АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ВОКРУГ ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ

ЛУЦИВ Д. В., ТРУБИЦЫН Н. Ф.
Санкт-Петербургский Городской Дворец Творчества Юных, Аничков лицей
191011, Санкт-Петербург, Невский проспект, дом 39
тел. (812) 310-13-13, факс (812) 310-14-14, E-mail: dluciv@vision.spb.ru

Многие задачи аэродинамики и гидродинамики связаны с анализом обтекания средой тел сложной формы. При достаточно больших числах Рейнольдса[1] *с поверхности тела начинают отрываться вихри, которые образуют вихревую пелену, действующую на тело и изменяющую картину потока. Поэтому существует потребность в методе анализа потока вокруг тела, не требующем больших и сложных вычислений. Решение этой задачи является целью данной работы.*

МЕТОД АНАЛИЗА ПОТОКА

За основу был взят метод[2] , разработанный в середине 80-х годов в Японии. Метод позволяет производить моделирование и анализ нестационарного потока вокруг тела произвольной формы. Расчет обтекания тел простой формы (плоской пластины, кругового цилиндра, прямоугольной призмы) производился методом дискретных вихрей, аппроксимирующим вихревую пелену массивом дискретных вихрей в потоке. Однако этот метод требует существенных преобразований формы тела, либо преобразований потока вокруг тела, поэтому к телам сложной формы применим тяжело.

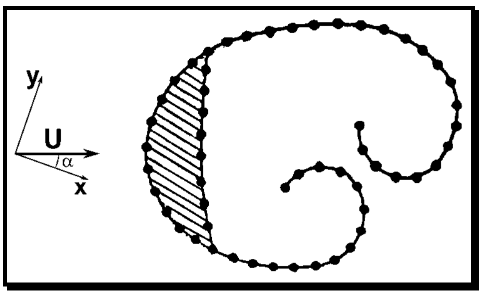

Рис. 1. Распределение вихрей на теле и в пелене

Метод, использованный в работе, комбинирует метод дискретных вихрей с методом особенностей. Согласно методу особенностей по поверхности тела распределяются дискретные вихри. Комбинация метода дискретных вихрей с

---

[1] Число Рейнольдса: $\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu}$, где ρ - плотность; V - скорость; l - линейный размер тела; μ - коэффициент вязкости.

[2] Takaji INAMURO, Takeshi ADACHI, Hiroshi SAKATA. A Numerical Analysis of Unsteady Separated Flow by Vortex Shedding Model. - Bulletin of JSME, Vol. 26, No. 222, December 1983, pp. 2106-2112.

методом особенностей заключается в том, что дискретные вихри равномерно распределены по поверхности тела, и через равные промежутки времени с каждой из точек отрыва отделяется один вихрь. Все отделенные дискретные вихри образуют вихревую пелену (рис. 1).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКА

Допустим, что картина потока в любой плоскости, параллельно которой осуществляется движение, будет одинакова. В этом случае движение называется плоским. В работе был рассмотрен случай плоского потока несжимаемой невязкой жидкости, основными уравнениями для которой в прямоугольной системе координат можно считать следующие:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{p}{\rho} = f(t) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где Φ - потенциал скорости; p - давление; ρ - плотность; $f(t)$ - произвольная функция времени t; u и v - составляющие скорости по осям x и y соответственно.

В данной задаче поток в бесконечно удаленной от тела точке стационарен, поэтому функция $f(t)=const$ и вычисляется следующим образом:

$$f(t) = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}(U_\infty^2 + V_\infty^2)$$

где U_∞ и V_∞- проекции скорости потока в бесконечно удаленной от тела точке на оси X и Y соответственно; ρ - плотность среды; p_∞ - давление в бесконечно удаленной от тела точке.

В описываемом методе потенциал скорости в точке потока представлен суперпозицией потенциала скорости невозмущенного потока и потенциалов скоростей, индуцируемых вихрями :

$$\Phi = \Phi_u + \sum_{j=1}^{M} \Phi_{vj} + \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{N} \Phi_{wik}$$

Потенциал скорости невозмущенного потока:

$$\Phi_u = U_\infty \cdot x + V_\infty \cdot y$$

Потенциал скорости, индуцируемой отдельным вихрем :

$$\Phi_v = -\frac{\Gamma}{2\pi} arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Таким образом, общий потенциал скорости получим:

$$\Phi = U\cos\alpha \cdot x + U\sin\alpha \cdot y - \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi} arctg \frac{y - y_j}{x - x_j} - \sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma_{wik}}{2\pi} arctg \frac{y - y_{wik}}{x - x_{wik}},$$

где U - скорость однородного потока; α - угол атаки; Γ*l* (*l*=*j*,*wik*) - циркуляция вихря в позиции (x*l*;y*l*).

Условия непротекания среды сквозь поверхность (поток не проникает внутрь тела) выражаются:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\sigma = 0 \ \ (= V_n),$$

где V_n — нормальная к поверхности тела составляющая скорости потока.

Тело произвольной формы в работе аппроксимировано ломаной, по вершинам и отрезкам которой равномерно распределены дискретные вихри. В первом приближении будем считать, что вихри пелены, отделяемые с течением времени с точек отрыва на поверхности тела, сохраняют значения циркуляций, имевшиеся в момент отделения в точках отрыва.

Для данного представления тела граничные условия $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\sigma = 0$ могут быть записаны:

$$u\sin\beta + v\cos\beta = 0$$

где β - угол между положительным направлением оси абсцисс и данным участком ломаной (поверхности тела), на котором обеспечивается условие непротекания (считая всегда против часовой стрелки от оси абсцисс).

Составляющие скорости *u* и *v* получаются из значения потенциала скорости:

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

Проведя дифференцирование и подставив результат в граничные условия для каждой из контрольных точек, взятых на поверхности тела посередине между соседними вихрями, получаем систему линейных уравнений:

$$U\cos\alpha\sin\beta+\frac{\sin\beta}{2\pi}\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j\,\frac{y-y_j}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}+\frac{\sin\beta}{2\pi}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{ik}\,\frac{y-y_{ik}}{(x-x_{ik})^2+(y-y_{ik})^2}+$$

$$+U\sin\alpha\cos\beta-\frac{\cos\beta}{2\pi}\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j\,\frac{x-x_j}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}-\frac{\cos\beta}{2\pi}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{ik}\,\frac{x-x_{ik}}{(x-x_{ik})^2+(y-y_{ik})^2}=0$$

и после преобразования:

$$\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{(y-y_j)\sin\beta-(x-x_j)\cos\beta}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}\Gamma_j\right)+2\pi U(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)+$$

$$+\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{ik}\,\frac{(y-y_{ik})\sin\beta-(x-x_{ik})\cos\beta}{(x-x_{ik})^2+(y-y_{ik})^2}=0$$

В этой системе, благодаря известным форме тела, углу атаки, скорости невозмущенного потока, неизвестными остаются только циркуляции вихрей на поверхности тела. Число контрольных точек равно числу вихрей, столько же уравнений — в системе. Уравнение для одной из контрольных точек, мало влияющих на поток (например, в середине задней поверхности тела), заменяется на уравнение:

$$\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j+\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{wik}=0,$$

которое получается из теоремы Кельвина. Эта система линейных уравнений решается относительно значений циркуляций.

МОДЕЛЬ ВИХРЕВОЙ ПЕЛЕНЫ

Далее моделируется отрыв вихрей с поверхности тела. По скорости в точке отрыва в данный момент времени и промежутку времени Δt (периоду отрыва вихрей) вычисляется смещение нового вихря пелены относительно точки его отрыва (положение последней считается известной). Остальные вихри пелены так же сдвигаются в соответствии со скоростями в тех точках потока, где они расположены.

$$\begin{cases} x_{wk}(t+\Delta t) = x_{wk}(t) + u_{wk}(t)\Delta t \\ y_{wk}(t+\Delta t) = y_{wk}(t) + v_{wk}(t)\Delta t \end{cases},$$

где (x_{wk}, y_{wk}) - позиция k-того вихря, u_{wk}, v_{wk} - составляющие скорости вихря. Скорость вызвана всеми вихрями, за исключением самого k-того и получена:

$$\begin{cases} u_{wk} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + \dfrac{\Gamma_{wk}}{2\pi} arctg \dfrac{y - y_{wk}}{x - x_{wk}}\right) \\ v_{wk} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + \dfrac{\Gamma_{wk}}{2\pi} arctg \dfrac{y - y_{wk}}{x - x_{wk}}\right) \end{cases}$$

Индуцируемая вихрем скорость обратно пропорциональна расстоянию от его центра, поэтому в точках, близких к его центру, скорость может быть настолько велика, что она затруднит машинную реализацию вычислений. По этой причине введена величина $\sigma = 2.24\sqrt{\nu t^*}$ (где ν - кинематическая вязкость, t^* - время, прошедшее с момента отрыва вихря с точки отделения), ниже которой не может опускаться расстояние от данной точки до центра вихря, то есть:

$$v_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi r}\Gamma \ldots\ldots\ldots (r \geq \sigma) \\ \dfrac{1}{2\pi\sigma}\Gamma \ldots\ldots (r < \sigma) \end{cases},$$

где ν_0 - модуль скорости, индуцируемой вихрем.

СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ТЕЛО

Сила, действующая на тело, представлена интегралом напряжения по поверхности тела:

$$\vec{F} = -\int_{\sigma} P_S \vec{n}_S \, dS$$

и численно считается равной

$$\vec{F} = -\sum_{j=1}^{K} P_j S_j \vec{n}_j,$$

где j - номер отрезка ломаной между вихрями, K - количество отрезков (оно же - количество вихрей на поверхности тела), $\vec{n}_j$ - нормальный к поверхности тела единичный вектор, направленный наружу, P_j - среднее напряжение на данном отрезке, S_j - площадь поверхности, соответствующая данному отрезку. Средним напряжением на отрезке считается давление в контрольной точке, ему принадлежащей. Площадь поверхности, соответствующая отрезку, численно равна длине отрезка, т.к. рассматривается плоское движение и толщина рассматриваемого слоя потока принимается за линейную единицу. Таким образом, результирующая сила рассчитывается как векторная сумма сил, действующих на площадки, соответствующие отдельным отрезкам, аппроксимирующим поверхность тела.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Алгоритм вычислений представлен на рис. 2. В расчетах принято допущение, что поток резко стартует с состояния покоя. В момент времени *t=0* вихри расположены только на поверхности тела. По граничным условиям и дополнительному условию, иллюстрирующему теорему Кельвина, производится расчет циркуляций на теле. Далее обеспечивается расчет скорости и потенциала скорости в любой точке потока. По известным величинам скоростей и потенциалов скоростей рассчитываются давления и сила, действующая на тело. Расчет давлений и силы возможен для любого шага, кроме первого. Это связано с тем, что для вычисления величины $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ необходимо иметь значение Φ по крайней мере для двух моментов времени. Потом по известным скоростям производится пересчет положений всех вихрей для каждой точки отрыва. Процесс вычислений повторяется до момента времени, соответствующего условию $t \geq t_{\max}$.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Метод, взятый за основу в работе, в силу некоторых особенностей (например, необходимость решения большой системы линейных уравнений, ввод величины σ, заменяющей r при его малых значениях, аппроксимация моделируемых объектов их дискретными компонентами) хорошо реализуется на компьютере. В наше время это может быть персональный компьютер средней мощности (например, IBM PC). Программа, реализующая анализ потока вокруг тела описанным методом и представленная в работе, работает под управлением MS-DOS и совместимых с ней операционных систем. Реализована программа на языке C++ с незначительными вставками на ассемблере, связанными с интерфейсом пользователя. Разработана программа в среде BORLAND C++ 3.1

Некоторые аспекты метода, допускающие свободу действий, в программе реализованы жестко. Например, контрольные точки берутся точно посередине между вихрями, давления на теле вычисляются в контрольных точках.
Производная потенциала скорости по времени представляется конечной разностью. Опыт разработки программы и сравнение результатов ее работы с экспериментальными данными показал целесообразность подобных особенностей ее реализации.

Программа состоит из достаточно большого количества блоков, каждый из которых может быть доработан отдельно. Например, в отдельный блок вынесено решение системы уравнений методом Гаусса, что позволяет в случае необходимости быстро воспользоваться другим методом, если последний отдельно реализован. Легко может быть заменен или отключен блок диалога с пользователем и вывода графической информации. При компиляции программы под другую более развитую, чем MS-DOS, операционную систему незначительные коррективы в ее тексте могут позволить существенно поднять количество шагов моделирования, а значит, повысить точность и моделируемое время при анализе потока и даже обрабатывать несколько моделей параллельно в пределах одной задачи операционной системы. Но это может потребовать корректив в блоках графики и диалога с пользователем.

Программа позволяет в реальном времени производить интерактивный анализ и моделирование нестационарного плоского потока вокруг тела произвольной формы, выводить наглядно данные в графическом виде (например, линии тока, эквипотенциальные поверхности, эпюры скоростей, давлений и т.д.) и в числовом — в файл отчета. Последний может быть полезен при сопоставлении результатов, например, с экспериментальными данными. В связи с реализацией производной потенциала скорости по времени на первом шаге давления на теле и в потоке, а следовательно и сила, действующая на тело, не могут быть вычислены. Вся остальная информация об обтекании тела известна с первого шага.

Данные о форме тела, точках отрыва и характеристиках потока, а также некоторые другие служебные данные программа получает из входного файла. Входной файл может быть сформирован в любом текстовом редакторе, но для удобства и наглядности была написана дополнительная программа составления входного файла, позволяющая легко и наглядно описать поток и тело сложной формы.

При помощи написанной программы было выполнено моделирование потока вокруг тел различной формы для нескольких скоростей и углов атаки. Возможности, предоставляемые программой, и полученные на различных шагах моделирования результаты представлены на рис. 3 — 12. Результаты работы программы достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Общие результаты работы могут быть полезны при решении некоторых реальных аэродинамических и гидродинамических задач.

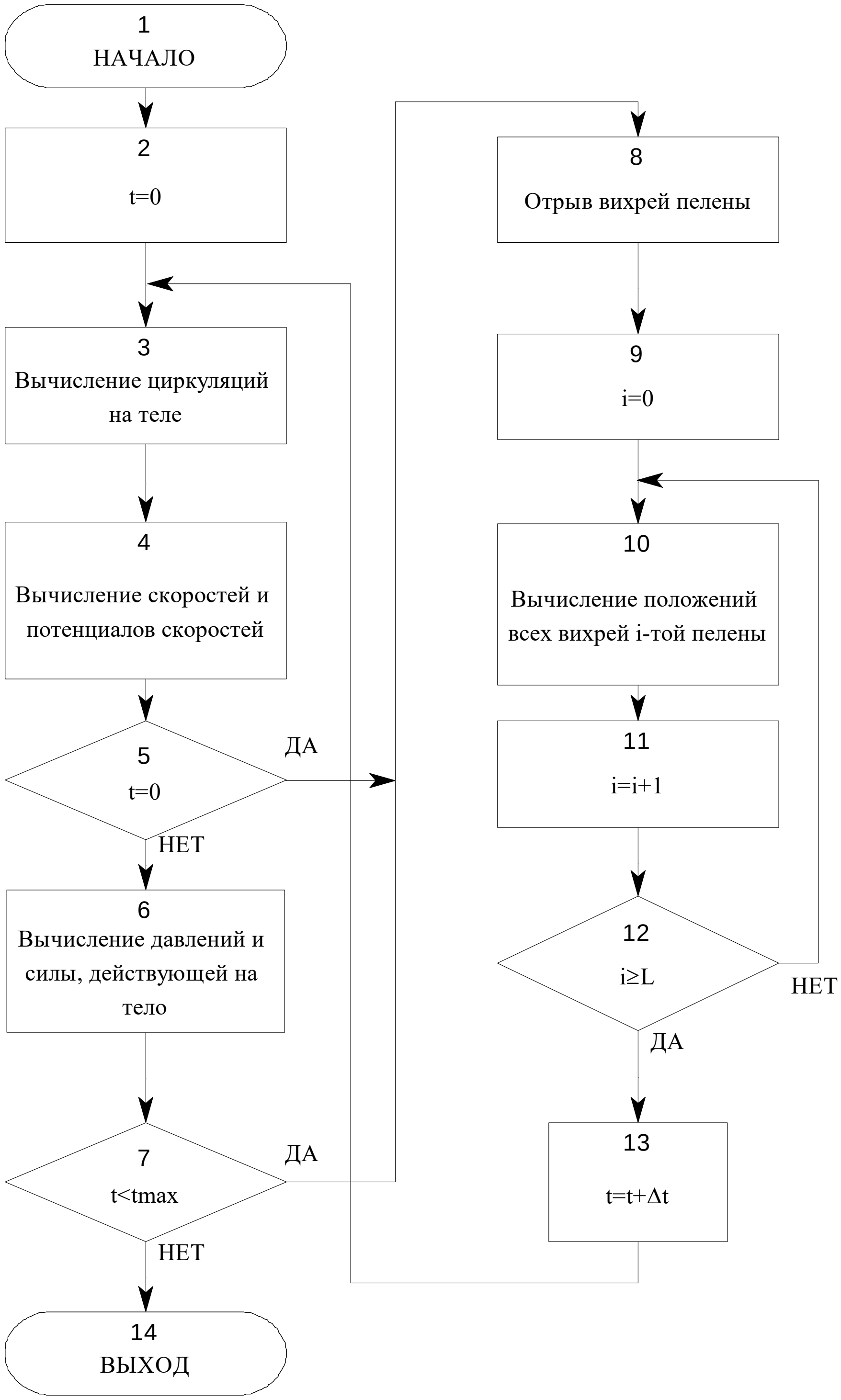

Рис.2 Алгоритм вычислений

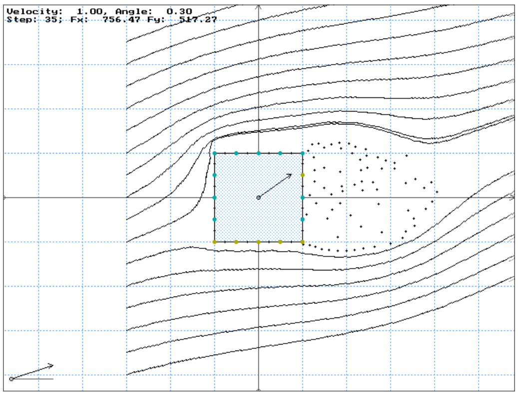

Рис. 3. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на тело

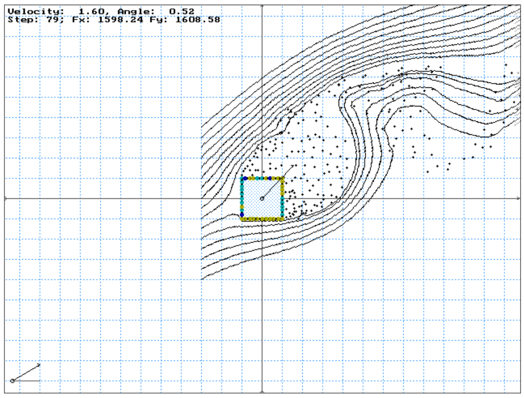

Рис. 4. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на прямоугольную призму, при угле атаки 30°

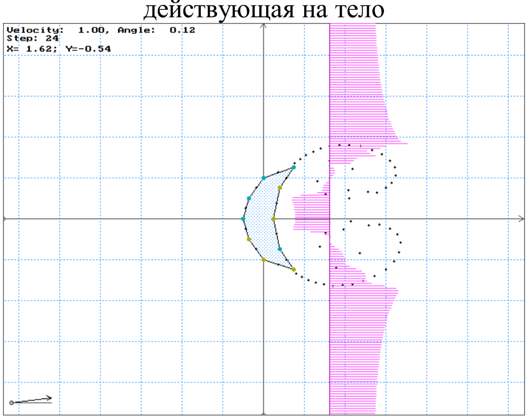

Рис. 5. Горизонтальная эпюра скоростей в области образования пелены

Рис. 6. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на плоскую пластину, при угле атаки 20°

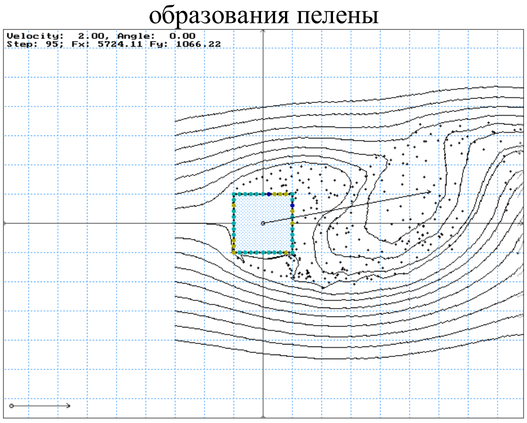

Рис. 7. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на прямоугольную призму, при угле атаки 0°

Рис. 8. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на круговой цилиндр, при скорости потока 0,8 м/с

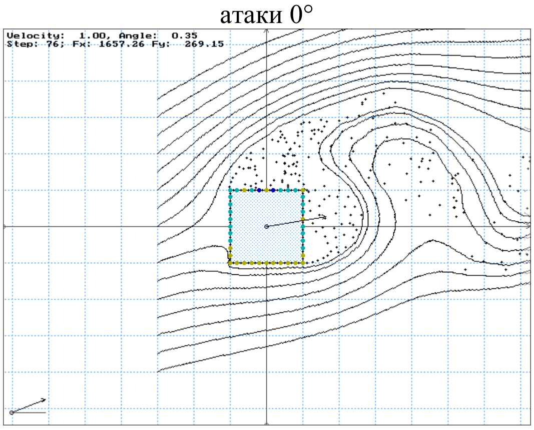

Рис. 9. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на прямоугольную призму, при угле атаки 20°

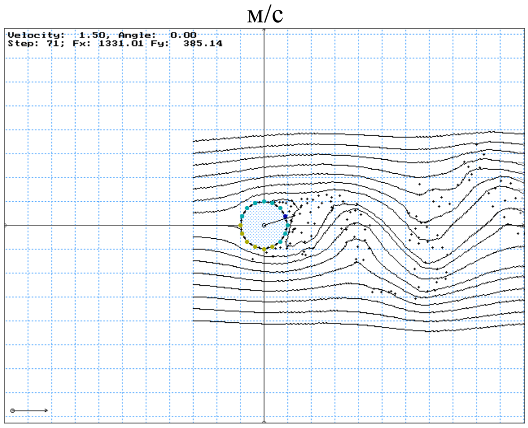

Рис. 10. Вихревая пелена, линии скорости и сила, действующая на круговой цилиндр, при скорости потока 1,5 м/с

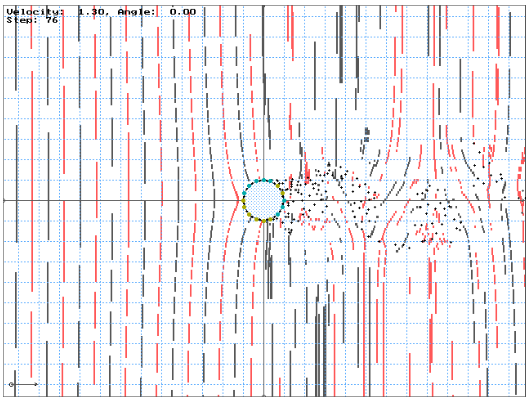

Рис. 11. Расположение эквипотенциальных линий при обтекании кругового цилиндра, вихревая цепочка Кармана

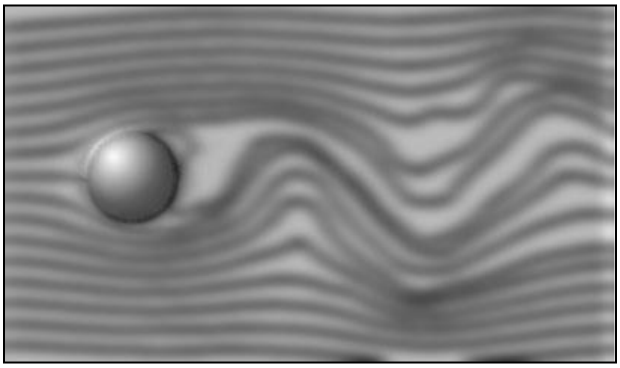

Рис. 12. Картина потока вокруг тела, созданная на базе изображения линий скорости, полученного программой

ЛИТЕРАТУРА

1. Inamuro T., Adachi T., Sakata H. A Numerical Analysis of Unsteady Separated Flow by Vortex Shedding Model - Bulletin of JSME, Vol. 26, No 222, pp. 2106-2112, 1983.
2. Miyamoto T., Hashiguchi M. Numerical Simulation of Separated Flow by Discrete Vortex Method, Boundary Elements VIII Conference, v.2, pp. 859-868, 1986.
3. Александров В.Л. Техническая гидромеханика. — М.: ОГИЗ, 1946.
4. Вилля Г. Теория Вихрей. — М.: ОНТИ, 1936.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. ч.1. — М.: ОГИЗ, 1948.
7. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. — М.: «Микап», 1992.
8. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. т.1 — М.: Мир, 1991.