УДК 539, 517.5 Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2016. Вып. 1

В. М. Мальков, Ю. В. Малькова, Т. О. Доманская

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛОСКОСТИ И ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ ДЛЯ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получены аналитические решения нелинейных задач (плоская деформация) для двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы. Рассмотрены две модели гармонических материалов: полулинейный и Джона, которые позволяют использовать для решения плоских задач упругости методы комплексных функций. Приведены выражения для номинальных (условных) напряжений и напряжений Коши, а также текущих координат деформированной среды. Из общих выражений построены асимптотики указанных величин в окрестности точки приложения силы. Сделано сравнение сингулярных членов напряжений и перемещений для двух моделей материала. Библиогр. 15 назв.

Ключевые слова: двухкомпонентная плоскость, плоская деформация, метод комплексных функций, сосредоточенная сила, асимптотические разложения.

V. M. Malkov, Yu. V. Malkova, T. O. Domanskaya

ANALYSIS OF STRESSES OF BI-MATERIAL PLANE AND HALF-PLANE AT ACTION OF A POINT FORCE FOR TWO MODELS OF HARMONIC MATERIALS

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russia

Analytical solutions of the nonlinear problems (plane strain) are obtained for bi-material plane and half-plane exposed to the point force. Two models of harmonic materials are considered: semi-linear and John's. These models allow to use the methods of complex functions for the solution of the plane problems of elasticity. Expressions for nominal stresses and Cauchy stresses, as well as for current coordinates are founded. On the base of the general expressions the asymptotic expansions are constructed for stresses and displacements in a vicinity of a point force. A comparison between the singular members of stresses and displacements is made for the two models of a material. Refs 15.

Keywords: bi-material plane, plane strain, method of complex functions, point force, asymptotic expansions.

Введение. Рассматриваемые в работе модели нелинейно упругого материала — полулинейный и Джона — были предложены в работе [1]. Оба материала относятся

Мальков Вениамин Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; v.malkov@spbu.ru

Малькова Юлия Вениаминовна — кандидат физико-математических наук, доцент; y.malkova@spbu.ru

Доманская Татьяна Олеговна — аспирант; tanyath57@gmail.com

Malkov Venyamin Mikhaylovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor; v.malkov@spbu.ru

Malkova Yulia Venyaminovna — candidate of physical and mathematical sciences, reader; y.malkova@spbu.ru

Domanskaya Tatyana Olegovna — post-graduate student; tanyath57@gmail.com

к классу гармонических, что позволяет при решении плоских задач упругости применить методы комплексных функций. В случае малых деформаций модели приводят к закону Гука. Модель полулинейного материала рассматривалась рядом авторов, например в [2, 3] и др. В зарубежной литературе эта модель практически не использовалась. Модель гармонического материала Джона получила развитие и применение во многих зарубежных исследованиях. Комплексная формулировка нелинейной плоской задачи впервые предложена в работе [4]. Дальнейшее развитие комплексного метода было дано в статье [5]. В работе [6] приведен ряд важных результатов для плоскости с упругим эллиптическим включением. В частности, установлено, что номинальные напряжения и напряжения Коши постоянны в области включения, если на бесконечности заданы постоянные напряжения.

Соотношения нелинейной плоской задачи для материала Джона, отличающиеся от ранее известных, выведены в [7]. Там же предложен метод решения, основанный на введении функций скачков напряжений и деформаций на линии раздела материалов, и построены точные решения задач для двухкомпонентной пластины, в частности задачи о межфазной трещине и сосредоточенных силах на линии раздела. В статье [8] продолжены исследования задачи о межфазной трещине, начатые в [7], для случая равномерного давления на берегах. Впервые выяснилось, что существуют некоторые критические давления, пропорциональные модулю сдвига материала, превышение которых ведет к потере устойчивости и большим закритическим деформациям.

В работах [9, 10] был решен ряд задач о трещинах и сосредоточенных нагрузках в двухкомпонентной плоскости для модели полулинейного материала. Нелинейные задачи о сосредоточенной силе на границе полуплоскости исследованы для разных моделей нелинейно упругого материала без использования комплексных функций в [11, 12].

Следует отметить, что в литературе мало работ, посвященных решению задач о сосредоточенных нагрузках на основе полностью нелинейных уравнений теории упругости, и полученные в данной статье результаты имеют важное значение для теории и приложений.

Общие соотношения. Для решения задач о сосредоточенных силах на межфазной границе двухкомпонентной плоскости будем использовать уравнения плоской деформации для моделей полулинейного материала и материала Джона, представленные в работах [7, 9].

Рассмотрим уравнения равновесия (при отсутствии объемных сил) для тензора номинальных (условных) напряжений $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$ и уравнения совместности деформаций для градиента деформации $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Запишем уравнения (1) в комплексной форме для случая плоской деформации

$$\begin{aligned} &(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \\ &(g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

штрих и индекс внизу означают частные производные по декартовым координатам (x_1, x_2) отсчетной конфигурации.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ и комплексную функцию номинальных напряжений $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

Функция ζ представляет собой текущие координаты точки; физический смысл функции σ ясен из соотношения

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 = i\int (s_{n1} + is_{n2})ds + \mathrm{const},$$

$$s_{n1} + is_{n2} = (s_{11} + is_{12})\cos(n, x_1) + i(s_{22} - is_{21})\cos(n, x_2),$$

в котором σ_1, σ_2 — проекции на оси координат главного вектора сил на дуге s, $\mathbf{n}$ — нормаль к дуге.

Уравнения (2) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}, \quad s_{22} - is_{21} = \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}, \quad g_{22} - ig_{12} = \frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Комплексные функции $\zeta(z,\overline{z})$ и $\sigma(z,\overline{z})$ должны определяться с помощью соотношений упругости и граничных условий задачи.

Полулинейный материал. Упругий потенциал и закон упругости для тензора номинальных напряжений [13] имеет вид

$$\begin{gathered} \Phi = 0.5\,\lambda\,\mathrm{tr}^2\,(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) + \mu\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I})^2, \\ \mathbf{S} = 2\mu\,\mathbf{G}^T + \varkappa\,\mathbf{Q}^T, \quad \varkappa = \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{\Lambda} - 3) - 2\mu, \end{gathered} \tag{4}$$

здесь $\mathbf{\Lambda}$ — тензор кратностей удлинений, $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор

$$\mathbf{Q} = \cos\omega(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) - \sin\omega(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Тензоры $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{Q}$ входят в полярное разложение градиента деформации $\mathbf{G} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Lambda}$. Угол ω характеризует поворот главных осей в результате деформации, он определяется по компонентам любого из тензоров $\mathbf{G}$ или $\mathbf{S}$

$$\mathrm{tg}\ \omega = \frac{g_{21} - g_{12}}{g_{11} + g_{22}} = \frac{s_{12} - s_{21}}{s_{11} + s_{22}}.$$

Отсюда и из формул (3) находим

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| e^{i\omega}. \tag{5}$$

Запишем закон (4) в компонентах тензоров для плоской деформации

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + ig_{21}) + \lambda(g_{22} - ig_{12}) - 2\mu s\,e^{i\omega}, \\ s_{22} - is_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - ig_{12}) + \lambda(g_{11} + ig_{21}) - 2\mu s\,e^{i\omega}. \end{aligned} \tag{6}$$

В этих формулах обозначено: λ, μ — параметры Ляме; $s = 1/(1-2\nu)$; $\mu s = \lambda + \mu$.

Подставив в соотношения (6) выражения (3), получим систему двух уравнений для функций $\sigma\,(z,\overline{z})$ и $\zeta\,(z,\overline{z})$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} - 2\mu s\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -2\mu s e^{i\omega}, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}} + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}} = 0. \tag{7}$$

Решение уравнений (7) имеет вид

$$
\begin{aligned}
2\mu\zeta &= \frac{1}{1+s}\,[\,\varphi\,(z) - \overline{\psi\,(z)} - f\,(z,\overline{z})],\\
\sigma &= \frac{1}{1+s}\,[s\varphi\,(z) + \overline{\psi\,(z)} + f\,(z,\overline{z})],
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\varphi\,(z)$, $\psi\,(z)$ — аналитические функции комплексной переменной z. Функция $f(z,\overline{z})$ является частным решением уравнений (7)

$$
f(z,\overline{z}) = -2\mu s\int e^{i\omega}dz.
$$

Используя формулы (5) и (8), находим

$$
e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\,\varphi'(z)|} = \frac{|\,\varphi'(z)|}{\overline{\varphi'(z)}} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}}.
$$

Выразим напряжения и деформации (3) через потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:

$$
\begin{aligned}
s_{11}+is_{12} &= \frac{1}{1+s}\left[s\varphi'(z) - \overline{\psi'(z)} - 2\mu s\left(\sqrt{\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\overline{\overline{\varphi'(z)}}}} + \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi''(z)}}{(\overline{\varphi'(z)})^{3/2}}\int\sqrt{\varphi'(z)}\,dz\right)\right],\\
s_{22}-is_{21} &= \frac{1}{1+s}\left[s\varphi'(z) + \overline{\psi'(z)} - 2\mu s\left(\sqrt{\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\overline{\overline{\varphi'(z)}}}} - \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi''(z)}}{(\overline{\varphi'(z)})^{3/2}}\int\sqrt{\varphi'(z)}\,dz\right)\right],
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{11}+is_{12}+2\mu(g_{22}-ig_{12}) &= \varphi'(z),\\
s_{22}-is_{21}+2\mu(g_{11}+ig_{21}) &= \varphi'(z).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Задача о скачках напряжений и деформаций. Рассмотрим двухкомпонентную плоскость со скачками напряжений и деформаций на линии раздела полуплоскостей

$$
[s_{22}-is_{21}]^{+} - [s_{22}-is_{21}]^{-} = \Delta\,s(t), \qquad [g_{11}+ig_{21}]^{+} - [g_{11}+ig_{21}]^{-} = \Delta\,g(t), \tag{11}
$$

где t — координата точки на линии раздела. Функции скачков напряжений $\Delta s(t)$ и деформаций $\Delta g(t)$ считаются абсолютно интегрируемыми на любом конечном промежутке и удовлетворяют условию Гёльдера. Символы $[...]^{+}$ и $[...]^{-}$ означают предельные значения выражений в скобках при приближении к линии раздела из верхней S_2 и нижней S_1 полуплоскостей соответственно. Предполагается, что на бесконечности (при $|z|\to\infty$) напряжения равны нулю.

Запишем условия (11) через комплексные потенциалы, используя выражения (9), (10):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+s_2}\left[s_2\varphi_2'(z) + \overline{\psi_2'(z)} + q_2(z,\overline{z})\right]^{+} -\\
&-\frac{1}{1+s_1}\left[s_1\varphi_1'(z) + \overline{\psi_1'(z)} + q_1(z,\overline{z})\right]^{-} = \Delta\,s(t),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\frac{1}{1+s_2}\left[\varphi_2'(z)-\overline{\psi_2'(z)}-q_2(z,\overline{z})\right]^+ -$$
$$-\frac{1}{2\mu_1}\frac{1}{1+s_1}\left[\varphi_1'(z)-\overline{\psi_1'(z)}-q_1(z,\overline{z})\right]^- = \Delta\, g(t).$$

Функции $q(z,\overline{z})$ для соответствующей полуплоскости вычисляются по формуле

$$q(z,\overline{z}) = -2\mu s\left(\sqrt{\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)}}-\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi''(z)}}{(\overline{\varphi'(z)})^{3/2}}\int\sqrt{\varphi'(z)}\,dz\right).$$

Введем вспомогательную функцию $\Omega(z)$, это позволит упростить уравнения граничных задач и их решение:

$$\Omega(z) = \overline{\psi'(\overline{z})} + \tilde{q}(z), \tag{13}$$
$$\tilde{q}(z) = -2\mu s\left(\sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi}'(z)}}-\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi}''(z)}{(\overline{\varphi}'(z))^{3/2}}\int\sqrt{\varphi'(z)}\,dz\right).$$

Используя равенство (13), исключим в формулах (12) функцию $\psi'(z)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{1+s_2}\left[s_2\varphi_2'(z)+\Omega_2(\overline{z})\right]^+ - \frac{1}{1+s_1}\left[s_1\varphi_1'(z)+\Omega_1(\overline{z})\right]^- = \Delta\, s(t),\\ \frac{1}{2\mu_2}\frac{1}{1+s_2}\left[\varphi_2'(z)-\Omega_2(\overline{z})\right]^+ - \frac{1}{2\mu_1}\frac{1}{1+s_1}\left[\varphi_1'(z)-\Omega_1(\overline{z})\right]^- = \Delta\, g(t).\end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку на линии раздела $q(t) = \tilde{q}(t)$, то эти слагаемые сокращаются в уравнениях (14).

Преобразуем уравнения (14):

$$\begin{gathered}\left[\frac{s_2}{1+s_2}\,\varphi_2'(z)-\frac{1}{1+s_1}\Omega_1(z)\right]^+ - \left[\frac{s_1}{1+s_1}\,\varphi_1'(z)-\frac{1}{1+s_2}\Omega_2(z)\right]^- = \Delta\, s(t),\\ \left[\frac{1}{2\mu_2}\frac{1}{1+s_2}\,\varphi_2'(z)+\frac{1}{2\mu_1}\frac{1}{1+s_1}\Omega_1(z)\right]^+ - \left[\frac{1}{2\mu_1}\frac{1}{1+s_1}\,\varphi_1'(z)+\frac{1}{2\mu_2}\frac{1}{1+s_2}\Omega_2(z)\right]^- = \Delta\, g(t).\end{gathered} \tag{15}$$

Введем две комплексные функции, аналитические во всей плоскости, кроме линии раздела материалов:

$$\begin{gathered}h(z) = \frac{s_2}{1+s_2}\,\varphi_2'(z)-\frac{1}{1+s_1}\Omega_1(z), \quad z\in S_2,\\ r(z) = \frac{1}{2\mu_2}\frac{1}{1+s_2}\,\varphi_2'(z)+\frac{1}{2\mu_1}\frac{1}{1+s_1}\Omega_1(z), \quad z\in S_2.\end{gathered} \tag{16}$$

Выражения для нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов в правых частях.

Граничные условия (15) в функциях (16) примут вид

$$[h(z)]^+ - [h(z)]^- = \Delta\, s(t), \qquad [r(z)]^+ - [r(z)]^- = \Delta\, g(t). \tag{17}$$

Уравнения (17) являются граничными задачами Римана–Гильберта нахождения кусочно голоморфной функции по ее скачку на линии раздела [14]. Решения этих задач, голоморфные на бесконечности, выражаются через интегралы типа Коши

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\, s(t)\, dt}{t - z} + h(\infty), \qquad r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\, g(t)\, dt}{t - z} + r(\infty), \tag{18}$$

$$h(\infty) = \frac{\mu_1}{1 - \nu_1} + \frac{\mu_2}{1 - \nu_2}, \qquad r(\infty) = -\frac{\nu_1}{2(1 - \nu_1)} - \frac{\nu_2}{2(1 - \nu_2)}. \tag{19}$$

Найдем из соотношений (16) комплексные потенциалы $\varphi'(z)$ и $\Omega(z)$

$$\begin{gathered} \varphi_2'(z) = m_1\mu_2(1 + s_2)\,[h(z) + 2\mu_1 r(z)], \quad z \in S_2, \\ \Omega_1(z) = \overline{\psi}_1'(z) + \tilde{q}_1(z) = -m_1\mu_1(1 + s_1)\,[h(z) - 2\mu_2 s_2 r(z)], \quad z \in S_2, \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$m_1 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 s_2}, \quad m_2 = \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 s_1}.$$

Потенциалы для нижней полуплоскости вытекают из (20) при замене индексов $(1 \leftrightarrow 2)$.

Сосредоточенная сила на линии раздела. Рассмотрим задачу о сосредоточенной силе, приложенной в начале координат $z = 0$. Обозначим $F = F_1 + iF_2$, где F_1, F_2 — проекции силы на оси x_1 и x_2. Напряжения на бесконечности отсутствуют. Данная задача является частным случаем задачи о скачках. Здесь функции скачков таковы:

$$\Delta\, s(t) = -iF\delta(t), \quad \Delta\, g(t) = 0.$$

По формулам (18)–(20) находим

$$h(z) = -\frac{F}{2\pi}\,\frac{1}{z} + h(\infty), \quad r(z) = r(\infty),$$

$$\begin{gathered} \varphi_2'(z) = -m_1\mu_2(1 + s_2)\,\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} + 2\mu_2, \quad \varphi_1'(z) = -m_2\mu_1(1 + s_1)\,\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} + 2\mu_1, \\ \overline{\psi}_1'(z) + \tilde{q}_1(z) = m_1\mu_1(1 + s_1)\,\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} - 2\mu_1 s_1, \quad \overline{\psi}_2'(z) + \tilde{q}_2(z) = m_2\mu_2(1 + s_2)\,\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} - 2\mu_2 s_2. \end{gathered} \tag{21}$$

Далее потребуются следующие выражения:

$$\begin{gathered} e^{i\omega} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}} = \sqrt{\frac{(z - F_0)\overline{z}}{(\overline{z} - \overline{F}_0)z}}, \\ f(z, \overline{z}) = k \int e^{i\omega}\, dz = k\, p(z) \sqrt{\frac{\overline{z}}{\overline{z} - \overline{F}_0}}, \\ \tilde{q}(z) = k\, \left[\sqrt{\frac{z - F_0}{z - \overline{F}_0}} - \frac{1}{2}\frac{\overline{F}_0}{z - \overline{F}_0} \frac{p(z)}{\sqrt{(z - \overline{F}_0)z}} \right], \end{gathered} \tag{22}$$

в которых

$$p\,(z) = \sqrt{z^2 - F_0 z} - F_0 \ln \frac{\sqrt{z - F_0} + \sqrt{z}}{\sqrt{-F_0}};$$

$$F_0 = \frac{1+s_2}{\mu_1+\mu_2 s_2}\,\frac{F}{4\pi},\ z\in S_2;\quad F_0 = \frac{1+s_1}{\mu_2+\mu_1 s_1}\,\frac{F}{4\pi},\ z\in S_1.$$

Напряжения и деформации вычисляются по формулам (9), (10). Получим асимптотические разложения номинальных напряжений и текущих координат точки для верхней полуплоскости при $r\to 0$ (полагаем $z = re^{i\theta}$)

$$\begin{aligned}
s_{11}+is_{12} &= -\mu_2\left(m_1 s_2 e^{-i\theta}+m_2 e^{i\theta}\right)\frac{F}{2\pi r}+O(1),\\
s_{22}-is_{21} &= -\mu_2\left(m_1 s_2 e^{-i\theta}-m_2 e^{i\theta}\right)\frac{F}{2\pi r}+O(1),\\
\zeta &= -\left(m_1+m_2\right)\frac{F}{4\pi}\ln r+O(1).
\end{aligned}\tag{23}$$

Асимптотические разложения нижней полуплоскости найдем циклической перестановкой индексов ($1\leftrightarrow 2$) в правых частях этих равенств. Видно, что перемещения имеют логарифмическую особенность в окрестности точки приложения силы, как и в линейной задаче.

Рассмотрим истинные напряжения Коши. Для тензоров условных $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$ и истинных напряжений Коши $\mathbf{T} = t_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$ имеет место соотношение [13]

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\cdot J\mathbf{T},$$

в котором $J = \det\mathbf{G} = \lambda_3(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})$ — кратность изменения объема. Отсюда следует зависимость между векторами напряжений

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{S} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot J\mathbf{T} = \varkappa_i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{T} = \varkappa_i\mathbf{t}_i.$$

Для истинных напряжений Коши справедливы формулы

$$\varkappa_1(t_{11}+it_{12}) = s_{11}+is_{12},\qquad \varkappa_2(t_{22}-it_{21}) = s_{22}-is_{21}.\tag{24}$$

Кратности изменения площади находятся из равенства $\varkappa_i = |\mathbf{e}_i\cdot J\mathbf{G}^{-1}|$:

$$\varkappa_1 = \lambda_3\sqrt{g_{22}^2+g_{12}^2},\qquad \varkappa_2 = \lambda_3\sqrt{g_{11}^2+g_{21}^2}.$$

Асимптотические разложения кратностей изменения площади при $r\to 0$

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \lambda_3\frac{|F|}{2\pi r}\sqrt{m_1^2-2m_1m_2\cos 2\theta+m_2^2}+O(1),\\
\varkappa_2 &= \lambda_3\frac{|F|}{2\pi r}\sqrt{m_1^2+2m_1m_2\cos 2\theta+m_2^2}+O(1).
\end{aligned}$$

При плоской деформации $\lambda_3 = 1$, следовательно, кратности изменения площади имеют особенность $1/r$ при $r\to 0$. Из (23), (24) определим напряжения Коши

$$\begin{aligned}
t_{11}+it_{12} &= -\mu_2\frac{m_1 s_2 e^{-i\theta}+m_2 e^{i\theta}}{\sqrt{m_1^2-2m_1m_2\cos 2\theta+m_2^2}}\,\frac{F}{|F|}+O(r),\\
t_{22}-it_{21} &= -\mu_2\frac{m_1 s_2 e^{-i\theta}-m_2 e^{i\theta}}{\sqrt{m_1^2+2m_1m_2\cos 2\theta+m_2^2}}\,\frac{F}{|F|}+O(r).
\end{aligned}$$

Асимптотические разложения нижней полуплоскости найдем циклической перестановкой индексов ($1\leftrightarrow 2$) в правых частях этих равенств. Истинные напряжения Коши не имеют особенности в полюсе.

Сосредоточенная сила на границе полуплоскости. Решим нелинейную задачу о сосредоточенной силе на границе верхней полуплоскости. Пусть в начале координат приложена внешняя сила с компонентами F_1 и F_2, обозначим $F = F_1 + iF_2$. Граничное условие имеет вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ = -iF\delta(t). \tag{25}$$

Решение этой задачи можно вывести из решения рассмотренной выше задачи о сосредоточенной силе на линии раздела в двухкомпонентной плоскости, если положить $\mu_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_2 = \mu$, $\lambda_2 = \lambda$.

Из формул (21) получим

$$\varphi'(z) = -(1-\nu)\frac{F}{\pi}\frac{1}{z} + 2\mu, \qquad \Omega(z) = \overline{\psi}'(z) + \tilde{q}(z) = -\frac{1}{1-2\nu}\varphi'(z).$$

Функции $e^{i\omega}$, $f(z,\overline{z})$ и $\tilde{q}(z)$ определяются по выражениям (22), где нужно положить

$$F_0 = (1-\nu)\frac{F}{2\mu\pi}.$$

Асимптотические разложения кратностей изменения площади при $r \to 0$

$$\varkappa_1 = \sqrt{1 + s^2 - 2s\cos 2\theta}\frac{1}{2\mu s}\frac{|F|}{\pi r} + O(1),$$

$$\varkappa_2 = \sqrt{1 + s^2 + 2s\cos 2\theta}\frac{1}{2\mu s}\frac{|F|}{\pi r} + O(1).$$

Асимптотические разложения номинальных напряжений и напряжений Коши при $r \to 0$

$$s_{11} + is_{12} = -\frac{F}{\pi r}\cos\theta + O(1), \qquad s_{22} - is_{21} = i\frac{F}{\pi r}\sin\theta + O(1),$$

$$t_{11} + it_{12} = -\frac{2\mu s}{\sqrt{1 + s^2 - 2s\cos 2\theta}}\frac{F}{|F|}\cos\theta + O(r),$$

$$t_{22} - it_{21} = \frac{2\mu s i}{\sqrt{1 + s^2 + 2s\cos 2\theta}}\frac{F}{|F|}\sin\theta + O(r).$$

Асимптотическое разложение функции ζ при $r \to 0$

$$\zeta = -\frac{1-\nu}{\mu}\frac{F}{2\pi}\ln r + O(1).$$

Разложения напряжений в базисе полярных координат при $r \to 0$

$$s_{rr} + is_{r\theta} = -\frac{F}{\pi r}e^{-i\theta} + O(1), \qquad s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = O(1). \tag{26}$$

Радиальное напряжение s_{rr} и касательное напряжение $s_{r\theta}$ содержат особенность вида $1/r$ в окрестности точки приложения силы, а окружное напряжение $s_{\theta\theta}$ и касательное напряжение $s_{\theta r}$ не имеют особенности. Напряжения (26) обладают той же особенностью, что и напряжения, приведенные в работах [11, 12] для модели полулинейного материала, но отличаются коэффициентами. Принятое в [11, 12] предположение, что система полярных координат является главной, выполняется лишь приближенно.

Гармонический материал Джона. Упругий потенциал материала

$$\Phi = 2\mu[F(I) - J], \qquad I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad J = \lambda_1\lambda_2, \tag{27}$$

где λ_1, λ_2 — главные кратности удлинений; $F(I)$ — некоторый функционал.

Из потенциала (27) получим закон упругости для тензора номинальных напряжений

$$\mathbf{S} = 2\mu\,\mathbf{G}^T + 2\mu\,[F'(I) - I]\;\mathbf{Q}^T.$$

Для компонент тензора имеют место соотношения [7]

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= 2\mu\left[\frac{2}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}\right],\\ s_{22} - is_{21} &= 2\mu\left[\frac{2}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

При выводе соотношений (28) использовали равенство (5) и формулу

$$I = 2\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|.$$

Подставив в (28) напряжения (3), придем к уравнениям

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 4\mu\frac{1}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}} + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}} = 0. \tag{30}$$

Решим уравнение (30):

$$\sigma + 2\mu\zeta = \varphi(z), \tag{31}$$

здесь $\varphi(z)$ — аналитическая функция от z. Исключим из (29) функцию σ с помощью (31)

$$4\mu\frac{1}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \varphi'(z) \Rightarrow 2\mu F'(I) = |\varphi'(z)|. \tag{32}$$

Из равенств (32) получим уравнение

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{2}I\frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|}. \tag{33}$$

Вместо задания функционала $F(I)$ обычно задают инвариант I как функцию от $|\varphi'(z)|$; следуя работам [4, 5], положим

$$I(|\varphi'(z)|) = 2|\varphi'(z)|\left[b + c\frac{1}{|\varphi'(z)|^2}\right]. \tag{34}$$

Постоянные b и c однозначно определяются из условий перехода нелинейного закона упругости в закон Гука при малых деформациях

$$4\mu b = 1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \qquad c = \mu\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) = 2\mu(1 - 2\mu b).$$

Учитывая выражение (34), из уравнений (31), (33) найдем потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$

$$
\zeta = b\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\overline{\varphi'(z)}},
$$

$$
\sigma = (1-2\mu b)\varphi(z) - 2\mu\overline{\psi(z)} - 2\mu\frac{cz}{\overline{\varphi'(z)}}, \tag{35}
$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция от z.

Формулы для номинальных напряжений и деформаций таковы:

$$
\begin{gathered}
s_{11} + is_{12} = (1-2\mu b)\varphi'(z) - 2\mu\frac{c}{\overline{\varphi'(z)}} + 2\mu\overline{\psi'(z)} - 2\mu\frac{cz\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}},\\
s_{22} - is_{21} = (1-2\mu b)\varphi'(z) - 2\mu\frac{c}{\overline{\varphi'(z)}} - 2\mu\overline{\psi'(z)} + 2\mu\frac{cz\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}},\\
s_{11} + is_{12} + 2\mu(g_{22} - ig_{12}) = \varphi'(z),\\
s_{22} - is_{21} + 2\mu(g_{11} + ig_{21}) = \varphi'(z).
\end{gathered} \tag{36}
$$

Сосредоточенная сила на линии раздела. Получим решение задачи о сосредоточенной силе на межфазной линии двухкомпонентной плоскости. Пусть в начале координат приложена внешняя сила с компонентами F_1 и F_2, обозначим $F = F_1 + iF_2$. На бесконечности напряжения отсутствуют. На линии раздела двух полуплоскостей имеют место скачки напряжений и деформаций (11). Подставим в условия (11) напряжения и деформации (36)

$$
\left[(1-2\mu_2 b_2)\,\varphi_2'(z) - 2\mu_2\frac{c_2}{\overline{\varphi_2'(z)}} - 2\mu_2\overline{\psi_2'(z)} + 2\mu_2\frac{c_2 z\overline{\varphi_2''(z)}}{\overline{{\varphi_2'}^{2}(z)}}\right]^+ -
$$

$$
- \left[(1-2\mu_1 b_1)\,\varphi_1'(z) - 2\mu_1\frac{c_1}{\overline{\varphi_1'(z)}} - 2\mu_1\overline{\psi_1'(z)} + 2\mu_1\frac{c_1 z\overline{\varphi_1''(z)}}{\overline{{\varphi_1'}^{2}(z)}}\right]^- = \Delta s(t),
$$

$$
\left[b_2\varphi_2'(z) + \frac{c_2}{\overline{\varphi_2'(z)}} + \overline{\psi_2'(z)} - \frac{c_2 z\overline{\varphi_2''(z)}}{\overline{{\varphi_2'}^{2}(z)}}\right]^+ -
$$

$$
- \left[b_1\varphi_1'(z) + \frac{c_1}{\overline{\varphi_1'(z)}} + \overline{\psi_1'(z)} - \frac{c_1 z\overline{\varphi_1''(z)}}{\overline{{\varphi_1'}^{2}(z)}}\right]^- = \Delta g(t).
$$

Преобразуем эти выражения:

$$
\left[(1-2\mu_2 b_2)\,\varphi_2'(z) + 2\mu_1\frac{c_1}{\overline{\varphi}_1'(z)} + 2\mu_1\overline{\psi}_1'(z) - 2\mu_1\frac{c_1 z\overline{\varphi}_1''(z)}{{\overline{\varphi}_1'}^{2}(z)}\right]^+ -
$$

$$
- \left[(1-2\mu_1 b_1)\,\varphi_1'(z) + 2\mu_2\frac{c_2}{\overline{\varphi}_2'(z)} + 2\mu_2\overline{\psi}_2'(z) - 2\mu_2\frac{c_2 z\overline{\varphi}_2''(z)}{{\overline{\varphi}_2'}^{2}(z)}\right]^- = \Delta s(x_1), \tag{37}
$$

$$
\left[b_2\varphi_2'(z) - \frac{c_1}{\overline{\varphi}_1'(z)} - \overline{\psi}_1'(z) + \frac{c_1 z\overline{\varphi}_1''(z)}{{\overline{\varphi}_1'}^{2}(z)}\right]^+ -
$$

$$- \left[b_1\varphi_1'(z) - \frac{c_2}{\overline{\varphi_2'}(z)} - \overline{\psi}_2'(z) + \frac{c_2 z\overline{\varphi}_2''(z)}{\overline{\varphi}_2'^{\,2}(z)}\right]^- = \Delta g(x_1).$$

Введем две комплексные функции, аналитические во всей плоскости, кроме линии раздела материалов:

$$h(z) = (1-2\mu_2 b_2)\varphi_2'(z) + 2\mu_1 \frac{c_1}{\overline{\varphi_1'}(z)} + 2\mu_1\overline{\psi_1'}(z) - 2\mu_1 \frac{c_1 z\overline{\varphi_1''}(z)}{\overline{\varphi_1'}(z)}, \quad z \in S_2,$$

$$r(z) = b_2\varphi_2'(z) - \frac{c_1}{\overline{\varphi_1'}(z)} - \overline{\psi'}(z) + \frac{c_1 z\overline{\varphi_1''}(z)}{\overline{\varphi_1'}(z)}, \quad z \in S_2.$$

Для нижней полуплоскости комплексные функции $h(z)$ и $r(z)$ получим циклической перестановкой индексов $(1 \leftrightarrow 2)$ в правых частях этих равенств.

Условия (37) на линии раздела примут вид (17). Приходим к двум граничным задачам Римана–Гильберта, их решение дано формулами (18). В случае сосредоточенной силы $\Delta s(t) = -iF\delta(t)$ и $\Delta g(t) = 0$ будем иметь

$$h(z) = -\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} + h(\infty), \quad r(z) = r(\infty),$$

$$h(\infty) = \frac{\mu_1}{2(1-\nu_1)} + \frac{\mu_2}{2(1-\nu_2)}, \quad r(\infty) = \frac{1-2\nu_1}{4(1-\nu_1)} + \frac{1-2\nu_2}{4(1-\nu_2)}.$$

Выразим комплексные потенциалы верхней полуплоскости через функции $h(z)$ и $r(z)$

$$\varphi_2'(z) = \frac{h(z) + 2\mu_1 r(z)}{1+2(\mu_1-\mu_2)b_2} = -\frac{1}{1+2(\mu_1-\mu_2)b_2}\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} + 2\mu_2,$$

$$\frac{c_1}{\overline{\varphi_1'}(z)} + \overline{\psi_1'}(z) - \frac{c_1 z\overline{\varphi_1''}(z)}{\overline{\varphi_1'^2}(z)} = \frac{b_2 h(z) - (1-2\mu_2 b_2)r(z)}{1+2(\mu_1-\mu_2)b_2} =$$

$$= -\frac{b_2}{1+2(\mu_1-\mu_2)b_2}\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} + \frac{1}{4(1-\nu_2)}.$$

Функции для нижней полуплоскости определим с помощью перестановки индексов $(1 \leftrightarrow 2)$.

Используя формулы (35), (36), найдем асимптотические разложения условных напряжений и текущих координат для верхней полуплоскости при $r \to 0$

$$s_{11} + is_{12} = -\left[\frac{1-2\mu_2 b_2}{b_2}p_2 e^{-i\theta} + 2\mu_2 p_1 e^{i\theta}\right]\frac{F}{2\pi r} + O(1),$$

$$s_{22} - is_{21} = -\left[\frac{1-2\mu_2 b_2}{b_2}p_2 e^{-i\theta} - 2\mu_2 p_1 e^{i\theta}\right]\frac{F}{2\pi r}, \tag{38}$$

$$\zeta = -(p_1+p_2)\frac{F}{2\pi}\ln r + O(1),$$

где

$$p_1 = \frac{b_1}{1+2b_1(\mu_2-\mu_1)}, \quad p_2 = \frac{b_2}{1+2b_2(\mu_1-\mu_2)}.$$

Выражения для нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов $(1 \leftrightarrow 2)$ в правых частях равенств.

Рассмотрим истинные напряжения Коши (24). Асимптотические разложения функций $\varkappa_i$

$$\varkappa_1 = \frac{|F|}{2\pi r}\sqrt{p_1^2 - 2p_1p_2\cos 2\theta + p_2^2} + O(1),$$
$$\varkappa_2 = \frac{|F|}{2\pi r}\sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos 2\theta + p_2^2} + O(1).$$

При плоской деформации кратности изменения площади при $r \to 0$ имеют особенность $1/r$.

Асимптотические разложения напряжений Коши для верхней полуплоскости

$$t_{11} + it_{12} = -\sqrt{\frac{F}{\overline{F}}}\frac{(1-2\mu_2b_2)p_2e^{-i\theta} + 2\mu_2b_2p_1\,e^{i\theta}}{b_2\sqrt{p_1^2 - 2p_1p_2\cos 2\theta + p_2^2}} + O(r),$$

$$t_{22} - it_{21} = -\sqrt{\frac{F}{\overline{F}}}\frac{(1-2\mu_2b_2)p_2e^{-i\theta} - 2\mu_2b_2p_1\,e^{i\theta}}{b_2\sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos 2\theta + p_2^2}} + O(r).$$

Разложения для нижней полуплоскости находим циклической перестановкой индексов $(1 \leftrightarrow 2)$ в правых частях. Напряжения Коши не имеют особенности при $r \to 0$.

Сосредоточенная сила на границе полуплоскости. Пусть на границе верхней полуплоскости в точке $z = 0$ приложена сосредоточенная сила. Граничное условие имеет вид (25). Комплексные потенциалы таковы:

$$(1-2\mu b)\,\varphi'(z) = 2\mu\frac{c}{\overline{\varphi}'(z)} + 2\mu\,\overline{\psi}'(z) - 2\mu\,\frac{cz\overline{\varphi}''(z)}{\overline{\varphi}'^2(z)} = -\frac{F}{2\pi}\frac{1}{z} + h(\infty).$$

Приведем для напряжений и текущих координат при $r \to 0$ асимптотические формулы

$$s_{11} + is_{12} = -\frac{F}{\pi r}\cos\theta + O(1), \quad s_{22} - is_{21} = i\frac{F}{\pi r}\sin\theta,$$
$$\zeta = -\frac{1}{2\mu(1-2\mu b)}\frac{F}{2\pi}\ln r + O(1) = -\frac{1-\nu}{\mu}\frac{F}{\pi}\ln r + O(1).$$

Рассмотрим истинные напряжения Коши. Асимптотические разложения кратностей изменения площадей при $r \to 0$ вычисляются по тем же формулам, что и выше, где нужно взять

$$p_1 = \frac{1}{2\mu}, \quad p_2 = \frac{b}{1-2\mu b} = (3-4\nu)\frac{1}{2\mu}.$$

Асимптотические разложения напряжений Коши

$$t_{11} + it_{12} = -\sqrt{\frac{F}{\overline{F}}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1p_2\cos 2\theta + p_2^2}} + O(r),$$

$$t_{22} - it_{21} = \sqrt{\frac{F}{\overline{F}}}\frac{2i\sin\theta}{\sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos 2\theta + p_2^2}} + O(r).$$

Главные члены номинальных напряжений не зависят от параметров материала и имеют ту же особенность, как и в линейной задаче. Истинные напряжения Коши зависят от модулей упругости.

Сравнение решений для двух моделей материала. Приведем асимптотические формулы для номинальных напряжений и перемещений при $r \to 0$ для верхней полуплоскости.

Полулинейный материал — формулы (23):

$$s_{11}+is_{12}=-\mu_2\left[\frac{1}{\mu_2+\mu_1(1-2\nu_2)}e^{-i\theta}+\frac{1-2\nu_1}{\mu_1+\mu_2(1-2\nu_1)}e^{i\theta}\right]\frac{F}{2\pi r}+O(1),$$

$$s_{22}-is_{21}=-\mu_2\left[\frac{1}{\mu_2+\mu_1(1-2\nu_2)}e^{-i\theta}-\frac{1-2\nu_1}{\mu_1+\mu_2(1-2\nu_1)}e^{i\theta}\right]\frac{F}{2\pi r}+O(1),$$

$$u_1+iu_2=-\left[\frac{1-2\nu_1}{\mu_1+\mu_2(1-2\nu_1)}+\frac{1-2\nu_2}{\mu_2+\mu_1(1-2\nu_2)}\right]\frac{F}{4\pi}\ln r+O(1),$$

материал Джона — формулы (38):

$$s_{11}+is_{12}=-\mu_2\left[\frac{1}{\mu_2+\mu_1(3-4\nu_2)}e^{-i\theta}+\frac{3-4\nu_1}{\mu_1+\mu_2(3-4\nu_1)}e^{i\theta}\right]\frac{F}{2\pi r}+O(1),$$

$$s_{22}-is_{21}=-\mu_2\left[\frac{1}{\mu_2+\mu_1(3-4\nu_2)}e^{-i\theta}-\frac{3-4\nu_1}{\mu_1+\mu_2(3-4\nu_1)}e^{i\theta}\right]\frac{F}{2\pi r}+O(1).$$

$$u_1+iu_2=-\left[\frac{3-4\nu_1}{\mu_1+\mu_2(3-4\nu_1)}+\frac{3-4\nu_2}{\mu_2+\mu_1(3-4\nu_2)}\right]\frac{F}{4\pi}\ln r+O(1).$$

Асимптотические разложения для нижней полуплоскости находим циклической перестановкой индексов $(1\leftrightarrow 2)$ в правых частях равенств.

Рассмотрим линейную задачу для сосредоточенной силы на линии раздела материалов. Напряжения и перемещения верхней полуплоскости имеют вид [15]

$$\sigma_{11}+i\sigma_{12}=-\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}\left(Fe^{-i\theta}+\overline{F}e^{i\theta}\right)(1+e^{2i\theta})\frac{1}{2\pi r},$$

$$\sigma_{22}-i\sigma_{21}=-\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}\left(Fe^{-i\theta}+\overline{F}e^{i\theta}\right)(1-e^{2i\theta})\frac{1}{2\pi r},$$

$$u_1+iu_2=-\left(\frac{\varkappa_2}{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}\ln z+\frac{\varkappa_1}{\mu_1+\mu_2\varkappa_1}\ln\overline{z}\right)\frac{F}{4\pi}+\frac{z}{\overline{z}}\frac{1}{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}\frac{\overline{F}}{4\pi},$$

где $\varkappa=3-4\nu$. Выражения для нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов в правых частях. Главные члены асимптотических разложений перемещений нелинейной задачи (материал Джона) и линейной задачи совпадают.

В задаче Фламана о действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости асимптотические разложения номинальных напряжений и перемещений нелинейных задач таковы:

$$s_{11}+is_{12}=-\frac{F}{\pi r}\cos\theta+O(1),\quad s_{22}-is_{21}=i\frac{F}{\pi r}\sin\theta+O(1),$$

$$u_1+iu_2=-\frac{1-\nu}{\mu}\frac{F}{2\pi}\ln r+O(1),\quad u_1+iu_2=-\frac{1-\nu}{\mu}\frac{F}{\pi}\ln r+O(1).$$

Первые слагаемые относятся к полулинейному материалу, вторые — к материалу Джона.

Напряжения линейной задачи Фламана в декартовых и полярных координатах

$$\sigma_{11}+i\sigma_{12}=-\left(Fe^{-i\theta}+\overline{F}e^{i\theta}\right)(1+e^{2i\theta})\frac{1}{2\pi r},$$

$$\sigma_{22} - i\sigma_{21} = -\left(Fe^{-i\theta} + \overline{F}e^{i\theta}\right)(1 - e^{2i\theta})\frac{1}{2\pi r},$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{\pi r}\left(Fe^{-i\theta} + \overline{F}e^{i\theta}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

Заключение. Решены плоские задачи нелинейной теории упругости (плоская деформация) для двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенных сил. Механические свойства тел описываются моделями полулинейного материала и материала Джона. Использование моделей гармонического материала позволило применить теорию комплексных функций и получить точные аналитические решения краевых задач, в их числе задачи о скачках напряжений и деформаций на межфазной линии. Решения краевых задач о сосредоточенных силах, действующих на границе полуплоскости и межфазной границе двухкомпонентной плоскости, выведены как частный вид функций скачков. Исходя из общих решений, построена асимптотика напряжений и перемещений в окрестности точки приложения силы.

Для номинальных напряжений нелинейных задач и напряжений линейной задачи свойственна особенность типа $1/r$ при $r \to 0$. Перемещения этих задач также обладают одной и той же особенностью — $\ln r$. Коэффициенты сингулярных членов в некоторых случаях совпадают, в других отличаются. Например, в нелинейной задаче Фламана главные члены асимптотических разложений номинальных напряжений для двух материалов совпадают, а в перемещениях отличаются в 2 раза. Истинные напряжения Коши не имеют особенности в полюсе.

Сравнение с решением линейной задачи Фламана [15] показало, что напряжения и перемещения имеют те же особенности в окрестности точки приложения силы: напряжения — $1/r$, перемещения — $\ln r$. В то же время есть принципиальные отличия: в линейных задачах только радиальные напряжения не равны нулю, а в нелинейных задачах и касательные напряжения не нулевые. Кроме того, коэффициенты при сингулярных членах в нелинейных и линейных задачах различны.

Литература

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. 1960. Vol. 13, N 2. P. 239–296.

2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

3. *Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 256 с.

4. *Varley E., Cumberbatch E.* Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // Journal of Elasticity. 1980. Vol. 10, N 4. P. 341–405.

5. *Ru C. Q.* On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156, N 3–4. P. 219–234.

6. *Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A.* Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // Intern. Journal of Non-linear mechanics. 2005. Vol. 38, N 2–3. P. 281–287.

7. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.

8. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Степанова В. А.* Двухкомпонентная плоскость из материала Джона с межфазной трещиной, нагруженной давлением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 3. С. 113–125.

9. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 93–106.

10. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 83–96.

11. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Исследование нелинейной задачи Фламана // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 5. С. 68–78.

12. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Анализ сингулярности напряжений в нелинейной задаче Фламана для некоторых моделей материала // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 3. С. 453–462.

13. *Мальков В. М.* Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 276 с.

14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

15. *Малькова Ю. В.* Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 160 с.

References

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1960, vol. 13, no. 2, pp. 239–296.

2. Lurie A. I. *Nelineynaya teoria uprugosti* [*Non-linear elasticity*]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 512 p. (In Russian)

3. Chernykh K. F., Litvinenkova Z. N. *Teoria bolshih uprugih deformatsiy* [*Theory of large elastic deformations*]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1988, 256 p. (In Russian)

4. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes. *Journal of Elasticity*, 1980, vol. 10, no. 4, pp. 341–405.

5. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. *Acta Mechanica*, 2002, vol. 156, no. 3–4, pp. 219–234.

6. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics. *Intern. Journal of Non-linear mechanics*, 2005, vol. 38, no. 2–3, pp. 281–287.

7. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskaya zadacha nelineynoy uprugosti dlya garmonicheskogo materiala [Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2008, issue 3, pp. 114–126. (In Russian)

8. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Stepanova V. A. Dvuhkomponentnaya ploskost is materiala Dzhona s mezhfaznoy treshchinoy, nagruzhennoy davleniem [Bi-material plane of John's material with interface crack loaded by pressure]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2013, issue 3, pp. 113–125. (In Russian)

9. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskie zadachi uprugosti dlya polulineynogo materiala [Plane problems of elasticity for semi-linear material]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, issue 3, pp. 93–106. (In Russian)

10. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskie zadachi o sosredotochennyih silah dlya polulineynogo materiala [Plane problems of concentrated forces for semi-linear material]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2013, issue 3, pp. 83–96. (In Russian)

11. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Issledovanie nelineynoy zadachi Flamana [Investigation of non-linear Flamant's problem]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [*Izv. RAS. Mechanics of solids*], 2006, no. 5, pp. 68–78. (In Russian)

12. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Analiz singulyarnosti napryazheniy v nelineynoy zadache Flamana dlya nekotoryih modeley materiala [Analysis of singularity of stresses in non-linear Flamant's problem for some material models]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [*Applied mathematics and mechanics*], 2008, vol. 72, no. 3, pp. 453–462. (In Russian)

13. Malkov V. M. *Vvedenie v nelineynuyu uprugost* [*Introduction in non-linear elasticity*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2010, 276 p. (In Russian)

14. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [*Some basic problems of mathematical theory of elasticity*]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p. (In Russian)

15. Malkova Yu. V. *Nekotorye zadachi dlya dvuhkomponentnoy ploskosti s krivolineynyimi treshchinami* [*Some problems for bi-material plane with curvilinear cracks*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2008, 160 p. (In Russian)

Статья рекомендована к печати проф. Н. В. Егоровым.

Статья поступила в редакцию 26 ноября 2015 г.