

*Т. О. Доманская, В. М. Мальков, Ю. В. Малькова*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КОМПОЗИТНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ДЖОНА\*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получено аналитическое решение нелинейной задачи для неоднородной плоскости с межфазной трещиной (разрезом). Плоскость образована соединением двух полуплоскостей, выполненных из разных материалов. Механические свойства полуплоскостей описываются моделью гармонического материала Джона. Применение этой модели позволило использовать методы теории комплексных функций в решении нелинейной задачи. Для плоскости со свободной межфазной трещиной при заданных постоянных напряжениях на бесконечности выведены формулы для номинальных напряжений, напряжений Коши и перемещений. Из общих выражений построены асимптотики указанных функций в окрестности концов трещины. Найдены коэффициенты интенсивности номинальных напряжений. В задаче одноосного растяжения плоскости со свободной трещиной установлено, что формулы, дающие раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности номинальных напряжений, полностью совпадают с полученными по уравнениям линейной теории упругости. Номинальные напряжения имеют корневую особенность у концов трещины, истинные напряжения Коши не обладают ею. Полученные результаты имеют важное значение для теории и приложений. Библиогр. 16 назв. Ил. 3. Табл. 1.

*Ключевые слова:* неоднородная плоскость, плоская деформация, метод комплексных функций, межфазная трещина, гармонический материал Джона.

*T. O. Domanskaya, V. M. Malkov, Yu. V. Malkova*

## MATHEMATICAL MODELING OF THE DEFORMATION OF COMPOSITE PLANE WITH INTERFACE CRACK FOR JOHN'S HARMONIC MATERIAL

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The exact analytical solution of a nonlinear plane-strain problem for a bimaterial plane with an interface crack (cut) has been obtained. The plane is formed by joining of two half-planes made from different materials. Mechanical properties of half-planes are described with the model of a John's harmonic material. The application of this model has permitted using the methods of the complex functions in the nonlinear boundary value problems. As particular case, the problem is solved for the plane with a free interface crack at given constant nominal stresses at infinity. The expressions are obtained for nominal (Piola) stresses, Cauchy stresses and displacements. From the general solutions the asymptotic expansions of these functions have been constructed

---

*Доманская Татьяна Олеговна* — аспирант; tanyath57@gmail.com

*Мальков Вениамин Михайлович* — доктор физико-математических наук, профессор; v.malkov@spbu.ru

*Малькова Юлия Вениаминовна* — кандидат физико-математических наук, доцент; y.malkova@spbu.ru

*Domanskaya Tatyana Olegovna* — postgraduate student; tanyath57@gmail.com

*Malkov Venyamin Mikhailovich* — doctor of physical and mathematical sciences, professor; v.malkov@spbu.ru

*Malkova Yulia Venyaminovna* — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; y.malkova@spbu.ru

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00065).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

in vicinities of crack tips. In nonlinear problems of uniaxial extension of a plane with a free crack it is established that the formulas which give the crack disclosing and the stress intensity factors near the crack tips coincide completely with similar formulas derived from the equations of linear elasticity. The nominal stresses have root singularity at the tips of a crack; the Cauchy stresses have no singularity. Refs 16. Figs 3. Table 1.

*Keywords:* bimaterial plane, plane-strain problem, method of complex functions, interface crack, John's harmonic material.

**Введение.** Рассматриваемая в работе модель нелинейно упругого материала была предложена Джоном [1]. Материал относится к классу гармонических, что позволяет при решении плоских задач нелинейной упругости применить методы комплексных функций. В случае малых деформаций модель приводит к закону Гука. Комплексная формулировка нелинейной плоской задачи для материала Джона предложена в статье [2]. Дальнейшее развитие комплексного метода дано в работах [3, 4] и др. В [5–7] получен ряд важных результатов для плоскости с упругим эллиптическим включением. В частности, установлено, что номинальные напряжения и напряжения Коши постоянны в области включения, если на бесконечности заданы постоянные напряжения. При одноосном или двuosном сжатии плоскости материала включения может терять устойчивость. В работах [8–11] представлен метод решения, основанный на введении функций скачков напряжений и деформаций на линии раздела материалов неоднородной плоскости, и построены точные решения ряда задач о межфазной трещине и сосредоточенных силах на линии раздела. В [8] исследована задача о межфазной трещине для случая равномерного давления на берегах. Впервые выяснилось, что существуют некоторые критические давления, пропорциональные модулю сдвига материала, превышение которых ведет к потере устойчивости и большим закритическим деформациям. Нелинейные задачи о сосредоточенной силе на границе полуплоскости описаны для разных моделей нелинейно упругого материала без использования комплексных функций [12, 13].

Следует отметить, что в литературе мало работ, посвященных решению задач о межфазных трещинах на основе полностью нелинейных уравнений теории упругости, и полученные в данной статье результаты имеют важное значение для теории и приложений.

**Общие соотношения.** Для решения задачи о межфазной трещине в неоднородной плоскости будем использовать уравнения плоской деформации для гармонического материала Джона [4].

Рассмотрим уравнения равновесия (при отсутствии объемных сил) для тензора номинальных напряжений  $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  и уравнения совместности для градиента деформации  $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{G}^T = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Запишем уравнения (1) в комплексной форме для случая плоской деформации

$$\begin{aligned} (s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 &= 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

штрих и индекс внизу обозначают частные производные по декартовым координатам  $(x_1, x_2)$  отсчетной конфигурации.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  и комплексную функцию номинальных напряжений  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ .

Функция  $\zeta$  представляет текущие координаты точки, физический смысл функции  $\sigma$  ясен из соотношения

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 = i \int (s_{n1} + is_{n2}) ds + \text{const},$$

здесь  $s_{n1} + is_{n2} = (s_{11} + is_{12}) \cos(n, x_1) + i(s_{22} - is_{21}) \cos(n, x_2)$ ;  $\sigma_1, \sigma_2$  — проекции на оси координат главного вектора сил на дуге  $s$ ;  $n$  — нормаль к дуге.

Уравнения (2) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$s_{11} + is_{12} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad s_{22} - is_{21} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad (3)$$

$$g_{11} + ig_{21} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad g_{22} - ig_{12} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (4)$$

Комплексные функции  $\zeta(z, \bar{z})$  и  $\sigma(z, \bar{z})$  находятся с помощью соотношений упругости и граничных условий задачи.

Из формул (4) получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega}, \quad (5)$$

$$e^{i\omega} = \frac{g_{11} + g_{22} + i(g_{21} - ig_{12})}{\sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 + (g_{21} - g_{12})^2}},$$

$\omega$  является углом поворота окрестности точки среды в результате деформации [14].

**Гармонический материал Джона.** Используемый в работе упругий потенциал материала Джона имеет вид [4]

$$\Phi = 2\mu[F(I) - J], \quad I = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|, \quad J = \lambda_1 \lambda_2, \quad (6)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — главные кратности удлинений;  $F(I)$  — некоторый функционал.

Найдем номинальные напряжения для потенциала (6):

$$s_{11} + is_{12} = 2\mu \left[ \frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right], \quad (7)$$

$$s_{22} - is_{21} = 2\mu \left[ \frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right].$$

Подставив напряжения (7) в (3), придем к системе двух уравнений для функций  $\sigma$  и  $\zeta$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 4\mu \frac{1}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) получаем

$$\sigma + 2\mu\zeta = \varphi(z), \quad (10)$$

где  $\varphi(z)$  — аналитическая функция от  $z$ . Используя (10), преобразуем уравнение (8):

$$4\mu \frac{1}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varphi'(z) \Rightarrow 2\mu F'(I) = |\varphi'(z)|. \quad (11)$$

Равенство (11) показывает, что вместо функционала  $F'(I)$  можно задать инвариант  $I$  как функцию от  $|\varphi'(z)|$ , что существенно упрощает решение уравнений (8), (9). Следуя работам [3, 4], положим

$$I(|\varphi'(z)|) = 2|\varphi'(z)| \left[ b + c \frac{1}{|\varphi'(z)|^2} \right]. \quad (12)$$

Постоянные  $b$  и  $c$  однозначно определяются из условий перехода нелинейного закона упругости в закон Гука при малых деформациях:

$$4\mu b = 1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad c = \mu \left( 1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) = 2\mu(1 - 2\mu b).$$

Выражению (12) соответствует функционал

$$2\mu F'(I) = \frac{1}{4b} [I + \sqrt{I^2 - 16bc}].$$

Учитывая (12), из уравнений (8), (10) найдем потенциалы  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ :

$$\zeta = b\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\varphi'(z)}, \quad (13)$$

$$\sigma = (1 - 2\mu b)\varphi(z) - 2\mu\overline{\psi(z)} - 2\mu\frac{cz}{\varphi'(z)},$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  — аналитические функции комплексной переменной  $z$ .

Продифференцируем функцию  $\zeta$  по переменной  $z$ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = b\varphi'(z) + \frac{c}{\varphi'(z)}.$$

Подставив значение производной в формулу (5), получим

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}}.$$

Введем вспомогательную функцию  $\Omega(z)$ , это позволит упростить уравнения граничных задач и их решение:

$$\Omega(z) = \frac{c}{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} - c \frac{\overline{z\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)}.$$

Формулы для номинальных напряжений и деформаций таковы:

$$s_{11} + is_{12} = (1 - 2\mu b)\varphi'(z) - 2\mu \left[ \frac{2c}{\varphi'(z)} - \Omega(\bar{z}) + c \frac{(z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} \right],$$

$$s_{22} - is_{21} = (1 - 2\mu b)\varphi'(z) - 2\mu \left[ \Omega(\bar{z}) - c \frac{(z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} \right], \quad (14)$$

$$s_{11} + is_{12} + 2\mu(g_{22} - ig_{12}) = \varphi'(z),$$

$$s_{22} - is_{21} + 2\mu(g_{11} + ig_{21}) = \varphi'(z).$$

На линии сопряжения полуплоскостей последние слагаемые в формулах для напряжений обращаются в нуль, что значительно упрощает вид граничных условий на этой линии.

**Задача о межфазной трещине.** Рассмотрим неоднородную плоскость с межфазной трещиной. Трещина расположена на промежутке  $[-a, a]$  линии сопряжения

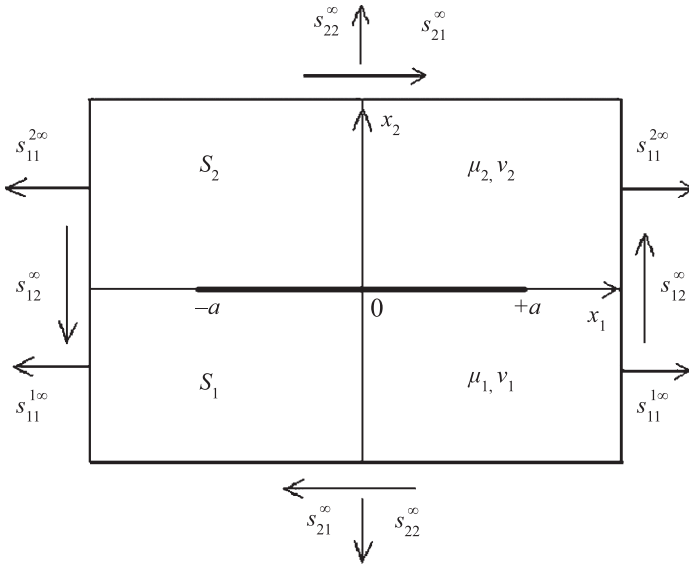


Рис. 1. Неоднородная плоскость с межфазной трещиной

полуплоскостей (рис. 1). На бесконечности (в пределе при  $|z| \rightarrow \infty$ ) заданы напряжения  $s_{ij} \rightarrow s_{ij}^\infty$  (свои для каждой полуплоскости). Берега трещины свободны:

$$(s_{22} - is_{21})^+ = 0, \quad (s_{22} - is_{21})^- = 0, \quad |x_1| < a. \quad (15)$$

Введем две комплексные функции, аналитические во всей плоскости, кроме линии раздела материалов:

$$h(z) = (1 - 2\mu_2 b_2) \varphi_2'(z) + 2\mu_1 \Omega_1(z), \quad z \in S_2,$$

$$r(z) = b_2 \varphi_2'(z) - \Omega_1(z), \quad z \in S_2.$$

Для нижней полуплоскости комплексные функции  $h(z)$  и  $r(z)$  получим циклической перестановкой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  в правых частях этих равенств.

Граничные условия (15) приводят к системе уравнений Римана–Гильберта [15] для функций  $h(z)$  и  $r(z)$

$$h^+(t) - h^-(t) = 0, \quad r^+(t) + \delta r^-(t) = 0, \quad t \in (-a, a), \quad (16)$$

$$\delta = \frac{\mu_2 + 3\mu_1 - 4\nu_2\mu_1}{\mu_1 + 3\mu_2 - 4\nu_1\mu_2}.$$

Решение уравнений (16) таково:

$$h(z) = h(\infty), \quad (r - Dh)(z) = AX(z)(z - 2i\beta a),$$

где

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln \delta}{2\pi},$$

$$A = \frac{(\mu_2 + 3\mu_1 - 4\nu_2\mu_1)(\mu_1 + 3\mu_2 - 4\nu_1\mu_2)}{8\mu_1\mu_2[\mu_1(1-\nu_2) + \mu_2(1-\nu_1)]} (s_{22}^\infty - is_{21}^\infty),$$

$$D = \frac{1 + 2\nu_1\nu_2 - 1,5(\nu_1 + \nu_2)}{\mu_1(1-\nu_2) + \mu_2(1-\nu_1)}.$$

Постоянная  $h(\infty)$  находится через напряжения на бесконечности по формуле

$$h(\infty) = (1 - 2\mu_2 b_2)\varphi_2'(\infty) + (1 - 2\mu_1 b_1)\varphi_1'(\infty) - (s_{22}^\infty - is_{21}^\infty),$$

здесь

$$\varphi'(\infty) = \left[ \frac{s + \sqrt{s^2 + 32\mu c(1 - 2\mu b)}}{4(1 - 2\mu b)} e^{i\omega} \right] (\infty),$$

$$s = \sqrt{(s_{11} + s_{22})^2 + (s_{12} - s_{21})^2},$$

$$e^{i\omega} = \text{sign}(s_{11} + s_{22}) \frac{s_{11} + is_{12} + s_{22} - is_{21}}{s}.$$

По формулам (14) найдем для верхней полуплоскости  $S_2$  точные значения номинальных напряжений:

$$s_{11} + is_{12} = h(\infty) \left( 1 + \frac{(1 - 2\mu_2 b_2)(1 + 2\mu_1 D)}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{(1 - 2\mu_1 b_1)(1 + 2\mu_2 D)}{1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1)} \right) +$$

$$+ \frac{2\mu_1(1 - 2\mu_2 b_2)A}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} X(z)(z - 2i\beta a) - \frac{2\mu_2(1 - 2\mu_1 b_1)A}{1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1)} X(\bar{z})(\bar{z} - 2i\beta a) -$$

$$- \frac{4\mu_2 c_2(1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2))}{h(\infty)(1 + 2\mu_1 D) + 2\mu_1 \overline{AX(z)}(\bar{z} + 2i\beta a)},$$

$$s_{22} - is_{21} = -h(\infty) \left( 1 - \frac{(1 - 2\mu_2 b_2)(1 + 2\mu_1 D)}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{(1 - 2\mu_1 b_1)(1 + 2\mu_2 D)}{1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1)} \right) +$$

$$+ \frac{2\mu_1(1 - 2\mu_2 b_2)A}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} X(z)(z - 2i\beta a) + \frac{2\mu_2(1 - 2\mu_1 b_1)A}{1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1)} X(\bar{z})(\bar{z} - 2i\beta a).$$

Напряжения для нижней полуплоскости  $S_1$  получим циклической перестановкой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  в правых частях этих равенств.

Выполним расчеты номинальных напряжений на межфазной линии для верхней и нижней полуплоскостей ( $S_1$  и  $S_2$ ) в окрестностях концов трещины. На рис. 2 приведены напряжения  $s_{11}$  (а),  $s_{12}$  (б),  $s_{22}$  (в) и  $s_{21}$  (г) (кг/см<sup>2</sup>) для нагрузки  $s_{22}^\infty = 30$  кг/см<sup>2</sup> как функции от  $x_1$ .

Параметры системы следующие:  $\mu_1 = 10$  кг/см<sup>2</sup>,  $\mu_2 = 50$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0.48$ ,  $\nu_2 = 0.45$ ,  $s_{21}^\infty = 0$ ,  $a \in [-1, 1]$ .

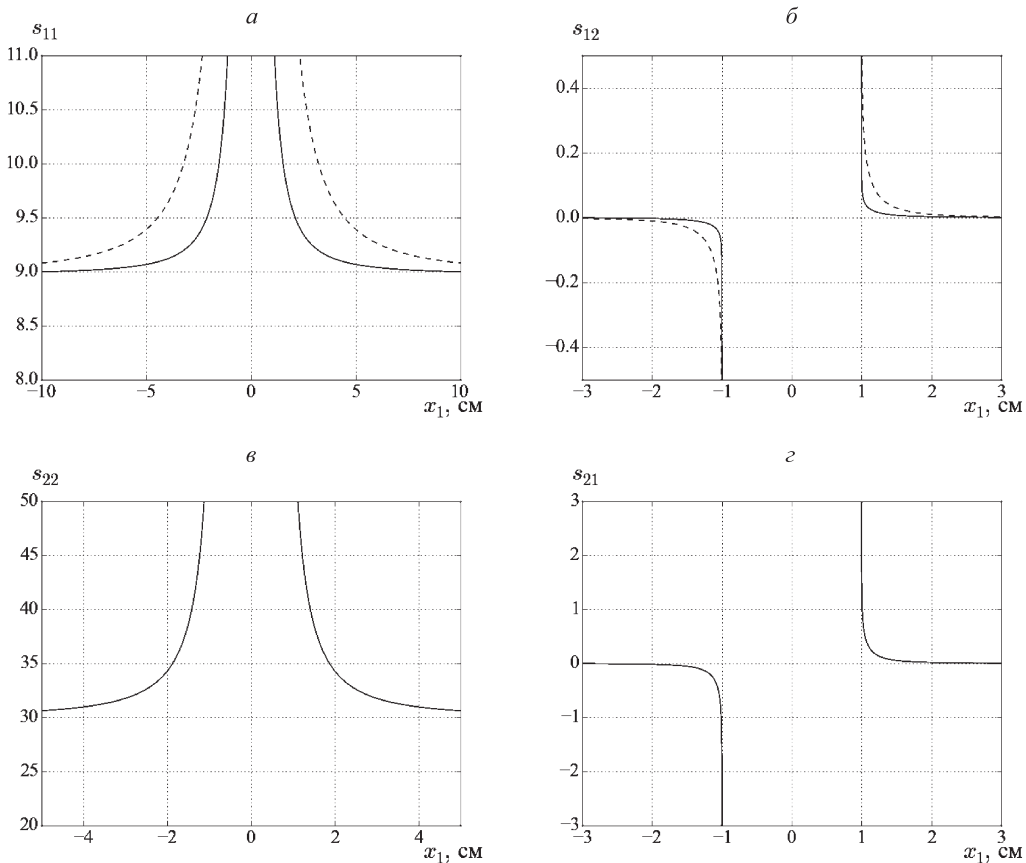


Рис. 2. Номинальные напряжения  $s_{ij}$  для верхней полуплоскости  $S_2$  (пунктирная линия) и нижней полуплоскости  $S_1$  (сплошная линия)

По графикам можно определить, что напряжения  $s_{22}$  и  $s_{21}$  для верхней и нижней полуплоскостей (рис. 2, в и г) совпадают, а напряжения  $s_{11}$  и  $s_{12}$  различаются. В окрестностях концов трещины наблюдается скачок напряжений.

Перемещение берегов трещины вычисляется по формуле

$$\Delta(u_1 + iu_2)(t) = \frac{1}{2\mu_2}[\varphi_2(t)]^+ - \frac{1}{2\mu_1}[\varphi_1(t)]^-,$$

$$\Delta(u_1 + iu_2)(z) = 2h(\infty) \left( \frac{(1 - \nu_2)(1 + 2\mu_1 D)}{\mu_2 + 3\mu_1 - 4\nu_2\mu_1} - \frac{(1 - \nu_2)(1 + 2\mu_2 D)}{\mu_1 + 3\mu_2 - 4\nu_1\mu_2} \right) z +$$

$$+ \frac{i(s_{22}^\infty - is_{21}^\infty)}{2\mu_1\mu_2} \sqrt{(\mu_1 + 3\mu_2 - 4\nu_1\mu_2)(\mu_2 + 3\mu_1 - 4\nu_2\mu_1)} \sqrt{z^2 - a^2} \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{i\beta}.$$

Рассмотрим случай одноосного растяжения плоскости напряжениями  $s_{22}^\infty$ . Касательные напряжения на бесконечности равны нулю. Вертикальные перемещения верхнего и нижнего берегов трещины определяются выражениями

$$u_2^+(z) = \frac{s_{22}^\infty(1 - \nu_2)\sqrt{1 - z^2}}{2\mu_2[\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 - \nu_1)]} \sqrt{(\mu_1 + 3\mu_2 - 4\nu_1\mu_2)(\mu_2 + 3\mu_1 - 4\nu_2\mu_1)} \cos \left[ \beta \ln \frac{1+z}{1-z} \right],$$

$$u_2^-(z) = \frac{-s_{22}^\infty(1-\nu_1)\sqrt{1-z^2}}{2\mu_1[\mu_1(1-\nu_2)+\mu_2(1-\nu_1)]} \sqrt{(\mu_1+3\mu_2-4\nu_1\mu_2)(\mu_2+3\mu_1-4\nu_2\mu_1)} \cos \left[ \beta \ln \frac{1+z}{1-z} \right].$$

Скачок перемещений находится по формуле

$$\Delta u_2(z) = \frac{s_{22}^\infty \sqrt{1-z^2}}{2\mu_1\mu_2} \sqrt{(\mu_1+3\mu_2-4\nu_1\mu_2)(\mu_2+3\mu_1-4\nu_2\mu_1)} \cos \left[ \beta \ln \frac{1+z}{1-z} \right].$$

Аналогичная линейная задача о трещине в неоднородной плоскости решена в работе [16]. Оказалось, что формулы для скачка перемещений берегов трещины  $\Delta u_2(z)$  нелинейной и линейной задач полностью совпадают.

Исследуем перемещение берегов трещины при следующих параметрах материала:  $\mu_1 = 10 \text{ кг/см}^2$ ,  $\mu_2 = 50 \text{ кг/см}^2$ ,  $\nu_1 = 0.48$ ,  $\nu_2 = 0.45$ . На рис. 3 представлены перемещения берегов при одноосном растяжении плоскости напряжениями  $s_{22}^\infty = 10 \text{ кг/см}^2$ ,  $s_{22}^\infty = 30 \text{ кг/см}^2$  и  $s_{22}^\infty = 50 \text{ кг/см}^2$ .

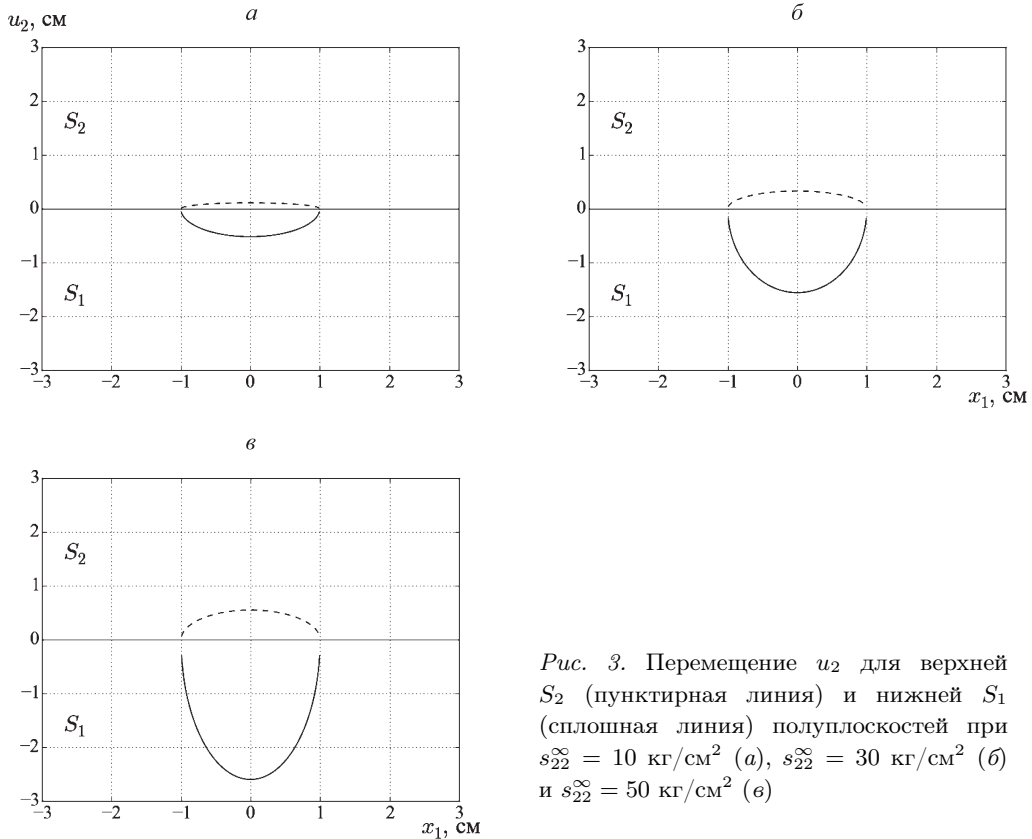


Рис. 3. Перемещение  $u_2$  для верхней  $S_2$  (пунктирная линия) и нижней  $S_1$  (сплошная линия) полуплоскостей при  $s_{22}^\infty = 10 \text{ кг/см}^2$  (а),  $s_{22}^\infty = 30 \text{ кг/см}^2$  (б) и  $s_{22}^\infty = 50 \text{ кг/см}^2$  (в)

В таблице приведены значения отклонений верхних и нижних берегов и раскрытия трещины при указанных выше нагрузках.



## Перемещение берегов трещины при различных нагрузках

Нагрузка	$u_2$ , см, при $s_{22}^\infty$ , кг/см <sup>2</sup>		
	10	30	50
$u_2^+$	0.11	0.33	0.55
$u_2^-$	0.52	1.56	2.60
$\Delta u_2$	0.63	1.89	3.15

Вычислим коэффициенты интенсивности номинальных напряжений в окрестности концов трещины, используя формулы

$$K^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \pm 1 \pm 0} [(\pm\tau - 1)^{0,5 \pm i\beta} (s_{22} - is_{21})(\tau)] = \\ = \pm \sqrt{\pi} (1 \mp 2i\beta) 2^{\pm i\beta} (s_{22}^\infty - is_{21}^\infty)(\tau),$$

где  $\tau = x_1/a$  — безразмерная переменная на линии раздела. Такие же коэффициенты интенсивности были получены в линейной задаче о межфазной трещине [16].

Построим асимптотические разложения напряжений в окрестности правого конца трещины. Положим  $z = a + re^{i\theta}$ , разложение номинальных напряжений для верхней полуплоскости  $S_2$  при  $r \rightarrow 0$  равно

$$s_{11} + is_{12} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ h(\infty) \left( 2\mu_2 M_2 + \frac{1 + 2\mu_1 D}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} \right) \sqrt{r} + d_2 \sqrt{Y_2} \right] + O(\sqrt{r}), \quad (17)$$

$$s_{22} - is_{21} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ h(\infty) \left( -2\mu_2 R_2 + \frac{1 + 2\mu_1 D}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} \right) \sqrt{r} + l_2 \sqrt{V_2} \right] + O(\sqrt{r}).$$

Напряжения для нижней полуплоскости  $S_1$  получим циклической перестановкой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  в правых частях этих равенств. Видим, что напряжения имеют корневую особенность у конца трещины.

Рассмотрим истинные напряжения Коши. Для тензоров условных  $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  и истинных напряжений Коши  $\mathbf{T} = t_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  имеет место соотношение [14]

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1} \cdot J \mathbf{T},$$

в котором  $J = \det \mathbf{G} = \lambda_3 (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$  — кратность изменения объема. Отсюда следует зависимость между векторами напряжений

$$s_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot J \mathbf{T} = \varkappa_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{T} = \varkappa_i t_i.$$

Для истинных напряжений Коши справедливы формулы

$$s_{11} + it_{12} = \frac{s_{11} + is_{12}}{\varkappa_1}, \quad t_{22} - it_{21} = \frac{s_{22} - is_{21}}{\varkappa_2}. \quad (18)$$

Найдем из равенства  $\varkappa_i = |\mathbf{e}_i \cdot J \mathbf{G}^{-1}|$  кратности изменения площади

$$\varkappa_1 = \lambda_3 \sqrt{g_{22}^2 + g_{12}^2}, \quad \varkappa_2 = \lambda_3 \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}.$$

Определим асимптотические разложения кратностей изменения площади для верхней полуплоскости  $S_2$  при  $r \rightarrow 0$  по уравнениям

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{Y_2} \left( 1 - \frac{m_2 \overline{L_2} + \overline{m_2} L_2}{2Y_2} \sqrt{r} \right) + O(\sqrt{r}),$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{V_2} \left( 1 + \frac{p_2 \overline{E_2} + \overline{p_2} E_2}{2V_2} \sqrt{r} \right) + O(\sqrt{r}).$$

При плоской деформации  $\lambda_3 = 0$ , следовательно, кратности изменения площади имеют особенность  $1/\sqrt{r}$  при  $r \rightarrow 0$ . Из формул (17), (18) вычислим асимптотические разложения напряжений Коши

$$t_{11} + it_{12} = d_2 + \frac{1}{\sqrt{Y_2}} \left[ h(\infty) \left( 2\mu_2 M_2 + \frac{1 + 2\mu_1 D}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} \right) + \frac{d_2(m_2 \overline{L_2} + \overline{m_2} L_2)}{2\sqrt{Y_2}} \right] \sqrt{r} + O(r),$$

$$t_{22} - it_{21} = l_2 + \frac{1}{\sqrt{V_2}} \left[ h(\infty) \left( -2\mu_2 R_2 + \frac{1 + 2\mu_1 D}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)} \right) - \frac{l_2(p_2 \overline{E_2} + \overline{p_2} E_2)}{2\sqrt{V_2}} \right] \sqrt{r} + O(r),$$

где  $M_k, R_k, Y_k, V_k, L_k, E_k, d_k, l_k, m_k, p_k, k = 1, 2$ , — некоторые постоянные. Асимптотические разложения для нижней полуплоскости  $S_1$  найдем циклической перестановкой индексов  $1 \rightarrow 2$  в правых частях этих равенств. Истинные напряжения Коши не имеют особенности в окрестности концов трещины.

**Заключение.** Получено точное решение нелинейной плоской задачи теории упругости (плоская деформация) для композитной плоскости с межфазной трещиной на линии соединения полуплоскостей. Механические свойства полуплоскостей описываются моделью гармонического материала Джона. Ее использование позволило применить теорию комплексных функций в нелинейной задаче и найти аналитическое решение. Исходя из общего решения построена асимптотика номинальных и истинных напряжений в окрестности конца трещины. Выведены формулы для перемещений берегов трещины.

Номинальные напряжения нелинейной задачи обладают особенностью типа  $1/\sqrt{r}$  при  $r \rightarrow 0$  у концов трещины, истинные напряжения Коши ее не имеют. Перемещения содержат осцилляцию в окрестностях концов трещины.

Сравнение коэффициентов интенсивности напряжений и формул для раскрытия трещины нелинейной и линейной задач при одноосном растяжении плоскости показало, что они полностью совпадают.

## Литература

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. 1960. Vol. 13, N 2. P. 239–296.
2. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // Journal of Elasticity. 1980. Vol. 10, N 4. P. 341–405.
3. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156, N 3–4. P. 219–234.
4. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.
5. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // Intern. Journal of Non-linear mechanics. 2005. Vol. 38, N 2–3. P. 281–287.
6. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Моделирование нелинейной деформации плоскости с эллиптическим отверстием или включением гармоническим материалом Джона // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62), вып. 1. С. 121–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.114
7. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. Modeling Nonlinear Deformation of a Plate with an Elliptic Inclusion by John's Harmonic Material // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. 2017. Vol. 50, iss. 1. P. 74–81. DOI: 10.3103/S1063454117010095
8. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Степанова В. А. Двухкомпонентная плоскость из материала Джона с межфазной трещиной, нагруженной давлением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 3. С. 113–125.

9. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Доманская Т. О. Анализ напряжений двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы для двух моделей гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 1. С. 38–52.

10. Domanskaia T., Malkov V., Malkova Yu. Bi-material plane of John's harmonic material with a point force at interface // XXIV Intern. Congress of Theor. and Appl. Mech. (ICTAM), 21–26 August 2016. Montreal, Canada, 2016. P. 1958–1959.

11. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Нелинейная задача для композитной пластины с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Труды Второй междунар. конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» (DFCMS–2016). Октябрь 2016. М.: ИМАШ РАН, 2016. С. 33–35.

12. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Исследование нелинейной задачи Фламана // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 5. С. 68–78.

13. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Анализ сингулярности напряжений в нелинейной задаче Фламана для некоторых моделей материала // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 3. С. 453–462.

14. Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 276 с.

15. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

16. Малькова Ю. В. Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 160 с.

**Для цитирования:** Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Математическое моделирование деформации композитной плоскости с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 372–383. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.404>

## References

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1960, vol. 13. no. 2, pp. 239–296.

2. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes. *Journal of Elasticity*, 1980, vol. 10, no. 4, pp. 341–405.

3. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. *Acta Mechanica*, 2002, vol. 156, no. 3–4, pp. 219–234.

4. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskaya zadacha nelineynoy uprugosti dlya garmonicheskogo materiala [Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2008, iss. 3, pp. 114–126. (In Russian)

5. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics. *Intern. Journal of Non-linear mechanics*, 2005, vol. 38, no. 2–3, pp. 281–287.

6. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Modelirovanie nelineynoy deormacii ploskosti s ellipticheskim otverstiem ili vklucheniem garmonicheskim materialom Djona [Modeling nonlinear deformation of a plane with an elliptic inclusion by John's harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), iss. 1, pp. 121–130. (In Russian) DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.114

7. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. Modeling Nonlinear Deformation of a Plate with an Elliptic Inclusion by John's Harmonic Material. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, 2017, vol. 50, iss. 1, pp. 74–81. DOI: 10.3103/S1063454117010095

8. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Stepanova V. A. Dvuhkomponentnaya ploskost is materiala Dzhona s mezhfaznoy treshinoy, nagruzhennoy davleniem [Bi-material plane of John's material with interface crack loaded by pressure]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2013, iss. 3, pp. 113–125. (In Russian)

9. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Domanskaya T. O. Analiz napryazheniy dvuhkomponentnoy ploskosti i poluploskosti pri deystvii sosredotochennoy sily dlya dvuh modeley garmonicheskogo materiala [Analysis of stresses of bi-material plane and half-plane at action of a point force for two models of harmonic materials]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, iss. 1, pp. 38–52. (In Russian)

10. Domanskaia T., Malkov V., Malkova Yu. Bi-material plane of John's harmonic material with a point force at interface. *XXIV Intern. Congress of Theor. and Appl. Mech. (ICTAM)*, 21–26 August 2016. Montreal, Canada, 2016, pp. 1958–1959.

11. Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V. Nelineinaya zadacha dlya kompozitnoy plastinu s meifaznoy trechinoy dlya garmonicheskogo materiala Djona [Nonlinear problem for bi-material plate with interface crack for harmonic John's material]. *2nd Intern. Conference "Deformation and Failure of Composite Materials and Structures"*. (DFCMS-2016). October 2016. Moscow, Institute of Engineering RAS Publ., 2016, pp. 33–35. (In Russian)
12. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Issledovanie nelineynoy zadachi Flamana [Investigation of non-linear Flamant's problem]. *Izv. RAS. Mechanics of solids*, 2006, no. 5, pp. 68–78. (In Russian)
13. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Analiz singulyarnosti napryazheniy v nelineynoy zadache Flamana dlya nekotorykh modeley materiala [Analysis of singularity of stresses in non-linear Flamant's problem for some material models]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 3, pp. 453–462. (In Russian)
14. Malkov V. M. *Vvedenie v nelineynuyu uprugost [Introduction to non-linear elasticity]*. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2010, 276 p. (In Russian)
15. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p. (In Russian)
16. Malkova Yu. V. *Nekotorye zadachi dlya dvuhkomponentnoy ploskosti s krivolinyeynymi treshinami [Some problems for bi-material plane with curvilinear cracks]*. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2008, 160 p. (In Russian)

**For citation:** Domanskaya T. O., Malkov V. M., Malkova Yu. V. Mathematical modeling of the deformation of composite plane with interface crack for John's harmonic material. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 372–383. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.404>

Статья рекомендована к печати проф. Н. В. Егоровым.

Статья поступила в редакцию 11 мая 2017 г.

Статья принята к печати 12 октября 2017 г.