Н. В. Грибкова, О скорости сходимости к нормальному закону конечно усеченных линейных комбинаций порядковых статистик, *ТВП*, 1988, том 33, выпуск 4, 781–784

Правая часть (19) при $T \to \infty$ стремится к нулю равномерно по f и L. Лемма 5 доказана.

3. **Доказательство теоремы.** Доказательство теоремы легко вытекает из лемм 3—5. Следует только показать, что

$$\sup_{f,\,L} \mathbf{E}_f (\exp \{\pm a\eta_T\}) < \infty,$$

где $\eta_T = \sqrt{T}\ (\hat{L}_T - \mathbf{E}_f (\hat{L}_T))$.

Справедливость этого утверждения немедленно следует из леммы 4 и формулы (12) (ср. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hasminskii R. Z.*, *Ibragimov I. A.* Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of a spectral density function.— Probab. Th. Rel. Fields, 1986, v. 73, p. 447—461.
2. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса.— Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. VIII, в. 4, с. 391—430.
3. *Rosenblatt M.* Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz forms.— J. of Math. and Mech., 1962, v. 11, № 6, p. 941—950.
4. *Гиновян М. С.* Об оценивании функционалов от спектральной плотности, имеющей нули.— Докл. АН АрмССР, 1986, т. 83, № 4, с. 171—174.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965, 407 с.
6. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961, 936 с.
7. *Гохберг И. Ц.*, *Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965, 448 с.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960, 624 с.

Поступила в редакцию
27.XI.1987

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ КОНЕЧНО УСЕЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

ГРИБКОВА Н. В.

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с функцией распределения $F(x)$, $X_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$ — соответствующие им порядковые статистики. Рассмотрим линейную комбинацию порядковых статистик

$$L = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} c_i X_{(i)}, \tag{1}$$

где c_i — вещественные числа. В работах, посвященных исследованию скорости сходимости L к нормальному закону, обычно рассматривают либо линейные комбинации, усеченные по квантилям выборки (т. е. случай $c_i = 0$ для $i \leqslant \alpha n$ и $i > \beta n$, $0 < \alpha < \beta < 1$), либо всю комбинацию полностью. Именно для первого случая Бьервом [1] была впервые достигнута граница Берри—Эссеена, т. е. получена оценка вида

$$\sup_x |\mathbf{P}\{L_H < x\} - \Phi(x)| \leqslant Cn^{-1/2}, \tag{2}$$

где L_H — определенным образом нормированная и центрированная с. в. L, $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения и C — не зависящая от n постоянная. Для неусеченных линейных комбинаций оптимальную по порядку оценку впервые получил Хелмерс [2] (библиографию и обзор части работ по этой тематике можно найти в книге Хелмерса [3]). Следует отметить, что если результаты по скорости сходимости для усеченных по квантилям линейных комбинаций не требуют никаких моментных предположений (см. [1], [4], [5]) или требуют слабых моментных предположений (см. [3], [4]), то в общем случае обязательным является условие $\mathbf{E} \mid X_1 \mid^3 < \infty$. В данной работе рассматриваются линейные комбинации, у которых обращаются в нуль лишь фиксированное, не зависящее от n число крайних коэффициентов. С помощью техники ван Цвета [6] показано, что если коэффициенты c_i удовлетворяют определенному условию гладкости, то для оценки (2) в этом случае достаточно условие $\mathbf{E} \mid X_1 \mid^\delta < \infty$, при некотором $\delta \geqslant 1$.

2. В работе [6] ван Цвет, изучая скорость сходимости к нормальному закону статистик вида $T = \tau(X_1, \ldots, X_n)$, где $\tau\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — симметричная функция n переменных, $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные с.в., установил справедливость следующего результата.

Теорема А. *Пусть* $\mathbf{E}T = 0$, $\mathbf{E}T^2 = 1$ *и пусть существуют положительные постоянные* A *и* B *такие, что*

$$\mathbf{E} \mid \mathbf{E}(T \mid X_1) \mid^3 \leqslant A n^{-3/2}, \tag{3}$$

$$1 + \mathbf{E}\{\mathbf{E}(T \mid X_1, \ldots X_{n-2})\}^2 - 2\mathbf{E}\{\mathbf{E}(T \mid X_1, \ldots X_{n-1})\}^2 \leqslant B n^{-3}. \tag{4}$$

Тогда

$$\sup_x \mid \mathbf{P}(T < x) - \Phi(x) \mid \leqslant C(A + B) n^{-1/2},$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Одно из следствий этой теоремы, полученных в [6], относится к линейным комбинациям порядковых статистик вида (1).

Следствие. *Пусть* $0 < \sigma^2(L) < \infty$. *Положим*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mid c_i \mid = a, \quad n \max_{2 \leqslant i \leqslant n} \mid c_i - c_{i-1} \mid = b.$$

Тогда

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left\{\frac{L - \mathbf{E}L}{\sigma(L)} < x\right\} - \Phi(x) \right| \leqslant C \left[\frac{a^3 \mathbf{E} \mid X_1 \mid^3}{\sigma^3(L)} + \frac{b^2 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid\}^2}{\sigma^2(L)}\right] n^{-1/2}, \tag{5}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Предлагаемый далее результат обобщает это следствие.

3. Положим $\bar{\mu}_3 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mid c_i \mid^3 \mathbf{E} \mid X_{(i)} \mid^3$, $n \max_{2 \leqslant i \leqslant n} \mid c_i - c_{i-1} \mid = b$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \sigma^2(L) < \infty$. *Тогда*

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left\{\frac{L - \mathbf{E}L}{\sigma(L)} < x\right\} - \Phi(x) \right| \leqslant C \left[\frac{\bar{\mu}_3 + b^3 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid\}^3}{\sigma^3(L)} + \frac{b^2 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid\}^2}{\sigma^2(L)}\right] n^{-1/2}, \tag{6}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Неравенство (6) представляет интерес только если величины $\bar{\mu}_3$ и $\mathbf{E} \mid X_1 \mid$ конечны. Если $\mathbf{E} \mid X_1 \mid^3 < \infty$, то и $\bar{\mu}_3 < \infty$, в этом случае мы получаем по существу результат ван Цвета. Однако теорема 1 имеет и другие следствия. Известно (см., например, [7], с. 41), что если $\mathbf{E} \mid X_1 \mid^\delta < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то $\mathbf{E} \mid X_{(i)} \mid^k < \infty$ для любого $k > 0$ и для всех i таких, что $k\delta^{-1} \leqslant i \leqslant n + 1 - k\delta^{-1}$. Поэтому правая часть неравенства (6) будет конечна, если выполнены следующие условия: (1) $\mathbf{E} \mid X_1 \mid^\delta < \infty$, $\delta \geqslant 1$, (2) $c_i = 0$, если $i < 3\delta^{-1}$ или $i > n + 1 - 3\delta^{-1}$, (3) $\sigma^2(L) > 0$. Условие (2) показывает, что если $\delta \geqslant 3$, то усечения нет. Далее будет показано, что из теоремы 1 вытекают следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E} \mid X_1 \mid < \infty$, $c_i = 0$, *если* $i = 1, 2, n - 1, n$, *и* $\sigma^2(L) > 0$. *Тогда*

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left\{\frac{L - \mathbf{E}L}{\sigma(L)} < x\right\} - \Phi(x) \right| \leqslant C \left[\frac{b^3 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid\}^3}{\sigma^3(L)} + \frac{b^2 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid\}^2}{\sigma^2(L)}\right] n^{-1/2}, \tag{7}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E} \mid X_1 \mid^{3/2} < \infty$, $c_1 = c_n = 0$, $\sigma^2(L) > 0$. *Тогда*

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left\{\frac{L - \mathbf{E}L}{\sigma(L)} < x\right\} - \Phi(x) \right| \leqslant C \left[\frac{b^3 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid^{3/2}\}^2}{\sigma^3(L)} + \frac{b^2 \{\mathbf{E} \mid X_1 \mid\}^2}{\sigma^2(L)}\right] n^{-1/2}, \tag{8}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Если величина b ограничена сверху, а дисперсия $\sigma^2(L)$ отделена от нуля равномерно по n, то (7) и (8) — оценки порядка $n^{-1/2}$.

4. Доказательство теоремы 1. С. в. $L^* = (L - EL)/\sigma(L)$ является нормированной симметричной функцией независимых одинаково распределенных с.в. $X_1, \ldots, X_n$. Проверим, что для нее выполняются условия (3) и (4) теоремы А. В [6] при аналогичной проверке (см. [6], с. 437) установлено, что (4) имеет место для любой линейной комбинации вида (1) (если только $0 < \sigma^2(L) < \infty$) с постоянной $B = 25b^2\sigma^{-2}(L)\{E\,|X_1|\}^2$. Доказательство неравенства (3) проведем иначе, чем в [6]. Имеем:

$$E\,|E(L^*\,|\,X_1)|^3 = \sigma^{-3}E\,|E(L - EL\,|\,X_1)|^3. \tag{9}$$

Оценим $E\,|E(L - EL\,|\,X_1)|^3$. Введем $Y_{(1)} \leqslant Y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Y_{(n-1)}$ — порядковые статистики выборки $X_2, \ldots, X_n$. Пусть $(\cdot \wedge \cdot)$ означает $\min(\cdot, \cdot)$. Для всех $i = 2, \ldots$ $\ldots, n-1$ с вероятностью единица

$$X_{(i)} = (Y_{(i)} \wedge X_1) - (Y_{(i-1)} \wedge X_1) + Y_{(i-1)} \tag{10}$$

(см. [8], с. 679). Если положить $Y_{(0)} = -\infty$, $Y_{(n)} = +\infty$ и считать, что $\infty - \infty = 0$, то (10) будет справедливо и для $i = 1$ и $i = n$. Тогда с вероятностью единица

$$L = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} c_i\,[(Y_{(i)} \wedge X_1) - (Y_{(i-1)} \wedge X_1) + Y_{(i-1)}]$$

и, поскольку распределение $Y_{(i)}$, $i = 1, \ldots, n-1$, не зависит от X_1, получаем, что

$$E\,|E(L - EL\,|\,X_1)|^3 = n^{-3/2}E\,\Big|\,E\Big\{\sum_{i=1}^{n} c_i\,[(Y_{(i)} \wedge X_1) - (Y_{(i-1)} \wedge X_1)] -$$
$$- E\sum_{i=1}^{n} c_i\,[(Y_{(i)} \wedge X_1) - (Y_{(i-1)} \wedge X_1)]\,|\,X_1\Big\}\Big|^3. \tag{11}$$

Обозначим R ранг X_1 в выборке $X_1, \ldots, X_n$. После перегруппировки слагаемых правая часть (11) оказывается равной

$$n^{-3/2}E\,\Big|\,E\Big\{\sum_{i=1}^{R-1}(c_i - c_{i+1})\,Y_{(i)} - E\sum_{i=1}^{R-1}(c_i - c_{i+1})\,Y_{(i)} + c_R X_1 - Ec_R X_1\,|\,X_1\Big\}\Big|^3 \leqslant$$
$$\leqslant n^{-3/2}E\Big[2E\sum_{i=1}^{n-1}|c_i - c_{i+1}|\,|Y_{(i)}| + E\{|c_R X_1 - Ec_R X_1|\,|\,X_1\}\Big]^3. \tag{12}$$

Оговорим, что если в (12) $R = 1$, то $\sum\limits_{i=1}^{R-1}(c_i - c_{i+1})\,Y_{(i)} = 0$. По неравенствам Иенсена и Гёльдера правая часть (12) не превосходит

$$32n^{-3/2}\Big[\Big(E\sum_{i=1}^{n-1}|c_i - c_{i+1}|\,|Y_{(i)}|\Big)^3 + E\,(E\{|c_R X_1|^3\,|\,X_1\})\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 32n^{-3/2}\Big[\Big(\frac{b}{n}(n-1)\,E\,|X_1|\Big)^3 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{|c_R X_1|^3\,|\,R = i\}\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 32n^{-3/2}[b^3(E\,|X_1|)^3 + \bar{\mu}_3].$$

Из этой оценки и из (9) следует, что неравенство (3) для с.в. L^* выполняется с постоянной $A = 32\sigma^{-3}(L)[\bar{\mu}_3 + b^3\{E\,|X_1|\}^3]$.

Таким образом, по теореме А имеет место неравенство (6). Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2. По теореме 1 достаточно доказать, что

$$\bar{\mu}_3 \leqslant Cb^3\{E\,|X_1|\}^3, \tag{13}$$

C здесь и далее означает абсолютную постоянную, не везде одну и ту же. Докажем (13).

Заметим, что $c_i = \sum\limits_{r=2}^{i}(c_r - c_{r-1}) = \sum\limits_{r=i}^{n-1}(c_r - c_{r+1})$, поэтому при всех $i = 1, \ldots n$

$$|c_i| \leqslant \frac{b\,(i \wedge (n-i))}{n} \leqslant \frac{2bi\,(n-i)}{n^2}. \tag{14}$$

Покажем теперь, что при всех $i = 3, \ldots n-2$

$$\mathrm{E}\,|X_{(i)}|^3 \leqslant C\,\{\mathrm{E}\,|X_1|\}^3 \left[\frac{n^2}{i(n-i)}\right]^3. \tag{15}$$

По неравенству Чебышёва $|x|\,F(x)(1-F(x)) \leqslant \mathrm{E}\,|X_1|$. Пусть вначале $3 < i < n-2$, тогда

$$\mathrm{E}\,|X_{(i)}|^3 = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3 F^{i-1}(x)\,(1-F(x))^{n-i}\,dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \{\mathrm{E}\,|X_1|\}^3 \frac{B(i-3, n-i-2)}{B(i, n-i+1)} \leqslant C\,\{\mathrm{E}\,|X_1|\}^3 \left[\frac{n^2}{i(n-i)}\right]^3.$$

Для $i = 3$ и $i = n-2$ одновременно имеем:

$$\mathrm{E}\,|X_{(i)}|^3 = \frac{\{\mathrm{E}\,|X_1|\}^2}{B(i, n-i+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x) \leqslant C\,\{\mathrm{E}\,|X_1|\}^3 \left[\frac{n^2}{i(n-i)}\right]^3;$$

(15) доказано. Из (15), (14) и определения $\bar{\mu}_3$ следует (13). Теорема доказана.

6. Доказательство теоремы 3. По теореме 1 достаточно доказать, что

$$\bar{\mu}_3 \leqslant C b^3 \{\mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}\}^2. \tag{16}$$

Для коэффициентов c_i имеем оценку (14), поэтому (16) будет верно, если мы покажем, что при всех $i = 2, \ldots, n-1$

$$\mathrm{E}\,|X_{(i)}|^3 \leqslant C\,\{\mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}\}^2 \left[\frac{n^2}{i(n-i)}\right]^2. \tag{17}$$

По неравенству Чебышёва $|x|^{3/2}F(x)(1-F(x)) \leqslant \mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}$. Пусть вначале $2 < i < n-1$, тогда

$$\mathrm{E}\,|X_{(i)}|^3 \leqslant \{\mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}\}^2 \frac{B(i-2, n-i-1)}{B(i, n-i+1)} \leqslant C\,\{\mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}\}^2 \left[\frac{n^2}{i(n-i)}\right]^2.$$

Для $i = 2$ и $i = n-1$ одновременно имеем:

$$\mathrm{E}\,|X_{(i)}|^3 \leqslant \frac{\mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}}{B(i, n-i+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{3/2}\,dF(x) \leqslant C\,\{\mathrm{E}\,|X_1|^{3/2}\}^2 \left[\frac{n^2}{i(n-i)}\right]^2.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bjerve S.* Error bounds for linear combinations of order statistics.— Ann. Statist. 1977, v. 5, № 2, p. 357—369.
2. *Helmers R.* A Berry — Esseen theorem for linear combinations of order statistics.— Ann. Probab., 1981, v. 9, № 2, p. 342—347.
3. *Helmers R.* Edgeworth expansions for linear combinations of order statistics. Math. Centre Tracts, 105, 1982, 137 p.
4. *Егоров В. А., Невзоров В. Б.* Некоторые оценки скорости сходимости сумм порядковых статистик к нормальному закону.— Записки научных семинаров ЛОМИ, 1974, т. 41, с. 105—128.
5. *Грибкова Н. В.* Об оценке скорости сходимости к нормальному закону усеченных линейных комбинаций порядковых статистик.— Матем. заметки, 1987, т. 42, № 5, с. 739—746.
6. *van Zwet W. R.* A Berry — Esseen bound for symmetric statistics. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, B. 66, H. 3, S. 425—440.
7. *Дэйвид Г.* Порядковые статистики. М.: Наука, 1979, 336 с.
8. *Stigler S. M.* Linear functions of order statistics with smooth weight functions.— Ann. Statist., 1974, v. 2, № 4, p. 676—693.

Поступила в редакцию
16.III.1987