*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru*

Динамические системы на многообразиях

ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, C^0-БЛИЗКИХ К СИСТЕМЕ МОРСА – СМЕЙЛА [1]

Ю. В. Чурин [2]

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация

Рассматриваются неавтономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений на гладком многообразии, близкие в смысле C^0 к системам Морса–Смейла. Формулируется теорема, дающая определяющее свойство решений неавтономных систем, C^0-близких к системам Морса–Смейла.

Ключевые слова: система Морса-Смейла, неавтономные системы, обыкновенные дифференциальные уравнения, гладкие многообразия

Abstract

The nonautonomous systems of ordinary differential equations defined on smooth manifolds and C^0-close to Morse-Smale systems are considered. The theorem giving the defining property of solutions of nonautonomous systems C^0-close to Morse-Smale systems is formulated.

Key words: Morse-Smale systems, nonautonomous systems, ordinary differential equations, smooth manifolds

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-01-00452.

В данной работе рассматриваются системы Морса – Смейла [1] и их возмущения.

Пусть на гладком ограниченном замкнутом многообразии M задана система Морса-Смейла
$$\dot{x} = F(x). \tag{1}$$

По определению систем Морса – Смейла все неблуждающее множество состоит из объединения конечного числа состояний равновесия и периодических траекторий. Все эти состояния равновесия и периодические траектории являются гиперболическими. По определению гиперболичности каждое из неблуждающих решений имеет устойчивое и неустойчивое многообразия. Эти устойчивые и неустойчивые многообразия обозначаем $W^s(p)$ и $W^u(p)$, где p — неблуждающее решение. Устойчивое многообразие $W^s(p)$ неблуждающего решения p и неустойчивое многообразие $W^u(q)$ неблуждающего решения q пересекаются трансверсально, при этом считается, что если $W^s(p)$ и $W_u(q)$ не имеют общих точек, то они тоже пересекаются трансверсально.

Наряду с системой (1) рассмотрим ее неавтономное возмущение — систему
$$\dot{x} = F(x) + f(t, x). \tag{2}$$
Относительно возмущающей функции f предполагаем, что она непрерывна на $R \times M$, мала в смысле метрики C^0 и такова, что система (2) обладает свойством единственности решения любой задачи Коши,

В работе [2] была рассмотрена система (2), в которой компоненты вектор-функции $F(x)$ являются однородными порядка m $(m > 1)$ функциями. Автором показано, что при определенных условиях норма решения системы (2) неограниченно растет при возрастании и убывании времени. При этом норма решений, начинающихся вне шара достаточно большого радиуса, стремится к бесконечности, когда t стремится к некоторому конечному пределу.

В работе [2] предполагается, что система, записанная в сферических координатах,
$$\frac{d\varphi}{dt} = G(\varphi),$$
где $\varphi \in S^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$, а $G(\varphi) = F(\varphi) - \langle \varphi, F(\varphi) \rangle \varphi$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в R^n, является системой Морса – Смейла. В доказанной автором в [2] теореме устанавливается, что определяющей поведение решения системы (2) является структура решений системы Морса – Смейла на сфере S^{n-1}.

В настоящей работе системы Морса – Смейла рассматриваются не только на сфере S^{n-1}, но и на произвольном гладком ограниченном многообразии M.

Далее без доказательства приводится теорема, дающая определяющее свойство решений неавтономных систем, C^0-близких к системе Морса–Смейла.

Теорема. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что в случае, если система (2), у которой $||f(t,x)|| < \delta$, имеет решение $x(t)$, $t \in R$, попадающее в некоторые моменты t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$) в ε-окрестности различных неблуждающих траекторий p и q системы (1), то $W^u(p) \bigcap W^s(q) \neq \emptyset$.*

Сформулированная теорема завершает исследование, начатое автором в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1.Palis J. On Morse-Smale Dynamical Systems,Topology, 1969, Vol.8, N 4. P.385-404.

2.Чурин Ю.В. Асимптотическое поведение глобально непродолжимых решений квазиоднородных систем. эл.журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2015, № 2, С.14-18. http://www.math.spbu.ru/diffjournal/RU/numbers/2015.2/article.1.2.html