УДК 517.9 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 34D08, 37C29, 34C37

Устойчивые периодические решения периодических систем дифференциальных уравнений*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические решения периодических систем дифференциальных уравнений // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 14–21. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.102

Рассматривается дифференцируемая бесконечное число раз периодическая двумерная система дифференциальных уравнений. Предполагается наличие гиперболического периодического решения, а также наличие решения, гомоклинического к периодическому. Показано, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий произвольная окрестность нетрансверсального гомоклинического решения содержит счетное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Ключевые слова: нетрансверсальное гомоклиническое решение, устойчивость, характеристический показатель.

В работе выделяется класс бесконечно гладких двумерных периодических систем дифференциальных уравнений, имеющих в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями. В работах [1, 2] изучались диффеоморфизмы с неподвижной периодической точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой и были получены условия существования в окрестности гомоклинической точки бесконечного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Цель данной работы — указать класс периодических систем, преобразование Пуанкаре которых удовлетворяет условиям теорем работ [1, 2].

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dz}{dt} = Z(t, z), \tag{1}$$

где z, Z — двумерные векторы, вектор $Z(t, z)$ непрерывно дифференцируем бесконечное число раз по всем аргументам. Кроме того, предполагается, что вектор $Z(t, z)$ периодичен по t с периодом, равным единице: $Z(t + 1, z) = Z(t, z)$.

Обозначим через $z(t, z_0)$ решение с начальными данными $t = 0$, $z = z_0$. Предположим, что решение $z(t, 0)$ является гиперболическим периодическим решением с периодом, равным единице. Пусть λ, μ — мультипликаторы этого решения. Предположим справедливость неравенств

$$0 < \lambda < 1 < \mu, \quad \lambda\mu < 1. \tag{2}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

Определим

$$W^s(0) = \left\{ z_0 \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \to +\infty} \|z(t, z_0) - z(t, 0)\| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z_0 \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \to -\infty} \|z(t, z_0) - z(t, 0)\| = 0 \right\}.$$

Ясно, что эти множества лежат в устойчивом и неустойчивом многообразиях соответственно и, в силу условий (2), в них содержатся отличные от нуля точки. В свою очередь устойчивое и неустойчивое многообразия определим как

$$W^s(t) = \{(t, z) : z = z(t, z_0), z_0 \in \ W^s(0)\},$$

$$W^u(t) = \{(t, z) : z = z(t, z_0), z_0 \in \ W^u(0)\}.$$

Пусть $w \in W^s(0) \bigcap W^u(0)$, $w \neq 0$, тогда решение $z(t, w)$ системы (1) называется решением, гомоклиническим к решению $z(t, 0)$. Ясно, что справедливо соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \|z(t, w) - z(t, 0)\| = \lim_{t \to -\infty} \|z(t, w) - z(t, 0)\| = 0.$$

Гомоклиническое решение называется *трансверсальным*, если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально в точках этого решения, в противном случае решение называется *нетрансверсальным гомоклиническим*.

Из работы С. Смейла [3] известно, что в окрестности трансверсального гомоклинического решения существует бесконечно много периодических решений, и все эти решения неустойчивы. В работах [4–6] изучалась окрестность нетрансверсального гомоклинического решения и было показано, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения может лежать бесконечное множество устойчивых периодических решений, но хотя бы один из характеристических показателей таких решений стремится к нулю с ростом периода. В данной статье рассматривается иной способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий, чем в [4–6], и показывается, что в этом случае произвольная окрестность нетрансверсального гомоклинического решения содержит бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями. В книге [7] приведен пример двумерной периодической системы, которая имеет в окрестности гомоклинического контура бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Определим преобразование Пуанкаре системы (1) как

$$T(z_0) = z(1, z_0).$$

Известно, что преобразование Пуанкаре — диффеоморфизм того же класса гладкости, что и система (1).

Наряду с системой (1) рассмотрим двумерную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), \end{cases} \tag{3}$$

где $t \in [0, 1]$, x, y — произвольные, а X, Y — непрерывно дифференцируемые бесконечное число раз скалярные функции трех переменных. Через $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ обозначим решение системы (3) с начальными данными $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$.

Определим

$$f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1, x_0, y_0) \\ y(1, x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Предположим, что частные производные $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ ограничены при любых x, y и $t \in [0,1]$, тогда f является диффеоморфизмом плоскости в себя класса C^∞. Как следует из [7], существует двумерная периодическая система вида (1) с бесконечно дифференцируемой правой частью, преобразование Пуанкаре которой совпадает с f. Дальнейшие рассуждения покажут, что существует класс систем вида (3), у которых соответствующий диффеоморфизм f удовлетворяет условиям теорем из [1, 2]. Таким образом, выделяется класс систем вида (1), у которых в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения лежит бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Как следует из вышеизложенного, структура окрестности нетрансверсального гомоклинического решения зависит, прежде всего, от характера касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Определим способ касания этих многообразий.

Пусть

$$h(t) = \frac{1}{|t|} - \sin\frac{1}{|t|}, \quad \sigma_k = (2\pi k)^{-1}.$$

Ясно, что функция $h(t)$ определена при любых $t \neq 0$.

Пусть $y^0 > 0$, $\mu > 1$, а γ такова, что $\gamma^{2\pi} = \mu$. Определим функцию $g(t)$:

$$\begin{cases} g(t) = \gamma^{-h(t)}[y^0 + (h(t))^{-1}], \quad t \neq 0, \\ g(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть $g(t)$ задана условиями* (5), *тогда она является бесконечно гладкой на всей действительной оси функцией такой, что*

$$\frac{d^m g(0)}{dt^m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$g(\sigma_k) = \mu^{-k}(y^0 + \sigma_k). \tag{6}$$

Для любого положительного α существует такое k_0, что при $k > k_0$ и $t \in (\sigma_k - \mu^{-\alpha k}, \sigma_k + \mu^{-\alpha k})$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| < \mu^{-(\alpha+1)k}. \tag{7}$$

Доказательство. Ясно, что для любого натурального числа m справедливо равенство

$$\lim_{t\to 0} |t|^{-m} \mu^{-|t|^{-1}} = 0.$$

Из этих соотношений следует, что у функции g существуют в точке 0 производные любого порядка, и все они равны 0. Очевидно, равенства (6) выполняются для любого k.

Следующие равенства очевидны при $t > 0$:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{1}{t^2}\left(1 - \cos\frac{1}{t}\right) = -\frac{2}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{2t}\right),$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\gamma^{-h(t)} \left[\ln\gamma(y^0 + (h(t))^{-1}) + (h(t))^{-2}\right] \frac{dh(t)}{dt}.$$

Фиксируем положительное число α. Пусть $t \in (\sigma_k - \mu^{-\alpha k}, \sigma_k + \mu^{-\alpha k})$. Определим $u = t - \sigma_k$. Ясно, что $|u| < \mu^{-\alpha k}$. Получим

$$h(t) = \frac{2\pi k}{1 + 2\pi k u} - \sin\left(\frac{2\pi k}{1 + 2\pi k u}\right),$$

откуда, учитывая периодичность синуса, имеем

$$\left|\frac{dh(t)}{dt}\right| = \frac{2(2\pi k)^2}{(1 + 2\pi k u)^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{1 + 2\pi k u} - \pi k + \pi k\right) = \frac{8(\pi k)^2}{(1 + 2\pi k u)^2} \sin^2\left(\frac{2(\pi k)^2 u}{1 + 2\pi k u}\right).$$

Ясно, что для достаточно больших k справедливы неравенства

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{1}{1 + 2\pi k u} \leq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Из последних равенств и неравенств следует, что при $t \in (\sigma_k - \mu^{-\alpha k}, \sigma_k + \mu^{-\alpha k})$ имеют место следующие соотношения:

$$|h(t)|^{-1} \leq 1,$$

$$\left|\frac{dh(t)}{dt}\right| \leq \frac{32(\pi k)^6 u^2}{(1 + 2\pi k u)^4} \leq 32\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^4 (\pi k)^6 \mu^{-2\alpha k},$$

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| \leq 32\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^4 \gamma\left(\ln\gamma\left(1 + y^0\right) + 1\right)(\pi k)^6 \mu^{-(1+1.5\alpha)k}.$$

Из этих неравенств следует справедливость условий (7). Теорема доказана.

Как будет видно из дальнейших рассуждений, свойства функции g определяют способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий в гомоклинической точке диффеоморфизма f.

Пусть A, A_1, M, x^0, y^0, ε — такие положительные постоянные, что

$$\begin{gathered} \mu^{-1}A_1 < y^0 \leq x^0 < A < A_1, \\ 2\varepsilon < \min[A - x^0, y^0 - \mu^{-1}A_1, 0.4y^0], \\ M > \max[2\mu^2 A_1, x^0 - y^0 - A_1 \ln\lambda]. \end{gathered} \tag{8}$$

Обозначим

$$s(t) = (x^0 - y^0 - M)t + M + y^0.$$

Определим множества

$$F_1 = \left\{(t, x, y) : t \in [0, 1], \quad \left|\lambda^{-t} x\right| \leq A, \quad \left|\mu^{-t} y\right| \leq A\right\},$$

$$\tilde{F}_1 = \left\{(t, x, y) : t \in [0, 1], \quad \left|\lambda^{-t} x\right| \leq A_1, \quad \left|\mu^{-t} y\right| \leq A_1\right\},$$

$$F_2 = \left\{(t, x, y) : t \in [0, 1], \quad \left|\lambda^{t-1}(x - Mt)\right| \leq \varepsilon, \quad \left|\mu^{t-1}(y - Mt) - y^0\right| \leq \varepsilon\right\},$$

$$\tilde{F}_2 = \left\{(t, x, y) : t \in [0, 1], \quad \left|\lambda^{t-1}(x - Mt)\right| \leq 2\varepsilon, \quad \left|\mu^{t-1}(y - Mt) - y^0\right| \leq 2\varepsilon\right\},$$

$$F_3 = \left\{ \begin{array}{c} (t,x,y) : t \in [0,1], \\ \left|y^0 + (x-(y^0+M))\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right) - (y-(y^0+M))\sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right)\right| \le \varepsilon, \\ \left|(x-(y^0+M))\sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) + (y-(y^0+M))\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)\right| \le \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$\tilde{F_3} = \left\{ \begin{array}{c} (t,x,y) : t \in [0,1], \\ \left|y^0 + (x-(y^0+M))\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right) - (y-(y^0+M))\sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right)\right| \le 2\varepsilon, \\ \left|(x-(y^0+M))\sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) + (y-(y^0+M))\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)\right| \le 2\varepsilon \end{array} \right\},$$

$$F_4 = \left\{ \begin{array}{c} (t,x,y) : t \in [0,1], \\ |x - s(t)| \le \varepsilon, \\ |y - g(-x+s(t))t + Mt - M| \le \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$\tilde{F_4} = \left\{ \begin{array}{c} (t,x,y) : t \in [0,1], \\ |x - s(t)| \le 2\varepsilon, \\ |y - g(-x+s(t))t + Mt - M| \le 2\varepsilon \end{array} \right\},$$

где λ, μ удовлетворяют неравенствам (2), а функция g задана условиями (5). Ясно, что $F_i \subset \tilde{F_i}$, $i = 1,2,3,4$, и, в силу условий (8), $\tilde{F_i}$, $i = 1,2,3,4$, попарно не пересекаются.

Пусть система (3) удовлетворяет следующим свойствам:

$$X(t,x,y) = (\ln\lambda)x, \quad Y(t,x,y) = (\ln\mu)y \tag{9}$$

при любых $(t,x,y) \in F_1$,

$$X(t,x,y) = -(\ln\lambda)x + M\left((\ln\lambda)t + 1\right), \quad Y(t,x,y) = -(\ln\mu)y + M\left((\ln\mu)t + 1\right) \tag{10}$$

при любых $(t,x,y) \in F_2$,

$$X(t,x,y) = \frac{3}{2}\pi\left(y - y^0 - M\right), \quad Y(t,x,y) = -\frac{3}{2}\pi\left(x - y^0 - M\right) \tag{11}$$

при любых $(t,x,y) \in F_3$,

$$X(t,x,y) = \left(x^0 - y^0 - M\right), \quad Y(t,x,y) = g\left(-x + s(t)\right) - M \tag{12}$$

при любых $(t,x,y) \in F_4$,

$$X(t,x,y) = 0, \quad Y(t,x,y) = 0 \tag{13}$$

при любых $(t,x,y) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{4} \tilde{F_i}$, $t \in [0,1]$.

Ясно, что диффеоморфизм f, определенный в (4), является диффеоморфизмом плоскости в себя класса C^∞ с неподвижной гиперболической точкой в начале координат.

Пусть имеются множества

$$V = \{(x,y) : |x| \le A, |y| \le A\},$$

$$U_1 = \left\{(x,y) : |x| \le \varepsilon, \left|y - y^0\right| \le \varepsilon\right\},$$

$$U_2 = \left\{(x,y) : |x| \le \lambda\varepsilon, \left|y - \mu y^0\right| \le \mu\varepsilon\right\},$$

$$U_3 = \left\{(x,y) : |x - M| \le \varepsilon, \left|y - y^0 - M\right| \le \varepsilon\right\},$$

$$U_4 = \left\{(x,y) : \left|x - M - y^0\right| \le \varepsilon, |y - M| \le \varepsilon\right\},$$

$$U_5 = \left\{(x,y) : \left|x - x^0\right| \le \varepsilon, \left|y - g\left(x^0 - x\right)\right| \le \varepsilon\right\}.$$

Ясно, что $U_1 \subset V$, $U_i \not\subset V$, $i = 2,3,4$, $U_5 \subset V$ и множества U_i, $i = 1,2,3,4,5$, попарно не пересекаются. Кроме того, из условий (9)–(13) следует равенство $f\left(U_i\right) = U_{i+1}$, $i = 1,2,3,4$.

Пусть $L = f^4\big|_{U_1}$, тогда будем иметь

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - (y - y^0) \\ x + g(y - y^0) \end{pmatrix}.$$

Последнее соотношение следует из условий (9)–(13). Очевидно, что диффеоморфизм f имеет гиперболическую неподвижную точку и нетрансверсальную гомоклиническую точку $(x^0, 0)$, причем способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий в этой точке определяется свойствами функции g.

В работах [4–6] предполагалось, что функция g удовлетворяет условиям

$$g(0) = \frac{dg(0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{m-1}g(0)}{dt^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m g(0)}{dt^m} \ne 0, \quad m \ge 2.$$

Из этих работ следует, что если способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий в гомоклинической точке определяется указанными условиями, то в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения может лежать бесконечное множество устойчивых периодических решений, но хотя бы один из характеристических показателей таких решений стремится к нулю с ростом периода.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть система (3) удовлетворяет условиям (2), (9)–(13), тогда у диффеоморфизма f, определенного равенством (4), в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки $(x^0, 0)$ лежит счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство. Функция g, определенная соотношениями (5), по теореме 1 удовлетворяет условиям (6), (7).

Пусть выполняется неравенство

$$0 < \alpha < -\frac{\ln\lambda}{\ln\mu} - 1,$$

тогда для любого положительного S существует такое натуральное число k_0, что при $k > k_0$ справедливы соотношения

$$\left|g(\sigma_k) + \lambda^k\left(x^0 + \sigma_k\right) - \mu^{-k}\left(y^0 - \sigma_k\right)\right| < S\mu^{-(\alpha+1)k}.$$

Учитывая последние неравенства, легко видеть, что диффеоморфизм f удовлетворяет условиям теоремы из [2], поэтому произвольная окрестность точки $(x^0, 0)$ содержит счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, предположим, что диффеоморфизм f является преобразованием Пуанкаре двумерной бесконечно гладкой периодической системы дифференциальных уравнений (1). Тогда система (1) имеет* *в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.*

Литература

1. *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 20–26.

2. *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 3–13.

3. *Смейл С.* Диффеоморфизмы со многими периодическими точками // Математика. Сб. переводов. 1967. Т. 11, № 4. С. 88–106.

4. *Иванов Б. Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.

5. *Newhouse Sh.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. Vol. 12. P. 9–18.

6. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1049–1053.

7. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.

Статья поступила в редакцию 17 августа 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Васильева Екатерина Викторовна — доц.; ekvas1962@mail.ru

Stable periodic solutions of periodic systems of differential equations

E. V. Vasil'eva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasil'eva E. V. Stable periodic solutions of periodic systems of differential equations. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 14–21. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.102

An infinitely differentiable periodic two-dimensional system of differential equations is considered. It is assumed that there is a hyperbolic periodic solution, as well as the presence of a homoclinic solution to the periodic solution. It follows from the works of Sh. Newhouse, L. P. Shil'nikov, B. F. Ivanov and others that under certain conditions a neighborhood of the non-transversal homoclinic solution contains a countable set of stable periodic solutions, but at least one of the characteristic exponents in these solutions tends to zero with increasing period. Earlier, in the author's work a two-dimensional diffeomorphism was considered and it was shown that for a certain type of tangency of the stable and unstable manifolds, a neighborhood homoclinic point contains a countable set of stable periodic points with characteristic exponents bounded away from zero. The aim of the present paper is to distinguish a class of two-dimensional periodic systems of differential equations which Poincare transformation is a diffeomorphism that has an infinite set of stable periodic points in the neighborhood of a nontransversal homoclinic point. It is shown that for a certain method of tangency of a stable and unstable manifolds an arbitrary neighborhood of a nontransversal homoclinic solution contains a countable set of stable periodic solutions. Characteristic exponents of these solutions are separated from zero.

Keywords: nontransversal homoclinic solution, stability, characteristic exponent.

References

1. Vasil'eva E. V., "Stable Periodic Points of Two-dimensional C^1-Diffeomorphisms", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **40**(2), 107–113 (2007).

2. Vasil'eva E. V., "Diffeomorphisms of Multidimensional Space with Infinite Set of Stable Periodic Points", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **45**(3), 115–124 (2012).

3. Smale S., *Diffeomorfisms with Many Periodic Points.* In: *Differential and Combinatorial Topology* (Prinseton University Press, 1965, pp. 63–80).

4. Ivanov B. F., "Stability of the Trajectories That Do Not Leave the Neighborhood of a Homoclinic Curve", *Differ. Uravn.* **15**(8), 1411–1419 (1979) [in Russian].

5. Newhouse Sh., "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks", *Topology* **12**, 9–18 (1973).

6. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., "Dynamical Systems with Structurally Unstable Homoclinic Curve", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **286**(5), 1049–1053 (1986) [in Russian].

7. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977, 304 p.) [in Russian].

Author's information:

Vasil'eva Ekaterina V. — ekvas1962@mail.ru