Заметки

PACS 45.10.Hj, 05.45.-a, 02.30.Yy

© 2007 г. С.В. ЗУБОВ, канд. физ.-мат. наук
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСЧЕТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Вводится новое понятие расчетной устойчивости движения, при котором не предполагается точная реализация этого движения в исследуемых системах. Изучается расчетная устойчивость систем с неограниченными возмущениями.

1. Введение и основные определения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \quad x \in R^n, \quad F(x,t) = (F_1(x,t), \ldots, F_n(x,t))^*. \tag{1}$$

Здесь и всюду далее $*$ – знак транспонирования. Введем евклидову векторную норму $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что n-мерная векторная функция $F(x,t)$ задана в множестве $\Omega = \{(x,t) : \|x\| < R, \, t \geqslant 0\}$, где R – число, $0 < R < +\infty$. Пусть функция $F(x,t)$ удовлетворяет в Ω условиям, гарантирующим существование, единственность и продолжимость по t от $t_0 \geqslant 0$ до $+\infty$ всех тех решений системы (1), графики которых располагаются в множестве Ω, t_0 – начальный момент.

Пусть $x(t, t_0, x_0)$ обозначает решение задачи Коши системы (1) с начальным условием $x = x_0$ при $t = t_0$. В силу сделанных выше предположений для всех пар $(x_0, t_0) \in \Omega$ и любых $t \in [t_0, \overline{t})$, где $\overline{t} > t_0$ – число или символ $+\infty$, справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < R$.

Будем изучать поведение решений системы (1) в окрестности движения $x(t) \equiv 0$, которое может быть решением системы (1), а может и не быть таковым (например, в случае, когда $F(0,t) \not\equiv 0$ при $t \geqslant 0$). Таким образом, такое движение называется расчетным движением рассматриваемой системы (1). Заметим, что к этому случаю сводится исследование свойств решений системы (1) в окрестности движения, задаваемого произвольной дифференцируемой n-мерной векторной функцией $\varphi(t)$, график которой принадлежит множеству Ω. Рассматривая систему в отклонениях от интересующего нас движения, получаем, что необходимо исследовать поведение решений системы

$$\frac{dy}{dt} = F(y + \varphi(t), t) - \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad y = x - \varphi(t), \tag{2}$$

в окрестности расчетного движения $y(t) \equiv 0$.

Введем понятия расчетной устойчивости и асимптотической расчетной устойчивости движения $x = 0$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

Определение 1. Движение $x = 0$ системы (1) *называется расчетно устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $T(\varepsilon) \geqslant 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого значения $t_0 \geqslant T(\varepsilon)$ и любого n-мерного вектора x_0, удовлетворяющего условию $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, при всех $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$.*

Определение 2. Движение $x = 0$ системы (1) *называется асимптотически расчетно устойчивым, если оно расчетно устойчиво и, кроме того, для любого n-мерного вектора x_0, удовлетворяющего условию $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, и любого $t_0 \geqslant T(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ выбраны по числу ε, $0 < \varepsilon < R$, в соответствии с определением расчетной устойчивости, справедливо предельное соотношение $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.*

2. Основной результат

В теории устойчивости расчетных движений [1] представляет интерес исследование следующей задачи. Пусть $x = 0$ является расчетно устойчивым (асимптотически расчетно устойчивым) движением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t), \quad x \in R^n, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Правые части $G(x, t)$ системы (3) определены на множестве $\Omega = \{(x, t) : \|x\| < R, t \geqslant 0\}$ ($R = \text{const} > 0$) и удовлетворяют условиям существования, единственности и продолжимости решений. Если функция $\|G(0, t)\|$ не ограничена при $t \geqslant 0$ (сингулярное возмущение в правой части), то исследование свойств решений системы (3) в окрестности движения $x = 0$ становится затруднительным. Возникает вопрос, существует ли такое преобразование $y = x + \psi(t)$, где $\psi(t)$ – n-мерная дифференцируемая функция, заданная при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию $\|\psi(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, что для соответствующей системы уравнений

$$\frac{dy}{dt} = H(y, t) \equiv G(y - \psi(t), t) + \frac{d\psi(t)}{dt}, \quad y \in R^n, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

функция $\|H(\psi(t), t)\|$ ограничена при всех $t \geqslant 0$. Таким образом, расчетно устойчивое (асимптотически расчетно устойчивое) движение $x = 0$ системы (3) соответствует расчетно устойчивому (асимптотически расчетно устойчивому) движению $y = \psi(t)$ системы (4), для которой исследование свойств решений в окрестности движения $y = \psi(t)$ встречает меньше трудности.

Теорема 1. Предположим, что правые части $G(x, t)$ системы (3) *таковы, что интеграл*

$$\int_0^{+\infty} G(0, t)\,dt$$

сходится. Тогда искомая функция $\psi(t)$ может быть выбрана следующим образом:

$$\psi(t) = \int_t^{+\infty} G(0, \tau)\,d\tau + \int_t^{+\infty} \varphi_1(\tau)\,d\tau,$$

где $\varphi_1(t)$ – любая n-мерная заданная непрерывная и ограниченная при всех $t \geqslant 0$ функция такая, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi_1(t)dt$$

сходится.

Доказательство сводится к тому, что соответствующая система (4) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = H(y,t) \equiv G\left(y - \int\limits_t^{+\infty} G(0,\tau)d\tau - \int\limits_t^{+\infty} \varphi_1(\tau)d\tau, t\right) - G(0,t) - \varphi_1(t),$$

причем $H(\psi(t),t) \equiv -\varphi_1(t)$ при всех $t \geqslant 0$.

3. Заключение

В данной работе обосновано утверждение о том, что свойства расчетной устойчивости движений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными возмущениями могут быть исследованы ранее разработанными методами [1] после некоторого преобразования исходной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов С.В., Зубов Н.В.* Математические методы стабилизации динамических систем. СПб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Буковым.

Поступила в редакцию 20.01.2005