Н. В. Грибкова, Об аналогах неравенства Берри–Эссеена для урезанных линейных комбинаций порядковых статистик, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, том 38, выпуск 1, 176–184

4. *Виноградов О. П.* Двухфазовая система с идентичным обслуживанием. — Матем. заметки, 1983, т. 33, в. 1, с. 141–146.
5. *Виноградов О. П.* Двухфазовая система массового обслуживания с идентичным обслуживанием в условиях большой загрузки. — Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернет., 1983, № 6, с. 52–58.
6. *Виноградов О. П.* Многофазовая система с идентичным обслуживанием. — Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернет., 1985, № 6, с. 29–32.
7. *Виноградов О. П.* Асимптотическое распределение времени пребывания в двухфазовой системе массового обслуживания. — В сб.: Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1984, с. 152–155.
8. *Виноградов О. П.* О времени пребывания в многофазной системе с идентичным обслуживанием. — В сб.: IV Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Т 1. Вильнюс. ИМК ЛитССР, 1985., с. 133–134.
9. *Виноградов О. П.* Многофазовая система с большим числом приборов и идентичным обслуживанием. — В сб.: Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 42–45.
10. *Виноградов О. П.* О времени пребывания в многофазной системе с идентичным обслуживанием. — В сб.: Вероятностные задачи дискретной математики. М.: МИЭМ, 1988, с. 38–44.
11. *Дюге Д.* Теоретическая и прикладная статистика. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
19.XII.1991

ГРИБКОВА Н. В.

ОБ АНАЛОГАХ НЕРАВЕНСТВА БЕРРИ–ЭССЕЕНА ДЛЯ УРЕЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины (с.в.) с общей функцией распределения (ф.р.) F и $X_{n,1} \leqslant \cdots \leqslant X_{n,n}$ — соответствующие этим с.в. порядковые статистики. Рассмотрим линейную комбинацию порядковых статистик

$$L = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} X_{n,i}, \tag{1}$$

где $c_{n,i}$ — вещественные числа. Интерес к изучению асимптотических свойств L-статистик (статистик вида (1)), проявляемый многими авторами (библиографию и обзор работ по этой теме можно найти в книге Хелмерса [1]), обусловлен их применением в теории оценивания.

В этой статье будет предполагаться выполненным условие

$$\begin{gathered} c_{n,i} = 0 \quad \textit{для } i < k \textit{ и } i > m, \quad \textit{где } k, m \textit{ — целые}, \quad 1 \leqslant k < m \leqslant n, \\ \textit{причем} \quad \liminf_{n\to\infty} k/n = \alpha, \quad \limsup_{n\to\infty} m/n = \beta, \quad 0 < \alpha < \beta < 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Скорость сходимости распределений с.в. вида (1) к нормальному закону в случае усечения линейной комбинации на уровне центральных порядковых статистик изучалась Бьёрвом в [2], который впервые получил для L-статистик оптимальную по порядку оценку вида

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \leqslant C n^{-1/2}, \tag{3}$$

где $F_n(x)$ — ф.р. нормированной с.в. L, $\Phi(x)$ — стандартная нормальная ф.р., C — не зависящая от n постоянная. Неравенство (3) было доказано в [2] при следующих предположениях:

($\mathcal{F}$ 1) *вторая производная $[F^{-1}(u)]''$ функции, обратной к ф.р. F, удовлетворяет условию Липшица порядка 1 в открытом интервале, содержащем отрезок $[\alpha, \beta]$;*

($\mathcal{C}$ 1) *величина $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|c_{n,i}|$ ограничена сверху равномерно по n;*

($\mathcal{D}$ 1) *величина $S_n/\sqrt{n}$, определенная равенствами*

$$S_n^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{n,i}^2,\qquad \alpha_{n,i}=(n-i+1)^{-1}\sum_{j=i}^{n}c_{n,j}H'\left(\sum_{k=n-i+1}^{n}k^{-1}\right),$$

где H' — производная функции $H=F^{-1}(1-\exp(-x))$ $(x\geqslant 0)$, и играющая роль дисперсии при нормировке L, отделена от нуля.

В [3] оценка вида (3) для урезанной линейной комбинации с $k=n\alpha+o(n)$, $m=n\beta+o(n)$, $n\to\infty$, была доказана при следующих условиях:

($\mathcal{F}$ 2) *функция $F'(u)=\inf\{x\colon F(x)\geqslant u\}$, $0<u<1$, удовлетворяет условию Липшица порядка 1 в фиксированных окрестностях α и β;*

($\mathcal{C}$ 2) *величины*

$$a_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|c_{n,i}|,\qquad b_n=n\max_{k\leqslant i\leqslant m-1}|c_{n,i+1}-c_{n,i}|$$

ограничены сверху равномерно по n;

($\mathcal{D}$ 2) *постоянная $\overline{\sigma}$ (определенная ниже, в п. 3), нормирующая L, отделена от нуля.*

В настоящей работе предлагается еще один вариант условий, достаточных для оценки вида (3):

($\mathcal{F}$ 3) *функция $F^{-1}(u)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 с множителем l в открытом интервале I, содержащем отрезок $[\alpha, \beta]$;*

($\mathcal{C}$ 3) *величины*

$$a_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|c_{n,i}|,\qquad v_n=\sum_{i=1}^{n-1}|c_{n,i+1}-c_{n,i}|$$

ограничены сверху равномерно по n;

($\mathcal{D}$ 3) = ($\mathcal{D}$ 2).

Кроме того, в п. 5 исследуются потенциальные возможности применяемого в работе метода.

2. Основной результат этой статьи (как и статьи [3]) доказывается с помощью теоремы ван Цвета о симметричных статистиках. Пусть $T=\tau(X_1,\ldots,X_n)$, где $\tau\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ — симметричная функция n переменных, причем $\mathbf{E}T=0$ и $\mathbf{E}T^2=1$.

Теорема А ([4]). *Предположим, что существуют такие положительные постоянные A и B, что*

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}(T\,|\,X_1)\right|^3\leqslant A\,n^{-3/2}, \tag{4}$$

$$1+\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}(T\,|\,X_1,\ldots,X_{n-2})\right\}^2 - 2\,\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}(T\,|\,X_1,\ldots,X_{n-1})\right\}^2\leqslant B\,n^{-3}. \tag{5}$$

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\mathbf{P}(T\leqslant x)-\Phi(x)\Big|\leqslant C(A+B)\,n^{-1/2},$$

где C — абсолютная положительная постоянная.

Раздел 5 этой работы посвящен исследованию метода получения оценок, связанного с применением теоремы А. Заметим, что условие $(\mathcal{C}\,3)$ слабее, чем условие $(\mathcal{C}\,2)$, хотя условие $(\mathcal{F}\,3)$ сильнее, чем соответствующее условие $(\mathcal{F}\,2)$. Возникает вопрос: нельзя ли ослабить условие на коэффициенты до $(\mathcal{C}\,1)$ (т.е. не предполагать никакой гладкости весов $c_{n,i}$) за счет дальнейшего усиления условий гладкости исходной ф.р. (возможно до $(\mathcal{F}\,1)$), оставаясь в рамках предложенного в [4] метода? Это было бы интересно, поскольку результат Бьёрва [2] имел довольно сложное доказательство. Оказалось, что результат Бьёрва не покрывается теоремой А. В п. 5 будет доказано, что получение оценки оптимального порядка вида (3) тесно связано с равномерной по n ограниченностью сверху величины v_n (условием $(\mathcal{C}\,3)$) и, что дальнейшее усиление (по сравнению с $(\mathcal{F}\,3)$) условий гладкости исходной ф.р. не приведет к новым результатам. Значит, метод из [4], применяемый к L-статистикам, нечувствителен к гладкости функции $F^{-1}(u)$ порядка выше первого.

При доказательстве результатов потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $k=n\alpha+o(n)$, $n\to\infty$, где $k\in N$, $0<\alpha<1$. Тогда, если $F(\Delta)<\alpha$, то $\mathbf{P}\{X_{n,k}<\Delta\}\leqslant e^{-\delta n}$, где $\delta>0$ — не зависящая от n постоянная.*

Доказательство этой леммы, являющейся следствием неравенства Бернштейна, имеется в [2] (см. лемму 1.1 [2, с. 357] и лемму из [3]).

3. Положим

$$\overline{c}_n=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|c_{n,i}|,\qquad v_n=\sum_{i=1}^{n-1}|c_{n,i+1}-c_{n,i}|$$

и будем предполагать, что выполнены условия (2) и $(\mathcal{F}\,3)$. Для того, чтобы нормировать с.в. L без использования моментных предположений, возьмем произвольное $\varepsilon>0$ так, чтобы $[\alpha-\varepsilon,\,\beta+\varepsilon]\subset I$ (см. $(\mathcal{F}\,3)$) и введем усеченные с.в. $\overline{X}_i=\min(\max[F^{-1}(\alpha-\varepsilon),\,X_i],\,F^{-1}(\beta+\varepsilon))$, $i=1,\,\dots,\,n$. Пусть $\overline{X}_{n,1}\leqslant\dots\leqslant\overline{X}_{n,n}$ — порядковые статистики, соответствующие выборке $\overline{X}_1,\,\dots,\,\overline{X}_n$; рассмотрим линейную комбинацию

$$\overline{L}=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}c_{n,i}\overline{X}_{n,i},$$

где $c_{n,i}$ — те же, что и у L. Предположим, что $\overline{\sigma}=(\mathbf{E}\,\overline{L}^2-\mathbf{E}^2\overline{L})^{1/2}>0$. Введем нормированные с.в. $L^*=(L-\mathbf{E}\,\overline{L})/\overline{\sigma}$, $\overline{L}^*=(\overline{L}-\mathbf{E}\,\overline{L})/\overline{\sigma}$. Положим

$$\Delta_n=\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\mathbf{P}(L^*\leqslant x)-\Phi(x)\Big|.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2) *и* $(\mathcal{F}\,3)$, *то при всех* n

$$\Delta_n\leqslant\exp(-\delta n)+C\Big\{(l\,\overline{c}_n/\overline{\sigma})^3+(l\,v_n/\overline{\sigma})^2\Big\}n^{-1/2},$$

где $C>0$ — абсолютная, $\delta>0$ — не зависящая от n постоянная.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (2) *и* $(\mathcal{F}\,3)$ *и* $\overline{c}_n+v_n=O(\overline{\sigma})$ *при* $n\to\infty$, *то* $\Delta_n=O(n^{-1/2})$ *при* $n\to\infty$.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (2), $(\mathcal{F}3)$, $(\mathcal{C}3)$ *и* $(\mathcal{D}\,3)$, *то* $\Delta_n=O(n^{-1/2})$, $n\to\infty$.

4. Доказательство теоремы 1. Вначале заметим, что в силу условий (2) и определения с.в. $\overline{X}_{n,i}$ (см. п. 3) имеют место следующие включения:

$$\{L \leqslant x\} \subset \{\overline{L} \leqslant x\} \cup \left\{X_{n,k} < F^{-1}(\alpha-\varepsilon)\right\} \cup \left\{X_{n,m} > F^{-1}(\beta+\varepsilon)\right\},$$
$$\{\overline{L} \leqslant x\} \subset \{L \leqslant x\} \cup \left\{X_{n,k} < F^{-1}(\alpha-\varepsilon)\right\} \cup \left\{X_{n,m} > F^{-1}(\beta+\varepsilon)\right\},$$

поэтому

$$\left|\mathbf{P}\{L \leqslant x\} - \mathbf{P}\{\overline{L} \leqslant x\}\right| \leqslant \mathbf{P}\left\{X_{n,k} < F^{-1}(\alpha-\varepsilon)\right\} + \mathbf{P}\left\{X_{n,m} > F^{-1}(\beta+\varepsilon)\right\} \tag{6}$$

при всех $x \in \mathbf{R}$. (Аналогичные по идее рассуждения использовались при доказательстве обобщений неравенства Эссеена [5, с. 160].) Учитывая определение Δ_n, лемму (см. п. 2) и неравенство (6), заключаем, что существует такая не зависящая от n постоянная $\delta > 0$, что

$$\Delta_n \leqslant \exp(-\delta n) + \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\mathbf{P}(\overline{L}^* \leqslant x) - \Phi(x)\right|. \tag{7}$$

Проверим выполнение условий (4) и (5) теоремы А для с.в. $\overline{L}^*$ — нормированной симметричной функции независимых одинаково распределенных с.в. $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$. Положим $\overline{X}_{n,0} = F^{-1}(\alpha-\varepsilon)$, $\overline{X}_{n,n+1} = F^{-1}(\beta+\varepsilon)$, тогда при всех $i = 1, \ldots, n$ имеет место равенство

$$\overline{X}_{n,i} = \min(\overline{X}_{n-1,i}, \overline{X}_n) - \min(\overline{X}_{n-1,i-1}, \overline{X}_n) + \overline{X}_{n-i,i-1},$$

где $\overline{X}_{n-1,i-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ — порядковые статистики, соответствующие выборке $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{n-1}$ (см. [6, с. 679]). Для проверки условия (4) заметим, что поскольку распределение $\overline{X}_{n-1,i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, не зависит от $\overline{X}_n$,

$$\begin{aligned} &\overline{\sigma}^3\, \mathbf{E}\left|\mathbf{E}(\overline{L}^* \mid \overline{X}_1)\right|^3 \\ &= n^{-3/2}\, \mathbf{E}\left|\mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^n c_{n,i}\left[\min(\overline{X}_{n-1,i}, \overline{X}_n) - \min(\overline{X}_{n-1,i-1}, \overline{X}_n)\right] \middle| \overline{X}_n\right\}\right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}\sum_{i=1}^n c_{n,i}\left[\min(\overline{X}_{n-1,i}, \overline{X}_n) - \min(\overline{X}_{n-1,i-1}, \overline{X}_n)\right]\right|^3 \\ &\leqslant 8\, n^{-3/2}\left[\mathbf{E}\sum_{i=1}^n |c_{n,i}|(\overline{X}_{n-1,i}, \overline{X}_{n-1,i-1})\right]^3. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем функцию $G(u) = \inf\{x\colon \overline{F}(x) \geqslant u\}$, обратную к ф.р. $\overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\overline{X}_1 \leqslant x\}$. Хорошо известно (см., например, [7]), что совместное распределение порядковых статистик $\overline{X}_{n-1,i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, совпадает с распределением с.в. $G(U_{n-1,i})$, $i = 1, \ldots, n-1$, где $U_{n-1,i}$ — порядковые статистики выборки объема $n-1$ из равномерного на (0, 1) распределения, в силу чего правая часть (8) оказывается равной

$$8n^{-3/2}\left[\mathbf{E}\sum_{i=1}^n |c_{n,i}|\Big(G(U_{n-1,i}) - G(U_{n-1,i-1})\Big)\right]^3,$$

где $U_{n-1,0}=0$, $U_{n-1,n}=1$. Последняя величина по условию Липшица не превосходит

$$8\,n^{-3/2}l^3\left[\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n}|c_{n,i}|(U_{n-1,i}-U_{n-1,i-1})\right]^3$$
$$=8\,n^{-3/2}l^3\left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|c_{n,i}|\right]^3=8\,l^3\bar{c}_n^3n^{-3/2}.$$

Значит, условие (4) теоремы A выполняется с постоянной $A=(2l\bar{c}_n/\overline{\sigma})^3$. Теперь проверим выполнение условия (5). Пусть R_{n-1} и R_n — ранги $\overline{X}_{n-1}$ и $\overline{X}_n$ в выборке $\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n$ соответственно. Положим $k_1=\min(R_{n-1},R_n)$, $k_2=\max(R_{n-1},R_n)$. Введем, как в [4], с.в.

$$Z=\overline{L}-\mathbf{E}(\overline{L}\,|\,\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{n-1})-\mathbf{E}(\overline{L}\,|\,\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{n-2},\overline{X}_n)$$
$$+\,\mathbf{E}(\overline{L}\,|\,\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{n-2}).$$

Поскольку

$$\mathbf{E}\,Z^2/\overline{\sigma}^2=1+\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}(\overline{L}^*\,|\,\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{n-2})\right\}^2-2\,\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}(\overline{L}^*\,|\,\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{n-1})\right\}^2,$$

остается оценить $\mathbf{E}\,Z^2$. Введем функции

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\overline{F}(y)\right)^2dy,\qquad Q(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(1-\overline{F}(y)\right)^2dy,$$
$$M(x)=\int_{-\infty}^{x}\overline{F}(y)\left(1-\overline{F}(y)\right)dy.$$

Ясно, что $\mathbf{E}\,|\overline{L}|<\infty$, поэтому

$$n^{1/2}Z=-\sum_{i=1}^{k_1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})\left(P(\overline{X}_{n,i})-P(\overline{X}_{n,i-1})\right)$$
$$+\sum_{i=k_1}^{k_2-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})\left(M(\overline{X}_{n,i+1})-M(\overline{X}_{n,i})\right)$$
$$-\sum_{i=k_2}^{n}(c_{n,i}-c_{n,i-1})\left(Q(\overline{X}_{n,i+1})-Q(\overline{X}_{n,i})\right)\qquad(9)$$

(формула (9) вытекает из формулы (4.21) [4, с. 437], подробный вывод этих формул имеется в [8]). Заметим, что разность $(c_{n,k_1+1}-c_{n,k_1})$ встречается в правой части (9) дважды, один раз с неотрицательным множителем и один раз с неположительным, поэтому можно отбросить одно из таких слагаемых, не уменьшив абсолютную величину правой части (9). То же относится и к разности $(c_{n,k_2}-c_{n,k_2-1})$. Используя теперь обратное преобразование $G(u)$, условие Липшица и известное представление

$$U_{n,i}\stackrel{d}{=}(\xi_1+\cdots+\xi_i)/(\xi_1+\cdots+\xi_{n+1}),\qquad i=1,\ldots,n,$$

где ξ_i ($i=1,\ldots,n+1$) — независимые с.в., имеющие стандартное экспоненциальное распределение (см., например, [9, с. 94]), приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
n\,\mathbf{E}\,Z^2 &\leqslant l^2\,\mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}|c_{n,i+1}-c_{n,i}|\,\xi_i/(\xi_1+\cdots+\xi_{n+1})\right\}^2 \\
&\leqslant l^2\max\left\{\mathbf{E}\left(\xi_1/(\xi_1+\cdots+\xi_{n+1})\right)^2,\ \mathbf{E}\left(\xi_1\xi_2/(\xi_1+\cdots+\xi_{n+1})^2\right)\right\} \\
&\quad\times\left(\sum_{i=1}^{n-1}|c_{n,i+1}-c_{n,i}|\right)^2 \\
&\leqslant l^2\,\mathbf{E}\,U_{n,1}^2 v_n^2 = 2l^2v_n^2/(n+1)(n+2) < 2l^2v_n^2n^{-2}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, условие (5) оказывается выполненным с $B = 2(lv_n/\overline{\sigma})^2$. Утверждение теоремы следует теперь из теоремы А.

5. Пусть выполняется условие ($\mathcal{F}\,1$). Построим пример линейной комбинации порядковых статистик, в котором выполнены условия ($\mathcal{C}\,1$) и ($\mathcal{D}\,1$) (см. п. 1), а величина v_n имеет порядок n^t, $0 < t < 1/4$, при $n \to \infty$. Мы докажем, что $\mathbf{E}\,Z^2/\overline{\sigma}^2 \geqslant Kv_nn^{-3}$ при достаточно больших n, где $K > 0$ — не зависящая от n постоянная, а, так как $\mathbf{E}\,Z^2/\overline{\sigma}^2$ совпадает с левой частью (5) для $T = \overline{L}^*$, то оценка порядка $n^{-1/2}$ скорости сходимости распределения с.в. L^* к нормальному закону, в действительности имеющая место по теореме из [2], не может быть получена непосредственным применением результатов [4] (которые позволяют получить только оценку порядка $n^{-1/2+t}$).

Предположим, что условие ($\mathcal{C}\,1$) выполняется. Покажем вначалe, что $\overline{\sigma} = O(\overline{c}_n) = O(1)$ при $n \to \infty$. Очевидно, что $\mathbf{E}\,U_{n,i} = i/(n+1) \subset (\alpha-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$ для $k \leqslant i \leqslant m$ при достаточно больших n. Пусть $\widehat{M}$ — наибольшее значение производной G' на $[\alpha-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon]$, где $G(u) = \inf\{x\colon \overline{F}(x) \geqslant u\}$; (будем пользоваться обозначениями пп. 1–4). Тогда

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}^2 &= n^{-1}\,\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}c_{n,i}\left(\overline{X}_{n,i}-\mathbf{E}\,\overline{X}_{n,i}\right)\right)^2 \\
&= n^{-1}\,\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}c_{n,i}\left(G(U_{n,i})-\mathbf{E}\,G(U_{n,i})\right)\right)^2 \\
&\leqslant 4\widehat{M}^2n^{-1}\,\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}|c_{n,i}|\left|U_{n,i}-\frac{i}{n+1}\right|\right)^2 \\
&\leqslant 4\widehat{M}^2n^{-1}\max_{k\leqslant i\leqslant m}\mathbf{E}\left(U_{n,i}-\frac{i}{n+1}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}|c_{n,i}|\right)^2 = O(\overline{c}_n^2)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

при $n \to \infty$. Теперь оценим $\mathbf{E}\,Z^2$ снизу:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\,Z^2 &\geqslant \mathbf{E}\{Z^2\,|\,k_1 < k-1,\ k_2 > m+1\}\ \mathbf{P}\,\{k_1 < k-1,\ k_2 > m+1\} \\
&= \mathbf{E}\{Z^2\,|\,k_1 < k-1,\ k_2 > m+1\}\,2\,(k-2),\ (n-m-1)/n^2.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Из (11), формулы (9) и условия (2) вытекает, что

$$
\mathbf{E}\,Z^2 \geqslant 2\alpha(1-\beta)\,n^{-1}\,\mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})\left(M(\overline{X}_{n,i+1})-M(\overline{X}_{n,i})\right)\right\}^2 \tag{12}
$$

при достаточно больших n. По лемме (см. п. 2) вероятность того, что $U_{n,k}$ и $U_{n,m}$ не принадлежат $[\alpha-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon]$, экспоненциально мала по n, и все дальнейшие вычисления проводятся с точностью до экспоненциально малого слагаемого. Если $V(u)=M(G(u))$, $0<u<1$, то правая часть (12) примет вид

$$\begin{aligned} &2\alpha(1-\beta)n^{-1}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})\left[V(U_{n,i+1})-V(U_{n,i})\right]\right\}^2 \\ &\quad=2\alpha(1-\beta)\,n^{-1}\,\mathrm{E}\,\{\mathcal{L}_n+\mathcal{Q}_n\}^2 \\ &\quad=2\alpha(1-\beta)\,n^{-1}\Big\{\mathrm{E}\,\mathcal{L}_n^2+2\,\mathrm{E}\,(\mathcal{L}_n\mathcal{Q}_n)+\mathrm{E}\,\mathcal{Q}_n^2\Big\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n&=\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})\,V'\left(\frac{i}{n+1}\right)(U_{n,i+1}-U_{n,i}), \\ \mathcal{Q}_n&=\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i}) \\ &\times\left[V''\left(\frac{i}{n+1}+\theta_{i+1}\left(U_{n,i+1}-\frac{i}{n+1}\right)\right)\left(U_{n,i+1}-\frac{i}{n+1}\right)^2\right. \\ &\left.-V''\left(\frac{i}{n+1}+\theta_i\left(U_{n,i}-\frac{i}{n+1}\right)\right)\left(U_{n,i}-\frac{i}{n+1}\right)^2\right],\qquad |\theta_i|\leqslant 1. \end{aligned}$$

Согласно условию Липшица и известным оценкам для моментов равномерных порядковых статистик

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,\mathcal{Q}_n^2=O\Bigg(&\mathrm{E}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i}) \\ &\times\left[\left[\theta_{i+1}\left(U_{n,i+1}-\frac{i}{n+1}\right)-\theta_i\left(U_{n,i}-\frac{i}{n+1}\right)\right]\left(U_{n,i+1}-\frac{i}{n+1}\right)^2\right. \\ &+V''\left(\frac{i}{n+1}+\theta_i\left(U_{n,i}-\frac{i}{n+1}\right)\right)\left(U_{n,i+1}-U_{n,i}\right) \\ &\left.\times\left(U_{n,i+1}+U_{n,i}-\frac{2i}{n+1}\right)\right]\Bigg\}^2\Bigg)=O(v_n^2/n^3), \end{aligned}$$

значит, величиной $\mathrm{E}\,\mathcal{Q}_n^2$ можно пренебречь; далее,

$$\mathrm{E}\,(\mathcal{L}_n\mathcal{Q}_n)\leqslant(\mathrm{E}\,\mathcal{L}_n^2\,\mathrm{E}\,\mathcal{Q}_n^2)^{1/2}=O(n^{-5/2}v_n^2),\qquad n\to\infty.$$

Объединяя (12), (13) и последние оценки, приходим к неравенству

$$\mathrm{E}\,Z^2\geqslant 2\alpha(1-\beta)\,n^{-1}\,\mathrm{E}\,\mathcal{L}_n^2+O(n^{-7/2}v_n^2), \tag{14}$$

и основной вклад в $\mathrm{E}\,Z^2$ дает величина

$$n^{-1}\,\mathrm{E}\,\mathcal{L}_n^2=n^{-1}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})\,V'\left(\frac{i}{n+1}\right)(U_{n,i+1}-U_{n,i})\right\}^2$$

$$= 2\left[n(n+1)(n+2)\right]^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}(c_{n,i+1}-c_{n,i})(c_{n,j+1}-c_{n,j})\right.$$

$$\left.\times V'\left(\frac{i}{n+1}\right)V'\left(\frac{j}{n+1}\right)\right\}. \qquad (15)$$

Сумма, стоящая в фигурных скобках в правой части (15), равна

$$\sum_{i=1}^{n-1}(c_{n,i+1}-c_{n,i})V'\left(\frac{i}{n+1}\right)\Sigma_i, \qquad (16)$$

где

$$\Sigma_i = \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}\left(V'\left(\frac{j-1}{n+1}\right)-V'\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)+c_{n,i+1}V'\left(\frac{i}{n+1}\right).$$

При достаточно больших n имеем $c_{n,1} = c_{n,n} = 0$ и в результате преобразования Абеля находим, что величина (16) равна

$$\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\left[V''\left(\frac{i-1}{n+1}+\frac{\theta_i}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\Sigma_{i-1}+V'\left(\frac{i}{n+1}\right)\left(\Sigma_{i-1}-\Sigma_i\right)\right] = S_1 + S_2,$$

где $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}V''\left(\frac{i-1}{n+1}+\frac{\theta_i}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\Sigma_{i-1},$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}V'\left(\frac{i}{n+1}\right)(\Sigma_{i-1}-\Sigma_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}(c_{n,i}-c_{n,i+1})\left(V'\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2. \qquad (17)$$

Теперь построим пример. Предположим, что $V'(u) \geqslant \gamma > 0$ при всех $u \in [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon]$. Пусть $c_{n,i} = c_0 > 0$ для всех $i \in (\{k, k+1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\})$, где $s \asymp n^t$ при $n \to \infty$ для некоторого $0 < t < 1/4$, причем $i_j - i_{j-1} > 1$, $j = 2, \ldots, s$ и пусть $c_{n,i} = 0$ для $i = i_j$, $j = 1, \ldots, s$. Условие $(\mathcal{F}\,1)$ выполнено по предположению. Легко видеть, что условия $(\mathcal{C}\,1)$ и $(\mathcal{D}\,1)$ в этом примере также выполняются. Значит, оценка скорости сходимости к нормальному закону порядка $n^{-1/2}$ вида (3) имеет место по теореме из [2]. С другой стороны, заметим, что $v_n \asymp n^t$, $v_n^2 = o(n^{1/2})$ и $n^{-7/2}v_n^2 = o(n^{-3})$ при $n \to \infty$. В силу определения величин S_1, Σ_i и условий $(\mathcal{C}\,1)$ и $(\mathcal{F}\,1)$ имеем

$$2|S_1|\Big/\Big\{(n+1)(n+2)\Big\} = O(n^{-2}) \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а из (17) следует, что $2S_2/\{(n+1)(n+2)\} \geqslant \gamma c_0 v_n/\{(n+1)(n+2)\} \asymp n^{t-2}$ при $n \to \infty$. Соотношения (10), (14)–(17) вместе с последними оценками означают, что существует такая не зависящая от n постоянная $K > 0$, что $\mathbf{E}\,Z^2/\overline{\sigma}^2 \geqslant Kn^{t-3}$. Таким образом, наилучший порядок оценки, который может быть достигнут с помощью теоремы A в нашем примере — это $n^{-1/2+t}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helmers R.* Edgeworth expansions for linear combinations of order statistics. Amsterdam: Math. Centre Tracts, 1982, 137 p.
2. *Bjerve S.* Error bounds for linear combinations of order statistics. — Ann. Statist., 1977, v. 5, № 2, p. 357–369.
3. *Грибкова Н. В.* Об оценке скорости сходимости к нормальному закону усеченных линейных комбинаций порядковых статистик. — Матем. заметки, 1987, т. 42, в. 5, с. 739–746.
4. *Van Zwet W. R.* A Berry–Esseen bound for symmetric statistics. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, B. 66, H. 3, S. 425–440.
5. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
6. *Stigler S. M.* Linear functions of order statistics with smooth weight functions. — Ann. Statist., 1974, v. 2, № 4, p. 676–693.
7. *Shorack G. R.* Functions of order statistics. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 412–427.
8. *Грибкова Н. В.* Оценки в центральной предельной теореме для линейных функций порядковых статистик. Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1989.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 738 с.

Поступила в редакцию
10.V.1990

 КОРШУНОВ Д. А.

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В заметке изучаются явления, названные переходными, возникающие при изучении стационарных вещественнозначных эргодических цепей Маркова, близких в известном смысле к неэргодическим и имеющим траектории, уходящие на бесконечность. При таком подходе удается построить приближения для стационарного распределения цепей.

Пусть $\{X_n^{(\varepsilon)}\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность (по ε) однородных вещественнозначных цепей Маркова (по n) с переходной функцией $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, B)$, $x \in \mathbf{R}$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, где $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathbf{R}$. Основным объектом изучения в заметке является инвариантная мера $\pi^{(\varepsilon)}$, соответствующая цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, т.е. мера, удовлетворяющая уравнению

$$\pi^{(\varepsilon)}(B) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, B)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx), \qquad \pi^{(\varepsilon)}(\mathbf{R}) = 1. \tag{1}$$

Если цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon > 0$ являются эргодическими, то речь будет идти, стало быть, об асимптотическом поведении стационарного распределения цепей $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Везде ниже предполагается, что уравнение (1) при $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение. Это имеет место, если выполнены условия эргодичности цепей $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, включающие в себя наличие "среднего сноса" цепи в сторону некоторого компакта (см. теорему А) и условие "перемешивания" типа Дуба–Дёблина (см. (2)). В этом случае имеют место сходимость по вариации распределения $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(x, n, \cdot)$ к $\pi^{(\varepsilon)}(\cdot)$ и единственность меры $\pi^{(\varepsilon)}(\cdot)$.