



УДК 539.3

## ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

А. К. Беляев, А. В. Зелинская, Д. Н. Иванов,  
Н. Ф. Морозов, Н. В. Наумова, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик

Беляев Александр Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт проблем машиноведения РАН, Россия, 199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой просп., 61, 13augen@mail.ru

Зелинская Анна Владимировна, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Иванов Денис Николаевич, научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Морозов Никита Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой теории упругости математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Наумова Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, n.v.naumova@spbu.ru

Товстик Петр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории мехатроники, Институт проблем машиноведения РАН, Россия, 199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой просп., 61, t\_tovstik@mail.ru

Исследуются колебания многослойных пластин. Предложена двумерная асимптотическая модель второго порядка точности по отношению к малому параметру тонкостенности, учитывающая эффект как поперечного сдвига, так и растяжения нормальных волокон. Эта модель может быть использована для пластины из моноклинного материала, неоднородного в направлении толщины. В частности, модель применима для многослойной пластины, состоящей из ортотропных слоев с произвольной ориентацией ортотропии. Предполагается, что упругие и инерционные свойства пластины в тангенциальных направлениях постоянны. Основным достижением работы является вывод постоянных коэффициентов у полученной двумерной системы дифференциальных уравнений. Если в нулевом приближении эти коэффициенты могут быть найдены с использованием гипотез Кирхгофа – Лява о прямой нормали, то для достижения второго порядка точности приходится использовать более сложный алгоритм. Обсуждается вопрос об уточнении, которое вносит учет поперечного сдвига для многослойной пластины с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Более детально исследуется бесконечная в тангенциальных направлениях пластина, для которой решение существенно упрощается в связи с тем, что отпадает необходимость в удовлетворении граничных условий, и решение может быть представлено через гармонические в тангенциальных направлениях функции. Для гармонического решения получена оценка погрешности двумерной модели путем сравнения с численным решением трехмерной задачи теории упругости, которая в данном случае сводится к одномерной в направлении толщины задаче.



В гармоническом приближении исследуются свободные и вынужденные колебания, а также задача распространения длинных изгибных волн деформации. Для них найдена зависимость скорости распространения волны от направления.

*Ключевые слова:* анизотропная многослойная пластина, двухмерная модель второго порядка точности, изгибные колебания и волны в пластине.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-397-411>

## ВВЕДЕНИЕ

Построению двухмерных приближенных моделей тонких анизотропных пластин и оболочек посвящены многочисленные исследования (см. например, [1–4]). Для трансверсально изотропного материала двухмерные модели второго порядка точности получены и исследованы в работах [5–9]. Уточненные двухмерные модели важны при большом уровне неоднородности в направлении толщины, в частности, для многослойных пластин с чередующимися жесткими и мягкими слоями. Для таких пластин двухмерные модели, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява, приводят к большим ошибкам.

В работе [10] на базе асимптотических разложений [7–9] получена двухмерная модель для пластины с общей анизотропией материала (описываемой 21-м модулем упругости). Эта модель приводит к системе 8-го дифференциального порядка и подобна модели Кирхгофа–Лява с эквивалентными модулями упругости. Эта модель удерживает только главные члены в асимптотических разложениях по параметру толщины, не учитывает эффекта поперечного сдвига и поэтому неприменима для расчета многослойных пластин с чередующимися жесткими и мягкими слоями. В работе [11] для балки в случае анизотропии общего вида (с 6-ю модулями упругости) выведены уравнения второго порядка точности. Эти уравнения использованы для решения задачи о распространении продольных изгибных волн. В работе [12] уравнения второго порядка точности выведены для пластины из моноклинного неоднородного по толщине материала. Для однородного моноклинного материала в работе [13] построены старшие асимптотические приближения.

В настоящей работе рассматривается многослойная пластина, состоящая из ортотропных слоев с произвольной ориентацией направлений ортотропии. Рассматриваемая пластина — это пластина из моноклинного материала с кусочно-постоянными модулями упругости. Приводится первое асимптотическое приближение, построенное в работе [10] для анизотропии общего вида, а затем второе приближение, построенное в кратком сообщении [12]. В общем случае полученные уравнения второго приближения весьма громоздки, поэтому мы ограничиваемся случаем, в котором модули упругости симметричны относительно среднего слоя пластины. В этом случае уравнения существенно упрощаются, и возможно раздельное рассмотрение тангенциальных и изгибных деформаций и колебаний. Более подробно рассматриваются изгибные колебания бесконечной пластины, для которой решения представимы в виде гармонических по тангенциальным координатам функций. С целью оценки точности моделей проводится сравнение результатов, найденных по первому и второму асимптотическим приближениям, с точным решением трехмерной задачи. Установлено, что ошибка асимптотических приближений существенно зависит от уровня неоднородности пластины в направлении толщины. В первом приближении исследуется распространение длинных изгибных волн и найдена зависимость скорости волны от направления ее распространения и от других параметров.



## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассматривается многослойная пластина, состоящая из  $n$  ортотропных слоев постоянной толщины  $h_k$  ( $k = 1, \dots, n, h = \sum h_k$ ). В основной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3 = z$  в линейном приближении уравнения равновесия, описывающие свободные колебания пластины, имеют вид

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad f_i = \rho \omega^2 u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  — напряжения,  $\rho$  — плотность материала,  $\omega$  — частота колебаний,  $u_i$  — проекции перемещений.

Деформации определяем по формулам

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Пусть  $k$ -й слой лежит в пределах  $z_{k-1} \leq x_3 \leq z_k$ , причем  $z_0 = -h/2, z_k = z_{k-1} + h_k$ . Для  $k$ -го слоя соотношения упругости, связанные с направлениями его ортотропии, в матричной форме записываются в виде [4]

$$\hat{\sigma}^{(k)} = b s \hat{E}^{(k)} \cdot \hat{\varepsilon}^{(k)}, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \quad (3)$$

где

$$\hat{\sigma}^{(k)} = (\hat{\sigma}_{11}^{(k)}, \hat{\sigma}_{22}^{(k)}, \hat{\sigma}_{33}^{(k)}, \hat{\sigma}_{23}^{(k)}, \hat{\sigma}_{13}^{(k)}, \hat{\sigma}_{12}^{(k)})^T, \quad \hat{\varepsilon}^{(k)} = (\hat{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{33}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{23}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{13}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{12}^{(k)})^T,$$

$$\hat{E}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{E}_{11}^{(k)} & \hat{E}_{12}^{(k)} & \hat{E}_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{12}^{(k)} & \hat{E}_{22}^{(k)} & \hat{E}_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{13}^{(k)} & \hat{E}_{23}^{(k)} & \hat{E}_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{66}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Значок « $T$ » означает транспонирование, а значок « $\hat{\phantom{x}}$ » отмечает, что соотношения (3) записаны во вспомогательной системе координат, связанной с направлением ортотропии слоя.

Через  $\alpha_k$  обозначим угол между осью  $x_1$  основной системы координат и осью  $\hat{x}_1$  вспомогательной системы. Тогда соотношения (3) в основной системе координат дают

$$\sigma^{(k)} = \mathbf{E}^{(k)} \cdot \varepsilon^{(k)}, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \quad (4)$$

где матрица  $\mathbf{E}^{(k)}$  описывает моноклинный материал:

$$\mathbf{E}^{(k)} = \begin{pmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{12}^{(k)} & E_{13}^{(k)} & 0 & 0 & E_{16}^{(k)} \\ E_{12}^{(k)} & E_{22}^{(k)} & E_{23}^{(k)} & 0 & 0 & E_{26}^{(k)} \\ E_{13}^{(k)} & E_{23}^{(k)} & E_{33}^{(k)} & 0 & 0 & E_{36}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44}^{(k)} & E_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{45}^{(k)} & E_{55}^{(k)} & 0 \\ E_{16}^{(k)} & E_{26}^{(k)} & E_{36}^{(k)} & 0 & 0 & E_{66}^{(k)} \end{pmatrix},$$



а модули  $E_{ij}^{(k)}$  выражаются через модули  $\hat{E}_{ij}^{(k)}$  по формулам [4]:

$$\begin{aligned} E_{11}^{(k)} &= \hat{E}_{11}^{(k)} c_k^4 + 2 \left( \hat{E}_{12}^{(k)} + 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{22}^{(k)} s_k^4, \\ E_{12}^{(k)} &= \hat{E}_{12}^{(k)} c_k^4 + \left( \hat{E}_{11}^{(k)} + \hat{E}_{22}^{(k)} - 4\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{12}^{(k)} s_k^4, \quad E_{13}^{(k)} = \hat{E}_{13}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{23}^{(k)} s_k^2, \\ E_{16}^{(k)} &= \left( \hat{E}_{11}^{(k)} - \hat{E}_{12}^{(k)} - 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^3 s_k + \left( 2\hat{E}_{66}^{(k)} + \hat{E}_{12}^{(k)} - \hat{E}_{22}^{(k)} \right) c_k s_k^3, \\ E_{22}^{(k)} &= \hat{E}_{22}^{(k)} c_k^4 + 2 \left( \hat{E}_{12}^{(k)} + 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{11}^{(k)} s_k^4, \quad E_{23}^{(k)} = \hat{E}_{23}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{13}^{(k)} s_k^2, \\ E_{26}^{(k)} &= \left( \hat{E}_{12}^{(k)} - \hat{E}_{22}^{(k)} + 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^3 s_k + \left( \hat{E}_{11}^{(k)} - \hat{E}_{12}^{(k)} - 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k s_k^3, \quad E_{33}^{(k)} = \hat{E}_{33}^{(k)}, \\ E_{36}^{(k)} &= \left( \hat{E}_{13}^{(k)} - \hat{E}_{23}^{(k)} \right) c_k s_k, \quad E_{44}^{(k)} = \hat{E}_{44}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{55}^{(k)} s_k^2, \quad E_{45}^{(k)} = \left( \hat{E}_{55}^{(k)} - \hat{E}_{44}^{(k)} \right) c_k s_k, \\ E_{55}^{(k)} &= \hat{E}_{55}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{44}^{(k)} s_k^2, \quad E_{66}^{(k)} = \left( \hat{E}_{11}^{(k)} + \hat{E}_{22}^{(k)} - 2\hat{E}_{12}^{(k)} - 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{66}^{(k)} (c_k^4 + s_k^4), \end{aligned}$$

где  $c_k = \cos \alpha_k$ ,  $s_k = \sin \alpha_k$ .

Следовательно получен моноклинный материал с кусочно-постоянными модулями упругости  $E_{ij}$ .

Предполагается, что модули упругости  $E_{ij}$  и плотность  $\rho$  не зависят от  $x_1$ ,  $x_2$  и являются симметричными функциями  $z$  ( $E_{ij}(-z) = E_{ij}(z)$ ,  $\rho(-z) = \rho(z)$ ). В частности, эти функции могут не зависеть от  $z$ .

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Введем безразмерные переменные (со значком « $\tilde{\phantom{x}}$ »)

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3\} &= l\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, w\}, \quad \{E_{ij}, \sigma_{ij}\} = E\{\tilde{E}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\}, \\ z = h\tilde{z}, \quad z_k = h\tilde{z}_k, \quad \mu &= \frac{h}{l}, \quad l = \frac{\rho_0 \omega^2 l^2}{E}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho(z)}{\rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3) dx_3. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $l$  и  $E$  — типичные значения длины тангенциальных волн и модулей упругости,  $\mu$  — малый параметр толщины,  $\lambda$  — искомый параметр частоты,  $\rho_0$  — средняя плотность материала. В дальнейшем значок « $\tilde{\phantom{x}}$ » опускаем.

Как и в работе [10], введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T, \quad \sigma_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})^T, \\ \varepsilon_t &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T, \quad \varepsilon_n = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})^T, \end{aligned}$$

разделяющие тангенциальные и трансверсальные напряжения и деформации, и перепишем соотношения упругости (4) в виде

$$\sigma_t = \mathbf{A} \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \varepsilon_n, \quad \sigma_n = \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t + \mathbf{C} \cdot \varepsilon_n, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \{A_{ij}\} &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \{B_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{13} \\ 0 & 0 & E_{23} \\ 0 & 0 & E_{36} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} = \{C_{ij}\} &= \begin{pmatrix} E_{44} & E_{45} & 0 \\ E_{45} & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Пусть  $\sigma_t, \sigma_s, \sigma_n$  — характерные значения тангенциальных напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ , трансверсальных напряжений сдвига  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  и нормальных напряжений  $\sigma_{33}$  соответственно. Из уравнений (1) и соотношения  $h/l = \mu \ll 1$  we следуют оценки

$$\sigma_s \sim \mu\sigma_t, \quad \sigma_n \sim \mu\sigma_s \sim \mu^2\sigma. \quad (7)$$

Исключая трансверсальные деформации  $\varepsilon_n$  из соотношений (6), получаем:

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n, \quad \varepsilon_n = \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t, \quad (8)$$

где  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T$ . Пренебрегая напряжениями  $\sigma_n$ , получаем приближенные соотношения упругости  $\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t$ , содержащие только тангенциальные напряжения и деформации. Эти соотношения приводят к уравнениям первого приближения, построенным в работе [10]. Здесь мы ищем более точные уравнения.

Уравнения (1), (2) и (8) в безразмерных переменных дают систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \mu\varepsilon_{33}, \\ \frac{\partial u_k}{\partial z} &= -\mu(p_k w - \varepsilon_{k3}), \quad p_k = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} &= -\mu(p_1 \sigma_{1k} + p_2 \sigma_{2k} + l\rho u_k) \equiv g_k, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= -\mu(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + l\rho w) \equiv g_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Основные неизвестные функции в системе (9) суть  $u_1, u_2, w, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ . Деформации  $\varepsilon_{i3}$  и напряжения  $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}$  должны быть найдены из соотношений (8), причем  $\varepsilon_t = (p_1 u_1, p_2 u_2, p_1 u_2 + p_2 u_1)^T$ .

Предполагая, что лицевые плоскости пластины свободны, ищем решение системы (9), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad z = \pm 1/2. \quad (10)$$

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Правые части уравнений (9) малы, поэтому ищем решение этих уравнений методом итераций, последовательно решая уравнения (9). В первом приближении  $u_i = \sigma_{i3} = 0$ . Тогда первое уравнение (9) дает  $w = w^0(x_1, x_2)$ , причем функция  $w^0$  подлежит определению. Из второго уравнения (9) получаем:

$$u_k(x_1, x_2) = u_k^0(x_1, x_2) - \mu p_k z w^0, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

В общем случае (см. [10])  $u_k^0 \neq 0$ , однако при рассмотрении изгибных колебаний симметричной по толщине пластины  $t$  будет  $u_k^0 = 0$ . Из соотношений (8) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= -z L_{11} w^0, \quad L_{11} = A_{11}^* p_1^2 + A_{12}^* p_2^2 + 2A_{13}^* p_1 p_2, \\ \sigma_{22}^{(0)} &= -z L_{22} w^0, \quad L_{22} = A_{12}^* p_1^2 + A_{22}^* p_2^2 + 2A_{23}^* p_1 p_2, \\ \sigma_{12}^{(0)} &= -z L_{12} w^0, \quad L_{12} = A_{13}^* p_1^2 + A_{23}^* p_2^2 + 2A_{33}^* p_1 p_2, \end{aligned}$$

что соответствует модели Кирхгофа – Лява для обобщенных модулей упругости  $\mathbf{A}^*$ .



Введем обозначения  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}_0$  для интегральных операторов с переменным верхним пределом и  $\mathbf{I}_a$  — для оператора осреднения по формулам:

$$\mathbf{I}(Z) = \int_{-1/2}^z Z(z) dz, \quad \mathbf{I}_0(Z) = \int_0^z Z(z) dz, \quad \mathbf{I}_a(Z) = \int_{-1/2}^{1/2} Z(z) dz.$$

Для произвольной функции  $Z(z)$  справедливо тождество

$$\mathbf{I}_a \mathbf{I}(Z) = (1/2) \mathbf{I}_a(Z) - \mathbf{I}_a(z Z),$$

проверяемое интегрированием по частям.

Третье уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(0)} &= \mu^2 \mathbf{I}(N_1 z) w^0, \quad \sigma_{23}^{(0)} = \mu^2 \mathbf{I}(N_2 z) w^0, \\ N_1 &= p_1 L_{11} + p_2 L_{12} = A_{11}^* p_1^3 + 3A_{13}^* p_1^2 p_2 + (A_{12}^* + 2A_{33}^*) p_1 p_2^2 + A_{23}^* p_2^3, \\ N_2 &= p_1 L_{12} + p_2 L_{22} = A_{13}^* p_1^3 + (A_{12}^* + 2A_{33}^*) p_1^2 p_2 + 3A_{23}^* p_1 p_2^2 + A_{22}^* p_2^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия (10)  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  при  $z = 1/2$  выполнены в силу симметрии пластины и равенства  $\mathbf{I}_a(A_{ij}^* z) = 0$ .

Последнее уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(0)} &= -\mu \mathbf{I}(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + l \rho w) = -(\mu^3 \mathbf{I}(\mathbf{I}(Qz)) + \mu \lambda \mathbf{I}(\rho)) w_0, \\ Q &= p_1 N_1 + p_2 N_2 = A_{11}^* p_1^4 + 4A_{13}^* p_1^3 p_2 + (2A_{12}^* + 4A_{33}^*) p_1^2 p_2^2 + 4A_{23}^* p_1 p_2^3 + A_{22}^* p_2^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничное условие  $\sigma_{33}^{(0)}(1/2) = 0$  приводит к уравнению для параметра частоты  $\lambda = \lambda_0$  в первом приближении

$$\lambda_0 = \mu^2 D_0, \quad D_0 = \alpha_{11} q_1^4 + 4\alpha_{13} q_1^3 q_2 + (2\alpha_{12} + 4\alpha_{33}) q_1^2 q_2^2 + 4\alpha_{23} q_1 q_2^3 + \alpha_{22} q_2^4, \quad (14)$$

где

$$\alpha_{ij} = -\mathbf{I}_a(\mathbf{I}(z A_{ij}^*)) = \mathbf{I}_a(z^2 A_{ij}^*), \quad \mathbf{I}_a(\rho) = 1.$$

Величина  $\lambda_0$  получена после формальной замены операторов дифференцирования  $p_k$  на волновые числа  $i q_k$ ,  $k = 1, 2$ . В парагр. 5 и 7 приводится подробное обсуждение соответствующей формы колебаний.

Итак, первое приближение построено.

#### 4. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Продолжим итерации, начиная с первого уравнения (9) и удерживая члены порядка  $\mu^2$  по сравнению с первым приближением. Первые два уравнения (9) содержат трансверсальные деформации. Из соотношений (8) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^{(0)} &= \frac{E_{55} \sigma_{13}^{(0)} - \hat{E}_{45} \sigma_{23}^{(0)}}{\Delta_4} = \mu^2 (G_{11} \mathbf{I}(N_1 z) + G_{12} \mathbf{I}(N_2 z)) w^0, \\ \varepsilon_{23}^{(0)} &= \frac{-E_{45} \sigma_{13}^{(0)} + \hat{E}_{44} \sigma_{23}^{(0)}}{\Delta_4} = \mu^2 (G_{12} \mathbf{I}(N_1 z) + G_{22} \mathbf{I}(N_2 z)) w^0, \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= \mu N_3 z w^0, \quad N_3 = \frac{E_{13} p_1^2 + E_{23} p_2^2 + 2E_{36} p_1 p_2}{E_{33}}. \end{aligned}$$



Здесь  $\Delta_4 = E_{44}E_{55} - E_{45}^2$ , а через  $G_{ij}$  обозначены обратные модули упругости (или податливости) поперечного сдвига:

$$G_{11} = \frac{E_{55}}{\Delta_4}, \quad G_{12} = -\frac{E_{45}}{\Delta_4}, \quad G_{22} = \frac{E_{44}}{\Delta_4}.$$

Последовательно получаем:

$$w = w^{(1)} + \mu^2 \mathbf{I}_0(N_3 z) w^0, \quad (15)$$

где  $w^{(1)}(x_1, x_2)$  — неизвестная функция.

Имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\mu p_1 z w^{(1)} - \mu^3 p_1 \mathbf{I}_0(\mathbf{I}_0(N_3 z)) w^0 + \mu I_0(\varepsilon_{13}^{(0)}), \\ u_2 &= -\mu p_3 z w^{(1)} - \mu^3 p_2 \mathbf{I}_0(\mathbf{I}_0(N_3 z)) w^0 + \mu I_0(\varepsilon_{23}^{(0)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -\mu \mathbf{I}(M_{11} u_1 + M_{12} u_2) + \mu^2 \lambda p_1 \mathbf{I}(\rho z) w_0, \\ \sigma_{23} &= -\mu \mathbf{I}(M_{12} u_1 + M_{22} u_2) + \mu^2 \lambda p_1 \mathbf{I}(\rho z) w_0, \\ M_{11} &= A_{11}^* p_1^2 + 2A_{13}^* p_1 p_2 + A_{33}^* p_2^2, \quad M_{22} = A_{33}^* p_1^2 + 2A_{13}^* p_1 p_2 + A_{22}^* p_2^2, \\ M_{12} &= A_{13}^* p_1^2 + (A_{12}^* A_{33}^*) p_1 p_2 + A_{23}^* p_2^2, \\ \sigma_{33} &= -\mu \mathbf{I}(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + l \rho w) = \\ &= \mu^2 \mathbf{I}(\mathbf{I}(N_1 u_1 + N_2 u_2)) - \mu l \mathbf{I}(\rho w) - \mu^3 l (p_1^2 + p_2^2) \mathbf{I}(\mathbf{I}_0(\rho z)) w_0. \end{aligned}$$

Величину  $\lambda$  находим из граничного условия  $\sigma_{33}(1/2) = 0$ . Интегрируя по частям и учитывая, что функции  $u_1(z)$ ,  $u_2(z)$  — четные, а функция  $w(z)$  — нечетная, получаем:

$$\sigma_{33}(1/2) = -\mu^2 \mathbf{I}_a((N_1 u_1 + N_2 u_2)z) - \mu l \mathbf{I}_a(\rho w) + \mu^3 l J(p_1^2 + p_2^2) w^0 = 0, \quad (17)$$

где  $J = \mathbf{I}_a(z^2 \rho)$  — момент инерции поперечного сечения.

Подставляя в уравнение (17) выражения (15) и (16) для функций  $w$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ , получаем уравнение второго порядка точности для изгибных гармонических колебаний:

$$(\mu^2 D_0 + \mu^4 D_s w + \mu^4 D_z) w - l(R_0 - \mu^2 R_J - \mu^2 R_z) w = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= \mathbf{I}_a(Qz^2), \quad D_s = -\mathbf{I}_a(n_1^2 G_{44} + 2n_1 n_2 G_{45} + n_2^2 G_{55}), \quad n_k = \mathbf{I}(N_k z), \quad k = 1, 2, \\ D_z &= -\mathbf{I}_a(Qz \mathbf{I}_0 \mathbf{I}_0(N_3 z)), \quad R_0 = 1, \quad R_J = J(p_1^2 + p_2^2), \quad R_z = -\mathbf{I}_a(\rho \mathbf{I}_0(N_3 z)). \end{aligned}$$

Напомним, что  $p_k(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$ ,  $k = 1, 2$ . В уравнении (18) главный оператор  $D_0$  — это дифференциальный оператор 4-го порядка, описывающий изгиб моноклинной пластины в первом приближении. Он может быть получен в рамках гипотез Кирхгофа — Лява с использованием модифицированных модулей упругости  $A_{ij}^*$ . Операторы 6-го порядка  $D_s$  и  $D_z$  описывают влияние деформаций поперечного сдвига и растяжения нормальных волокон. Единичный оператор  $R_0$  описывает поперечную инерцию нерастяжимых нормальных волокон. Операторы второго порядка  $R_J$  и  $R_z$  описывают инерцию вращения нормальных волокон и инерцию их растяжения. Величины  $\mu^4 D_z w$  по сравнению с  $\mu^2 D_0 w$  и величины  $\mu^2 R_J$ ,  $\mu^2 R_z$  по сравнению с  $R_0$  при  $\mu \ll 1$



малы и могут быть опущены. Если жесткость некоторых слоев мала по сравнению с жесткостью остальных слоев, тогда модули поперечной податливости на сдвиг  $G_{ij}$ ,  $i, j = 4, 5$ , оказываются большими и величина  $\mu^4 D_j w$  может оказаться не малой по сравнению с  $\mu^2 D_0 w$ .

Для  $\mu \ll 1$  (т.е. для тонких пластин или, что то же самое, для длинных волн) мы рекомендуем (вместо равенства (18)) использовать более простое равенство:

$$(\mu^2 D_0 + \mu^4 D_s)w - \lambda w = 0, \tag{19}$$

учитывающее влияние поперечного сдвига и не учитывающее остальные слагаемые второго порядка малости.

## 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (9) В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Ищем неизвестные функции системы (9) в виде

$$\begin{aligned} \{w, \varepsilon_{jk}, \sigma_{jk}, \varepsilon_{33}, \sigma_{33}\}(x_1, x_2, z) &= \{\tilde{w}, \tilde{\varepsilon}_{jk}, \tilde{\sigma}_{jk}, \tilde{\varepsilon}_{33}, \tilde{\sigma}_{33}\}(z) \exp(iq_1 x_1 + iq_2 x_2), \quad j, k = 1, 2, \\ \{u_k, \varepsilon_{k3}, \sigma_{k3}\}(x_1, x_2, z) &= i\{\tilde{u}_k, \tilde{\varepsilon}_{k3}, \tilde{\sigma}_{k3}\}(z) \exp(iq_1 x_1 + iq_2 x_2), \quad k = 1, 2, \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

где  $p_k = iq_k$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда для фиксированных значений волновых чисел  $q_1, q_2$  система (9) становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений с основными вещественными неизвестными функциями  $w, u_1, u_2, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ . В дальнейшем значок « $\tilde{\phantom{x}}$ » опускаем.

В предположении, что лицевые плоскости свободны, ищем решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\sigma_{k3}(\pm 1/2) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Для симметричной по толщине пластины ( $E_{ij}(-z) = E_{ij}(z)$ ,  $\rho(-z) = \rho(z)$ ) система (9) описывает тангенциальные и изгибные колебания по отдельности. Для изгибных колебаний функции  $w, \sigma_{12}, \sigma_{23}$  — четные, а функции  $u_1, u_2, \sigma_{33}$  — нечетные.

Для изгибных колебаний симметричных пластины граничные условия (20) можно заменить на условия

$$u_1(0) = u_2(0) = \sigma_{33}(0) = 0, \quad \sigma_{13}(1/2) = \sigma_{23}(1/2) = \sigma_{33}(1/2) = 0. \tag{21}$$

Система (9) содержит неизвестные  $\varepsilon_{k3}$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $\sigma_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ), которые должны быть выражены через основные неизвестные:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= G_{44}\sigma_{13} + G_{45}\sigma_{23}, \quad \varepsilon_{23} = G_{45}\sigma_{13} + G_{55}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{33} &= (\sigma_{33} + q_1 u_1 E_{13} + q_2 u_2 E_{23} + (q_1 u_2 + q_2 u_1) E_{36}) / E_{33}, \\ \sigma_t &= \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t, \quad A_{jk}^* = A_{jk} - B_{j3} B_{k3} / E_{36}, \quad -\varepsilon_t = (q_1 u_1, q_2 u_2, q_1 u_2 + q_2 u_1)^T. \end{aligned}$$

Чтобы найти собственные значения  $\lambda$ , численно решаем три задачи Коши для системы (9) с начальными условиями:

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(0) = u_2^{(k)}(0) = \sigma_{33}^{(k)}(0) &= 0, \quad k = 1, 2, 3; \\ w^{(1)}(0) = 1, \quad \sigma_{13}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{23}^{(1)}(0) &= 0, \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} w^{(2)}(0) &= 0, & \sigma_{13}^{(2)}(0) &= 1, & \sigma_{23}^{(2)}(0) &= 0, \\ w^{(3)}(0) &= 0, & \sigma_{13}^{(3)}(0) &= 0, & \sigma_{23}^{(3)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда первый корень уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \sigma_{13}^{(1)}(1/2) & \sigma_{23}^{(1)}(1/2) & \sigma_{33}^{(1)}(1/2) \\ \sigma_{13}^{(2)}(1/2) & \sigma_{23}^{(2)}(1/2) & \sigma_{33}^{(2)}(1/2) \\ \sigma_{13}^{(3)}(1/2) & \sigma_{23}^{(3)}(1/2) & \sigma_{33}^{(3)}(1/2) \end{vmatrix} = 0$$

дает наименьшее собственное значение  $\lambda = \lambda_e$ , которое мы считаем точным.

Для периодического решения формула (19) дает

$$(\mu^2 \tilde{D}_0 - \mu^4 \tilde{D}_s)w - \lambda w = 0, \quad \tilde{D}_0(q_1, q_2) = D_0(p_1, p_2), \quad \tilde{D}_s(q_1, q_2) = -D_s(p_1, p_2), \quad (22)$$

где  $\tilde{D}_0$  и  $\tilde{D}_s$  — суть постоянные величины. По формуле (22) находим приближенное значение  $\lambda_a$  параметра частоты  $\lambda$ :

$$\lambda_a = \lambda_0(1 - \delta_s), \quad \lambda_0 = \mu^2 \tilde{D}_0, \quad \delta_s = \frac{\mu^2 \tilde{D}_s}{\tilde{D}_0}, \quad (23)$$

где величина  $\lambda_0$  дает первое приближение, а параметр  $\delta_s$  учитывает влияние поперечного сдвига. Согласно работам [7–9], особенно в случае, когда величина  $\delta_s$  не мала, формулу (23) целесообразно заменить более точной формулой:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_0}{(1 + \delta_s)}, \quad (24)$$

которая применима также при  $\delta_s \sim 1$ .

## 6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим изгибные колебания симметричной по толщине пластины, состоящей из пяти слоев одинаковой толщины. Первый, третий и пятый слои ортотропны. Третий (средний) слой повернут на угол  $\alpha = \pi/2$  по отношению к двум другим слоям. Второй и четвертый слои изотропны, и мы будем менять их жесткость в широких пределах. Модули упругости слоев, входящие в формулы (6), в безразмерном виде представлены в табл. 1, где через  $N$  обозначен номер слоя.

Таблица 1 / Table 1

Модули упругости слоев / Elastic moduli of layers

$N$	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$	$E_{12} = E_{13} = E_{23}$	$E_{44} = E_{55} = E_{66}$
1,5	12.0	2.0	2.0	0.59	0.69
2,4	1.1	1.1	1.1	0.33	0.38
3	1.0	11.0	1.0	0.30	0.35

Массовая плотность всех слоев  $\rho = 1$ , волновые числа взяты равными  $q_1 = 0.6$ ,  $q_2 = 0.4$  и параметр толщины  $\mu = 0.1$ .

Для модулей упругости второго и четвертого слоев рассматриваем четыре варианта. Для первого варианта модули упругости даны в табл. 1. Модули упругости



остальных вариантов получаются умножением модулей первого варианта на  $\eta = 0.1$ ,  $\eta = 0.01$  и  $\eta = 0.001$ . По формулам парагр. 5 получаем нижеприведенные результаты.

В табл. 2 для 4 вариантов параметра  $\eta$ , служащего мерой относительной жесткости второго и четвертого слоев, представлены соответствующие значения частотного параметра  $\lambda$  и величина сдвигового параметра  $\delta_s$ . Здесь  $\lambda_e$  — точное значение, найденное в результате численного интегрирования системы (9),  $\lambda_0$  — первое асимптотическое приближение,  $\lambda_a$  — уточненное приближение, найденное по формуле (24). Во втором и в четвертом столбцах приведены относительные погрешности приближенных величин  $\lambda_0$  и  $\lambda_e$  по сравнению с точным значением  $\lambda_e$ .

Таблица 2 / Table 2

Зависимость частотного параметра от отношения  $\eta$  модулей упругости  
Dependence of the frequency parameter on the ratio of the elastic moduli  $\eta$

1	2	3	4	5	6	7
$\eta$	$\lambda_e$	$\lambda_0$	$\varepsilon(\%)$	$\lambda_a$	$\varepsilon(\%)$	$\delta_s$
1	0.002211	0.002229	0.9	0.002212	0.0	0.0079
0.1	0.001985	0.002073	4.5	0.001986	0.1	0.044
0.01	0.001482	0.002058	38.5	0.001459	1.6	0.41
0.001	0.000511	0.002056	303.0	0.000405	20.9	4.07

Из представленных и им подобных результатов можно заключить, что

(I) первое приближение, основанное на модели Кирхгофа – Лява, дает приемлемые результаты только для многослойных пластин, модули упругости которых имеют один порядок ( $\eta \leq 10$ );

(II) второе приближение, учитывающее поперечный сдвиг, применимо, если модули упругости слоев изменяются в широких пределах ( $\eta \leq 100$ );

(III) второе приближение приводит к ошибке, существенно меньшей, чем у первого приближения; в обоих случаях погрешность  $\varepsilon$  растет вместе со сдвиговым параметром  $\delta_s$ ;

(IV) в случае весьма большого различия ( $\eta \geq 1000$ ) в жесткостях слоев двумерные модели неприменимы.

В исходных обозначениях частота  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 l^2}} l, \quad \frac{1}{l^2} = 2\pi \left( \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right), \quad q_1^2 + q_2^2 = 1,$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — длины волн в направлениях  $x_1, x_2$  и  $E$  — модуль Юнга второго слоя при  $\eta = 1$ .

Здесь исследована зависимость  $\lambda(\eta)$  (см. табл. 2). В общем случае величина  $\lambda$  зависит от других параметров  $\mu, q_1, q_2, \rho(z)$  и от модулей упругости слоев.

## 7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН И ЧАСТОТЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Распространение длинных изгибных волн по симметричной пластине в безразмерной форме описывается соотношениями:

$$\{w, u_1, u_2\}(x_1, x_2, z, t) = \{w, iu_1, iu_2\}(z)e^{iY}, \quad Y = q_1 x_1 + q_2 x_2 - vt, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (25)$$

В предположении, что  $q_1^2 + q_2^2 = 1$ , вектор  $\mathbf{n} = (q_1, q_2)$  описывает направление распространения волны, а  $v$  — ее скорость.



После подстановки выражений (25) в уравнения (9) получаем:

$$v = \omega = \sqrt{\lambda}, \tag{26}$$

и как приближенное выражение (24), так и численный алгоритм п. 5 могут быть использованы для вычисления скорости  $v$ .

Для симметричной функции все неизвестные функции вещественны. Для несимметричной пластины неизвестные функции комплексны и их мнимые части дают форму волны

$$w = w(z) \cos Y, \quad u_k = u_k(s) \cos(Y + \pi/2 + \alpha_k), \quad k = 1, 2, \tag{27}$$

где  $\alpha_k$  — начальные фазы. Для симметричной пластины  $\alpha_k = 0$ . В работе [11] рассматривается распространение волн для несимметричной (по толщине) балки, для которой  $\alpha_k \neq 0$ .

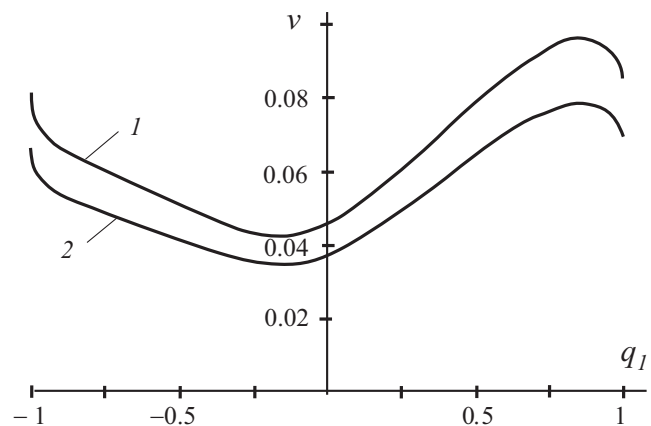
В качестве примера рассмотрим однослойную однородную балку из моноклинного материала с параметрами  $\mu = 0.1$ ,  $\rho_0 = 1$  и модулями упругости, входящими в соотношения (6)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2.5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для симметричной пластины зависимость  $v(q_1)$  скорости распространения волны от направления показана на рисунке (кривая 1). Зависимость получена из соотношения  $v = \mu\sqrt{D_0}$ , соответствующего первому приближению. Для сравнения (см. кривую 2) рассмотрим несимметричную пластину из функционально градиентного материала с модулями упругости, зависящими от  $z$ :  $\tilde{\mathbf{A}}^* = (1 - 2z)\mathbf{A}^*$ . В этом случае зависимость  $v(q_1)$  вычисляется по формуле  $v = \mu\sqrt{D_0 - D_*}$ , где слагаемое  $D_*$ , приведенное в работе [10], учитывает несимметрию пластины в направлении толщины.



Рассмотрим формы колебаний

$$w_1(x_1, x_2) = w_0 \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2, \\ w_2(x_1, x_2) = w_0 \sin(-q_1 x_1) \sin q_2 x_2.$$

Нормальные прогибы, соответствующие этим формам, идентичны. Чтобы объяснить этот эффект, заметим, что тангенциальные перемещения, соответствующие этим частотам, различны (в силу формул (9)  $u_k = -\mu q_k z w$ ).

Функции  $v(q_1)$  для симметричной (1) и для несимметричной (2) пластины

Functions  $v(q_1)$  for symmetric (1) and for asymmetric (2) plates



Для иллюстрации рассмотрим в первом приближении вынужденные колебания пластины под действием силы  $f_3(x_1, x_2, t) = f_3^0 \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2 e^{i\omega t}$ . Используя тождество

$$\sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2 = \frac{1}{2} (e^{i(q_2 x_2 - q_1 x_1)} - e^{i(q_2 x_2 + q_1 x_1)}),$$

получаем решение

$$w_1(x_1, x_2, t) = \frac{f_3^0}{2} \left( \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2 \sin \omega t,$$

содержащее две резонансных частоты  $\omega_1 = \mu \sqrt{D_0(-q_1, q_2)}$  и  $\omega_2 = \mu \sqrt{D_0(q_1, q_2)}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для исследования колебаний многослойной анизотропной пластины построена двухмерная асимптотическая модель второго порядка точности, учитывающая поперечный сдвиг и обжатие нормали. Погрешность модели оценена путем сравнения с точным решением трехмерной задачи в случае гармонических колебаний. Установлено, что погрешность модели существенно зависит от степени неоднородности пластины по толщине. При слабой неоднородности возможно использование первого асимптотического приближения, основанного на гипотезах Кирхгофа – Лява с использованием модифицированных модулей упругости. При умеренной неоднородности рекомендуется использовать второе приближение, причем учитывать поперечный сдвиг и пренебрегать обжатием нормали.

В первом приближении исследовано распространение длинных изгибных волн в бесконечной пластине и найдена скорость волны в зависимости от направления ее распространения. Частоты изгибных колебаний находятся из того же дисперсионного уравнения, что и скорость распространения волны. Обнаружена интересная особенность частот собственных колебаний: одна и та же форма изгибных колебаний реализуется при двух различных частотах колебаний.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16.51.52025 МНТ-а, 16.01.00580-а).

## Библиографический список

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М. : Наука, 1974. 448 с.
2. Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 280 с.
3. Аголюян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. : Наука, 1997. 414 с.
4. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. CRC Press, 2004. 306 p.
5. Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M. Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. of Solids and Structures. 2011. Vol. 48, iss. 1. P. 12–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.09.001>
6. Schnieder P., Kienzler R. An algorithm for the automatization of pseudo reductions of PDE systems arising from the uniform-approximation technique // Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Berlin : Springer, 2011. P. 377–390.
7. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. Vol. 97, iss. 3. P. 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201600052>



8. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* An elastic plate bending equation of second-order accuracy // *Acta Mech.* 2017. Vol. 228, iss. 10. P. 3403–3419. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1880-x>
9. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Обобщенная модель Тимошенко – Рейсснера для многослойных пластин // *Изв. РАН. МТТ.* 2016. № 5. С. 22–35.
10. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 2. С. 32–45.
11. *Товстик П. Е., Товстик Т. П., Наумова Н. В.* Длинноволновые колебания и волны в анизотропной балке // *Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2017. Т. 4(62), вып. 2. С. 323–335. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.216>
12. *Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional equations of the second order accuracy for a multi-layered plate with orthotropic layers // *Doklady Physics.* 2018. Vol. 63, № 11. P. 471–475.
13. *Schnieider P., Kienzler R.* A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of *n*th-order gradients // *Meccanica.* 2017. Vol. 52, iss. 9. P. 2143–2167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0573-1>

---

**Образец для цитирования:**

*Беляев А. К., Зелинская А. В., Иванов Д. Н., Морозов Н. Ф., Наумова Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Приближенная теория колебаний многослойных анизотропных пластин // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2018. Т. 18, вып. 4. С. 397–411. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-397-411>

---

## Approximate Theory of a Laminated Anisotropic Plate Vibrations

**A. K. Belyaev, A. V. Zelinskaya, D. N. Ivanov, N. F. Morozov,  
N. V. Naumova, P. E. Tovstik, T. P. Tovstik**

Alexander K. Belyaev, <https://orcid.org/0000-0002-5934-8138>, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoj Pr., V. O., St. Petersburg 199178, Russia, [13augen@mail.ru](mailto:13augen@mail.ru)

Anna V. Zelinskaya, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia,

Denis N. Ivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1358-3981>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia

Nikita F. Morozov, <http://orcid.org/0000-0003-3890-522X>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia

Natalia V. Naumova, <https://orcid.org/0000-0003-1918-093X>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia, [n.v.naumova@spbu.ru](mailto:n.v.naumova@spbu.ru)

Petr E. Tovstik, <https://orcid.org/0000-0002-2100-7936>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia, [peter.tovstik@mail.ru](mailto:peter.tovstik@mail.ru)

Tatyana P. Tovstik, <https://orcid.org/0000-0001-8944-2347>, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoj Pr., V. O., St. Petersburg 199178, Russia, [t\\_tovstik@mail.ru](mailto:t_tovstik@mail.ru)



The multi-layered plate vibration is investigated. A two-dimensional asymptotic model of the second order accuracy with respect to the small thickness parameter is proposed with account for the transverse shear and the normal fibre extension. The model is appropriate for a monoclinic plate described by 13 elastic moduli which is heterogeneous in the thickness direction. In particular, the model can be applied to a multi-layered plate consisting of orthotropic layers of arbitrary orientation. In this case the elastic moduli are piece-wise constant functions. The elastic and inertia properties of plate are assumed to be constant in the tangential directions. The main achievement of this work is derivation of the equivalent constant coefficients of 2D system of partial differential equations of the second order accuracy. In the first approximation these coefficients can be found based on the Kirchhoff – Love hypotheses on the straight normal, while a more complex asymptotic algorithm is used for second approximation. For a multi-layered plate the influence of transverse shear with alternating hard and soft layers is discussed. More attention is given to a plate which is infinite in the tangential directions. The solution is shown to be essentially simplified since no boundary condition is needed and the solution can be expressed in terms of functions which are harmonic in the tangential directions. For this solution the error of 2D model is estimated by comparison with the numerical solution of the three-dimensional problem of elasticity theory, since for harmonic case it is reduced to one-dimensional equations in the thickness direction. Free and forced bending vibration and long-length bending wave propagation are investigated under harmonic approximation. In general case two different natural frequencies are shown to correspond to a fixed bending mode. The dependence of wave velocity on the wave propagation direction is found out.

**Key words:** anisotropic multi-layered plate, 2D model of the second order accuracy, bending vibrations and waves in a plate.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16.51.52025 MNT-a, 16.01.00580-a).

## References

1. Ambartsumyan S. A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka, 1974. 448 p. (in Russian).
2. Rodionova V. A., Titaev B. A., Chernykh K. F. *Prikladnaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Applied theory of anisotropic plates and shells]. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ., 1996. 280 p. (in Russian).
3. Agolovyan L. A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Asymptotic theory of anisotropic plates and shells]. Moscow, Nauka, 1997. 414 p. (in Russian).
4. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells*. CRC Press, 2004. 306 p.
5. Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M. Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates. *Int. J. of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, iss. 1, pp. 12–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.09.001>
6. Schnieder P., Kienzler R. An algorithm for the automatization of pseudo reductions of PDE systems arising from the uniform-approximation technique. *Shell-like structures. Non-classical theories and applications*. Berlin, Springer, 2011, pp. 377–390.
7. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM*, 2017, vol. 97, iss. 3, pp. 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201600052>
8. Tovstik P. E., Tovstik T. P. An elastic plate bending equation of second-order accuracy. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, iss. 10, pp. 3403–3419. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1880-x>



9. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner model for a multi-layer plate. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 527–537. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416050034>
10. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional model of a plate made of an anisotropic inhomogeneous material. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 144–154. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654417020042>
11. Tovstik P. E., Tovstik T. P., Naumova N. V. Long-wave vibrations and waves in anisotropic beam. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), iss. 2, pp. 323–335. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.216>
12. Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional equations of the second order accuracy for a multi-layered plate with orthotropic layers. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 11, pp. 471–475.
13. Schneider P., Kienzler R. A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients. *Meccanica*, 2017, vol. 52, iss. 9, pp. 2143–2167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0573-1>

---

**Cite this article as:**

Belyaev A. K., Zelinskaya A. V., Ivanov D. N., Morozov N. F., Naumova N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Approximate Theory of a Laminated Anisotropic Plate Vibrations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 397–411 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-397-411>

---