УДК 517.925.5

НОРМАЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ $(\alpha\mathbf{x_1^2} + \mathbf{x_1x_2}, \mathbf{x_1x_2})$

В. В. Басов, Е. В. Федорова

Санкт-Петербургский государственный университет, г.Санкт-Петербург, Россия
e-mail: basov@VB16480.spb.edu, ef@bk.ru

1. Введение.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1^2 + x_1x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = x_1x_2 + X_2(x_1, x_2) \quad (0 < |\alpha| \le 1), \tag{1.1}$$

где возмущение $X_i = \sum_{p=2}^{\infty} X_i^{(p+1)}(x)$, а форма $X_i^{(p+1)} = \sum_{s=0}^{p+1} X_i^{(s,p+1-s)} x_1^s x_2^{p+1-s}$ $(i = 1, 2)$.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_1 = y_1 + h_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = y_2 + h_2(y_1, y_2), \tag{1.2}$$

где $h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y_1, y_2)$, $h_i^{(p)} = \sum_{s=0}^{p} h_i^{(s,p-s)} y_1^s y_2^{p-s}$, переводит (1.1) в систему

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_1y_2 + Y_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = y_1y_2 + Y_2(y_1, y_2) \quad (0 < |\alpha| \le 1), \tag{1.3}$$

в которой $Y_i = \sum_{p=2}^{\infty} Y_i^{(p+1)}(y_1, y_2)$, $Y_i^{(p+1)} = \sum_{s=0}^{p+1} Y_i^{(s,p+1-s)} y_1^s y_2^{p+1-s}$ $(i = 1, 2)$.

Тогда говорят, что системы (1.1) и (1.3) формально эквивалентны.

В работе [1] был разработан конструктивный метод "резонансных уравнений", применяемый к системам произвольного порядка, матрица линейной части которых имеет нулевые собственные числа, и позволяющий в явном виде указывать все возможные структуры систем, формально эквивалентных исходной, и, как следствие, все возможные структуры наиболее простых систем – обобщенных нормальных форм (ОНФ) – формально эквивалентных исходной системе. В настоящей работе этот метод применяется к системе (1.1).

Согласно введенной в [2] классификации, основанной на минимизации числа ненулевых членов, $(\alpha, 1, 0)(0, 1, 0)$ – невозмущенная часть системы (1.1) – уже приведена к одной из 17 канонических форм, на которые можно разбить линейными неособыми заменами множество двумерных систем, невозмущенная часть которых является произвольной формой второго порядка $(a_1, 2b_1, c_1)(a_2, 2b_2, c_2)$.

Отметим также, что различные методы нормализации систем, матрица линейной части которых имеет нулевые собственные числа, обсуждаются в [3], [4]. При помощи метода резонансных уравнений в [4] исследованы системы, имеющие линейно-квадратичную невозмущенную часть. Далее, в [2], [5], [6] и в предлагаемой работе исследованы системы с 11 различными каноническими формами квадратичной невозмущенной части. Наконец, в [1], [7] методом резонансных уравнений были исследованы системы, в невозмущенные части которых входят кубические члены, а именно, $(x_2, -x_1^3)$ и $(x_2^3, -x_1^3)$.

2. Вывод резонансных уравнений.

Дифференцируя по t замену (1.2) в силу систем (1.1) и (1.3), получаем, что при любом $p \geq 2$ однородные полиномы $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p+1)}$удовлетворяют следующим двум уравнениям:

$$\begin{gathered}(\alpha y_1^2 + y_1 y_2)\frac{\partial h_1^{(p)}}{\partial y_1} + y_1 y_2 \frac{\partial h_1^{(p)}}{\partial y_2} - (2\alpha y_1 + y_2) h_1^{(p)}(y) - y_1 h_2^{(p)}(y) = \widehat{Y}_1^{(p+1)}, \\ (\alpha y_1^2 + y_1 y_2)\frac{\partial h_2^{(p)}}{\partial y_1} + y_1 y_2 \frac{\partial h_2^{(p)}}{\partial y_2} - y_1 h_2^{(p)}(y) - y_2 h_1^{(p)}(y) = \widehat{Y}_2^{(p+1)},\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\widehat{Y}_i^{(p+1)} = \widetilde{Y}_i^{(p+1)}(y) - Y_i^{(p+1)}(y)$, а $\widetilde{Y}_i^{(p+1)} = \{X_i(y+h) + P_i(h) - \sum_{j=1}^2 (\partial h_i/\partial y_j) Y_j\}^{(p+1)}$ и зависят только от $h^{(r)}$ и $Y^{(r+1)}$ с $2 \leq r \leq p-1$, т.е. последовательно опеределяются.

Введем обозначения: $h_{is}^p = h_i^{(s,p-s)}$ $(0 \leq s \leq p)$, $h_{is}^p = 0$ $(s < 0,\ s > p)$; $\widehat{Y}_{is}^{p+1} = \widetilde{Y}_i^{(s,\,p+1-s)} - Y_i^{(s,\,p+1-s)}$ $(0 \leq s \leq p+1)$, $\widehat{Y}_{is}^{p+1} = 0$ $(s < 0,\ s > p+1)$.

Приравнивая в (2.1) коэффициенты при $y_1^s y_2^{p+1-s}$ $(0 \leq s \leq p+1,\ p \geq 2)$, получаем систему

$$\begin{aligned}&(p - s + 1 + \alpha(s-3)) h_{1\,s-1}^p + (s-1) h_{1s}^p - h_{2\,s-1}^p = \widehat{Y}_{1s}^{p+1}, \\ &(p - s + \alpha(s-1)) h_{2\,s-1}^p + s h_{2s}^p - h_{1s}^p = \widehat{Y}_{2s}^{p+1} \qquad (s = \overline{0, \ldots, p+1}).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Выделим из системы (2.2) оба уравнения с $s = 0:$

$$-h_{i0}^p = \widehat{Y}_{i0}^{p+1} \quad (i = 1, 2). \tag{2.3}$$

Они фиксируют h_{10}^p и задают первую связь на коэффициенты $Y_i^{(p+1)}:$

$$\widehat{Y}_{10}^{p+1} - \widehat{Y}_{20}^{p+1} = 0 \qquad (p \geq 2). \tag{2.4}$$

Подставляя h_{2s-1}^p с $s = \overline{1, p+1}$ из первой подсистемы (2.2) во вторую, получаем систему

$$c_s h_{2\,s-1}^p + a_s h_{2s}^p + b_s h_{1\,s+1}^p = \widehat{Y}_{0s}^{p+1} \qquad (s = \overline{1, \ldots, p+1}), \tag{2.5}$$

где $c_s = (p-s+1+\alpha(s-3))(p-s+\alpha(s-1))$ $(s = \overline{1, p+1})$, $a_s = (p-s)(2s-1) - 1 + \alpha(2s^2 - 4s + 1)$ $(s = \overline{1, p})$, $b_s = s^2$ $(s = \overline{1, p-1})$, $\widehat{Y}_{0s}^{p+1} = (p - s + \alpha(s-1))\widehat{Y}_{1s}^{p+1} + s\widehat{Y}_{1s+1}^{p+1} + \widehat{Y}_{2s}^{p+1}$ $(s = \overline{1, p+1})$.

При $p = 2$ система (2.5) имеет вид $2(1-\alpha)h_{10}^2 - \alpha h_{11}^2 + h_{12}^2 = \widehat{Y}_{01}^3$, $\alpha(1-\alpha)h_{11}^2 - (1-\alpha)h_{12}^2 = \widehat{Y}_{02}^3$, $0 \cdot h_{12}^2 = \widehat{Y}_{03}^3$. С учетом равенства (2.3) она совместна, если выполняются две резонансные связи

$$2(1-\alpha)^2 \widehat{Y}_{10}^3 + (1-\alpha)\widehat{Y}_{11}^3 + \widehat{Y}_{12}^3 + 2\widehat{Y}_{13}^3 + (1-\alpha)\widehat{Y}_{21}^3 + \widehat{Y}_{22}^3 = 0, \quad (2\alpha - 1)\widehat{Y}_{13}^3 + \widehat{Y}_{23}^3 = 0, \tag{2.6}$$

при этом компонента h_{12}^2 не имеет ограничений.

Пусть теперь $p \geq 3$. Запишем систему (2.5) в матричном виде, перенеся в ее первом уравнении слагаемое $c_1 h_{10}^p$ из левой части в правую:

$$\Theta^p h_1^p = Y_0^p \qquad (p \geq 3), \tag{2.7}$$

где Θ^p – трехдиагональная $(p+1) \times p$ матрица с элементами $\theta_{ss} = a_s$, $\theta_{s+1\,s} = c_{s+1}$ $(s = \overline{1, p})$, $\theta_{s\,s+1} = b_s$ $(s = \overline{1, p-1})$; $h_1^p = (h_{11}^p, \ldots, h_{1p}^p)$, Y_0^p – вектор с компонентами $Y_{01}^p = \widehat{Y}_{01}^{p+1} - c_1 h_{10}^p$, $Y_{0s}^p = \widehat{Y}_{0s}^{p+1}$ $(s = \overline{2, p+1})$.

Постараемся методом Гаусса аннулировать поддиагональ $(c_2, \ldots, c_{p+1})$ матрицы Θ^p, для чего введем рекуррентную последовательность $d_s:$

$$d_1 = a_1, \quad d_s = a_s - b_{s-1} c_s / d_{s-1}, \text{ если } d_{s-1} \neq 0 \quad (2 \leq s \leq p). \tag{2.8}$$

Возможны два случая: 1) $\exists\ \check{s}$ $(1 \leq \check{s} \leq p) : d_1, \ldots, d_{\check{s}-1} \neq 0$, $d_{\check{s}} = 0$; 2) $d_1, \ldots, d_p \neq 0$, положим тогда $\check{s} = p + 1$.

Лемма 1. *Для элементов d_s из (2.8) справедлива прямая формула*

$$d_s = s(p-s+\alpha(s-2))(p-s-1-\alpha)/(p-s-\alpha), \tag{2.9}$$

где $s=\overline{1,\breve{s}}$ в случае 1) и $s=\overline{1,p}$ в случае 2).

Доказательство. При $s=1$ в (2.8) и (2.9) $d_1=p-\alpha-2$, что дает базу индукции. Предположим, что $d_{s-1}=(s-1)(p-s-\alpha)(p-s+1+\alpha(s-3))/(p-s+1-\alpha)$ при $s\geq 2$. Тогда согласно (2.8) $d_s=a_s-b_{s-1}c_s/d_{s-1}=(p-s)(2s-1)-1+\alpha(2s^2-4s+1)-(s-1)(p-s+\alpha(s-1))(p-s+1-\alpha)/(p-s-\alpha)=((p-s-\alpha)((p-s)s-1+\alpha s(s-2))-((p-s)s+\alpha s(s-2)-(p-s-\alpha)))/(p-s-\alpha)$, а это выражение в точности совпадает с d_s из (2.9).

Разобьем множество пар (α,p) $(0<|\alpha|\leq 1,\ p\geq 3)$ на четыре непересекающихся семейства и для каждого введем отвечающую ему константу $s:$

$$\{\alpha,p\}_1=\{-k/l,\ (k+l)n+2\}_{k,l,n\in\mathbb{N},\ k\leq l},\ s_1=ln+2;\quad \{\alpha,p\}_2=\{-1,\ 2n+1\}_{n\in\mathbb{N}},\ s_2=2n+1;$$
$$\{\alpha,p\}_3=\{1,\ n\}_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 3},\ s_3=n-2;\quad \{\alpha,p\}_0=\{(\alpha,p)\notin\cup_{\nu=1}^{3}\{\alpha,p\}_\nu\},\ s_0=p+1.$$

Здесь и всегда в дальнейшем k и l – взаимно простые числа.

Лемма 2. *Если пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_\nu$ $(\nu=1,2,3)$, то для элементов d_s из (2.9) реализуется случай 1) с $\breve{s}=s_\nu$, а если пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_0$, то реализуется случай 2) и $\breve{s}=s_0$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $d_s=0$.

Предположим сначала, что $p-s+\alpha(s-2)=0$. Тогда $s\neq 1,2$, поскольку $|\alpha|\leq 1$ и $p\geq 3$. При $s\geq 3$ получаем $\alpha=-(p-s)/(s-2)=-k/l$, где $k,l\in\mathbb{N}$ и $k\leq l$, так как $0<-\alpha\leq 1$. Следовательно, $p-s=kn$, $s-2=ln$ $(n\in\mathbb{N})$, откуда $s=ln+2$, $p=(k+l)n+2$, т. е. пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$ и единственный корень $s=s_1$. При этом, если $\alpha=-1$, то $k,l=1$, $p=2n+2$ – любое четное число большее трех, а $s=n+2<p$.

Предположим теперь, что $p-s-1-\alpha=0$ $(1\leq s\leq p)$. Если $\alpha=-1$, то $s=p\geq 3$. Поэтому, если $p=2n+2$, то пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$, а корень $s=2n+2>s_1$, а значит, $\breve{s}=n+2=s_1$. Если же $p=2n+1$, то $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_2$ и единственный корень $\breve{s}=2n+1=s_2$.

Если $\alpha=1$, то $s=p-2$. Поэтому пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_3$ и $\breve{s}=n-2=s_3$.

Пусть, наконец, $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_0$, тогда все входящие в d_s сомножители в нуль не обращаются при $s=\overline{1,p}$, т. е. реализуется случай 2).

Отметим, что входящий в (2.9) знаменатель при $s=1$ сокращается со вторым сомножителем в числителе, а при $s=\overline{2,\breve{s}}$ он отличен от нуля.

Система (2.7) методом Гаусса может быть преобразована в систему

$$\Theta_d^p h_1^p = Y_d^p, \tag{2.7$_d$}$$

где $\Theta_d^p=\begin{pmatrix} d_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & d_{\breve{s}-1} & b_{\breve{s}-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{\breve{s}} & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{\breve{s}+1} & a_{\breve{s}+1} & b_{\breve{s}+1} & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{\breve{s}+2} & a_{\breve{s}+2} & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{p-1} & b_{p-1}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & c_p & a_p\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{p+1} \end{pmatrix}$, Y_d^p – вектор с компонентами $Y_{d1}^p=Y_{01}^p$, $Y_{ds}^p=Y_{0s}^p-(c_s/d_{s-1})Y_{d\,s-1}^p$ для $s=\overline{2,\breve{s}}$, $Y_{ds}^p=Y_{0s}^p$ для $s=\overline{\breve{s}+1,p+1}$, a_s,b_s,c_s,d_s описаны в (2.5), (2.9) и, очевидно, $Y_{ds}^p=\sum_{j=1}^{s}(-1)^{s-j}Y_{0j}^p\prod_{\mu=j+1}^{s}c_\mu/d_{\mu-1}$ $(s=\overline{1,\breve{s}})$.

Первые $\breve{s}-1$ уравнений системы (2.7_d) однозначно разрешимы относительно $h^p_{11},\dots,h^p_{1\,\breve{s}-1}$, а уравнение с номером $\breve{s}$ имеет вид

$$0\cdot h^p_{1\,\breve{s}-1}+0\cdot h^p_{1\,\breve{s}}+b_{\breve{s}}h^p_{1\,\breve{s}+1}=Y^p_{d\breve{s}}\qquad (h^p_{1\,p+1},h^p_{1\,p+2}=0). \tag{2.10}$$

В случае 2) $\breve{s}=p+1$, поэтому Θ^p_d – двухдиагональная матрица с нулевой нижней строкой. Последнее уравнение системы (2.7_d) – уравнение (2.10) – имеет вид $0\cdot h^p_{1p}=Y^p_{d\,p+1}$.

В случае 1) последние $p+1-\breve{s}\ge 1$ уравнений системы (2.7_d) выделим в подсистему

$$\Theta^{p+}_d h^{p+}_1=Y^{p+}_d, \tag{2.7^+_d}$$

где матрица Θ^{p+}_d – верхнетреугольная с главной диагональю $(c_{\breve{s}+1},\dots,c_{p+1})$, наддиагоналями $(a_{\breve{s}+1},\dots,a_p)$, $(b_{\breve{s}+1},\dots,b_{p-1})$, а векторы $h^{p+}_1=(h^p_{1\breve{s}},\dots,h^p_{1p})$, $Y^{p+}_d=(Y^p_{0\,\breve{s}+1},\dots,Y^p_{0\,p+1})$.

Разобьем множество пар (α,p) $(0<|\alpha|\le 1,\ p\ge 3)$ другим способом на пять непересекающихся семейств с соответствующими константами s^c :

$$\begin{aligned}&\{\alpha,p\}^c_1=\{\alpha,p\}_1,\quad s^c_1=ln+3;\quad \{\alpha,p\}^c_2=\{\alpha,p\}_2,\quad s^c_2=n+1;\\ &\{\alpha,p\}^c_3=\{-k/l,\,(k+l)n+1\}_{k,l,n\in\mathbb{N},\ k<l},\quad s^c_3=ln+1;\\ &\{\alpha,p\}^c_4=\{1/n,\,n\}_{n\in\mathbb{N},\ n\ge 3},\quad s^c_4=n+1;\quad \{\alpha,p\}^c_0=\{(\alpha,p)\notin\cup^4_{\nu=1}\{\alpha,p\}^c_\nu\}.\end{aligned}$$

Лемма 3. *Если пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}^c_\nu$ $(\nu=\overline{1,4})$, то в (2.5) $c_s=0$ только при $s=s^c_\nu$, а если пара $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}^c_0$, то $c_1,\dots,c_{p+1}\ne 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Положим $c_s=c'_sc''_s$, где $c'_s=p-s+1+\alpha(s-3)$, $c''_s=p-s+\alpha(s-1)$ $(s=\overline{1,p+1})$.

Следствие 1. *В (2.5) $c_1,\dots,c_{p+1}\ne 0$, за исключением: $c'_{s_1+1}=0$, если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$; $c''_{s_2-n}=0$, если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_2$; $c''_{ln+1}=0$, если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}^c_3\subset\{\alpha,p\}_0$; $c''_{p+1}=0$, если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}^c_4\subset\{\alpha,p\}_0$.*

Следовательно, в случае 1) можно ввести матрицу $G=\{g_{js}\}^{p+1}_{j,s=\breve{s}+1}$:

$$\begin{gathered}\forall\ s=\overline{\breve{s}+1,p+1}:\quad g_{sj}=0\quad(\breve{s}+1\le j\le s-1),\quad g_{ss}=1,\\ g_{sj}=-(g_{s\,j-1}a_{j-1}+g_{s\,j-2}b_{j-2})/c_j\quad(s+1\le j\le p+1),\quad g_{\breve{s}+2\,\breve{s}}=0.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Тогда $G\Theta^{p+}_d=\{g_{s\,j-1}a_{j-1}+g_{s\,j-2}b_{j-2}+g_{sj}c_j\}^{p+1}_{s,j=\breve{s}+1}=\operatorname{diag}\{c_{\breve{s}+1},\dots,c_{p+1}\}$, и после домножения системы (2.7^+_d) слева на G она равносильна системе

$$c_sh^p_{1\,s-1}=\sum^{p+1}_{j=s}g_{sj}Y^p_{0j}\qquad(s=\overline{\breve{s}+1,p+1}). \tag{2.12}$$

Возвращаясь к уравнению (2.10), подставим в него прямую формулу для $Y^p_{d\breve{s}}$ из (2.7_d), а в случае 1) при $\breve{s}\le p-1$, т.е. когда $\breve{s}=s_1,s_3$, также $h^p_{1\,\breve{s}+1}$ из уравнения (2.12) $(c_{\breve{s}+2}\ne 0)$, получаем резонансную связь

$$0\cdot h^p_{1\,\breve{s}}=\sum^{\breve{s}}_{j=1}(-1)^{\breve{s}-j}\prod^{\breve{s}}_{\mu=j+1}\frac{c_\mu}{d_{\mu-1}}\,Y^p_{0j}-\frac{b_{\breve{s}}}{c_{\breve{s}+2}}\sum^{p+1}_{j=\breve{s}+2}g_{\breve{s}+2\,j}Y^p_{0j}. \tag{2.13}$$

Выразим в (2.13) компоненты Y^p_{0j} через $\widehat{Y}^{p+1}_{is}$, для чего введем константы

$$\begin{gathered}v^j_2=(-1)^{\breve{s}-j}\,\frac{p-\breve{s}+1-\alpha}{p-j-1-\alpha}\prod^{\breve{s}}_{\mu=j+1}\frac{p-\mu+\alpha(\mu-1)}{\mu-1}\quad(j=\overline{1,\breve{s}}),\quad v^0_1=v^1_2(p-2\alpha)(p-1),\\ v^1_1=v^1_2(p-1),\quad v^j_1=v^j_2\frac{p-j+\alpha(j-1)}{\alpha+j-p}\ (j=\overline{2,\breve{s}});\quad v^{\breve{s}+1}_1=\breve{s};\quad v^j_2=-g_{\breve{s}+2\,j}\,b_{\breve{s}}/c_{\breve{s}+2},\\ v^j_1=-(g_{\breve{s}+2\,j}(p-j+\alpha(j-1))+g_{\breve{s}+2\,j-1}(j-1))b_{\breve{s}}/c_{\breve{s}+2}\quad(j=\overline{\breve{s}+2,p+1}),\end{gathered} \tag{2.14}$$

тогда в силу (2.5) и (2.9) $v_2^j = (-1)^{\breve{s}-j}\prod_{\mu=j+1}^{\breve{s}} c_\mu/d_{\mu-1}$ $(j=\overline{1,\breve{s}})$, кроме того $v_1^0 = v_2^1 c_1$ $(c_1\neq 0)$, $v_2^{\breve{s}}=1$, $v_1^{\breve{s}} = -(p-\breve{s}+\alpha(\breve{s}-1))/(p-\breve{s}-\alpha)$.

В уравнении (2.13) согласно (2.7), (2.5) и (2.3) $\sum_{j=1}^{\breve{s}} v_2^j Y_{0j}^p = -v_2^1 c_1 h_{10}^p + \sum_{j=1}^{\breve{s}} v_2^j((p-j+\alpha(j-1))\widehat{Y}_{1j}^{p+1} + j\widehat{Y}_{1\,j+1}^{p+1} + \widehat{Y}_{2j}^{p+1}) = v_2^1 c_1 \widehat{Y}_{10}^{p+1} + v_2^1(p-1)\widehat{Y}_{11}^{p+1} + \sum_{j=2}^{\breve{s}}(v_2^j(p-j+\alpha(j-1)) + v_2^{j-1}(j-1))\widehat{Y}_{1j}^{p+1} + v_2^{\breve{s}}\breve{s}\widehat{Y}_{1\,\breve{s}+1}^{p+1} + \sum_{j=1}^{\breve{s}} v_2^j \widehat{Y}_{2j}^{p+1} = \sum_{j=0}^{\breve{s}+1} v_1^j \widehat{Y}_{1j}^{p+1} + \sum_{j=1}^{\breve{s}} v_2^j Y_{2j}^p$, а $\sum_{j=\breve{s}+2}^{p+1} g_{\breve{s}+2\,j} Y_{0j}^p = \sum_{j=\breve{s}+2}^{p+1} g_{\breve{s}+2\,j}((p-j+\alpha(j-1))\widehat{Y}_{1j}^{p+1} + \widehat{Y}_{2j}^{p+1}) + \sum_{j=\breve{s}+3}^{p+2} g_{\breve{s}+2\,j-1}(j-1)\widehat{Y}_{1j}^{p+1}$.

В результате резонансная связь (2.13) принимает вид

$$v_1^0\widehat{Y}_{10}^{p+1} + \sum_{j=1}^{\breve{s}}(v_1^j\widehat{Y}_{1j}^{p+1} + v_2^j\widehat{Y}_{2j}^{p+1}) + v_1^{\breve{s}+1}\widehat{Y}_{1\,\breve{s}+1}^{p+1} + \sum_{j=\breve{s}+2}^{p+1}(v_1^j\widehat{Y}_{1j}^{p+1} + v_2^j\widehat{Y}_{2j}^{p+1}) = 0. \tag{2.15}$$

Если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$, то по лемме 2 и следствию 1 $\breve{s}=s_1$ и $c_{\breve{s}+1}=0$, поэтому (2.12) при $s=s_1+1$ дает дополнительную резонансную связь:

$$0\cdot h_{1\,s_1}^p = \sum_{j=s_1+1}^{p+1} g_{s_1+1\,j} Y_{0j}^p. \tag{2.16}$$

Аналогично (2.15) связь (2.16) можно представить в виде

$$\sum_{j=s_1+1}^{p+1}(v_1^{j1}\widehat{Y}_{1j}^{p+1} + v_2^{j1}\widehat{Y}_{2j}^{p+1}) = 0 \qquad ((\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1), \tag{2.17}$$

где множители $v_1^{j1} = g_{s_1+1\,j}(p-j+\alpha(j-1)) + g_{s_1+1\,j-1}(j-1)$, $v_2^{j1} = g_{s_1+1\,j}$.

Из уравнений (2.13), (2.16) видно, что если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$, то компонента $h_{1\,s_1}^p$ свободна.

Запишем полученные резонансные связи (2.15), (2.17) через коэффициенты системы (1.3), предварительно разобравшись, когда множители v, входящие в эти связи, равны нулю.

Согласно определению (2.14) при $2\le j\le\breve{s}$ множитель $v_2^{j-1}=0$ и множитель $v_1^j=0$, если $\prod_{\mu=j}^{\breve{s}}(p-\mu+\alpha(\mu-1))=0$, т. е. $c''_j\ldots c''_{\breve{s}}=0$, а множители $v_1^0, v_1^1=0$, если $c''_2\ldots c''_{\breve{s}}=0$. Поэтому, используя следствие 1, можно преобразовать уравнение (2.15) в случае 2), когда $\breve{s}=p+1$.

Пусть $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_3^c\subset\{\alpha,p\}_0$, т. е. $\alpha=-k/l$, $p=(k+l)n+1$ $(k,l,n\in\mathbb{N},\ k<l)$. Тогда $s_3^c = ln+1$ $(2\le s_3^c\le p-1)$, поэтому $v_2^{s_3^c},\ldots,v_2^{p+1}\neq 0$, $v_1^{s_3^c+1},\ldots,v_1^{p+1}\neq 0$, так как не содержат $c''_{s_3^c}=0$, и уравнение (2.15) принимает вид

$$v_2^{s_3^c}Y_2^{(ln+1,kn+1)} + \sum_{j=s_3^c+1}^{p+1}\left(v_1^jY_1^{(j,p+1-j)} + v_2^jY_2^{(j,p+1-j)}\right) = \widetilde{c}. \tag{2.15_0^3}$$

Пусть $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_4^c\subset\{\alpha,p\}_0$, т. е. $\alpha=1/p$. Тогда $s_4^c=p+1$, а значит, только $v_2^{p+1}\neq 0$, и уравнение (2.15) принимает вид

$$Y_2^{(p+1,0)} = \widetilde{c} \qquad (p\ge 3). \tag{2.15_0^4}$$

Если теперь $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_0\setminus(\{\alpha,p\}_3^c\cup\{\alpha,p\}_4^c)$, то (2.15) принимает вид

$$v_1^0Y_1^{(0,p+1)} + \sum_{j=1}^{p+1}\left(v_1^jY_1^{(j,p+1-j)} + v_2^jY_2^{(j,p+1-j)}\right) = \widetilde{c} \qquad (p\ge 3), \tag{2.15_0^0}$$

и все входящие в него множители v отличны от нуля.

Пусть $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_2=\{\alpha,p\}_2^c$, т. е. $\alpha=-1$, $p=2n+1$ $(n\in\mathbb{N})$. Тогда $\breve{s}=p$, т. е. последняя сумма в (2.15) также отсутствует, а $s_2^c=n+1$ $(2\le s_2^c\le p-1)$. Поэтому $v_2^{s_2^c},\ldots,v_2^p\neq 0$, $v_1^{s_2^c+1},\ldots,v_1^p\neq 0$, так как не содержат $c''_{s_2^c}=0$, $v_1^{\breve{s}}=\breve{s}=2n+1$, и (2.15) принимает вид

$$v_2^{s_2^c}Y_2^{(n+1,n+1)} + \sum_{j=s_2^c+1}^{p}\left(v_1^jY_1^{(j,p+1-j)} + v_2^jY_2^{(j,p+1-j)}\right) + v_1^{\breve{s}}Y_1^{(2n+2,0)} = \widetilde{c}. \tag{2.15_2}$$

Пусть $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_3$, т.е. $\alpha=1$. Поскольку $\check{s}=p-2$, последняя сумма в уравнении (2.15) содержит два слагаемых. Согласно (2.5) и (2.11) $b_{p-2}=(p-2)^2$, $a_p=2p(p-2)$, $c_p, c_{p+1}=(p-2)(p-1)$, $g_{pp}=1$, $g_{p\,p+1}=-2p/(p-1)$, откуда $v_2^p=-(p-2)/(p-1)$, $v_2^{p+1}=2p(p-2)/(p-1)^2$, $v_1^p=-(p-2)$, $v_1^{p+1}=(2p-1)(p-2)/(p-1)$, и (2.15) принимает вид

$$v_1^0Y_1^{(0,p+1)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{p-2}v_i^jY_i^{(j,p+1-j)}+v_1^{\check{s}}Y_1^{(p-1,2)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=p}^{p+1}v_i^jY_i^{(j,p+1-j)}=\widetilde{c}\quad(p\ge3).\qquad(2.15_3)$$

Пусть, наконец, $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$. Надо оценить множители v^j при $j=\overline{s_1+2,p+1}$ в уравнении (2.15) и множители v^{j1} при $j=\overline{s_1+1,p+1}$ в уравнении (2.17), чему мешает рекуррентное задание элементов g_{sj} в (2.11).

Для $s=\overline{s_1+1,p}$ введем рекуррентную последовательность чисел

$$f_{ss}=-a_s,\quad f_{sj}=-a_j-b_{j-1}c_j/f_{s\,j-1}\ \ (s+1\le j\le p),\ \ \text{пока}\ \ f_{s\,j-1}\ne0,\qquad(2.18)$$

и покажем методом индукции, что в (2.11) при $\check{s}=s_1$

$$g_{sj}=g_{s\,j-1}f_{s\,j-1}/c_j\quad(j=\overline{s+1,p+1},\ \ g_{ss}=1).\qquad(2.19)$$

При $j=s+1$ согласно (2.11) и (2.18) $g_{s\,s+1}=-(g_{ss}a_s+g_{s\,s-1}b_{s-1})/c_{s+1}=g_{ss}f_{ss}/c_{s+1}$, что дает базу индукции. Предположим, что выполнено (2.19), тогда $g_{s\,j+1}=-(g_{sj}a_j+g_{s\,j-1}b_{j-1})/c_{j+1}=-g_{sj}(a_j+c_jb_{j-1}/f_{s\,j-1})/c_{j+1}=g_{sj}f_{sj}/c_{j+1}$ согласно (2.18).

Поскольку $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$, то $\alpha=-k/l$, $p=(k+l)n+2$ и $s_1=ln+2$. Поэтому в (2.5) $a_s=((k+l)n+2-s)(2s-1)-1-k(2s^2-4s+1)/l$, $c_s=(k+l)(n-(s-3)/l)((k+l)(n-(s-1)/l)+1)$, где $k,l,n\in\mathbb{N}$. При этом $c_s=0$ при $s=ln+1+l/(k+l)$, $ln+3$, поэтому $c_s>0$ при $s\ge ln+4$.

Для оценки снизу f_{sj} введем функцию

$$\xi_j=-j(p-j-1+\alpha(j-2))=j(j-(k+l)n-1+k(j-2)/l)\ \ (j=\overline{s_1+1,p}).$$

Поскольку $\xi_j=0$ при $j=0, ln+1+k/(k+l)$, то $\xi_j>0$ при $j\ge ln+2$.

Покажем методом математической индукции, что

$$f_{sj}>\xi_j\quad(s=s_1+1,s_1+2,\ \ j=\overline{s,p}).\qquad(2.20)$$

При $s=s_1+1=ln+3$ согласно (2.18) $f_{ss}=-a_s=(3k+2l)n+6+7k/l>(k+2l)n+6+3k/l=\xi_s$ и при $s=s_1+2=ln+4$ $\ f_{ss}=(5k+4l)n+15+17k/l>(2k+3l)n+12+8k/l=\xi_s$ – база.

Предположим, что $f_{s\,j-1}>\xi_{j-1}$. Тогда $f_{sj}=-a_j-b_{j-1}c_j/f_{s\,j-1}>-a_j-b_{j-1}c_j/\xi_{j-1}>\xi_j$, так как $(-a_j-\xi_j)\xi_{j-1}=b_{j-1}c_j-2\alpha(j-1)^2>b_{j-1}c_j$.

Теперь согласно (2.11), (2.19) и (2.20) при $s=s_1+1,s_1+2$

$$g_{ss}=1,\quad g_{sj}>g_{s\,j-1}\xi_{j-1}/c_j>0\quad(j=\overline{s+1,p+1}).\qquad(2.21)$$

Поскольку $c''_j=p-j+\alpha(j-1)<0$ при $j=s_1+1$, то в (2.17) $v_1^{j1}<0$. При $j\ge ln+4=s_1+2$ $c'_j=p-j+1+\alpha(j-3)$, $c''_j<0$, поэтому при тех же s,j, что используются в (2.21), входящее в v_1^j из (2.14) и в v_1^{j1} из (2.17) выражение $g_{sj}(p-j+\alpha(j-1))+g_{s\,j-1}(j-1)<g_{s\,j-1}(j-1)((j-p-\alpha(j-3))/(p-j+1+\alpha(j-3))+1)=g_{s\,j-1}(j-1)/(p-j+1+\alpha(j-3))<0$.

В результате, если $(\alpha,p)\in\{\alpha,p\}_1$, т.е. $\alpha=-k/l$, $p=(k+l)n+2$ $(k,l,n\in\mathbb{N},\ k\le l)$ и $s_1=ln+2$, то, во-первых, все входящие в уравнение (2.17) множители $v_2^{j1}>0$, а $v_1^{j1}<0$, и (2.17) принимает вид

$$\sum_{j=s_1+1}^{p+1}(v_1^{j1}Y_1^{(j,p+1-j)}+v_2^{j1}Y_2^{(j,p+1-j)})=\widetilde{c},\qquad(2.17_1)$$

во-вторых, в (2.15) при $j=\overline{s_1+2,p+1}$ множители $v_2^j<0$, $v_1^j>0$, и (2.15) принимает вид

$$v_1^0Y_1^{(0,p+1)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{s_1}v_i^jY_i^{(j,p+1-j)}+s_1Y_1^{(s_1+1,p-s_1)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=s_1+2}^{p+1}v_i^jY_i^{(j,p+1-j)}=\widetilde{c}.\qquad(2.15_1)$$

Остается переписать полученные ранее резонансные связи (2.4) и (2.6) также через коэффициенты форм $Y_1^{(p+1)}$, $Y_2^{(p+1)}$:

$$\begin{gathered} 2(1-\alpha)^2 Y_1^{(0,3)} + (1-\alpha) Y_1^{(1,2)} + Y_1^{(2,1)} + 2Y_1^{(3,0)} + (1-\alpha) Y_2^{(1,2)} + Y_2^{(2,1)} = \widetilde{c}, \\ (2\alpha - 1) Y_1^{(1,2)} + Y_2^{(3,0)} = \widetilde{c}, \qquad Y_1^{(0,3)} - Y_2^{(0,3)} = \widetilde{c} \qquad (p=2); \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$Y_1^{(0,p+1)} - Y_2^{(0,p+1)} = \widetilde{c} \qquad (p \geq 3). \tag{2.23}$$

Отметим, что во всех резонансных уравнениях вида $(\delta, Y) = \widetilde{c}$ константа $\widetilde{c}$ известна, равна $(\delta, \widetilde{Y})$ и, если $\alpha = -k/l$, зависит от выбора свободных коэффициентов $h_1^{(s_1, p-s_1)}$ замены (1.2).

3. Формальная эквивалентность и ОНФ.

Положим $n_p = \{3,$ если $p = 2$ или $(\alpha, p) \in \{\alpha, p\}_1$; 2 – в противном случае.$\}$

Определение 1. Коэффициенты форм $Y_1^{(p+1)}(y)$, $Y_2^{(p+1)}(y)$ системы (1.3), входящие хотя бы в одно из резонансных уравнений (2.17_1), (2.15_ν) $(\nu = \overline{0,3})$, называются резонансными, а остальные – нерезонансными.

Определение 2. В системе (1.3) n_p различных резонансных коэффициентов форм $Y_i^{(p+1)}$ образуют резонансный набор, если это коэффициенты:

при $p = 2$ — 1) $Y_2^{(0,3)}$ или $Y_1^{(0,3)}$, 2) $Y_2^{(3,0)}$ или $Y_1^{(1,2)}$ при $\alpha \neq 1/2$, 3) любой из (2.22_1);

при $p \geq 3$ — 1) $Y_2^{(0,p+1)}$ или $Y_1^{(0,p+1)}$, 2а) если $\alpha \neq 1,\ 1/n\ (n \geq 3),\ -k/l\ (k < l),\ -1$, то любой из (2.15_0^0), 2б) если $\alpha = 1$, то любой из (2.15_3), 2в) если $\alpha = 1/n$ $(n \geq 3)$, то $Y_2^{(p+1,0)}$ при $p = n$, любой из (2.15_0^0) при $p \neq n$, 2г) если $\alpha = -k/l$ $(k < l)$, то любой из (2.15_0^3) при $p = (k+l)n + 1$, любой из (2.15_1) при $p = (k+l)n + 2$, любой из (2.15_0^0) при $p \neq (k+l)n + i$ $(i = 1, 2)$, 2д) если $\alpha = -1$ $(k, l = 1)$, то любой из (2.15_2) при $p = 2n + 1$, любой из (2.15_1) при $p = 2n + 2$, 3) если $\alpha = -k/l$ $(k \leq l)$ и $p = (k+l)n + 2$, то любой $Y_{i_3}^{(j_3, p+1-j_3)}$ из (2.17_1), отличный от выбранного выше $Y_{i_2}^{(j_2, p+1-j_2)}$ из (2.15_1), при условии, что $v_{i_2}^{j_2} v_{i_3}^{j_3 1} - v_{i_2}^{j_2 1} v_{i_3}^{j_3} \neq 0$, где v_i^j, v_i^{j1} – множители при соответствующих коэффициентах в уравнениях (2.15_1), (2.17_1).

Из определения 2 вытекает, что n_p соответствующих резонансных уравнений при любых $p \geq 2$ однозначно разрешимы относительно коэффициентов из любого резонансного набора.

Определение 3. Система (1.3) называется обобщенной нормальной формой (ОНФ), если при любом $p \geq 2$ у нее равны нулю все коэффициенты форм $Y_1^{(p+1)}(y)$, $Y_2^{(p+1)}(y)$, кроме n_p коэффициентов из какого-либо резонансного набора, имеющих произвольные значения.

В результате оказались доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1.3) *была формально эквивалентна исходной системе* (1.1), *необходимо и достаточно, чтобы для любого $p \geq 2$ коэффициенты ее однородных полиномов $Y_1^{(p+1)}$, $Y_2^{(p+1)}$ удовлетворяли следующим резонансным уравнениям: при $p = 2$ – это три уравнения* (2.22); *при $p \geq 3$ – это уравнение* (2.23), *в зависимости от параметра α одно из шести уравнений* (2.15_ν) $(\nu = \overline{0,3})$, *а также уравнение* (2.17_1), *если пара* $(\alpha, p) \in \{\alpha, p\}_1$. *При этом все множители v, входящие в вышеназванные уравнения, отличны от нуля.*

Следствие 2. *Система* (1.1) *формально эквивалентна системе* (1.3), *у которой при любом $p \geq 2$ все коэффициенты $Y_i^{(j, p+1-j)}$ $(i = 1, 2;\ j = \overline{0, p+1})$ произвольны, кроме n_p должным образом выбранных коэффициентов из любого резонансного набора. В частности, если все произвольные коэффициенты в системе* (1.3) *выбрать равными нулю, то система* (1.1) *будет формально эквивалентна ОНФ* (1.3).

Теорема 2. *Зафиксируем произвольным образом структуру ОНФ* (1.3), *т. е. для всякого $p \geq 2$ зафиксируем порядки тех n_p членов форм $Y_i^{(p+1)}$, чьи коэффициенты входят в выбранный для данного p резонансный набор, а если $(\alpha, p) \in \{\alpha, p\}_1$, то зафиксируем также произвольным образом коэффициент $h_1^{(s_1, p-s_1)}$ замены* (1.2). *Тогда существует и единственна* *нормализующая замена* (1.2), *преобразующая произвольную систему* (1.1) *в ОНФ* (1.3) *с выбранной структурой, в которой при каждом* $p \geq 2$ *коэффициенты выбранного резонансного набора однозначно находятся из тех резонансных уравнений* (2.22), (2.23), (2.15_ν), (2.17_1), *в которые они входят.*

Пример 1. Рассмотрим общую ситуацию, когда $\alpha \neq 1,\ 1/n\ (n \geq 3),\ -k/l\ (k < l),\ -1$, т. е. случай 2а) из определения 2, тогда система (1.1) может быть приведена к ОНФ (1.3), имеющей, например, такие структуры:

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_1 y_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + Y_2^{(3,0)} y_1^3 + y_2^p \sum_{p=2}^{\infty} \Big(Y_2^{(0,p+1)} y_2 + Y_2^{(1,p)} y_1 \Big);$$

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_1 y_2 + Y_1^{(1,2)} y_1 y_2^2 + \sum_{p=3}^{\infty} Y_1^{(0,p)} y_2^p, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + \sum_{p=3}^{\infty} Y_2^{(0,p)} y_2^p.$$

Пример 2. Пусть $\alpha = -1$ $(k, l = 1)$, тогда реализуются случаи 2д) и 3) из определения 2 и система (1.1) может быть приведена к ОНФ (1.3)

$$\dot{y}_1 = -y_1^2 + y_1 y_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(Y_2^{(0,2n+2)} y_2^{2n+2} + Y_2^{(n+1,n+1)} y_1^{n+1} y_2^{n+1} \Big) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \Big(Y_2^{(0,2n+3)} y_2^{2n+3} + Y_2^{(1,2n+2)} y_1 y_2^{2n+2} + Y_2^{(n+3,n)} y_1^{n+3} y_2^{n} \Big).$$

Литература

1. *В. В. Басов* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами. Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. №2. С. 154–170.
2. *В. В. Басов, А. В. Скитович* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением - I, Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. №8. С. 1016–1029.
3. *А. Д. Брюно, В. Ю. Петрович* Нормальные формы системы ОДУ. Препринт ИПМ РАН. 2000. №18.
4. *В. В. Басов, А. А. Федотов* Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно - квадратичной невозмущенной частью. Вестник СПбГУ, сер.1. 2007. Вып.1. С. 13–33.
5. *В. В. Басов, А. В. Скитович* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением - II, Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. №8. С. 1011–1023.
6. *В. В. Басов* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением - III, Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. №3. С. 308–319.
7. *В. В. Басов* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$. Дифференц. уравнения. 2004. Т.40. №8. С. 1011–1022.

V. V. Basov, E. V. Fedorova

Normalization of a System Whose Unperturbed Part is $(\alpha \mathbf{x_1^2} + \mathbf{x_1 x_2}, \mathbf{x_1 x_2})$

Summary

Formal almost identical transformations of two dimensional systems of differential equations whose unperturbed part is $(\alpha x_1^2 + x_1 x_2,\ x_1 x_2)$ and perturbations are of order 3, are investigated. "Resonance equations" for such systems are given. With help of them, some criteria of formal equivalence of systems and all structures of generalized normal forms are presented.