивания параметра масштаба // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12. № 4. С. 735–741.

[42] *Kagan A. M.* On ε-admissibility of the sample mean as an estimator of location parameter // Sankhyā. 1970. Vol. A32. N 1. P. 37–40.

[43] *Сапогов Н. А.* Проблема устойчивости для теоремы Крамера // Известия РАН. Серия матем. 1951. Т. 15. №. 3. С. 205–218.

[44] *Сапогов Н. А.* О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенной приближенно нормально // Вестник Ленингр. ун-та. 1959. Т. 19. С. 78–105.

[45] *Зингер А. А.* О проблеме А. Н. Колмогорова // Вестник Ленингр. ун-та. 1956. Т. 1. С. 53–56.

[46] *Зингер А. А., Линник Ю. В.* О характеризации нормального распределения // Теория вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. № 4. С. 692–695.

[47] *Ф. М. Каган.* Информационное свойство гамма-распределения // Известия АН Узб. ССР. сер. физ.-мат. 1967. Т. 5. С. 67–68.

[48] *Морозенский Л. Ю.* Характеризация нормального закона свойством оптимальности критерия, основанного на выборочном среднем. // Вестник Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1971. N 13. С. 61–63.

[49] *Каган А. М., Шалаевский О. В.* Характеризация нормального закона свойством нецентрального хи-квадрат распределения // Литовский матем. сб. Vol. VII. N 1. P. 57–58.

[50] *Pitman E. J. G.* Lecture notes on nonparametric inference // Univ. of N. Carolina, mimeographed: 1948.

[51] *Bahadur R. R.* Some limit theorems in statistics // SIAM: Philadelphia, 1971.

[52] *Hodges J. L., Lehmann E. L.* The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test // Ann. Math. Stat. 1956. Vol. 27. N 2. P.324–335.

[53] *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations // Ann. Math. Statist. 1952. Vol. 23. N 4. P.493–507.

[54] *Kallenberg W. C. M.* Intermediate efficiency, theory and examples // Ann. Statist. 1983. Vol. 11. N 1. P. 170-182.

[55] *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Наука, Сибирское отд-ние, 1992.

[56] *Никитин Я. Ю.* Асимптотическая эффективность непараметрических критериев // М.: Наука, 1995.

[57] *Nikitin Y.* Asymptotic efficiency of nonparametric tests // NY: Cambridge University Press, 1995; 2nd ed., paperback, 2009.

[58] *I.G. Abrahamson,* The exact Bahadur efficiencies for the Kolmogorov–Smirnov and Kuiper one and two-sample statistics // Ann. Math. Statist. 1967. Vol. 38. N 5. P. 1475-1490.

[59] *Nikitin Y. Y., Pankrashova A. G.* Bahadur efficiency and local asymptotic optimality of certain nonparametric tests for independence // Journ. of Math. Sci. 1990. Vol. 52. N 2. P.2942–2955.

[60] *Nikitin Ya. Yu.* Large deviations of U-empirical Kolmogorov–Smirnov tests, and their efficiency // J. Nonparam. Statist. 2010. Vol. 22. N 5. P. 649–668.

[61] *Санов И. Н.* О вероятности больших отклонений случайных величин // Матем. сборник. 1957. Т.42. № 1, С.11–44.

[62] *Groeneboom P., Oosterhoff J., Ruymgaart F. H.* Large deviation theorems for empirical probability measures // Ann. Probab. 1979. Vol. 7. N 4. P. 553–586.

[63] *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений // М.: Наука, 1979.

[64] *Никитин Я. Ю.* Большие уклонения и асимптотическая эффективность статистик интегрального типа. I // Записки научн. семин. ПОМИ. 1979. Т. 85. С.175–187.

[65] *Никитин Я. Ю.* Большие уклонения и асимптотическая эффективность статистик интегрального типа. II // Записки научн. семин. ПОМИ. 1980. Т. 97. С.151–175.

[66] *Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений* // М.: Наука, 1969.

[67] *Могульский А. А.* Замечания о больших уклонениях статистики ω^2. // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т.22. № 1. С.170–175.

[68] *Никитин Я. Ю.* Асимптотическая эффективность по Бахадуру интегральных критериев симметрии // Записки научн. семин. ПОМИ. 1982. Т.119. С.181–194.

[69] *Nikitin Ya. Yu.* Large deviations and asymptotic efficiency of integral statistics for testing independence // J. Soviet Math. 1987. Vol. 38. N 6. P. 2382–2391.

[70] *Nikitin Ya. Yu.* Hodges-Lehmann and Chernoff efficiencies of linear rank tests // J. Statist. Plann. Infer. 1991. Vol. 29. N 3. P. 309–323.

[71] *Nikitin Y. Y.* Local Chernoff and Hodges-Lehmann efficiencies of linear rank tests for symmetry // Journ. Math. Sci. 1994. Vol. 68. N 4. P. 551–559.

[72] *Nikitin Ya. Yu.* Hodges-Lehmann efficiency of nonparametric tests // Proc. 4th Vilnius Conf. on Probab. Theory Math. Statist., VNU Science Press. 1986. P. 391–408.

[73] *Никитин Я. Ю.* Об асимптотической эффективности по Ходжесу-–Леману непараметрических критериев согласия и однородности // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. N 1. С. 82–91.

[74] *Tusnády G.* On asymptotically optimal tests // Ann. Statist. 1977. Vol. 5. N 2. P. 385–393.

[75] *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist. 1948. Vol. 19. N 3. P. 293–325.

[76] *Mises R. von* On the asymptotic distribution of differential statistical functions // Ann. Math. Statist. 1947. Vol. 18. N 2. 309–348.

[77] *Никитин Я. Ю., Поникаров Е. В.* Большие уклонения черновского типа для U и V-статистик // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 1. С. 10–12.

[78] *Никитин Я. Ю., Поникаров Е. В.* Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений черновского типа для функционалов Мизеса // Труды С.-Петерб. матем. об-ва. 1999. Т. 7. С. 124–167. English translation in: Amer.Math..Soc. Transl., ser.2, ed. by N. N. Uraltseva. 2001. Vol. 203. P. 107–146.

[79] *Nikitin Ya. Yu., Ponikarov E. V.* On large deviations of non-degenerate two-sample U and V-statistics with applications to Bahadur efficiency // Math. Meth. Statist. 2006. Vol. 15. N 1. P. 103–122.

[80] *Litvinova V. V., Nikitin Y. Y.* Asymptotic efficiency and local optimality of tests based on two-sample $U-$ and $V-$statistics // J. Math. Sci. 2008. Vol. 152. N 6. P. 921–927.

[81] *Nikitin Y. Y., Ponikarov E. V.* Asymptotic efficiency of Maesono statistics for testing of symmetry. // Ann. Inst. Statist. Math. 2002. Vol. 54. N 2. P. 382–390.

[82] *Durio A., Nikitin Y. Y.* Local Bahadur efficiency of some goodness-of-fit tests under skew alternatives // J. Statist. Plann. Infer. 2003. Vol. 115. N 1. P. 171–179.

[83] *Durio A., Nikitin Y. Y.* On asymptotic efficiency of certain distribution-free symmetry tests under skew alternatives // In: Studi in onore di Angelo Zanella, a cura di B. V. Frosini, U. Magagnoli, G. Boari. Milano: Vita e Pensiero. 2002. P. 223–239.

[84] *Durio A., Nikitin Y. Y.* Local efficiency of integrated goodness-of-fit tests under skew alternatives // Statist. Probab. Lett. 2016. Vol. 117. P. 136–143.

[85] *Henze N., Nikitin Ya., Ebner B.* Integral distribution-free statistics of L_p-type and their asymptotic comparison // Comput. Statist. Data Anal. 2009. Vol. 53. N 7. P. 3426–3438.

[86] *Подкорытова О. А.* Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений функционалов типа нормы // Записки научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 244. С. 238–256.

[87] *Podkorytova O. A.* Large deviations and Bahadur efficiency of the Khmaladze-Aki statistic // J. Math. Sci. 1994. Vol. 68. N 4. P. 560–565.

[88] *Podkorytova O. A.* On tail asymptotics for L^1-norm of centered Brownian bridge // Le Matematiche. 1998. Vol. 53. N 1. P. 3-9.

[89] *Леонтьев Р. С.* Асимптотика P-значения статистики омега-квадрат в задаче проверки согласия // Записки научных семинаров ПОМИ. 1988. Т. 166. С. 67-71.

[90] *Nikitin Y. Y. Sporysheva P. P.*. On asymptotic efficiency of tests of fit based on the Deheuvels empirical process // J. Math. Sci. 2009. Vol. 159. N 3. P. 317–323.

[91] *Henze N., Nikitin Y. Y.* A new approach to goodness-of-fit testing based on the integrated empirical process // J. Nonpar. Stat. 2000. Vol. 12. N 3. P. 391–416.

[92] *Henze N., Nikitin Y. Y.* Watson-type goodness-of-fit tests based on the integrated empirical process // Math. Meth. Statist. 2002. Vol. 11. N 2. P. 183–202.

[93] *Henze N., Nikitin Y. Y.* Two-sample tests based on the integrated empirical process // Commun. Statist. Theor. Meth. 2003. Vol. 32. N 9. P. 1767–1788.

[94] *Nikitin Y. Y., Tchirina A. V.* Lilliefors test for exponentiality: large deviations, asymptotic efficiency, and conditions of local optimality // Math. Meth. Statist. 2007. Vol. 16. N 1. P. 16–24.

[95] *Tchirina A. V.* Large deviations for a class of scale-free statistics under the gamma distribution // J. Math. Sci. 2005. Vol. 128. N 1. P. 2640–2655.

[96] *Nikitin Y. Y., Tchirina A. V.* Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic // Statist. Meth. Appl. 1996. Vol. 5. N 1. P. 163-175.

[97] *Conti P. L., Nikitin Y.* Asymptotic efficiency of independence tests based on Gini's rank association coefficient, Spearman's footrule and their generalizations // Commun. Statist. - Theor. Meth. 1999. Vol. 28. N 2. 453–465.

[98] *Meintanis S., Nikitin Ya. Yu., Tchirina A. V.* A test of exponentiality against alternative NBRUE life distributions // Intern. J. Statist. Management Syst. 2007. Vol. 2. N 1-2. P. 207–219.

[99] *Meintanis S., Nikitin Ya. Yu.* A class of count models and a new consistent test for the Poisson distribution // J. Statist. Plan. Infer. 2008. Vol. 138. N 12. P. 3722–3732.

[100] *Stepanova N. A.* Multivariate rank tests for independence and their asymptotic efficiency // Math. Meth. Statist. 2003. Vol. 12. N 2. P. 197–217.

[101] *Nazarov A., Stepanova N.* An extremal problem with applications to the problem of testing multivariate independence // J. Nonpar. Statist. 2012. Vol. 24. N 1. P. 3–17.

[102] *Никитин Я. Ю., Степанова Н. А.* Питменовская эффективность критериев независимости, основанных на взвешенных ранговых статистиках // Записки научн. семин. ПОМИ. 2001. Т. 278. С. 159–176.

[103] *Burgio G., Nikitin Y. Y.* The combination of the sign and Wilcoxon tests of symmetry and their Pitman efficiency // In: Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications. N. Balakrishnan, I. Ibragimov and V. Nevzorov, eds. Birkhäuser: Boston. 2001. P. 395–408.

[104] *Burgio G., Nikitin Y. Y.* On the combination of the sign and Maesono tests for symmetry and its efficiency // Statistica. 2003. Vol. LXIII. N 2. P. 213–222.

[105] *Копылев Л. Ю., Никитин Я. Ю.* Об условиях локальной асимптотической оптимальности по Чернову некоторых непараметрических критериев симметрии // Записки научн. семин. ПОМИ. 1993. Т. 207. С. 101–108.

[106] *Никитин Я. Ю.* Характеризация распределений свойством локальной асимптотической оптимальности тестовых статистик // Записки научн. семин. ПОМИ. – 1981. Т. 108. С. 119–133.

[107] *Никитин Я. Ю.* Локальная асимптотическая оптимальность по Бахадуру и задачи характеризации // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. N 1. С. 79–92.

[108] *Kopylev L. Y., Nikitin Y. Y.* On conditions of Chernoff local asymptotic optimality of some nonparametric symmetry tests // J. Math. Sci. 1996. Vol. 81. N 1. P. 2424–2429.

[109] *Nikitin Ya. Yu., Peaucelle I.* Efficiency and local optimality of distribution-free tests based on U and V-statistics // Metron. 2004. Vol. LXII. P. 185–200.

[110] *Nazarov A. I., Nikitin Y. Y.* Some extremal problems for Gaussian and empirical random fields // Transl. Amer. Math. Soc. 2002. Ser. 2(205). P. 189–202.

[111] *Helmers R., Janssen P., Serfling R.* Glivenko–Cantelli properties of some generalized empirical DF's and strong convergence of generalized L-statistics // Probab. Theor. Relat. Fields. 1988. Vol. 79. N 1. P. 75–93.

[112] *Galambos J., Kotz S.* Characterizations of probability distributions // Lect. Notes in Math. 1978. Vol. 675, New York: Springer.

[113] *Muliere P., Nikitin Y.* Scale-invariant test of normality based on Polya's characterization // Metron. 2002. Vol. 60. N 1–2. P. 21–33.

[114] *Литвинова В. В., Никитин Я. Ю.* Критерии Колмогорова для проверки нормальности, основанные на вариантах характеризации Пойа // Записки научн. семин. ПОМИ. 2015. Т. 441. С. 263–273.

[115] *Волкова К. Ю., Никитин Я. Ю.* Об асимптотической эффективности критериев нормальности, основанных на свойстве Шеппа // Вестник С.-Петербург. ун-та. сер. Матем., мех., астр. 2009. N 4. С. 13–19.

[116] *Nikitin Ya. Yu., Volkova K. Yu.,* Asymptotic efficiency of exponentiality tests based on order statistics characterization // Georgian Math. J. 2010. Vol. 17. N 4. P. 749–763.

[117] *Никитин Я. Ю., Волкова К. Ю.* Критерии экспоненциальности, основанные на характеризации Ахсануллаха, и их эффективность // Записки научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 412. С. 69–87.

[118] *Volkova K. Y.*, On asymptotic efficiency of exponentiality tests based on Rossberg's characterization // J. Math. Sci. 2010. Vol. 167. N 4. P. 486–494.

[119] *Arnold B. C., Villasenor J. A.* Exponential characterizations motivated by the structure of order statistics in samples of size two // Statist. Probab. Lett. 2013. Vol. 83. N 2. P. 596–601.

[120] *Jovanovic M., Miloševic B., Nikitin Y. Y., Obradovic M., Volkova K.* Tests of exponentiality based on Arnold—Villasenor characterization and their efficiencies // Comput. Statist. Data Anal. 2015. Vol. 90. P. 100–113.

[121] *Литвинова В. В.* Два критерия согласия для распределения Коши, основанные на характеризациях // Записки научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 294. С. 139–147.

[122] *Волкова К. Ю., Никитин Я. Ю.* Критерии согласия со степенным законом, основанные на характеризации Пури-Рубина, и их асимптотическая эффективность // Записки научн. семин. ПОМИ. 2012. Т. 408. С. 115–130.

[123] *Волкова К. Ю., Каракулов М. С., Никитин Я. Ю.* Критерии согласия, основанные на характеризации равномерности отношением порядковых статистик, и их асимптотическая эффективность // Записки научн. семин. ПОМИ. 2017. Т. 466. С. 67–80.

[124] *Volkova K.* Goodness-of-fit tests for the Pareto distribution based on its characterization // Statist. Meth. Appl. 2015. Vol. 25. N 3. P. 1–23.

[125] *Baringhaus L., Henze N.* A characterization of and new consistent tests for symmetry // Commun. Statist. - Theor. Meth. 1992. Vol. 21. N 6. P. 1555–1566.

[126] *Литвинова В. В.* Новый непараметрический критерий симметрии и его асимптотическая эффективность // Вестник С.-Петербург. ун-та. 2001. Сер.1. N 4. С. 17–19.

[127] *Nikitin Ya. Yu.* On Baringhaus–Henze test for symmetry: Bahadur efficiency and local optimality for shift alternatives // Math. Meth. Statist. 1996. Vol. 5. N 2. P. 214–226.

[128] *Nikitin Y. Y., Ahsanullah M.* New U-empirical tests of symmetry based on extremal order statistics, and their efficiencies // In: Math. Statist. and Limit Theorems. Springer Intern. Publ. 2015. P. 231–248.

[129] *Bookiya G. T., Nikitin Ya. Yu.* Asymptotic efficiency of new distribution-free tests of symmetry for generalized skew alternatives // J. Math. Sci. 2018. Vol. 229. N 6. P. 651–663.

[130] *Milosevic B., Obradovic M.* Characterization based symmetry tests and their asymptotic efficiencies //Statist. Probab. Letters. 2016. Vol. 119. P. 155–162.

[131] *Nikitin Ya.* Tests based on characterizations, and their efficiencies: a survey // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. 2017. Vol. 21. N 1. P. 3–24.

[132] *Eggermont P. P. B., LaRiccia V. N.*, Maximum Penalized Likelihood Estimation, Volume 1; Density Estimation. New York: Springer, 2001.

[133] *Zaitsev A. Yu.* Estimates of the rate of approximation in a de-Poissonization lemma // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques. 2002. Vol. 38. P. 1071–1086.

[134] *Zaitsev A. Yu.* Estimates of the rate of approximation in the Central Limit Theorem for L_1-norm of kernel density estimators // In: High Dimensional Probability, III. Progress in Probability, Vol. 55. Eds. E. Giné, M. Marcus, J. A. Wellner. Basel: Birkhäuser, 2003. P. 255–292.

[135] *Зайцев А. Ю.* Умеренные уклонения для L_1-нормы ядерных оценок плотности // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, Механика, Астрономия, 2005. N 4. C. 21–33.

[136] *Giné E., Mason D. M., Zaitsev A. Yu.* The L_1-norm density estimator process // Ann. Probab. 2003. Vol. 31. N 2. P. 719–768.

Сведения об авторах:

Зайцев Андрей Юрьевич — доктор физико-математических наук; zaitsev@pdmi.ras.ru

Каган Абрам Меерович — доктор физико-математических наук; amk@math.umd.edu

Никитин Яков Юрьевич — доктор физико-математических наук; y.nikitin@spbu.ru

TO THE HISTORY OF SAINT-PETERSBURG SCHOOL OF PROBABILITY AND STATISTICS. IV
Characterization of distributions and limit theorems in Statistics

A. Yu. Zaitsev, A. M. Kagan, Ya. Yu. Nikitin

This is the fourth article in a series of surveys devoted to the scientific achievements of the Leningrad–Saint-Petersburg school of Probability and Statistics during the period from 1947 to 2017. It is devoted to the works on characterization of distributions and various limit theorems in Statistics including asymptotic efficiency of tests, criteria based on characterizations and normal approximation for L_1-norms of kernel density estimators. The characterization results are related to independence and equidistribution of linear and nonlinear forms of the sample as well as to regression relations, admissibility and optimality of statistical estimators. When calculating the Bahadur efficiency, we give attention to the logarithmic asymptotics for large deviations of test statistics under the null hypothesis. We study also the conditions of local asymptotic optimality in Bahadur sense for various nonparametric tests. Refs. 136.

Key words: characterization of distributions, regression, equidistribution, empirical process, kernel density estimators, large deviations, asymptotic efficiency, U-statistics, normal approximation.