ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 5 (63)
Выпуск 4

2018
Декабрь

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАН В АВГУСТЕ 1946 ГОДА

ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК СПбГУ. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ» ВЫХОДИТ В СВЕТ С МАРТА 1956 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

На наш журнал можно подписаться по каталогу «Пресса России». Подписной индекс 36313
Свидетельство о регистрации СМИ № ФС77-35996 от 22 апреля 2009 г. (Роскомнадзор)
Учредитель: Санкт-Петербургский государственный университет

Редактор *Ю. Н. Ворошилова* • Корректор *Ю. Н. Ворошилова* • Комп. верстка *А. М. Вейшторт*

Подписано в печать 00.00.2018. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Усл. печ. л. 00,00. Уч.-изд. л. 00,00.
Печать по заказу. 1-й завод — 00 экз. Заказ № . Цена свободная.
Адрес Издательства СПбГУ: 199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11. Тел./факс +7 (812) 328-44-22

Типография Издательства СПбГУ. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

УДК 517.977.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 49J21

Метод нахождения оптимального решения дифференциального включения*

А. В. Фоминых

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фоминых А. В.* Метод нахождения оптимального решения дифференциального включения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 000–000. https://doi.org/

В статье исследуется дифференциальное включение с заданным непрерывным выпуклым многозначным отображением. На заданном конечном промежутке времени требуется построить решение дифференциального включения, которое удовлетворяет заданным начальному и конечному условиям и доставляет минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала в пространстве кусочно-непрерывных функций. В случае непрерывности производной опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным этот функционал дифференцируем по Гато. В статье найден градиент Гато, получены необходимые условия минимума данного функционала. На основании этих условий к исходной задаче применяется метод наискорейшего спуска. Численные примеры иллюстрируют работу построенного алгоритма.

Ключевые слова: дифференциальное включение, опорная функция, метод наискорейшего спуска.

1. Введение. Как известно, дифференциальное включение [1, 2] является обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку, например, неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные неравенства и дифференциальные уравнения с ограничениями на фазовые координаты, могут быть записаны в виде дифференциальных включений. Кроме того, известно, что многие задачи оптимального управления при естественных предположениях могут быть сведены к дифференциальным включениям [3]. Как правило, дифференциальное включение имеет бесконечное множество решений, поэтому естественно поставить задачу выделения решения, оптимального в каком-то смысле, например, в интегральном.

Необходимые условия минимума для задач с дифференциальными включениями как с выпуклыми, так и с невыпуклыми многозначными отображениями, исследовались в таких статьях, как [4–7]. Более конструктивные условия минимума были получены в работах [8–10]. (Некоторые из перечисленных работ также рассматривают случай присутствия фазовых ограничений.) Множества достижимости дифференциальных включений также изучались в различных работах (см., например, [11–15]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-00006) и РФФИ (грант № 18-31-00014 мол-а).

2. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x,t) \tag{1}$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

и конечным условием

$$x(T) = x_T. \tag{3}$$

В формуле (1) $F(x,t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0,T]$, $x(t)$ — n-мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва) и ограниченной на $[0,T]$ производной, $T > 0$ — заданный конечный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0,T]$ и каждой фазовой точке $x \in R^n$ отображение $F(x,t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из R^n. Предположим также, что опорная функция многозначного отображения $F(x,t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна. В формулах (2), (3) $x_0, x_T \in R^n$ — заданные векторы.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0,T]$, являющуюся решением включения (1) и удовлетворяющую условиям (2), (3), которая доставляет минимум функционалу

$$J(x) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), t)dt, \tag{4}$$

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по всем трем аргументам и непрерывно дифференцируемая по x и по $\dot{x}$. Предполагаем, что такое решение существует.

Здесь $C_n[0,T]$ — пространство n-мерных непрерывных на $[0,T]$ вектор-функций с производной из пространства $P_n[0,T]$; $P_n[0,T]$ — пространство кусочно-непрерывных и ограниченных на $[0,T]$ n-мерных вектор-функций, имеющих на $[0,T]$ конечное число точек разрыва. Далее в статье также потребуется пространство $L_n^2[0,T]$ суммируемых на $[0,T]$ с квадратом n-мерных вектор-функций.

Если $t_0 \in [0,T)$ — точка разрыва вектор-функции $\dot{x}$, то для определенности полагаем, что $\dot{x}(t_0)$ — правосторонняя производная вектор-функции $\dot{x}$ в точке t_0; $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции $\dot{x}$ в точке T.

Для произвольного множества $F \subset R^n$ определим опорную функцию вектора $\psi \in R^n$ соотношением $c(F,\psi) = \sup\limits_{f \in F} \langle f, \psi \rangle$, где $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов $a, b \in R^n$.

Замечание 1. Вместо траекторий из пространства $C_n[0,T]$ с производной из пространства $P_n[0,T]$ в статье можно рассматривать абсолютно непрерывные на отрезке $[0,T]$ траектории с измеримой и почти всюду ограниченной на отрезке $[0,T]$ производной соответственно. Такое рассмотрение при естественных предположениях гарантирует существование решения поставленной задачи. Выбор в статье пространства решений обусловлен возможностью их практического построения.

3. Сведение к задаче безусловной оптимизации. Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x,t)$. Поскольку $\forall t \in [0,T]$ и $\forall x \in R^n$ многозначное отображение $F(x,t)$ представляет собой выпуклый компакт в R^n, то включение (1) можно переписать иначе [16]:

$$\langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leqslant c(F(x(t),t),\psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0,T],$$

где S — единичная сфера в R^n с центром в начале координат.

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$, тогда с учетом (2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau.$$

Положим

$$\ell(\psi, z, t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t),t),\psi), \tag{5}$$

$$h(z,t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\} \tag{6}$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\int_0^T h^2(z(t),t)dt. \tag{7}$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (7) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \ (z \in \Omega), \text{ если } \langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leqslant c(F(x(t),t),\psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0,T], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi(z) > 0 \ (z \notin \Omega) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

то есть включение (1) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = 0$.

Введем функционал

$$\chi(z) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T\right)^2.$$

Видно, что краевые условия (2), (3) выполнены тогда и только тогда, когда $\chi(z) = 0$.

Построим функционал

$$I(z) = \int_0^T f_0\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right)dt + \lambda\left(\varphi(z) + \chi(z)\right), \tag{8}$$

где $\lambda > 0$ — достаточно большое число.

Известно [17], что при достаточно больших значениях λ решение задачи (1)–(4) сколь угодно «близко» к траектории

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau,$$

где z^* — точка глобального минимума функционала (8). Итак, нахождение приближенного решения исходной задачи свелось к минимизации функционала (8) на пространстве $P_n[0,T]$. На практике решают эту задачу для фиксированного значения $\overline{\lambda}$. Если решение этой задачи (при $\lambda = \overline{\lambda}$) удовлетворяет ограничениям в виде дифференциального включения и краевых условий с заданной точностью (то есть значение функционала $\varphi + \chi$ на этом решении достаточно мало), то процесс прекращается; в противном случае, увеличивают значение λ и повторяют процесс с этим новым значением.

4. Дифференциальные свойства функционала I. Как уже было отмечено, считаем, что опорная функция $c(F(x,t),\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ дифференцируема по фазовой переменной x и что производная $\frac{\partial c(F(x,t),\psi)}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда для любых $x, y \in C_n[0,T]$ и для любых $\psi \in S$, $t \in [0,T]$ верно соотношение

$$\begin{aligned} &c\big(F(x+\alpha y,t),\psi\big) - c\big(F(x,t),\psi\big) = \\ &\qquad = \alpha\Big\langle \frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}, y\Big\rangle + o(\alpha,\psi,t), \quad \frac{o(\alpha,\psi,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть $v \in P_n[0,T]$. Положим

$$z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v(t),$$

$$y(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Используя свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [3] и равенства (9), (10), вычислим

$$\ell(\psi, z_\alpha, t) = \ell(\psi, z, t) + \alpha H_1(\psi, z, v, t) + o(\alpha,\psi,t), \quad \frac{o(\alpha,\psi,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H_1(\psi, z, v, t) = \langle \psi, v(t)\rangle - \Big\langle \frac{\partial c(F(x(t),t),\psi)}{\partial x}, \int_0^t v(\tau)d\tau\Big\rangle.$$

С учетом соотношений (5), (6) далее найдем

$$h(z_\alpha, t) = h(z,t) + \alpha H(z,v,t) + o(\alpha,t), \quad \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H(z,v,t) = \max_{\psi \in \overline{R}} H_1(\psi,z,v,t), \text{ если } \max_{\psi\in S} \ell(\psi,z,t) > 0,$$

$$H(z,v,t) = 0, \text{ если } \max_{\psi\in S} \ell(\psi,z,t) < 0,$$

$$H(z,v,t) = \max_{\psi \in \overline{R}} \max\{0, H_1(\psi,z,v,t)\}, \text{ если } \max_{\psi\in S} \ell(\psi,z,t) = 0,$$

здесь

$$\overline{R}(z,t) = \Big\{\overline{\psi}(z,t) \in S \mid \max\{0, \ell(\overline{\psi},z,t)\} = \max_{\psi\in S}\max\{0,\ell(\psi,z,t)\}\Big\}.$$

В силу структуры функционала (5) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, z, t) > 0$ максимум выражения

$$\max\{0, \ell(\psi, z, t)\} = \ell(\psi, z, t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(z,t) \in S$. Действительно, в данном случае точка z не принадлежит множеству F. Из свойств опорной функции известно [16], что при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ величина $h(z(t),t)$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t),t)$, то есть $h(z(t),t) = ||z(t) - f(x(t),t)||$ (евклидова норма), где $f(x(t),t)$ — проекция точки $z(t)$ на множество $F(x(t),t)$, которая единственна, поскольку $F(x(t),t)$ — выпуклый компакт. Отсюда видно, что максимум выражения $h(z(t),t) = \ell(\psi, z(t), t) = \langle z(t), \psi\rangle - c(F(x(t),t),\psi) = ||z(t) - f(x(t),t)||$ достигается на векторе $\psi^*(z(t),t) = \big(z(t) - f(x(t),t)\big)/||z(t) - f(x(t),t)||$, который единственен в силу единственности вектора $f(x(t),t)$. Поэтому в этом случае множество $\overline{R}(z,t)$ состоит из единственного элемента $\psi^*(z,t)$.

Замечание 2. Величина $h(z(t),t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t),t)$, а функционал (7) есть половина квадрата отклонения в $L_n^2[0,T]$-норме траектории $z(t)$ от множества $F(x,t)$.

Теперь нетрудно получить разложение

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T h(z(t),t)H(z(t),v(t),t) + o(\alpha,t)dt.$$

Очевидно, что при $z \in \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато, и его градиент Гато равен нулю.

Рассмотрим случай $z \notin \Omega$. Обозначим

$$w(z,t) = \max_{\psi \in S} \ell(\psi, z, t)^2 > 0.$$

Как уже было отмечено, в этом случае данный максимум достигается на единственном элементе $\psi^*(z,t)$. Тогда функция $\psi^*(z,t)$ непрерывна по z при фиксированном t [18], поэтому с учетом непрерывности функции $\frac{\partial c(F(x,t),\psi)}{\partial x}$ получаем, что функция $\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$ непрерывна по z при фиксированном t. Далее по теореме Лагранжа о среднем значении существует такое число $\theta = \theta(t) \in [0,1]$, что

$$\begin{aligned} w(z+\alpha v,t) - w(z,t) = \alpha\Big\langle \frac{\partial w(z+\theta\alpha v,t)}{\partial z}, v\Big\rangle = \\ = \alpha\Big\langle \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}, v\Big\rangle + \alpha\Big\langle \frac{\partial w(z+\theta\alpha v,t)}{\partial z} - \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}, v\Big\rangle \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(z+\alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} - \int_0^T \Big\langle v(t), \frac{\partial w(z(t),t)}{\partial z}\Big\rangle dt \right| = \\ = \left| \int_0^T \Big\langle v(t), \frac{\partial w(z(t)+\theta\alpha v(t),t)}{\partial z} - \frac{\partial w(z(t),t)}{\partial z}\Big\rangle dt \right| \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,T]} ||v(t)|| \int_0^T \left|\left|\frac{\partial w(z(t)+\theta\alpha v(t),t)}{\partial z} - \frac{\partial w(z(t),t)}{\partial z}\right|\right| dt. \quad (11)$$

Множитель $\max\limits_{t\in[0,T]} ||v(t)||$ ограничен, поскольку $v \in P_n[0,T]$. Норма под интегралом стремится к нулю при $\alpha \downarrow 0$ при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ в силу непрерывности функции $\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$ по z при фиксированном t. Кроме того, эта норма ограничена в силу непрерывности функции $\frac{\partial c(F(x,t),\psi)}{\partial x}$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости выражение (11) стремится к нулю при $\alpha \downarrow 0$, что доказывает дифференцируемость по Гато функционала φ в случае $z \notin \Omega$.

Вычисляя также классическую вариацию для функционалов χ и J, приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Если опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна, то функционал I дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле*

$$\nabla I(z) = \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau),z(\tau),\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0(x,z,t)}{\partial z} +$$

$$+\lambda\Big\{h(z,t)\psi^*(z,t) - \int_t^T h(z(\tau),\tau)\frac{\partial c(F(x(\tau),\tau),\psi^*(z(\tau),\tau))}{\partial x}d\tau + x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T\Big\}. \quad (12)$$

5. Необходимые условия минимума функционала I. Из известного необходимого условия минимума [19] дифференцируемого по Гато функционала и соотношения (12) заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна. Для того чтобы точка z^* доставляла минимум функционалу I необходимо, чтобы*

$$0_n = \int_t^T \frac{\partial f_0(x^*(\tau),z^*(\tau),\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0(x^*,z^*,t)}{\partial z} +$$

$$+\lambda\Big\{h(z^*,t)\psi^*(z,t) - \int_t^T h(z^*(\tau),\tau)\frac{\partial c(F(x^*(\tau),\tau),\psi^*(z(\tau),\tau))}{\partial x}d\tau + x_0 + \int_0^T z^*(t)dt - x_T\Big\}, \quad (13)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0,T]$.

6. Метод наискорейшего спуска. Опишем метод наискорейшего спуска [20] для поиска стационарных точек функционала I. Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0,T]$. Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0,T]$. Если выполнено условие минимума (13), то точка z_k является стационарной точкой функционала I, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1} = z_k - \gamma_k \nabla I(z_k),$$

где вектор-функция $x_k(t) = x_0 + \int_0^t z_k(\tau)d\tau$, а величина γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma>0} I\big(z_k - \gamma\nabla I(z_k)\big) = I\big(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)\big). \quad (14)$$

В силу (14) имеем $I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k)$. Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя ее точка является стационарной точкой функционала I по построению.

Предположим, что функционал ∇I является равномерно непрерывным и ограниченным в шаре пространства $L_n^2[0,T]$ с центром в начале координат и радиуса $r' > \sup\limits_{z \in Z_1} \|z\|_{L_n^2[0,T]}$ (множество Лебега $Z_1 = \{z \in P_n[0,T] \mid I(z) \leqslant I(z_1)\}$ считаем ограниченным по норме $L_n^2[0,T]$). Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то метод сходится [21] в следующем смысле:

$$\left|\left|\nabla I(z_k)\right|\right|_{L_n^2[0,T]} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Замечание 3. Известно, что метод наискорейшего спуска часто медленно сходится. Особенно его неэффективность проявляется при больших значениях λ. Для преодоления этой трудности используют более эффективные методы, например, метод сопряженных градиентов, а также различные (в том числе эвристические) приемы, направленные на учет «овражной» структуры минимизируемого функционала [17].

7. Численные примеры. Рассмотрим примеры реализации предложенного алгоритма. В обоих примерах было взято значение $\lambda^* = 10$. Вычислительный процесс прерывался на k^*-й итерации в случае $\left|\left|\nabla I(z_{k^*})\right|\right|_{L_n^2[0,T]} \leqslant \varepsilon^* = 5 \times 10^{-3}$.

Пример 1. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B, \quad t \in [0,1],$$

где B — единичный шар в R^n с центром в начале координат. Заданы краевые условия

$$x(0) = (0.5, 0.25)', \quad x(1) = (1.75, 2).$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданным краевым условиям и доставляющее минимум следующему функционалу:

$$J(x) = \int_0^1 x_1^2(t) + x_2^2(t)\ dt.$$

В данном случае $c(F,\psi) = x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, $\dfrac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (2,1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + 2t, 0.25 + t)'$.

Было проведено 13 итераций согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{13} (см. рис. 1), при этом $J(x_{13}) = 2.219$. На рис. 1 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) - x_2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$.

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_2[0,T]$, которое переводит систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2$$

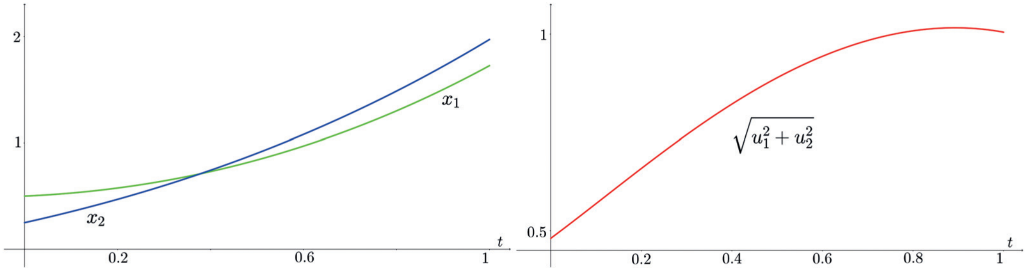


Рис. 1. Решение примера 1.

из точки $x(0)$ в точку $x(1)$ и удовлетворяет ограничению

$$u_1^2(t)+u_2^2(t) \leqslant 1 \quad \forall t \in [0,1].$$

При этом значение функционала

$$J(x)=\int_0^1 x_1^2(t)+x_2^2(t)\ dt.$$

должно быть наименьшим.

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряженных переменных [22]. При этом оказалось $J(x^*)=2.195$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в статье метода (относительная погрешность не превышает 1%).

Пример 2. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x)=\begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}+D, \quad t\in[0,1],$$

где D — единичный симплекс в R^n $\big(D=\{x\in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0\ \forall i=\overline{1,n}\}\big)$. Задано начальное условие

$$x(0)=(0.5,0.5)'.$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданному начальному условию и доставляющее минимум следующему функционалу:

$$J(x)=x_2(1)=0.5+\int_0^1 z_2(t)\ dt,$$

то есть найти исходящую из заданной начальной точки траекторию включения с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени.

В данном случае $c(F,\psi)=-x_2^2\psi_1+x_1\psi_2+\max\{0,\psi_1,\psi_2\}$, $\dfrac{\partial c}{\partial x}=(\psi_2,-2x_2\psi_1)'$.

Положим $z_1=(1,1)'$, тогда $x_1=(0.5+t,0.5+t)'$.

Было проведено 19 итераций согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{19} (см. рис. 2), при этом $J(x_{19})=0.835$. На рис. 2 использовано обозначение $u_1(t)=z_1(t)+x_2^2(t)$, $u_2(t)=z_2(t)-x_1(t)$.

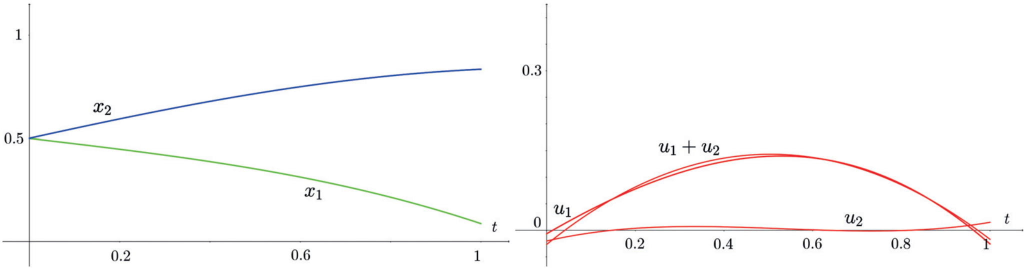


Рис. 2. Решение примера 2.

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_2[0, T]$, которое удовлетворяет ограничению

$$u_1(t) + u_2(t) \leqslant 1, \quad u_1(t) \geqslant 0, \quad u_2(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

и переводит систему

$$\dot{x}_1 = -x_2^2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2$$

из точки $x(0)$ в точку с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени, то есть доставляет минимум функционалу

$$J(x) = x_2(1) = 0.5 + \int_0^1 z_2(t)\ dt.$$

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряженных переменных [22]. При этом оказалось $J(x^*) = 0.803$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в статье метода (относительная погрешность не превышает 4%).

Пример 3. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B + Q, \quad t \in [0, 1],$$

где Q — единичный квадрат в R^n $\big(Q = \{x \in R^n \mid |x_i| \leqslant 1,\ \forall i = \overline{1, n}\}\big)$. Задано начальное условие

$$x(0) = (0, 1)'.$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданному начальному условию и доставляющее минимум следующему функционалу:

$$J(x) = x_2(1) = 1 + \int_0^1 z_2(t)\ dt,$$

то есть найти исходящую из заданной начальной точки траекторию включения с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени.

В данном случае $c(F,\psi) = -x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2} + |\psi_1| + |\psi_2|$, $\dfrac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, -\psi_1)'$. Положим $z_1 = (0,-2)'$, тогда $x_1 = (0, 1-2t)'$.

Была проведена 21 итерация согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{21} (см. рис. 3), при этом $J(x_{21}) = -1.712$. На рис. 3 сплошная линия есть параметрическая кривая $\{v_1(t) = z_1(t) + x_2(t), v_2(t) = z_2(t) - x_1(t),\ t \in [0,1]\}$. Пунктирная линия ограничивает допустимую область расположения этой кривой.

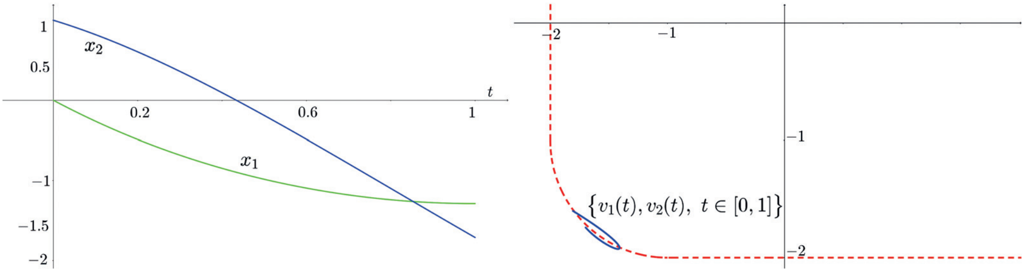


Рис. 3. Решение примера 3.

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид. Заметим, что эта задача управления имеет неклассический вид: размерность управлений больше размерности фазовых координат.

Нужно найти управление $u \in P_4[0,T]$, которое удовлетворяет ограничению

$$u_1^2(t) + u_3^2(t) \leqslant 1, \quad |u_2(t)| \leqslant 1, \quad |u_4(t)| \leqslant 1 \quad \forall t \in [0,1]$$

и переводит систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_3 + u_4$$

из точки $x(0)$ в точку с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени, то есть доставляет минимум функционалу

$$J(x) = x_2(1) = 1 + \int_0^1 z_2(t)\ dt.$$

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина. При этом оказалось $J(x^*) = -1.761$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в статье метода (относительная погрешность не превышает 3%).

Замечание 4. Как известно, метод наискорейшего спуска не дает высокую точность при достаточно большом значении штрафного параметра (и при не очень большом количестве итераций). Выбор в расчетах точности ε^* и штрафного параметра λ^* основан на балансе между проведением небольшого количества итераций и соблюдением сравнительно небольшой, но достаточной для приложений точности. Вычисления проводились символьно в пакете Maple 12.0. Представляют интерес дальнейшие исследования с целью повышения эффективности реализации предложенного в статье алгоритма, в том числе с использованием дискретизации и, возможно, других (более быстрых, чем метод наискорейшего спуска) методов минимизации в функциональном пространстве.

8. Заключение. Таким образом, в данной статье рассмотрена задача поиска оптимального в смысле интегрального функционала решения дифференциального включения с заданным начальным условием и с закрепленным правым концом. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала. Для него найден градиент Гато, выписаны необходимые условия минимума. На основании этих условий построен метод решения исходной задачи, базирующийся на методе наискорейшего спуска. Реализация данного алгоритма иллюстрируется на численных примерах.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам за ценные замечания и внимательное отношение к работе.

Литература

1. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014. 597 с.

2. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Birkhauser, Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.

3. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.

4. *Cernea A., Georgescu C.* Necessary optimality conditions for differential–difference inclusions with state constraints // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 344. P. 43–53.

5. *Mordukhovich B. Sh.* Discrete approximations and refined Euler—Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1995. Vol. 33, N 3. P. 887–915.

6. *Pappas G. S.* Optimal Solutions to Differential Inclusions in Presence of State Constraints // J. Optim. Theory Appl. 1984. Vol. 44, N 4. P. 657–679.

7. *Zhu Q. J.* Necessary Optimality Conditions for Nonconvex Differential Inclusions with Endpoint Constraints // Journal of Differential Equations. 1996. Vol. 124. P. 186–204.

8. *Арутюнов А. В., Асеев С. М., Благодатских В. И.* Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 1993. Т. 184, № 6. С. 3–32. Перевод: Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. Vol. 79, N 1. P. 117–139.

9. *Асеев С. М.* Метод гладких аппроксимаций в теории необходимых условий оптимальности для дифференциальных включений // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 3–26. Перевод: Izv. Math. 1997. Vol. 61, N 2. P. 235–258.

10. *Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N.* Exact Penalties and Differential Inclusions // Electron. J. Diff. Equ. 2015. Vol. 2015, N 309. P. 1–13.

11. *Никольский М. С.* Об аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса // Матем. заметки. 1987. Т. 41. Вып. 1. С. 71–76.

12. *Никольский М. С.* Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28, № 8. С. 1252–1254.

13. *Baier R., Gerdts M., Xausa I.* Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numer. Algebra Control Optim. 2013. Vol. 3. P. 519–548.

14. *Panasyuk A. I.* Equations of attainable set dynamics, Part 1: Integral funnel equations // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64. P. 349–366.

15. *Puri A., Borkar V., Varaiya P.* ε-Approximation of differential inclusions // Proc. of International Hybrid Systems Workshop. Hybrid Systems III. In Ser. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1066. Springer, 1995. P. 362–376.

16. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.

17. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

18. *Bonnans J. F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. New York: Springer Science+Business Media, 2000. 600 p.

19. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

20. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

21. *Penot J. P.* On the convergence of descent algorithms // Comput. Optim. Appl. 2002. Vol. 23. Iss. 3. P. 279–284.

22. *Иглин С. П.* Математические расчеты на базе MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 640 с.

Статья поступила в редакцию 22 августа 2017 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Фоминых Александр Владимирович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; alexfomster@mail.ru

A numerical method for finding the optimal solution of a differential inclusion

A. V. Fominyh

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Fominyh A. V. A numerical method for finding the optimal solution of a differential inclusion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 000–000. https://doi.org/

In the paper, we study a differential inclusion with a given continuous convex multivalued mapping. For a given finite time interval, it is required to construct a solution of the differential inclusion, that satisfies the given initial and the final conditions and minimizes the integral functional. With the help of support functions, the original problem is reduced to minimizing some functional in the space of partially continuous functions. In the case of continuous differentiability of the support function of a multivalued mapping with respect to the phase variables, this functional is Gateaux differentiable. In the paper, Gateaux gradient is found, necessary conditions for the minimum of the given functional are obtained. On the basis of these conditions, the method of the steepest descent is applied to the original problem. Numerical examples illustrate the constructed algorithm realization.

Keywords: differential inclusion, support function, steepest descent method.

References

1. Polovinkin E. S., *Multivalued analysis and differential inclusions* (Fizmatlit, Moscow, 2014, 597 p.) [in Russian].

2. Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-valued analysis* (Birkhauser, Boston, 1990, 461 p.).

3. Blagodatskih V. I., Filippov A. F., “Differential inclusions and optimal control”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **169**, 194–252 (1985) [in Russian].

4. Cernea A., Georgescu C., “Necessary optimality conditions for differential–difference inclusions with state constraints”, *J. Math. Anal. Appl.* **344**, 43–53 (2007).

5. Mordukhovich B. Sh., “Discrete approximations and refined Euler—Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions”, *SIAM J. Control Optim.* **33**(3), 887–915 (1995).

6. Pappas G. S., “Optimal Solutions to Differential Inclusions in Presence of State Constraints”, *J. Optim. Theory Appl.* **44**(4), 657–679 (1984).

7. Zhu Q. J., “Necessary Optimality Conditions for Nonconvex Differential Inclusions with Endpoint Constraints”, *Journal of Differential Equations* **124**, 186–204 (1996).

8. Arutyunov A. V., Aseev S. M., Blagodatskikh V. I., “Necessary conditions of the first order in the problem of optimal control of a differential inclusion with phase constraints”, *Mat. Sb.* **184**(6), 3–32 (1993) [in Russian]. English transl. in: *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **79**(1), 117–139 (1994).

9. Aseev S. M., “A method of smooth approximation in the theory of necessary optimality conditions for differential inclusions”, *Izvestiya RAN: Ser. Mat.* **61**(2), 3–26 (1997) [in Russian]. English transl. in: *Izv. Math.* **61**(2), 235–258 (1997).

10. Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N., “Exact Penalties and Differential Inclusions”, *Electron. J. Diff. Equ.* **2015**(309), 1–13 (2015).
11. Nikol’skiy M. S., “On approximation of the attainability domain of control process”, *Mat. Zametki* **41**(1), 71–76 (1987) [in Russian].
12. Nikol’skiy M. S., “On a method for approximation of attainable set for a differential inclusion”, *Journ. of Vych. Mat. Math. Phys.* **28**, 1252–1254 (1988) [in Russian].
13. Baier R., Gerdts M., Xausa I., “Approximation of reachable sets using optimal control algorithms”, *Numer. Algebra Control Optim.* **3**, 519–548 (2013).
14. Panasyuk A. I., “Equations of attainable set dynamics, Part 1: Integral funnel equations”, *J. Optim. Theory Appl.* **64**, 349–366 (1990).
15. Puri A., Borkar V., Varaiya P., “ε-Approximation of differential inclusions”, *Proc. of International Hybrid Systems Workshop. Hybrid Systems III* In Ser. *Lecture Notes in Computer Science* **1066**, 362–376 (Springer, 1995).
16. Blagodatskih V. I., *Introduction to optimal control* (Vysshaya shkola, Moscow, 2001, 239 p.) [in Russian].
17. Vasil’ev F. P., *Optimization methods* (Factorial Press, Moscow, 2002, 824 p.) [in Russian])
18. Bonnans J. F., Shapiro A., *Perturbation Analysis of Optimization Problems* (Springer Science+Business Media, New York, 2000, 600 p.).
19. Demyanov V. F., *Extremum conditions and variation calculus* (Vysshaya shkola, Moscow, 2005. 335 p.) [in Russian].
20. Kantorovich L. V., Akilov G. P., *Functional analysis* (Nauka, Moscow, 1977, 741 p.) [in Russian].
21. Penot J. P., “On the convergence of descent algorithms”, *Comput. Optim. Appl.* **23**, iss. 3, 279–284 (2002).
22. Iglin S. P., *Mathematical calculations on the basis of MATLAB* (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2005, 640 p.) [in Russian].

Author’s information:

Alexander V. Fominyh — alexfomster@mail.ru

ХРОНИКА

Памяти Геннадия Алексеевича Леонова

23 апреля 2018 г. на 72-м году жизни после тяжелой болезни скончался декан математико-механического факультета СПбГУ, заведующий кафедрой прикладной кибернетики СПбГУ, заведующий лабораторией информационно-управляющих систем Института проблем машиноведения РАН, член-корреспондент РАН, иностранный член Финской академии наук и литературы, доктор физико-математических наук, профессор Геннадий Алексеевич Леонов.

Геннадий Алексеевич Леонов закончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1969 году и был принят в аспирантуру.

В своих первых научных работах Г. А. Леонов развивал подходы В. А. Якубовича, В. А. Плисса и Горьковской научной школы А. А. Андронова. В 1971 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему «Глобальная устойчивость систем управления», а в 1983 году — докторскую диссертацию «Устойчивость в целом». С 1971 года Г. А. Леонов работал в ЛГУ ассистентом, доцентом, профессором. В 1986 году он получил звание профессора и был назначен на должность проректора ЛГУ. С 1988 года и до последних дней жизни Геннадий Алексеевич Леонов был деканом математико-механического факультета.

Г. А. Леонов — специалист в области теории управления, теории устойчивости, нелинейных колебаний и теории синхронизации электромеханических и электронных систем, автор более 470 научных работ, в том числе 22 монографий. Им создана всемирно известная научная школа, где разработаны новые математические методы и решены трудные математические задачи, важные для создания новых технологий в системах управления, электронных и информационных системах, аэрокосмической технике.

Под его руководством были разработаны новые методы анализа и синтеза дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и дискретных динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством, которые описывают математические модели систем фазовой синхронизации, используемых в телекоммуникациях, компьютерных архитектурах и системах глобальной навигации.

В 1991 году Г. А. Леонов предложил использовать функции Ляпунова для оценки размерности аттракторов. Это позволило доказать гипотезу Альпа Идена о максимуме локальной ляпуновской размерности и впервые получить аналитически точные формулы ляпуновской размерности аттракторов для ряда известных динамических систем.

В 2000 году Г. А. Леоновым решена проблема нестационарной стабилизации, которую поставил известный ученый Роджер Брокетт (Гарвардский университет, США) в книге «Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory» (1999 г.).

В 1987 году Г. А. Леоновым были впервые получены необходимые и достаточные условия существования гомоклинической траектории в знаменитой системе Лоренца, а в 2012 году сформулирован общий принцип: «принцип рыбака» (fishing principle) для исследования гомоклинических и гетероклинических траекторий, которые играют важную роль в сценариях перехода к хаосу. Этот принцип позволил впервые провести универсальное рассуждение, давшее возможность получить аналитическое доказательство существования таких траекторий для ряда известных динамических систем.

В 2010 году Г. А. Леоновым и его учеником Н. В. Кузнецовым было введено новое понятие в теории колебаний: «скрытые колебания» (hidden attractors). Ими были разработаны новые математические методы исследования таких колебаний, позволившие обнаружить скрытые колебания в различных системах автоматического регулирования, механических и физических моделях. Эти исследования привлекли внимание научного сообщества, и первые публикации научной школы Г. А. Леонова по этой тематике в 2016 году вошли в 1% самых высокоцитируемых статей библиометрической базы Web of Science и стали самыми цитируемыми статьями в известных журналах: Journal of Computer and Systems Sciences International (переводной версии журнала «Известия РАН. Теория и системы управления»); Physics Letters A; Physica D: Nonlinear Phenomena; International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. В 2016 году обзорная статья по тематике скрытых колебаний была опубликована в одном из самых престижных высокорейтинговых журналов — Physics Reports. Во многом благодаря интересу к этой тематике Г. А. Леонов и Н. В. Кузнецов были названы компанией Clarivate Analytics самыми высокоцитируемыми российскими учеными (Russian Highly Cited Researchers) в области математики в 2016 и 2017 годах.

Теоретические исследования Г. А. Леонова успешно использовались для решения важных прикладных задач. После крупнейшей техногенной катастрофы на Саяно-Шушенской ГЭС Г. А. Леонов с учениками исследовал причины аварии. В 2015 году была построена математическая динамическая модель, учитывающая совместную работу генератора, турбины и системы управления агрегата Саяно-Шушенской ГЭС, в которой было показано возникновение нежелательных опасных колебаний.

Последняя научная работа Г. А. Леонова была посвящена строгому анализу подавления флаттера и стабилизации в модели академика М. В. Келдыша*. В этой

*Слайды пленарного доклада «On the Suppression of Flutter in the Keldysh Model» (G. Leonov, N. Kuznetsov) на конференции «Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2018) http://www.math.spbu.ru/user/nk/PDF/2018-PR-plenary-Flutter-suppression-Keldysh-model.pdf работе для решения задачи стабилизации и получения критерия глобальной устойчивости были развиты методы частотного анализа систем управления с разрывными характеристиками.

Г. А. Леонов является ярким представителем Петербургской школы теории автоматического управления, становление которой связано с именами таких выдающихся ученых, как А. И. Лурье (1901–1980), В. А. Якубович (1926–2012), В. И. Зубов (1930–2000). В течение многих лет Г. А. Леонов был членом бюро Национального комитета по автоматическому управлению, и в 2011–2017 гг. представлял Российскую Федерацию в Совете Международной федерации по автоматическому управлению (IFAC).

Г. А. Леонов был членом Национального комитета по теоретической и прикладной механике, членом правления Петербургского математического общества. С 2016 года он возглавлял Федеральное учебно-методическое объединение в сфере высшего образования по компьютерным и информационным наукам.

Г. А. Леонов — лауреат университетской премии ЛГУ (1985 г.) за цикл научных работ по устойчивости нелинейных динамических систем, Государственной премии СССР (1986 г.) за математическую теорию фазовой синхронизации, премии Технического университета Дрездена (1989 г.) за работы по хаотической динамике, премии им. А. А. Андронова РАН (2012 г.) за цикл работ «Развитие методов синхронизации и анализа периодических и хаотических колебаний в коллективных системах автоматического фазового управления», премии им. П. Л. Чебышёва Правительства Санкт-Петербурга и Санкт-Петербургского научного центра РАН (2015 г.) за фундаментальный вклад в разработку понятий и методов анализа динамических систем. Заслуженный работник Высшей школы РФ (1999 г.), в 2005 г. получил благодарность Президента РФ за большой вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов и многолетнюю плодотворную деятельность, награжден Орденом Дружбы (2007 г.), в 2011 г. получил Медаль Университета Ювяскюля (University of Jyväskylä, Finland) за выдающиеся достижения в области математики, награжден Орденом Почета (2014 г.).

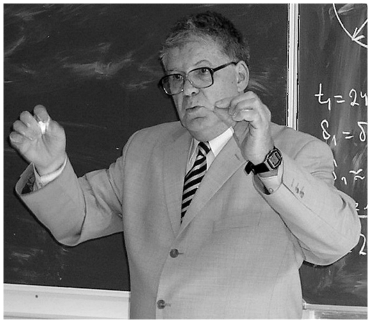
Г. А. Леонов всегда много и плодотворно работал, успешно сочетая научную работу с административной [1–9]. Как в своей научной работе Г. А. Леонов особое внимание уделял известным классическим задачам и их решению с помощью современных подходов, так и в административной работе он сочетал сохранение традиций с острым чувством необходимости перемен и развития. Возглавляемый им в течение 30 лет, включая трудные 1990-е годы, математико-механический факультет сохранил и продолжил славные традиции математической, механической и астрономической научных школ Петербургского университета. При нем на факультете было организовано отделение информатики, где созданы новые кафедры: системного программирования, теории параллельных алгоритмов, информационно-аналитических систем. Г. А. Леонов уделял большое внимание глубокой математической подготовке программистов-выпускников факультета, что позволило им занять лидирующие позиции во многих ИТ-компаниях и исследовательских центрах. В 2000 году студенты математико-механического факультета СПбГУ первыми из российских студентов стали чемпионами мира по программированию, а потом повторили этот результат в 2001, 2014 и 2016 годах, много раз входили в число призеров этих престижных соревнований. В декабре 2006 года Г. А. Леонов создал и возглавил новую кафедру прикладной кибернетики. Именно ее выпускники в 2013 году, по поручению ректора СПбГУ, первыми подготовили и защитили диссертации на степень Ph.D. СПбГУ под руководством Геннадия Алексеевича Леонова.

Сотрудники математико-механического факультета СПбГУ навсегда сохранят память о выдающемся ученом, доброжелательном и требовательном учителе, соратнике и друге Геннадии Алексеевиче Леонове.

1. Список научных работ Г. А. Леонова: на портале eLIBRARY https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=4556, на портале Google Scholar https://scholar.google.ru/citations?user=_zv2pFwAAAAJ
2. Научная школа Г. А. Леонова. Фильм цикла «Матрица науки» (подготовлен по заказу Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга в 2016 году): https://www.youtube.com/watch?v=X3bla8IYcvk
3. Заявление научных руководителей по случаю первой защиты Ph.D. SPbSU, Кузнецов Н. В., Леонов Г. А., Neittaanmäki P., 10 июля 2013, http://www.math.spbu.ru/user/nk/PDF/2013-First-PhD-SPbSU-Renat-Yuldashev-Supervisors.pdf
4. Г. А. Леонов. Ускоренное научно-техническое развитие в условиях санкций, Вестник Российской Академии Наук, 86(3), 2016, стр. 280.
5. Г. А. Леонов. О математическом образовании в России и Санкт-Петербурге. Прошлое, настоящее, будущее, Дифференциальные уравнения и процессы управления, №2, 2012, стр. 4–8 http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/2012_math_education_leonov.pdf
6. Выступление Г. А. Леонова с докладом «В. А. Якубович и Санкт-Петербургская математическая школа» на совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и Санкт-Петербургского семинара по теории управления 23 июня 2015 года: https://youtu.be/bXzXAxutiyM (по материалам статьи: S. Abramovich, N. Kuznetsov, G. Leonov, V. A. Yakubovich — mathematician, “father of the field”, and herald of intellectual democracy in science and society, IFAC-PapersOnLine, 48(11), 2015, 1–3 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315012318).
7. Г. А. Леонов, А. Н. Терехов, Б. А. Новиков, Е. А. Крук, В. М. Нестеров. Создание на математико-механическом факультете СПбГУ научно-образовательного ИТ-кластера на базе современной фундаментальной математики, Компьютерные инструменты в образовании, №2, 2017, 42–57.
8. Г. А. Леонов, М. Х. Немешев. О реализации стратегии Президента РФ в подготовке IT-специалистов мирового уровня, Дифференциальные уравнения и процессы управления, №1, 2018, стр. 126–141. http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/2012_math_education_leonov.pdf
9. Г. А. Леонов, Н. В, Кузнецов, Е. В. Кудряшова, К. Д. Александров. Введение в математику для школьников и студентов. Часть 1. Аксиомы и теоремы. СПб.: Изд-во Лема, 2018. 128 с.

А. К. Беляев, С. М. Бауэр, С. В. Востоков, В. А. Гаген-Торн, О. А. Иванов, Д. А. Индейцев, Н. В. Кузнецов, Е. В. Кустова, С. К. Матвеев, Е. Г. Михайлова, В. А. Морозов, Н. Ф. Морозов, В. Б. Невзоров, В. М. Нежинский, Я. Ю. Никитин, Б. А. Новиков, В. А. Плисс, С. Ю. Пилюгин, А. И. Разов, И. В. Романовский, В. М. Рябов, А. С. Савельев, А. Л. Смирнов, А. Н. Терехов, П. Е. Товстик, Н. Н. Уральцева, А. Л. Фрадков, К. В. Холшевников, Н. А. Широков

Памяти Вениамина Владимировича Витязева



15 июля 2018 года после продолжительной болезни скончался профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой астрономии Вениамин Владимирович Витязев.

Вениамин Владимирович родился в 1943 году в Ленинакане (Армянская ССР). Окончил математико-механический факультет (отделение астрономии) Ленинградского государственного университета в 1967 году и аспирантуру на кафедре астрофизики в 1970 году. С 1970 по 1980 год преподавал в Калмыцком государственном университете. С 1980 года работал в СПбГУ.

Вениамин Владимирович был директором НИАИ им. В. В. Соболева СПбГУ, членом Ученого Совета СПбГУ, заместителем председателя Ученого Совета УНЦ математики, механики и астрономии, членом диссертационного совета по астрономическим специальностям СПбГУ, членом редколлегии журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия».

Область его научных интересов охватывала и астрофизику, и астрометрию, что встречается нечасто. Тема его кандидатской диссертации — «О расширении планетарных туманностей», тогда как докторской — «Новые методы анализа звездных каталогов и неравномерных временных рядов». Им разработаны методы анализа астрометрических звездных каталогов, основанные на разложениях систематических разностей звездных координат в ряды по векторным сферическим функциям, благодаря которым в области звездной кинематики им были открыты новые эффекты, не учитываемые стандартными моделями. Так, ему удалось объяснить нерешенную ранее проблему фиктивного экваториального движения точки весеннего равноденствия в фундаментальных звездных каталогах. Благодаря его исследованиям, оказалось, что данное фиктивное движение точки весеннего равноденствия является следствием неравномерного вращения Земли. Кроме того, в результате данных исследований В. В. Витязеву удалось получить новые значения параметров Оорта и постоянной прецессии, высокая точность которых была впоследствии подтверждена длительными радиоинтерферометрическими наблюдениями. Предложенный В. В. Витязевым метод временного интерферометра, аналогичный методу апертурного синтеза в радиоастрономии, широко применяется для изучения неравномерности вращения Земли по наблюдательным данным, полученным из классических и новых астрометрических наблюдений с помощью радиоинтерферометрической техники.

В. В. Витязев читал курс общей астрометрии и разработанный им уникальный курс «Анализ временных рядов». Его наследие содержит свыше ста научных статей, учебных пособий и монографий. Замечательные лекции прослушали сотни студентов, под его руководством защищены десятки дипломных работ и диссертаций. Благодаря стараниям В. В. Витязева, как организатора и преподавателя, на кафедре астрономии удалось сохранить и модернизировать уникальную летнюю астрометрическую практику студентов. В настоящее время кафедра астрономии СПбГУ является, пожалуй, единственной в России, где продолжают полноценно преподавать и развивать методы определения координат пунктов по наблюдениям звезд.

Многие коллеги и ученики В. В. Витязева отмечают его беспримерную отзывчивость, высокую интеллигентность, исключительно добрый нрав, мягкий, но вместе с тем настойчивый характер, как преподавателя и руководителя. Он всячески старался поддерживать инициативу сотрудников, помогать словом и делом, ему всегда удавалось поддерживать доброжелательную рабочую атмосферу среди коллектива кафедры и института.

Вениамин Владимирович был выдающимся музыкантом-любителем. Он много раз выступал как пианист на астрономическом отделении, в Пулковской обсерватории. Выполнил многочисленные записи сложнейших произведений. Открыл для музыкальной общественности и для специалистов Петербургской консерватории В. Гершеля как композитора. Он организовал постоянную серию концертов на математико-механическом факультете СПбГУ, в которых принимали участие преподаватели и студенты. Эти концерты пользовались и пользуются до сих пор огромной популярностью у слушателей.

Последней работой в области культуры стала книга «Живопись в астрономии», которую он почти закончил, и мы надеемся, что она в скором времени будет опубликована. Книга получила высокую оценку у сотрудников Государственного Эрмитажа.

Самоотверженная работа В. В. Витязева отмечена государственными и общественными наградами, среди которых медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени (1999); благодарность Президента Российской Федерации (2005); нагрудный знак «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» за заслуги в области образования (2006); медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» I степени (2014). Решением Международного Астрономического Союза от 02.10.2003 года малой планете № 17356 присвоено имя Vityazev.

Е. В. Волков, В. А. Гаген-Торн, Т. Е. Дервиз,
В. М. Ларионов, С. Д. Петров, А. И. Разов, Н. А. Сотникова,
П. Е. Товстик, Д. А. Трофимов, К. В. Холшевников

О книге «Математический Петербург»

Историко-математическая библиография пополнилась новым изданием, не имеющим аналогов в отечественной литературе.

Книга «Математический Петербург» сочетает историко-научное содержание и форму популярного путеводителя. Она будет интересна школьникам, краеведам, историкам, математикам — как петербуржцам, так и тем, кто бывал или намерен побывать в Петербурге.

Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. Справочник-путеводитель. Редактор-составитель Г. И. Синкевич, научный редактор А. И. Назаров. Санкт-Петербург: Образовательные проекты. — 336 с.

132 статьи, написанные 57 авторами, создают панораму трехвекового развития математики в Санкт-Петербурге. Среди авторов — ведущие математики города, историки математики, сотрудники учебных и академических учреждений Санкт-Петербурга.

Книга состоит из 4 разделов. Первый из них, «Математика в истории Петербурга», содержит обширные статьи «Математика в Санкт-Петербурге в XVIII–XIX веках», «Математика XX века», «Основные научные направления во второй половине XX — начале XXI вв.». Последняя часть включает 21 параграф по ключевым направлениям исследований, в том числе перечень первых изданий наиболее значимых учебников и монографий.

Второй раздел, «Математика на карте Петербурга», состоит из 7 частей: «Математика в высших учебных заведениях», «Математика в академических институтах», «Пулковская обсерватория», «Архив и библиотеки», «Музеи», «Физико-математические школы», «Олимпиады».

Третий раздел, «Математика Петербурга в лицах», содержит 80 биографических статей — от Х. Гольдбаха, братьев Бернулли и Л. Эйлера, приехавших в город по приглашению только что созданной Петербургской Академии наук, до недавно ушедших от нас М. С. Бирмана, В. А. Якубовича, В. П. Хавина, Л. Д. Фаддеева.

Последний раздел, «Прогулки по математическому Петербургу», содержит две части: «Памятные математические места Санкт-Петербурга» (адреса, мемориальные доски и кладбища) и «Экскурсионные маршруты с картами».

Книга содержит более 250 иллюстраций, в том числе уникальные фотографии из архивов Санкт-Петербурга и личных архивов. Именной указатель включает более 1000 имён.

Рецензенты журнала «Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия» в 2018 г.

Рецензенты внешние

Абрамян А. А. (ИПМаш РАН), Алдошин Г. Т. (БГТУ «Военмех»), Андриевский Б. Р. (ИПМаш РАН), Апаков Ю. П. (Наманганский ИСИ, Узбекистан), Апушкинская Д. Е. (Universitat des Saarlandes, Deutchland), Боденко В. Л. (СПбГПУ), Бодунов Н. А. (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), Бобылев С. В. (ИПМаш РАН), Боровских Ю. В. (ПГУПС), Будаев В. Д. (РГПУ), Васильев Ф. П. (МГУ), Войтишек А. В. (НГУ), Воронина И. Е. (ВГУ), Долгополик М. В. (ИПМаш РАН), Егоров В. А. (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), Елизаров А. М. (КФУ), Жарковская Н. А. (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), Зайцев А. Ю. (ПОМИ), Зайцев В. Ф. (РГПУ), Иванов Б. Ф. (СПбГУПТиД), Иванова Т. В. (ИПА РАН), Индейцев Д. А. (ИПМаш РАН), Карабутов А. А. (МГУ), Кельзон А. А. (ГУМРФ), Кияева О. В. (ГАО РАН), Кузнецов В. И. (ФТИ им. А. Ф. Иоффе), Кузнецов М. М. (МГОУ), Кузнецов Э. Д. (УрФУ), Кулешов А. С. (МГУ), Коточигов А. М. (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), Крейнович В. Я. (U. of El Paso, USA), Лурье Б. Б. (ПОМИ), Макаренко И. Н. (Newcastle University, UK), Маркеев А. П. (ИПМ РАН), Медведев Ю. Д. (ИПА РАН), Мейрманов А. М. (БелГУ), Пашкевич В. В. (ГАО РАН), Половинкин Е. С. (МФТИ), Розовский Л. В. (СПбГХФА), Рябикова Т. В (СПбГАСУ), Смирнов Е. М. (СПбГПУ), Смирнова В. Б. (СПбГАСУ), Солев В. Н. (ПОМИ), Степанов А. В. (КГУ), Тимофеев О. Я. (КГНЦ), Утина Н. В. (СПбГАСУ), Филиппенко Г. В. (ИПМаш РАН), Хазанов В. Б. (СПбГМТУ), Чумаков Ю. С. (СПбГПУ)

Рецензенты СПбГУ

Архипова А. А., Беккер Б. М., Бибиков Ю. Н., Бородин А. Н., Виноградов О. Л., Востоков С. В., Гелиг А. Х., Граничин О. Н., Греков М. А., Грибкова Н. В., Даль Ю. М., Додонов Н. Ю., Жуков И. Б., Иванов О. А., Ильин Ю. А., Истомин В. А., Карпенко А. Г., Кривулин Н. К., Кузнецов Н. В., Кунова О. В., Кустова Е. В., Лифшиц М. А., Малоземов В. Н., Мальков В. М., Машарский С. М., Морозов В. А., Назаров А. И., Невзоров В. Б., Никитин Я. Ю., Осипов А. В., Осмоловский В. Г., Петров Ю. В., Подкорытов А. Н., Полякова Л. Н., Романовский И. В., Рыбакина О. Г., Рыдалевская М. А., Рябинин А. Н., Рябов В. М., Семенов Б. Н., Смирнов А. Л., Соколов Л. Л., Степанов А. В., Титов В. Б., Тихомиров С. Б., Тихонов А. А., Товстик П. Е., Товстик Т. М., Тулупьев А. Л., Филиппов С. Б., Флоринский А. А., Фролов А. Н., Хованов Н. В., Холшевников К. В., Чурин Ю. В., Шепелявый А. И., Широков Н. А., Шмыров А. С., Юшков М. П.

CONTENTS

Vestnik of Saint Petersburg University.
Mathematics. Mechanics. Astronomy. Volume 5 (63). Issue 4. 2018