

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.925

## ИНВАРИАНТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ СТАНДАРТНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДЕВЯТЬЮ ТОЧКАМИ ПОКОЯ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*В. В. Басов, А. С. Жуков*

© Санкт-Петербургский государственный университет,  
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,  
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28  
[vlvlbasov@rambler.ru](mailto:vlvlbasov@rambler.ru), [artzhukov1111@gmail.ru](mailto:artzhukov1111@gmail.ru)

### Аннотация

Одновременно исследованы два класса двумерных периодических по времени систем ОДУ с малым положительным параметром — системы с "быстрым" и "медленным" временем, правые части которых трижды непрерывно дифференцируемы по фазовым переменным и параметру, а соответствующие невозмущенные системы автономны, консервативны и имеют девять точек покоя, абсциссы и ординаты которых принимают значения  $-1, 0, 1$ .

Для возмущений системы, которые не зависят от параметра, в явном виде получены условия, при выполнении которых исходная система при всех достаточно малых значениях параметра имеет определенное количество двумерных инвариантных поверхностей, гомеоморфных торами. И приведены формулы этих поверхностей.

В качестве примера практического использования полученных результатов выделен класс систем, которые имеют три инвариантные поверхности, охватывающие различное число точек покоя. Библиогр. 10 назв.

*Ключевые слова:* инвариантная поверхность, бифуркация, усреднение.

### Abstract

Two classes of two-dimensional time-periodic systems of ODEs with a small positive parameter, specifically, systems with "slow" and "fast" time, whose right-hand sides are three times continuously differentiable on the phase variables and the parameter perturbations, and the corresponding unperturbed systems are autonomous, conservative and possess nine steady points, whose both coordinates take values of  $-1, 0$  or  $1$ , are simultaneously studied in this article. Explicit conditions, guaranteeing the existence of a certain number of invariant two-dimensional surfaces, which are homeomorphic to tori, for all small enough values of positive parameter for original system are given for parameter-independent perturbations of the system. Formulae of these surfaces are provided. The class of systems with three invariant surfaces, covering some of system's steady points, is chosen as an example of practical usage of the obtained result. Refs 10.

Key words: invariant surface, bifurcation, averaging.

### Содержание

§1. Введение	
1 <sup>0</sup> . Постановка задачи . . . . .	3
2 <sup>0</sup> . Особенности метода решения и структура работы . . . . .	4
§2. Параметризация траекторий невозмущенной системы	
1 <sup>0</sup> . Фазовый портрет . . . . .	7
2 <sup>0</sup> . Параметризация замкнутых кривых . . . . .	9
3 <sup>0</sup> . Периоды движений по замкнутым траекториям . . . . .	9
§3. Переход в окрестность замкнутой траектории	
1 <sup>0</sup> . Перенос начала координат в особые точки $(1,0)$ и $(1,1)$ . . . . .	10
2 <sup>0</sup> . Проверка монотонности угловой переменной в случае 0) . . . . .	13
3 <sup>0</sup> . Проверка монотонности угловой переменной в случае 1) . . . . .	14
4 <sup>0</sup> . Проверка монотонности угловой переменной в случае 2) . . . . .	15
5 <sup>0</sup> . Специальная аффинно-полярная замена . . . . .	16
§4. Начальные усреднения и бифуркационные уравнения	
1 <sup>0</sup> . Первичное усреднение . . . . .	17
2 <sup>0</sup> . Условия для существования инвариантных поверхностей . . . . .	18
3 <sup>0</sup> . Вторичное усреднение . . . . .	20
§5. Алгоритм построения инвариантной поверхности	
1 <sup>0</sup> . Завершающее усреднение и масштабирование . . . . .	22
2 <sup>0</sup> . Применение леммы Хейла . . . . .	22
§6. Применение полученных результатов	
1 <sup>0</sup> . Анализ аналитического бифуркационного уравнения . . . . .	24
2 <sup>0</sup> . Пример нахождения инвариантных поверхностей . . . . .	26
§7. Приложения . . . . .	30
Список литературы . . . . .	37

## §1. Введение

1<sup>0</sup>. **Постановка задачи.** Рассмотрим стандартную периодическую двумерную систему с малым положительным параметром

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\gamma(y^3 - y) + X(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu \\ \dot{y} &= (-x^3 + x + Y(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu \end{aligned} \quad (\gamma \in (0, 1], \quad \nu = 0, 1), \quad (1)$$

где  $X, Y$  – непрерывные  $T$ -периодические по  $t$  функции класса  $C_{x, y, \varepsilon}^3$  при  $t \in \mathbb{R}^1$ ,  $|x| < x_*$ ,  $|y| < y_*$  ( $x_* > \sqrt{2}$ ,  $y_* > \sqrt{1 + \gamma^{-1/2}}$ ),  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ .

По существу, формула (1) задает две различные системы – система с  $\nu = 0$  и система с  $\nu = 1$ , сравнивая которые можно сказать, что система с  $\nu = 1$ , обычно называемая стандартной, имеет "быстрое" время, так как при сведении ее к системе с  $\nu = 0$  в последней получаем период, равный  $T\varepsilon$ .

Системой первого приближения или невозмущенной по отношению к системе (1) естественно называть автономную систему

$$\dot{x} = \gamma(y^3 - y)\varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = -(x^3 - x)\varepsilon^\nu \quad (\nu = 0, 1). \quad (2)$$

Очевидно, что у систем (2) с  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$  фазовые портреты совпадают.

Система (2) консервативна. Она имеет девять точек покоя и ее фазовая плоскость помимо них заполнена замкнутыми траекториями и сепаратрисами, которые задаются общим интегралом  $(x^2 - 1)^2 + \gamma(y^2 - 1)^2 = a$ .

Цель предлагаемой работы заключается в нахождении у системы (1) при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  двумерных цилиндрических инвариантных поверхностей, гомеоморфных торах, если факторизовать время по периоду, чьи фазовые проекции лежат в малой окрестности соответствующих замкнутых траекторий невозмущенной системы (2).

В результате в явном виде будут выписаны зависящие от  $\gamma$  условия на функции  $X(t, x, y, 0)$ ,  $Y(t, x, y, 0)$ , при выполнении которых в возмущенной системе (1) указанные инвариантные поверхности имеются, и представлено асимптотическое разложение каждой инвариантной поверхности по степеням малого параметра. Также будет приведен пример, в котором для выделенного класса систем каждое из трех полученных бифуркационных уравнений имеет допустимое решение  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) и приближенными вычислениями, использующими интерполяции функций, для каждого  $c_i$  подсчитана соответствующая константа  $L_i^\nu$  с  $\nu = 1$ , отличие от нуля которой гарантирует наличие своей инвариантной поверхности. При этом проекция одной из найденных поверхностей на фазовую плоскость будет охватывать все девять особых точек, другой – три точки, а третьей – одну.

Системы (1) с  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$  оказалось возможным исследовать одновременно, так как для нахождения инвариантных торов применяется один и тот же метод, разработанный в работах [1], [2] и существенно модифицированный в работах [3]–[6]. Однако, на определенном этапе усреднения полученных в результате специальной полярной замены систем для случаев  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$  возникают серьезные различия, на которые обращено особое внимание.

**2<sup>0</sup>. Особенности метода решения и структура работы.** Общая методика решения подобных задач в достаточной степени стандартна. Она включает в себя три этапа.

1. Запись системы ( $1^\nu$ ) в окрестности произвольной замкнутой траектории невозмущенной системы ( $2^\nu$ ) в специальных полярных координатах  $r, \varphi$ , названных В. И. Арнольдом в [7, §50] "действие – угол".

2. Нахождение условий на функции  $X(t, x_1, x_2, 0)$  и  $Y(t, x_1, x_2, 0)$  системы (1), достаточных для существования хотя бы одного допустимого решения бифуркационного уравнения, при котором выполняется так называемое условие диссипативности, означающее появление ненулевой фокусной величины, порождаемой указанными функциями, и при котором в случае  $\nu = 0$  выполняется условие Зигеля на периоды по  $t$  и  $\varphi$  функций, получаемых после соответствующей полярной замены.

3. Для каждого найденного на втором этапе допустимого решения выполнение ряда усредняющих и масштабирующих замен, преобразующих полученную из системы (1) специальную полярную систему к системе, которая согласно леммы Хейла [8] имеет двумерную инвариантную поверхность.

Таким образом, к настоящему моменту основные проблемы, требующие новых подходов и техники, возникают на первом этапе при исследовании все более сложных невозмущенных систем, имеющих различные точки покоя, и создании по ним специальных аффинно-полярных замен с ненормированными обобщенными синусами и косинусами, их прототипы впервые были введены А. М. Ляпуновым в [9], а также возможностями осуществить эти замены.

Дополнительный интерес приобретает также второй этап, поскольку бифуркационное уравнение, бывшее квадратным для систем с более простыми первыми приближениями, теперь имеет достаточно сложную интегральную структуру, открывающую простор для ее анализа.

Третий этап стандартен, но должен быть аккуратно реализован, поскольку позволяет получать явные формулы каждой инвариантной поверхности, отвечающей своему корню бифуркационного уравнения.

Следует отметить, что в предлагаемой работе впервые рассматривается периодическая система, у которой соответствующая ей невозмущенная система имеет точки покоя, расположенные не только на оси абсцисс.

После Введения в § 2 описывается фазовый портрет невозмущенной системы в координатах  $C, S$ : ее интегралы, сепаратрисы, замкнутые траектории. Проводится параметризация проходящих через первую четверть траекторий как решений системы (6) посредством задания начальных данных  $\varphi(0) = 0$ ,  $C(0) = c > 0$ ,  $S(0) = j$ , где  $j = 0$  для траекторий, покидающих первую четверть, и  $j = 1$  для траекторий, охватывающих только точку  $(1, 1)$ . Также вычисляются периоды движений по замкнутым траекториям.

Параметр  $c$  играет ключевую роль в дальнейших построениях, являясь аргументом бифуркационных уравнений и задавая в конечном итоге траекторию, в окрестности которой и будет искаться инвариантная поверхность, а точнее, ее проекция на фазовую плоскость, системы (1).

Интересно также, что случай, когда в системе (1)  $\gamma = 1$ , является вырожденным (см. приложение 1.1). В нем "склеивается" часть сепаратрис и отсутствуют замкнутые траектории, охватывающие три точки покоя с абсциссами, равными 1 или  $-1$ . С этими траекториями (см. приложение 1.2) связаны интересные и не встречавшиеся в предшествующих работах явления.

В § 3 осуществляются сдвиги как системы (1), так и невозмущенной системы (6), в особые точки  $(1, 0)$  и  $(1, 1)$ . Связано это с тем, что в системах (1) и (6) предстоит перейти в окрестность пока что любой замкнутой траектории при помощи специальной аффинно-полярной замены, в ходе которой при разрешении полученных уравнений относительно  $r$  и  $\varphi$  при производных появляется множитель  $p(\varphi, c)$ , вводимый в формуле (13) и всегда равный  $1 (\equiv \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$  при обычной полярной замене.

Очевидно, что множитель  $p(\varphi, c)$  должен менять знак при изменении направления обхода траектории, наблюдаемого из начала координат.

Именно так происходит при обходе зеленых и желтых траекторий (см. приложение 1.2). А для синих траекторий направления обхода не меняется и замену можно производить сразу. Поэтому стандартным приемом перед переходом в окрестность любой зеленой траектории из правой полуплоскости или любой желтой траектории из первой четверти является сдвиг начала координат соответственно в точку  $(1, 0)$  или  $(1, 1)$ .

Обход любой желтой траектории, наблюдаемой из точки  $(1, 1)$ , происходит монотонно, и это видно невооруженным глазом и легко доказывается.

А вот изменение угловой переменной  $\varphi$ , наблюдаемое из точки  $(1, 0)$  при обходе зеленых траекторий, оказывается может проходить немонотонно при определенных значениях  $\gamma$  и начального данного  $c$ . И эта ситуация является новой и в известной степени неожиданной.

Получается, что у системы (6) существуют замкнутые траектории, в окрестность которых перейти не удастся, а значит, существующие на данный момент методы исследования не позволяют установить, существуют ли у системы (1) инвариантные поверхности, чьи проекции на фазовую плоскость лежат в малой окрестности этих траекторий.

В работе явно найдены приближенные границы области допустимых значений  $c(\gamma)$  (см. приложение 2), при которых монотонность  $\varphi$  при обходе зеленых траекторий сохраняется и аффинно-полярная замена осуществима.

В результате для каждого допустимого значения параметра  $c$  (см. п. 5<sup>0</sup>, определение 1) получена аффинно-полярная система (18).

В § 4 после усреднения, позволяющего аннулировать в "радиальном" уравнении системы (18) линейные и квадратичные члены по  $r$  в слагаемых не зависящих от  $\varepsilon$  появляется возможность для каждого из трех типов замкнутых кривых невозмущенной системы (6) выписать свое бифуркационное уравнение (см. п. 2<sup>0</sup>, определение 2), любое допустимое решение которого  $c_*$ , если, конечно, оно имеется, выделяет ту конкретную траекторию систем (6), в окрестность которой надо осуществлять переход. Но делать это следует только в том случае, если окажутся выполнены еще два условия.

Одно из них связано с особенностями структуры системы (1) при  $\nu = 0$  и требует выполнения условия Зигеля на "малые знаменатели" для периодов  $T$  и  $\omega_{c_*}$ . При  $\nu = 1$  это условие не требуется, но возникают большие технические сложности, связанные с тем, что функции, входящие в последующие усредняющие замены, содержат различные степени  $\varepsilon$ .

Другое условие не является жестким, так как требует отличия от нуля так называемой диссипативной константы, что необходимо как для последующих усреднений, так и для применения леммы Хейла.

Далее, в § 5 проводится ряд усредняющих замен в конечном итоге сводящих систему (1) к системе, у которой по лемме Хейла существует инвариантная поверхность, и формулируются полученные результаты, позволяющие выписать формулы найденных двупериодических инвариантных поверхностей системы (1) и их разложение по младшим степеням  $\varepsilon$ . А в § 6 демонстрируется возможность практического применения полученных результатов.

## §2. Параметризация траекторий невозмущенной системы

1<sup>0</sup>. **Фазовый портрет.** Обозначим через  $\Gamma_a$  семейство замкнутых кривых на плоскости  $(C, S)$ , удовлетворяющих уравнению

$$(C^2 - 1)^2 + \gamma(S^2 - 1)^2 = a \quad (a \geq 0, \quad 0 < \gamma \leq 1) \quad (3)$$

или  $C^4 - 2C^2 + \gamma(S^4 - 2S^2) = a - 1 - \gamma$  (см. приложение 1.1 для случая  $\gamma = 1$  и приложение 1.2 для случая  $\gamma < 1$ ).

Поскольку уравнение (3) не меняется при замене  $C$  на  $-C$  и  $S$  на  $-S$ , достаточно рассматривать только те кривые или части кривых из  $\Gamma_a$ , обозначаемые  $\Gamma_a^1$ , которые лежат в первой четверти.

Выделим "сепаратрисные" кривые уравнения (3), т.е. кривые, проходящие через особые точки невозмущенной системы (2). Но предварительно введем константы, отвечающие экстремальным значениям этих кривых, только те, которые зависят от параметра  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} b^\gamma &= \sqrt{1 - \gamma^{1/2}}, \quad c^\gamma = \sqrt{1 + \gamma^{1/2}}, \\ c^m &= \sqrt{1 - (1 - \gamma)^{1/2}}, \quad c^p = \sqrt{1 + (1 - \gamma)^{1/2}}, \quad d^p = \sqrt{1 + \gamma^{-1/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $a = 0$  семейство  $\Gamma_a$  состоит из четырех точек:  $(\pm 1, 1)$ ,  $(\pm 1, -1)$ .

Пусть  $\gamma \in (0, 1)$ .

Тогда при  $a = \gamma$  семейство  $\Gamma_a$  состоит из четырех замкнутых кривых (или двух "восьмерок"), две из которых соприкасаются в особой точке  $(1, 0)$ , охватывая точки  $(1, \pm 1)$ , и две – в особой точке  $(-1, 0)$ , охватывая точки  $(-1, \pm 1)$ . В первом квадранте лежит одна из кривых, образуя  $\Gamma_\gamma^1$ , – это верхний нолик правой восьмерки. Экстремумы  $\Gamma_\gamma^1$  находятся в точках  $(c^\gamma, 1)$ ,  $(1, \sqrt{2})$ ,  $(b^\gamma, 1)$ ,  $(1, 0)$ .

При  $a = 1$  семейство  $\Gamma_a$  состоит из двух замкнутых кривых: внутренней  $\Gamma_1^m$  и внешней  $\Gamma_1^p$ , соприкасающихся в особых точках  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$ . Внутри  $\Gamma_1^m$  лежит особая точка  $(0, 0)$ , а в каждой из двух областей между  $\Gamma_1^m$  и  $\Gamma_1^p$  лежит по одной "восьмерке" из  $\Gamma_\gamma$ . В первой четверти лежат "четвертинки" этих кривых:  $\Gamma_1^{m1}$  с экстремумами  $(c^m, 0)$ ,  $(0, 1)$  и  $\Gamma_1^{p1}$  с экстремумами  $(c^p, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, 1)$ ,  $(1, d^p)$ ,  $(0, 1)$ .

Если же  $\gamma = 1$  и  $a = 1$ , то  $c^m = c^p = 1$ , т.е.  $\Gamma_1^{m1}$  пересекается с  $\Gamma_1^{p1}$  в точке  $(1, 0)$ , образуя верхний нолик восьмерки, и  $\Gamma_\gamma$  склеивается с  $\Gamma_1$ .

Остальные семейства  $\Gamma_a$  разбиваются выделенными на классы 0), 1), 2) (см. приложения 1.3–1.5).

Перед описанием классов введем "экстремальные" константы.

$$\begin{aligned}
 c_0^m &= \sqrt{1 - (a - \gamma)^{1/2}} \in (0, c^m), & d_0^m &= \sqrt{1 - ((a - 1)/\gamma)^{1/2}}, \\
 c_0^p &= \sqrt{1 + (a - \gamma)^{1/2}} \in (c^p, \infty), & \bar{c}_0^p &= \sqrt{1 + a^{1/2}}, \\
 d_0^p &= \sqrt{1 + ((a - 1)/\gamma)^{1/2}}, & \bar{d}_0^p &= \sqrt{1 + (a/\gamma)^{1/2}}; \\
 c_1^* &= \sqrt{1 + (a - \gamma)^{1/2}} \in (1, c^p), & \bar{c}_1^* &= \sqrt{1 + a^{1/2}}, \\
 d_1^* &= \sqrt{1 + (a/\gamma)^{1/2}}, & b_1^* &= \sqrt{1 - (a - \gamma)^{1/2}}, & \bar{b}_1^* &= \sqrt{1 - a^{1/2}}; \\
 c_2^* &= \sqrt{1 + a^{1/2}} \in (1, c^\gamma), & d_2^* &= \sqrt{1 + (a/\gamma)^{1/2}}, \\
 b_2^* &= \sqrt{1 - a^{1/2}}, & a_2^* &= \sqrt{1 - (a/\gamma)^{1/2}}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

0)  $a > 1$ . При  $1 < a < 1 + \gamma$  семейство  $\Gamma_a$  состоит из двух замкнутых кривых: внутренней –  $\Gamma_a^m$ , охватывающей точку  $(0, 0)$  и лежащей внутри  $\Gamma_1^m$ , и внешней –  $\Gamma_a^p$ , охватывающей  $\Gamma_1^p$ . В первой четверти лежат их "четвертинки": кривая  $\Gamma_a^{m1}$ , проходящая через  $(c_0^m, 0)$ ,  $(0, d_0^m)$ , и кривая  $\Gamma_a^{p1}$ , проходящая через  $(c_0^p, 0)$ ,  $(\bar{c}_0^p, 1)$  и  $(1, \bar{d}_0^p)$ ,  $(0, d_0^p)$ . А при  $a \geq 1 + \gamma$  сохраняется только кривая  $\Gamma_a^p$ , так как  $\Gamma_a^m$  уже при  $a = 1 + \gamma$  вырождается в точку  $(0, 0)$ .

В результате класс 0) естественным образом разбивается на два класса:  $0^p$ ) для кривых  $\Gamma_a^p$  ( $a > 1$ ) и  $0^m$ ) для кривых  $\Gamma_a^m$  ( $1 < a < 1 + \gamma$ ).

1)  $\gamma < a < 1$  ( $\gamma < 1$ ). Семейство  $\Gamma_a$  состоит из двух замкнутых кривых. В первой четверти лежит верхняя половина  $\Gamma_a^1$  правой кривой, располагаясь между  $\Gamma_\gamma^1$  и  $\Gamma_1^{m1} \cup \Gamma_1^{p1}$  и проходя через точки  $(c_1^*, 0)$ ,  $(\bar{c}_1^*, 1)$ ,  $(1, d_1^*)$ ,  $(\bar{b}_1^*, 1)$ ,  $(b_1^*, 0)$ .

2)  $0 < a < \gamma$ . Семейство  $\Gamma_a$  состоит из четырех замкнутых кривых. В первой четверти кривая  $\Gamma_a^1$  охватывает точку  $(1, 1)$  и лежит внутри  $\Gamma_\gamma^1$ , проходя через точки  $(c_2^*, 1)$ ,  $(1, d_2^*)$ ,  $(b_2^*, 1)$ ,  $(1, a_2^*)$ .

**Замечание 1** (о принятых в (5) обозначениях). Величины  $c, d, b, a$  задают одну из координат экстремальной точки кривой  $\Gamma_a^1$ , соответственно правой, верхней, левой, нижней. Далее, в случаях  $0^p$ ) и 1) величины  $\theta_i$  и  $\bar{\theta}_i$  являются одновременно абсциссами или ординатами двух экстремальных точек кривой  $\Gamma_a$ , но  $\theta_i$  – это координата нижней точки, а  $\bar{\theta}_i$  – верхней.

В дальнейшем именно параметр  $c_0^m$  в классе  $0^m$ ),  $c_0^p$  в случае  $0^p$ ),  $c_1^*$  в классе 1) и  $c_2^*$  в классе 2) будут выбираться в качестве независимой переменной, задающей кривую  $\Gamma_a$ , в то время как параметр  $a$  будет однозначно выражаться через выбранный параметр  $c$ .



**2<sup>0</sup>. Параметризация замкнутых кривых.** Рассмотрим автономную консервативную систему с девятью точками покоя

$$C'(\varphi) = \gamma(S^3(\varphi) - S(\varphi)), \quad S'(\varphi) = -(C^3(\varphi) - C(\varphi)) \quad (0 < \gamma \leq 1). \quad (6)$$

Равенство (3) задает положительно определенный интеграл системы (6). Из девяти особых точек пять являются центрами, причем:  $(\pm 1, 1)$ ,  $(\pm 1, -1)$  удовлетворяют (3) при  $a = 0$ , а  $(0, 0)$  при  $a = 1 + \gamma$ . Остальные четыре точки — седловые:  $(\pm 1, 0)$  удовлетворяют (3) при  $a = \gamma$ , а  $(0, \pm 1)$  при  $a = 1$ . Поэтому семейства  $\Gamma_\gamma$  и  $\Gamma_1$  помимо указанных точек описывают все сепаратрисы системы (6).

Кривые из  $\Gamma_a$ , попадающие в первую четверть, для каждого из трех выделенных классов будут параметризованы замкнутыми траекториями системы (6) с начальными данными

$$C(0) = v_j, \quad S(0) = j \quad (j = 0, 1), \quad (7)$$

где в  $0^m$ )  $v_0 = c_0^m \in (0, c^m)$ , в  $0^p$ )  $v_0 = c_0^p \in (c^p, \infty)$ , в 1)  $v_0 = c_1^* \in (1, c^p)$  ( $a_{v_0} = \gamma + (v_0^2 - 1)^2$ ); в 2)  $v_1 = c_2^* \in (1, c^\gamma)$  ( $a_{v_1} = (v_1^2 - 1)^2$ ).

Начальные данные для параметризации замкнутых кривых, целиком лежащих вне первой четверти, задаются из соображений симметрии:

1\*) при  $\gamma < a < 1$ :  $C(0) = v_0$ ,  $S(0) = 0$ , где  $v_0 \in (-c^p, -1)$ .

2\*) при  $0 < a < \gamma$ :  $C(0) = v_1$ ,  $S(0) = 1$ , где  $v_1 \in (-c^\gamma, -1)$ , или  $C(0) = v_{-1}$ ,  $S(0) = -1$ , где  $v_{-1} \in (-c^\gamma, -1) \cup (1, c^\gamma)$ ;

Таким образом решения системы (6)  $C_{v_l} = C(\varphi)$ ,  $S_{v_l} = S(\varphi)$  с начальными данными  $C(0) = v_l$ ,  $S(0) = l$  ( $l = -1, 0, 1$ ) являются вещественно аналитическими  $\omega = \omega_{v_l}$ -периодическими функциями  $\varphi$ .

**3<sup>0</sup>. Периоды движений по замкнутым траекториям.** Для всякого  $v_l$  в интеграле (3) системы (6)  $S(C^2) = \pm \sqrt{1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{v_l} - (C^2 - 1)^2)^{1/2}}$ , где плюсы и минусы выбираются в зависимости от расположения точек параметрически заданной кривой  $(C(\varphi), S(\varphi))$  по отношению к прямым  $S = 0, \pm 1$ .

Положим

$$S^\pm(C^2) = \sqrt{1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{v_l} - (C^2 - 1)^2)^{1/2}}. \quad (8)$$

Вычислим периоды  $\omega_c$  траекторий в каждом из трех основных классов, используя получаемое из первого уравнения системы (6) равенство

$$d\varphi = \gamma^{-1}(S^3(C^2) - S(C^2))^{-1}dC. \quad (9)$$

$0^m$ )  $v_0 = c_0^m \in (0, c^m)$ . Так как  $S'(0) = c_0^m - (c_0^m)^3 > 0$  и в первой четверти  $S(\varphi) < 1$ , то из (9) получаем  $\varphi^- = \gamma^{-1} \int_{c_0^m}^0 (S^{-3}(C^2) - S^-(C^2))^{-1} dC$  – "время" нахождения траектории в первой четверти. В остальных четвертях лежат части траектории, симметричные  $\Gamma_a^{m1}$ . Поэтому  $\omega_{c_0^m} = 4\varphi^-$ .

$0^p$ )  $v_0 = c_0^p \in (c^p, \infty)$ . Поскольку  $\bar{c}_0^p = (1 + (\gamma + ((c_0^p)^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}$  – абсцисса точки пересечения траектории с прямой  $S = 1$  в первой четверти и  $S'(0) = c_0^p - (c_0^p)^3 < 0$ , то из (9) получаем  $\varphi^+ = \gamma^{-1} \int_0^{\bar{c}_0^p} (S^{+3}(C^2) - S^+(C^2))^{-1} dC$  и  $\varphi^- = \gamma^{-1} \int_{\bar{c}_0^p}^{c_0^p} (S^{-3}(C^2) - S^-(C^2))^{-1} dC$  – "время" нахождения траектории в первой четверти соответственно над и под прямой  $S = 1$ . В других четвертях все симметрично, поэтому  $\omega_{c_0^p} = 4(\varphi^+ + \varphi^-)$ .

1)  $v_0 = c_1^* \in (1, c^p)$ . Поскольку  $b_1^* = (2 - (c_1^*)^2)^{1/2}$  – абсцисса левой точки пересечения траектории с прямой  $S = 0$ , а  $\bar{b}_1^* = (1 - (\gamma + ((c_1^*)^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}$  и  $\bar{c}_1^* = (1 + (\gamma + ((c_1^*)^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}$  – абсциссы точек пересечения траектории с прямой  $S = 1$ , причем  $S'(0) = c_1^* - (c_1^*)^3 < 0$ , то из (9) получаем, что  $\varphi_b^- = \gamma^{-1} \int_{b_1^*}^{\bar{b}_1^*} (S^{-3}(C^2) - S^-(C^2))^{-1} dC$ ,  $\varphi^+ = \gamma^{-1} \int_{\bar{b}_1^*}^{\bar{c}_1^*} (S^{+3}(C^2) - S^+(C^2))^{-1} dC$  и  $\varphi_c^- = \gamma^{-1} \int_{\bar{c}_1^*}^{c_1^*} (S^{-3}(C^2) - S^-(C^2))^{-1} dC$  – "время" нахождения траектории в первой четверти соответственно под, над и снова под прямой  $S = 1$ . Во второй четверти лежит вторая часть траектории, симметричная кривой  $\Gamma_a^1$  относительно оси  $OC$ . Поэтому  $\omega_{c_1^*} = 2(\varphi_b^- + \varphi^+ + \varphi_c^-)$ .

2)  $v_1 = c_2^* \in (1, c^\gamma)$ . Поскольку  $b_2^* = (2 - (c_2^*)^2)^{1/2}$  – абсцисса левой точки пересечения траектории с прямой  $S = 1$  и  $S'(0) = c_2^* - (c_2^*)^3 < 0$ , то из (9) получаем  $\varphi^- = \gamma^{-1} \int_{c_2^*}^{b_2^*} (S^{-3}(C^2) - S^-(C^2))^{-1} dC$  и  $\varphi^+ = \gamma^{-1} \int_{b_2^*}^{c_2^*} (S^{+3}(C^2) - S^+(C^2))^{-1} dC$  – "время" нахождения траектории соответственно под и над прямой  $S = 1$ . Поэтому  $\omega_{c_2^*} = \varphi^- + \varphi^+$ .

### §3. Переход в окрестность замкнутой траектории

#### 1<sup>0</sup>. Перенос начала координат в особые точки (1,0) и (1,1).

В дальнейшем для нахождения инвариантных поверхностей системы (1) будет необходимо сделать специальную ненормированную полярную замену, осуществляющую переход в окрестность произвольной замкнутой траектории  $\Gamma_a$  невозмущенной системы (2), параметризуемой решением задачи Коши  $C(\varphi), S(\varphi)$  системы (6) с должным образом выбранными начальными данными  $0, v_l, l$  ( $l \in \{0, \pm 1\}$ ). При этом выяснится, что сделать это сразу удастся только в случае 0), а в случаях 1), 2) сначала необходимо перенести начало координат системы (1) в точки (1,0) или (1,1).

Поэтому сделаем в системе (1) в упомянутых случаях замены

$$0) x = x_0, y = y_0; \quad 1) x = x_1 + 1, y = y_1; \quad 2) x = x_2 + 1, y = y_2 + 1 \quad (10)$$

(замена (9<sub>0</sub>) – просто смена обозначений), получая следующие системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= (\gamma(y_0^3 - y_0) + X_0(t, x_0, y_0, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \\ \dot{y}_0 &= (-x_0^3 + x_0 + Y_0(t, x_0, y_0, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $X_0 = X(t, x_0, y_0, \varepsilon)$ ,  $Y_0 = Y(t, x_0, y_0, \varepsilon)$ ;

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\gamma(y_1^3 - y_1) + X_1(t, x_1, y_1, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \\ \dot{y}_1 &= (-x_1^3 - 3x_1^2 - 2x_1 + Y_1(t, x_1, y_1, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $X_1 = X(t, x_1 + 1, y_1, \varepsilon)$ ,  $Y_1 = Y(t, x_1 + 1, y_1, \varepsilon)$ ;

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= (\gamma(y_2^3 + 3y_2^2 + 2y_2) + X_2(t, x_2, y_2, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \\ \dot{y}_2 &= (-x_2^3 - 3x_2^2 - 2x_2 + Y_2(t, x_2, y_2, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $X_2 = X(t, x_2 + 1, y_2 + 1, \varepsilon)$ ,  $Y_2 = Y(t, x_2 + 1, y_2 + 1, \varepsilon)$ .

Аналогичные сдвиги осуществим в системе (6), параметризующей фазовые портреты (3) невозмущенной системы (2). Сделаем замены

$$\begin{aligned} C &= C_0, S = S_0 \text{ в случае 0) ; } C = C_1 + 1, S = S_1 \text{ в случае 1) ;} \\ C &= C_2 + 1, S = S_1 + 1 \text{ в случае 2).} \end{aligned} \quad (11)$$

В случае 0), когда (11<sub>0</sub>) – удобное переобозначение, получаем систему

$$C'_0 = \gamma(S_0^3 - S_0), \quad S'_0 = -(C_0^3 - C_0) \quad (0 < \gamma \leq 1), \quad (6_0)$$

для задания периодических решений которой используем начальные данные:  $0, c_0, 0$ , где с учетом (7)  $c_0 = c_0^m \in (0, c^m)$  или  $c_0 = c_0^p \in (c^p, \infty)$  ( $c^m, c^p$  из (4)), и обозначаем эти решения  $C_0(\varphi) = C_0(\varphi, c_0)$ ,  $S_0(\varphi) = S_0(\varphi, c_0)$ .

При таких  $c_0$  интегралы (6<sub>0</sub>) имеют вид

$$(C_0^2 - 1)^2 + \gamma(S_0^2 - 1)^2 = a_{c_0}, \quad a_{c_0} = \gamma + (c_0^2 - 1)^2 > 1,$$

причем  $a_{c_0} < 1 + \gamma$  при  $c_0 \in (0, c^m)$ , когда реализуется случай 0<sup>m</sup>).

Покажем, что  $C_0(\varphi, c_0)$  – функция четная, а  $S_0(\varphi, c_0)$  – нечетная. Для этого покажем, что функции  $u(\varphi) = C_0(-\varphi)$ ,  $v(\varphi) = -S_0(-\varphi)$  удовлетворяют системе (6<sub>0</sub>). Действительно,

$$\begin{aligned} du(\varphi)/d\varphi &= -dC_0(-\varphi)/d(-\varphi) = -\gamma(S_0^3(-\varphi) - S_0(-\varphi)) = \gamma(v^3(\varphi) - v(\varphi)), \\ dv(\varphi)/d\varphi &= dS_0(-\varphi)/d(-\varphi) = -(C_0^3(-\varphi) - C_0(-\varphi)) = -(u^3(\varphi) - u(\varphi)). \end{aligned}$$

При этом  $u(0) = C_0(0) = c_0$ ,  $v(0) = -S_0(0) = 0$ . Следовательно по теореме о единственности задачи Коши  $u(\varphi) = C_0(\varphi)$ ,  $v(\varphi) = S_0(\varphi)$ .

**Замечание 2.** Уточним область определения (константы  $x_*, y_*$ ) системы (1<sub>0</sub>) или (1) в случае  $0^p$ ), когда будет осуществляться переход в окрестность замкнутой траектории системы (6<sub>0</sub>), лежащей вне контура  $\Gamma_1^p$ . Для того чтобы малая окрестность траектории  $x_0 = C_0(\varphi, c_0)$ ,  $y_0 = S_0(\varphi, c_0)$ , где  $c_0 > c^p$  из (4), лежала в области определения системы (1<sub>0</sub>), надо потребовать, чтобы экстремумы траектории удовлетворяли неравенствам  $\bar{c}_0^p = \sqrt{1 + (a_{c_0})^{1/2}} < x_*$ ,  $\bar{d}_0^p = \sqrt{1 + (a_{c_0}/\gamma)^{1/2}} < y_*$ , задающим оценки

$$x_* > \sqrt{1 + (\gamma + (c_0^2 - 1)^2)^{1/2}}, \quad y_* > \sqrt{1 + (1 + \gamma^{-1}(c_0^2 - 1)^2)^{1/2}} \quad (c_0 > c^p).$$

В случае 1) при переходе в окрестность точки (1, 0) получаем систему

$$C_1' = \gamma(S_1^3 - S_1), \quad S_1' = -(C_1^3 + 3C_1^2 + 2C_1) \quad (0 < \gamma < 1), \quad (6_1)$$

для задания периодических решений которой используем начальные данные:  $0, c_1, 0$ , где  $c_1 = c_1^* - 1 \in (0, c^p - 1)$ , и обозначаем эти решения  $C_1(\varphi) = C_1(\varphi, c_1)$ ,  $S_1(\varphi) = S_1(\varphi, c_1)$ . При этом в силу (11)  $C_1(\varphi)$  – четная функция, а  $S_1(\varphi)$  – нечетная.

При фиксированном  $c_1 \in (0, c^p - 1)$  интеграл системы (6<sub>1</sub>) имеет вид

$$((C_1 + 1)^2 - 1)^2 + \gamma(S_1^2 - 1)^2 = a_{c_1}, \quad a_{c_1} = \gamma + ((c_1 + 1)^2 - 1)^2 \quad (a_{c_1} \in (\gamma, 1)).$$

После замены (11<sub>1</sub>) абсциссы экстремумов кривых  $\Gamma_{a_{c_1}}$  уменьшаются на единицу, т. е.  $C_1(\varphi, c_1) \in (-1, \sqrt{2} - 1)$ ,  $S_1(\varphi, c_1) \in (0, \sqrt{2})$ , а формула (8) принимает вид

$$S_1^\pm(\varphi) = S_1^\pm(C_1(\varphi)) = \sqrt{1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{c_1} - C_1^2(C_1 + 2)^2)^{1/2}}. \quad (12_1)$$

В случае 2) при переходе в окрестность точки (1, 1) получаем систему

$$C_2' = \gamma(S_2^3 + 3S_2^2 + 2S_2), \quad S_2' = -(C_2^3 + 3C_2^2 + 2C_2) \quad (0 < \gamma \leq 1); \quad (6_2)$$

для задания периодических решений которой используем начальные данные:  $0, c_2, 0$ , где  $c_2 = c_2^* - 1 \in (0, c^\gamma - 1)$  ( $c^\gamma$  из (4)), и обозначаем эти решения  $C_2(\varphi) = C_2(\varphi, c_2)$ ,  $S_2(\varphi) = S_2(\varphi, c_2)$ .

При таких  $c_2$  интеграл (6<sub>2</sub>) имеет вид

$$((C_2 + 1)^2 - 1)^2 + \gamma((S_2 + 1)^2 - 1)^2 = a_{c_2}, \quad a_{c_2} = ((c_2 + 1)^2 - 1)^2 \quad (a_{c_2} \in (0, \gamma)).$$

После замены (11<sub>2</sub>) обе координаты экстремумов кривых  $\Gamma_{a_{c_2}}$  уменьшаются на единицу, т.е.  $C_2(\varphi, c_2), S_2(\varphi, c_2) \in (-1, \sqrt{2} - 1)$ , а формула (8) принимает вид

$$S_2^\pm(\varphi) = S_2^\pm(C_2(\varphi)) = \sqrt{(1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{c_2} - C_2^2(C_2 + 2)^2)^{1/2})^{1/2} + 1}. \quad (12_2)$$

**Замечание 3.** Легко проверить, что  $\omega_{c_0} = \omega_{c_0^m}$  в случае  $0^m$ ),  $\omega_{c_0} = \omega_{c_0^p}$  в случае  $0^p$ ),  $\omega_{c_1} = \omega_{c_1^*}$ ,  $\omega_{c_2} = \omega_{c_2^*}$  соответственно в случаях 1) и 2).

Теперь на периодических решениях систем (6<sub>i</sub>) рассмотрим функции

$$p_i = p_i(\varphi, c_i) = C_i'(\varphi)S_i(\varphi) - C_i(\varphi)S_i'(\varphi) \quad (i = 0, 1, 2) \quad (13)$$

и изучим, как меняется их знак при движении по замкнутым траекториям.

### 2<sup>0</sup>. Проверка монотонности угловой переменной в случае 0).

Покажем, что  $p_0(\varphi, c_0)$  – знакоопределенная функция.

Подставляя в нее производные из системы (6<sub>0</sub>) и упрощая при помощи формулы интеграла системы, получаем, что

$$p_0(\varphi, c_0) = C_0^4 - C_0^2 + \gamma(S_0^4 - S_0^2) = a_{c_0} - 1 - \gamma + C_0^2 + \gamma S_0^2.$$

Тогда  $p_0'(\varphi, c_0) = 2C_0C_0' + 2\gamma S_0S_0' = -2\gamma C_0(\varphi)S_0(\varphi)(C_0^2(\varphi) - S_0^2(\varphi))$ .

В классе  $0^m$ ), когда  $1 < a < 1 + \gamma$ , при  $\varphi \in [0, \omega/4]$  траектории расположены в первой четверти и проходят через точку  $(c_0^m, 0)$  при  $\varphi = 0$  и через  $(0, d_0^m)$  при  $\varphi = \omega/4$  ( $c_0^m, d_0^m$  из (5)). При этом  $p_0'(\varphi) < 0$ , когда  $C_0(\varphi) > S_0(\varphi)$ , и  $p_0'(\varphi) > 0$ , когда  $C_0(\varphi) < S_0(\varphi)$ , а значит,  $p_0(\varphi)$  принимает максимальные значения на концах отрезка  $[0, \omega/4]$ .

В результате  $p_0(0) = a_{c_0} - 1 - \gamma + (c_0^m)^2 = \sqrt{a - \gamma}(\sqrt{a - \gamma} - 1) < 0$ ,  $p_0(\omega/4) = a_{c_0} - 1 - \gamma + \gamma(d_0^m)^2 = \sqrt{a_{c_0} - 1}(\sqrt{a_{c_0} - 1} - \sqrt{\gamma}) < 0$ . Из соображений симметрии по четвертям заключаем, что  $p_0(\varphi) < 0$  для  $\forall \varphi$ .

В классе  $0^p$ ), когда  $a_{c_0} > 1$ , при  $\varphi \in [\omega/4, 0]$  траектории находятся в первой четверти и проходят через точку  $(0, d_0^p)$  при  $\varphi = \omega/4$  и через точку  $(c_0^p, 0)$  при  $\varphi = 0$  ( $c_0^p, d_0^p$  из (5)). При этом  $p_0'(\varphi) > 0$ , пока  $C_0(\varphi) < S_0(\varphi)$ , и  $p_0'(\varphi) < 0$ , когда  $C_0(\varphi) > S_0(\varphi)$ , а значит, функция  $p_0(\varphi)$  принимает минимальные значения на концах отрезка  $[\omega/4, 0]$ .

Поэтому  $p_0(\omega/4) = a_{c_0} - 1 - \gamma + \gamma(d_0^p)^2 > 0$ ,  $p_0(0) = a_{c_0} - 1 - \gamma + (c_0^p)^2 > 0$ . Из тех же соображений симметрии заключаем, что  $p_0(\varphi) > 0$  при всех  $\varphi$ .

**Замечание 4.** Легко проверить, что на траекториях из классов 1), 2) функции  $p_i(\varphi, c_i)$  ( $i = 1, 2$ ) меняют знак, так как при обходе замкнутых

траекторий, не содержащих начало координат внутри себя, полярный угол изменяется не монотонно. Именно поэтому для исследования системы (1) в окрестности замкнутых траекторий из классов 1) или 2) начало координат предварительно было сдвинуто в особые точки системы (6), лежащие внутри указанных траекторий, соответственно в точку (1,0) или (1,1).

### 3<sup>0</sup>. Проверка монотонности угловой переменной в случае 1).

Покажем, что  $p_1(\varphi, c_1)$  из (13) – знакопеременная функция.

Подставляя в нее производные из системы (6<sub>1</sub>) и упрощая при помощи формулы интеграла системы, получаем, что

$$p_1(\varphi, c_1) = C_1^4 + 3C_1^3 + 2C_1^2 + \gamma(S_1^4 - S_1^2) = a_{c_1} - \gamma - C_1^3 - 2C_1^2 + \gamma S_1^2.$$

В системе (6<sub>1</sub>)  $c_1 \in (0, c^p - 1)$  и при  $c_1 \rightarrow 0$  замкнутые траектории стремятся к правой сепаратрисной "восьмерке"  $\Gamma_\gamma^+ = \Gamma_\gamma^1 \cup \Gamma_\gamma^4$ .

Оценим на ней  $p_1(\varphi, c_1)$ , для чего положим  $c_1 = 0$ .

Тогда  $a_{c_1} = \gamma$  и, согласно (13<sub>1</sub>):

$$p_1(\varphi, 0) = \gamma S_1^2 - C_1^3 - 2C_1^2. \quad (14)$$

Докажем, что функция  $p_1$  – знакопеременна для  $\forall \gamma \in (0, 1)$ . Для этого укажем такие точки  $(C_1, S_1) \in \Gamma_\gamma^+$  (на правой сепаратрисной "восьмерке"), в которых  $p_1(\varphi, 0)$  принимает значения как одного, так и другого знака.

Существует  $\varphi_*$  такое, что  $C_1(\varphi_*, 0) = 0$ ,  $S_1(\varphi_*, 0) = d_1^*$  ( $d_1^* = \sqrt{2}$ ) – это верхняя точка  $\Gamma_\gamma^+$ . Тогда  $p_1(\varphi_*, 0) = 2\gamma > 0$  для  $\forall \gamma \in (0, 1)$ .

Для нахождения точек  $\Gamma_\gamma^+$ , в которых  $p_1 < 0$ , подставим  $(S_1^-)^2$  из (12<sub>1</sub>) с  $a_{c_1} = \gamma$  в формулу (14), получая:  $p_1(\varphi, 0) = \gamma - \gamma^{1/2}(\gamma - C_1^2(C_1 + 2))^2)^{1/2} - C_1^2(C_1 + 2)$ . Тогда  $p_1 < 0 \Leftrightarrow (\gamma - C_1^2(C_1 + 2))^2 < \gamma(\gamma - C_1^2(C_1 + 2))^2 \Leftrightarrow C_1^2 + 2C_1 + \gamma > 0$  при  $C_1 \in (-1, 0) \Leftrightarrow C_1 \in (-\delta_\gamma, 0)$ , где  $\delta_\gamma = 1 - (1 - \gamma)^{1/2}$ . При этом в (12<sub>1</sub>)  $(S_1^-)^2 \in (0, \delta_\gamma)$ .

В результате установлена нижняя граница для отрицательных значений  $C(\varphi, 0)$ , при которых на "восьмерке" в окрестности особой точки функция  $p_1(\varphi, 0)$  отрицательна.

Теперь из непрерывности  $p_1$  как функции  $c_1$  следует, что при  $c_1$  достаточно близких к нулю функция  $p_1(\varphi, c_1)$  также знакопеременна.

Найдем числа  $\gamma^*, \delta^*$  и функции  $a^-(\gamma), a^+(\gamma)$  такие, что выполнено:

- 1)  $\gamma \leq a^-(\gamma) < a^+(\gamma) \leq 1$  и при  $a_{c_1} \in (a^-(\gamma), a^+(\gamma))$  функция  $p_1(\varphi, c_1) > 0$  для  $\forall \gamma \in (0, \gamma^*)$ ;
- 2)  $p_1(\varphi, c_1)$  знакопеременна для  $\forall \gamma \in (\gamma^* + \delta^*, 1)$ .

В результате приближенных вычислений получены следующие константы и функции с требуемыми свойствами (см. приложение 2):

$$a^- = \begin{cases} \gamma + 0.01, & \gamma \in (0, 0.55], \\ 1.2\gamma - 0.1, & \gamma \in [0.55, 0.75], \\ 4\gamma^2 - 4.2\gamma + 1.7, & \gamma \in [0.75, \gamma^*]; \end{cases} \quad a^+ = \begin{cases} 1, & \gamma \in (0, 0.5], \\ -0.84\gamma^2 + 0.84\gamma + 0.79, & \gamma \in [0.5, \gamma^*]; \end{cases}$$

$$\gamma^* = 0.806, \quad \delta^* = 0.001 \quad (0.914 < a^-(\gamma^*) < a^+(\gamma^*) < 0.921).$$

**Замечание 5.** При желании можно добиться увеличения точности значений  $\gamma^*, \delta^*, a^-(\gamma), a^+(\gamma)$ , увеличивая количество рассматриваемых знаков после запятой или уменьшая шаги разбиения по  $\gamma$ .

Таким образом, учитывая формулу для  $c_1^*$  в (5) и сдвиг (11<sub>1</sub>), оказалась доказана следующая техническая лемма.

**Лемма 1.** 1) Для  $\forall \gamma \in (0, \gamma^*), c_1 \in (c_1^-(\gamma), c_1^+(\gamma))$  функция  $p_1(\varphi, c_1) > 0$ ; здесь  $c_1^\pm = (1 + (a^\pm(\gamma) - \gamma)^{1/2})^{1/2} - 1$  и  $0.153 < c_1^-(\gamma^*) < c_1^+(\gamma^*) < 0.157$ .

2) Для  $\forall \gamma \in (\gamma^* + \delta^*, 1)$  функция  $p_1(\varphi, c_1)$  является знакопеременной при  $\forall c_1 \in (0, c^p - 1)$ , где  $c^p = (1 + (1 - \gamma)^{1/2})^{1/2}$  из (4).

#### 4<sup>0</sup>. Проверка монотонности угловой переменной в случае 2).

Покажем, что функция  $p_2(\varphi, c_2)$  – знакоположительная.

Подставляя в нее производные из системы (6<sub>2</sub>) и упрощая при помощи формулы интеграла системы, получаем, что

$$p_2 = C_2^4 + 3C_2^3 + 2C_2^2 + \gamma(S_2^4 + 3S_2^3 + 2S_2^2) = a_{c_2} - C_2^3 - 2C_2^2 - \gamma(S_2^3 + 2S_2^2).$$

Тогда  $p_2'(\varphi, c_2) = \gamma C_2 S_2 (C_2 - S_2)(3C_2 S_2 + 4(C_2 + S_2) + 6)$ .

Поскольку  $S_2 > -1 > -(4C_2 + 6)/(3C_2 + 4)$ , то  $3C_2 S_2 + 4(C_2 + S_2) + 6 > 0$ . Анализ изменения знака  $p_2'$  с учетом того, что обход траектории происходит по часовой стрелке, показывает, что функция  $p_2(\varphi, c_2)$  достигает локальных минимумов в точках  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , определяемых равенствами:  $C_2(\varphi_1) = 0$  ( $S_2(\varphi_1) < 0$ ),  $S_2(\varphi_2) = 0$  ( $C_2(\varphi_2) < 0$ ),  $C_2(\varphi_3) = S_2(\varphi_3) > 0$ , в частности,  $\varphi_2 = \varphi^-$  из определения периода.

В (5)  $a_2^* = \sqrt{1 - (a_{c_2}/\gamma)^{1/2}}$ ,  $b_2^* = \sqrt{1 - (a_{c_2})^{1/2}}$ , тогда  $a_{c_2} = \gamma(1 - a_2^*)^2$  и  $p_2(\varphi_1, c_2) = a_{c_2} - \gamma((a_2^* - 1)^3 + 2(a_2^* - 1)^2) = \gamma(1 - (a_2^*)^2)^2(a_2^* + 1)a_2^* > 0$ . Аналогично,  $p_2(\varphi_2, c_2) = a_{c_2} - (b_2^* - 1)^3 - 2(b_2^* - 1)^2 = (1 - (b_2^*)^2)^2(b_2^* + 1)b_2^* > 0$ . Наконец,  $p_2(\varphi_3, c_2) = (1 + \gamma)(C_2^4 + 3C_2^3 + 2C_2^2) > 0$ .

### 5<sup>0</sup>. Специальная аффинно-полярная замена.

**Определение 1.** Будем называть допустимыми те значения параметра  $c_i$  или начальные данные  $0, c_i, 0$  ( $i = 0, 1, 2$ ), при которых функции  $p_i(\varphi, c_i)$ , введенные в (13) для систем (6<sub>i</sub>), являются знакоопределенными.

Из формул (6<sub>0</sub>), (6<sub>2</sub>) и леммы 1 вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Параметры  $c_i$  допустимы, если:

в случае 0<sup>m</sup>)  $c_0 \in (0, c^m)$ , в случае 0<sup>p</sup>)  $c_0 \in (c^p, +\infty)$ ;

в случае 1)  $c_1 \in (c_1^-(\gamma), c_1^+(\gamma))$  ( $\gamma \in (0, \gamma^*)$ ); в случае 2)  $c_2 \in (0, c^\gamma - 1)$ .

Здесь  $c^m, c^p, c^\gamma$  – из (4),  $c_1^-, c_1^+$  – из леммы 1.

Для любого допустимого  $c_i$  с учетом замечания 2 сделаем в системе (1<sub>i</sub>) специальную аффинно-полярную замену

$$x_i = C_i(\varphi)(r + 1), \quad y_i = S_i(\varphi)(r + 1) \quad (|r| < r_0 \leq 1, \quad i = 0, 1, 2), \quad (15)$$

где  $C_i(\varphi), S_i(\varphi)$  – вещественно-аналитическое  $\omega_{c_i}$ -периодическое решение систем (6<sub>i</sub>) с начальными данными  $C_i(0) = c_i, S_i(0) = 0$ .

Дифференцируя замену (15) по  $t$  и разрешая полученные равенства относительно  $\dot{r}$  и  $\dot{\varphi}$  с использованием формул (13), имеем:

$$\begin{aligned} p_i(\varphi, c_i)\dot{r} &= C'_i(\varphi)\dot{y}_i - S'_i(\varphi)\dot{x}_i, \\ (r + 1)p_i(\varphi, c_i)\dot{\varphi} &= S_i(\varphi)\dot{x}_i - C_i(\varphi)\dot{y}_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= c_0^4 - 2c_0^2, \quad \mu_1 = c_1^4 + 4c_1^3 + 4c_1^2, \quad \mu_2 = c_2^4 + 4c_2^3 + 4c_2^2; \\ (\kappa_i) &= (t, C_i(r + 1), S_i(r + 1), \varepsilon), \quad (\kappa_i^0) = (t, C_i, S_i, 0); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_i(t, \varphi, r, \varepsilon) &= C'_i Y_i(\kappa_i) - S'_i X_i(\kappa_i), \quad R_{i0} = R_i(t, \varphi, 0, 0); \\ \Phi_i(t, \varphi, r, \varepsilon) &= (S_i X_i(\kappa_i) - C_i Y_i(\kappa_i))(1 + r)^{-1} p_i^{-1}, \quad \Phi_{i0} = \Phi_i(t, \varphi, 0, 0), \end{aligned}$$

тогда  $R_i = R_{i0} + (R'_{ir})_0 r + (R'_{i\varepsilon})_0 \varepsilon + O((|r| + \varepsilon)^2)$ ,  $\Phi_i = \Phi_{i0} + O(|r| + \varepsilon)$ .

В результате, подставляя правые части систем (1<sub>i</sub>) в (16) и используя обозначения (17), получаем специальную аффинно-полярную систему:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\nu} p_i \dot{r} &= -p'_i r - P_i r^2 + O(|r|^3) + (R_{i0} + (R'_{ir})_0 r + (R'_{i\varepsilon})_0 \varepsilon + O((|r| + \varepsilon)^2)) \varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} \dot{\varphi} &= 1 + p_i Q_i r + O(|r|^2) + (\Phi_{i0} + O(|r| + \varepsilon)) \varepsilon \quad (i = 0, 1, 2), \end{aligned} \quad (18)$$

в которой  $R_{i0} = C'_i Y_i(\kappa_i^0) - S'_i X_i(\kappa_i^0)$ ,  $(R'_{i\varepsilon})_0 = C'_i Y_i^\varepsilon(\kappa_i^0) - S'_i X_i^\varepsilon(\kappa_i^0)$ ,  
 $(R'_{ir})_0 = C'_i (C_i Y'_{ix_i}(\kappa_i^0) + S_i Y'_{iy_i}(\kappa_i^0)) - S'_i (C_i X'_{ix_i}(\kappa_i^0) + S_i X'_{iy_i}(\kappa_i^0))$ ,  
 $\Phi_{i0} = (S_i X_i(\kappa_i^0) - C_i Y_i(\kappa_i^0)) p_i^{-1}$ ,  $P_0(\varphi) = (3/2)p'_0$ ,  $Q_0(\varphi) = 4p_0^{-1} + 2\mu_0 p_0^{-2}$ ,  
 $P_1(\varphi) = p'_1 + \gamma C_1 S_1 (C_1^2 + 3C_1 S_1^2 + 2S_1^2)$ ,  $Q_1(\varphi) = 5p_1^{-1} + (2C_1^2 - \gamma S_1^2 - 3\mu_1) p_1^{-2}$ ,  
 $P_2(\varphi) = p'_2 + \gamma C_2 S_2 (C_2 - S_2) (3C_2 S_2 + 2C_2 + 2S_2)$ ,  
 $Q_2(\varphi) = 5p_2^{-1} + (2C_2^2 + 2\gamma S_2^2 - 3\mu_2) p_2^{-2}$ .



## §4. Начальные усреднения и бифуркационные уравнения

1<sup>0</sup>. Первичное усреднение. Положим

$$\begin{aligned} \xi_i(\varphi, c_i) &= p_i^{-1}(\varphi, c_i)(p_i'(\varphi, c_i)Q_i(\varphi) - p_i^{-1}(\varphi, c_i)P_i(\varphi)), \\ q_i(\varphi, c_i) &= \int_0^\varphi \xi_i(s, c_i) ds \quad (i = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Покажем сначала, что функция  $q_i(\varphi, c_i)$  –  $\omega_{c_i}$ -периодическая по  $\varphi$ .

При  $i = 0$  имеем:  $\xi_0(\varphi) = p_0^{-2}(\varphi)p_0'(\varphi)(5/2 + 2\mu_0 p_0^{-1}(\varphi))$  ( $\mu_0$  из (17)). Поэтому  $q_0(\varphi, c_0) = \int_0^\varphi (5p_0^{-2}(s)/2 + 2\mu_0 p_0^{-3}(s)) dp_0(s) = -p_0^{-1}(\varphi, c_0)(5/2 + \mu_0 p_0^{-1}(\varphi, c_0)) + 5/2 a_0^{-1} + \mu_0 a_0^{-2}$ , где  $a_0 = (a_{c_0} - \gamma)^{1/2}((a_{c_0} - \gamma)^{1/2} - 1)$  в случае  $0^m$ ,  $a_0 = (a_{c_0} - \gamma)^{1/2}((a_{c_0} - \gamma)^{1/2} + 1)$  в случае  $0^p$ , а  $p_0(\varphi, c_0)$  –  $\omega_{c_0}$ -периодическая по  $\varphi$  функция.

При  $i = 1$  имеем:

$$\xi_1 = p_1^{-2} p_1' (4 + p_1^{-1} (2C_1^2 - \gamma S_1^2 - 3\mu_1)) - \gamma p_1^{-2} C_1 S_1 (C_1^2 + 3C_1 S_1^2 + 2S_1^2).$$

Тогда  $q_1(\varphi) = I_1(\varphi) + I_2(\varphi)$ , где  $I_1 = \int_0^\varphi p_1^{-2}(s)(4 - 3\mu_1 p_1^{-1}(s)) dp_1(s)$ ,

$$I_2 = \int_0^\varphi p_1^{-3}(s)(p_1'(s)(2C_1^2(s) - \gamma S_1^2(s)) - \gamma p_1(s)C_1(s)S_1(s)(C_1^2(s) + 3C_1(s)S_1^2(s) + 2S_1^2(s))) ds \quad (\mu_1 - \text{из (17)}).$$

Отсюда  $I_1 = I_1(p_1(\varphi, c_1)) = -p_1^{-1}(\varphi, c_1)(4 - (3/2)\mu_1 p_1^{-1}(\varphi, c_1)) + 4a_1^{-1} - 3/2\mu_1 a_1^{-2}$ , где  $a_1 = (a_{c_1} - \gamma)^{1/2}(1 + (a_{c_1} - \gamma)^{1/2})^{1/2}((1 + (a_{c_1} - \gamma)^{1/2})^{1/2} - 1)$ .

Пользуясь формулой (11<sub>1</sub>), представим функцию  $S_1(s)$  из  $I_2$  как функцию  $S_1(C_1(s))$  следующим образом:

$$S_1(C_1(s)) = \left\{ \begin{array}{l} S_1^+(C_1(s)), \quad S_1(s) \geq 1; \quad -S_1^-(C_1(s)), \quad -1 \leq S_1(s) \leq 0; \\ S_1^-(C_1(s)), \quad 0 \leq S_1(s) \leq 1; \quad -S_1^+(C_1(s)), \quad S_1(s) \leq -1 \end{array} \right\},$$

при этом  $S_1^\pm(\bar{c}_1^* - 1) = 1$ ,  $S_1^\pm(\bar{b}_1^* - 1) = 1$ , где  $\bar{b}_1^*, \bar{c}_1^*$  – из (5).

Согласно (6<sub>1</sub>)  $ds = \gamma^{-1}(S_1^3(C_1) - S_1(C_1))^{-1} dC_1$ . Тогда получаем, что  $I_2(\varphi) = \int_{c_1}^{C_1(\varphi)} (\gamma^{-1} p_1'(C_1)(2C_1^2 - \gamma S_1^2(C_1)) - p_1(C_1)C_1 S_1(C_1)(C_1^2 + 3C_1 S_1^2(C_1) + 2S_1^2(C_1))) p_1^{-3}(C_1)(S_1^3(C_1) - S_1(C_1))^{-1} dC_1 = J_1(C_1(\varphi))$ , где  $J_1(C_1(\varphi))$  –  $\omega_{c_1}$ -периодическая по  $\varphi$  функция, так как  $C_1(\varphi)$  –  $\omega_{c_1}$ -периодическая по  $\varphi$ .

В результате доказано, что  $q_1(\varphi)$  –  $\omega_{c_1}$ -периодическая по  $\varphi$  функция.

При  $i = 2$  имеем:

$$\xi_2 = p_2^{-2} p_2' (4 + p_2^{-1} (2C_2^2 + 2\gamma S_2^2 - 3\mu_2)) - \gamma p_2^{-2} C_2 S_2 (C_2 - S_2)(2C_2 + 3C_2 S_2 + 2S_2).$$

Тогда  $q_2(\varphi) = I_1(\varphi) + I_2(\varphi)$ , где  $I_1 = \int_0^\varphi p_2^{-2}(s)(4 - 3\mu_2 p_2^{-1}(s))dp_2(s)$ ,  
 $I_2 = \int_0^\varphi p_2^{-3}(s)(p_2'(s)(2C_2^2(s) + 2\gamma S_2^2(s)) - \gamma p_2(s)C_2(s)S_2(s)(C_2(s) - S_2(s))(2C_2(s) + 3C_2(s)S_2(s) + 2S_2(s)))ds$  ( $\mu_2$  – из (17)).

Отсюда  $I_1 = I_1(p_2(\varphi, c_1)) = -p_2^{-1}(\varphi, c_2)(4 - (3/2)\mu_2 p_2^{-1}(\varphi, c_2)) + 4a_2^{-1} - 3/2\mu_2 a_2^{-2}$ , где  $a_2 = a_{c_2}^{1/2}(1 + a_{c_2}^{1/2})^{1/2}((1 + a_{c_2}^{1/2})^{1/2} - 1)$ .

Пользуясь формулой (11<sub>2</sub>), представим функцию  $S_2(s)$  из  $I_2$  как функцию  $S_2(C_2(s))$  следующим образом:

$$S_2(C_2(s)) = \{S_2^+(C_2(s)), S_2(s) \geq 0; S_2^-(C_2(s)), S_2(s) \leq 0\},$$

при этом  $S_2^\pm(c_2^* - 1) = 0$ ,  $S_1^\pm(b_2^* - 1) = 0$ , где  $b_2^*, c_2^*$  – из (5).

Согласно (6<sub>2</sub>)  $ds = \gamma^{-1}(S_2^3(C_2) + 3S_2(C_2)^2 + 2S_2(C_2))^{-1}dC_2$ . Тогда  $I_2(\varphi) = \int_{c_2}^{C_2(\varphi)} (\gamma^{-1}p_2^{-3}(C_2)(p_2'(C_2)(2C_2^2 + 2\gamma S_2^2(C_2)) - p_2(C_2)C_2S_2(C_2)(C_2 - S_2(C_2))(2C_2 + 3C_2S_2(C_2) + 2S_2(C_2))))(S_2^3(C_2) + 3S_2(C_2)^2 + 2S_2(C_2))^{-1}dC_2 = J_2(C_2(\varphi))$ , где  $J_2(C_2(\varphi))$  –  $\omega_{c_2}$ -периодическая по  $\varphi$  функция, так как  $C_2(\varphi)$  –  $\omega_{c_2}$ -периодическая по  $\varphi$ .

**Замечание 6.** Очевидно, константы  $a_i = p_i(0, c_i)$  для  $\forall i = 0, 1, 2$ .

Покажем теперь, что  $\omega_{c_i}$ -периодическая усредняющая замена

$$r = p_i^{-1}(\varphi, c_i)(z + q_i(\varphi, c_i)z^2) \quad (i = 0, 2), \tag{19}$$

где  $q_i(\varphi, c_i) = \int_0^\varphi \xi_i(s, c_i) ds$ , преобразует (18) в систему:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\nu} \dot{z} &= O(|z|^3) + (R_{i0} + Z_i z + (R_{i\varepsilon}')_0 \varepsilon + O((|z| + \varepsilon)^2))\varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} \dot{\varphi} &= 1 + Q_i z + O(|z|^2) + (\Phi_{i0} + O(|z| + \varepsilon))\varepsilon, \end{aligned} \tag{20}$$

в которой  $Z_i(t, \varphi) = p_i^{-1}(R_{i_r}')_0 - 2q_i R_{i0} + p_i^{-1} p_i' \Phi_{i0}$  ( $i = 0, 2$ ).

Продифференцируем замену (19) в силу (18) и (20), тогда  $-p_i^{-1} p_i'(z + q_i z^2) - p_i^{-2} P_i z^2 + O(|z|^3) + (R_{i0} + p_i^{-1}(R_{i_r}')_0 z + (R_{i\varepsilon}')_0 \varepsilon + O((|z| + \varepsilon)^2))\varepsilon = (1 + 2q_i z)(R_{i0} + Z_i z + (R_{i\varepsilon}')_0 \varepsilon)\varepsilon + (q_i' z^2 - p_i^{-1} p_i' z - p_i^{-1} p_i' q_i z^2)(1 + Q_i z + \Phi_{i0} \varepsilon)$ .

Приравнивая коэффициенты при  $z\varepsilon$  и  $z^2$  получаем соответственно выражение для  $Z_i$  из (20) и уравнение  $q_i' = p_i^{-1}(p_i' Q_i - p_i^{-1} P_i)$ , из которого находим  $q_i(\varphi, c_i) = \int_0^\varphi \xi_i(s, c_i) ds$ .

**2<sup>0</sup>. Условия для существования инвариантных поверхностей.**  
 Сформулируем три условия, при выполнении которых будет доказано, что система (1) при любом достаточно малом  $\varepsilon$  имеет двумерную инвариантную поверхность, гомеоморфную тору.

При любом допустимом  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) из утверждения 1 функция  $R_{i0}$ , входящая в систему (18), с учетом (17) имеет вид

$$R_{i0}(t, \varphi, c_i) = C'_i(\varphi)Y_i(t, C_i(\varphi), S_i(\varphi), 0) - S'_i(\varphi)X_i(t, C_i(\varphi), S_i(\varphi), 0),$$

где  $C_i(\varphi), S_i(\varphi)$  – это вещественно аналитическое  $\omega_{c_i}$ -периодическое решение системы  $(6_i)$  с начальными данными  $C_i(0) = c_i, S_i(0) = 0$ .

**Определение 2.** Для всякого  $i = 0, 1, 2$  уравнение

$$\overline{R_{i0}}(c_i) = 0, \tag{21}$$

в котором  $\overline{R_{i0}}(c_i) = \frac{1}{T\omega_{c_i}} \int_0^{\omega_{c_i}} \int_0^T (C'_i Y_i(t, C_i, S_i, 0) - S'_i X_i(t, C_i, S_i, 0)) dt d\varphi$  – среднее значение функции  $R_{i0}$  по  $t$  и  $\varphi$ , называется бифуркационным уравнением для системы (1).

**Условие 1.** Существуют индекс  $i_* \in \{0, 1, 2\}$  и допустимое начальное данное  $c_* = c_{i_*}$  такие, что  $\overline{R_{i_*0}}(c_*) = 0$ .

Наличие  $c_*$  из условия 1 позволяет для случая  $i_*$ ) зафиксировать периодическое решение системы  $(6_{i_*})$   $C_* = C_{i_*}(\varphi), S_* = S_{i_*}(\varphi)$  с начальными данными  $0, c_*, 0$ . Его период  $\omega_* = \omega_{c_*}$  подсчитан в § 2, п. 3.

Тем самым, фиксируются специальные полярные замена (15) и система (18), а также усредняющая замена (19) и система (20), принимающая вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\nu} \dot{z} &= O(|z|^3) + (R_{*0} + Z_* z + (R'_{*\varepsilon})_0 \varepsilon + O((|z| + \varepsilon)^2)) \varepsilon, \\ \varepsilon^{-\nu} \dot{\varphi} &= 1 + Q_* z + O(|z|^2) + (\Phi_{*0} + O(|z| + \varepsilon)) \varepsilon, \end{aligned} \tag{22}$$

где символ  $*$  заменяет выбранный индекс  $i_*$  и  $\overline{R_{*0}} = 0$  в силу условия 1.

Таким образом, каждое допустимое решение  $c_*$  любого из трех бифуркационных уравнений (21) позволяет при любом  $t$  перейти в малую окрестность выбранного по  $c_*$  периодического решения невозмущенной системы  $(6_*)$  и, осуществив первичную усредняющую замену (19), продолжить поиск двумерной инвариантной поверхности.

Для этого в системе (22) предстоит усреднить функции  $R_{*0}, Z_*$  и  $(R'_{*\varepsilon})_0$ .

Но поскольку  $\dot{\varphi} = 1 + \dots$  при  $\nu = 0$  и  $\dot{\varphi} = \varepsilon + \dots$  при  $\nu = 1$ , то последующие усредняющие замены и условия для их существования будут различны при различных  $\nu$ .

Пусть  $\nu = 1$ . Для непрерывных  $T$ -периодических по  $t$ , вещественно аналитических и  $\omega$ -периодических по  $\varphi$  функций  $v(t, \varphi)$  будем использовать

следующее разложение:

$$v = \bar{v} + \hat{v}(\varphi) + \check{v}(t, \varphi), \quad \bar{v} = \frac{1}{\omega T} \int_0^\omega \int_0^T v(t, \varphi) dt d\varphi, \quad \hat{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t, \varphi) dt - \bar{v}.$$

Тогда функции  $\int \hat{v}(\varphi) d\varphi$  и  $\int \check{v}(t, \varphi) dt$  также будут периодическими. Они однозначно фиксируются выбором у них нулевого среднего значения.

Пусть  $\nu = 0$ . Тогда будем использовать разложение  $v = \bar{v} + \check{v}(t, \varphi)$ .

Сформулируем условие Зигеля на "малые знаменатели".

**Условие 2.** При  $\nu = 0$  периоды  $T$  и  $\omega_*$  удовлетворяют неравенству

$$|pT - q\omega_*| > K(p + q)^{-\tau} \quad (K > 0, \tau \geq 1, p, q - \text{натуральные}).$$

**Утверждение 2.** При выполнении условия 2 уравнение

$$\dot{\xi}(t, \varphi) + \xi'(t, \varphi) = \check{v}(t, \varphi)$$

имеет решение  $\xi(t, \varphi)$ , обладающее теми же свойствами, что и функция  $\check{v}$ . В этом решении  $\xi(t, \varphi)$  определяется однозначно, а среднее значение  $\bar{\xi}$  выбирается произвольным образом (см. лемму В.5 в [10, стр. 17]).

Здесь и в дальнейшем производную любой функции  $t$  и  $\varphi$  по  $t$  будем обозначать точкой, а по  $\varphi$  – штрихом (в том числе и при  $\nu = 1$ ). Кроме того, одноименные функции и константы, формулы для которых различаются при  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$ , будут иметь верхний индекс соответственно 0 или 1.

Возвращаясь к системе (22), в которой, как уже отмечалось, символ  $*$  заменяет индекс  $i_*$ , для  $\nu = 0$  введем функцию  $\check{g}_*^0(t, \varphi)$ , однозначно определяемую согласно утверждению 2 из уравнения

$$\dot{g}_*^0 + g_*^{0'} = R_{*0} \quad (\overline{R_{*0}} = 0). \quad (23)$$

Положим

$$L_*^0 = \overline{Z_*} - \overline{g_*^{0'} Q_*}, \quad L_*^1 = \overline{Z_*} - \overline{\widehat{R}_{*0} Q_*}.$$

**Условие 3.** Константа  $L_*^\nu \neq 0$  ( $\nu = 0, 1$ ).

3<sup>0</sup>. **Вторичное усреднение.** Введем в рассмотрение функции

$$g_*^0 = \overline{g_*^0} + \check{g}_*^0, \quad \check{g}_*^0 \text{ из (23)}, \quad \overline{g_*^0} = (\overline{g_*^{0'} \Phi_{*0}} - \overline{(R_{*\varepsilon}')_0} - \overline{\check{g}_*^0 (Z_* - g_*^{0'} Q_*)}) / L_*^0;$$

$$\widehat{g}_*^{1'} = \widehat{R}_{*0}, \quad \overline{g_*^1} = (\overline{\widehat{R}_{*0} \Phi_{*0}} - \overline{(R_{*\varepsilon}')_0} - \overline{\widehat{g}_*^1 (Z_* - \widehat{R}_{*0} Q_*)}) / L_*^1. \quad (24)$$

Покажем, что система (22) при условиях 2<sup>0</sup>, 3 заменой

$$z = u + G_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon + H_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)u\varepsilon + F_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon^2 \quad (\nu = 0, 1), \quad (25)$$

где  $G_*^0 = g_*^0(t, \varphi)$ ,  $H_*^0 = \check{h}_*^0(t, \varphi)$ ,  $F_*^0 = \check{f}_*^0(t, \varphi)$ ,  $G_*^1 = \overline{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi) + \tilde{g}_*^1(t, \varphi)\varepsilon$ ,  $H_*^1 = \hat{h}_*^1(\varphi) + \tilde{h}_*^1(t, \varphi)\varepsilon$ ,  $F_*^1 = \hat{f}_*^1(\varphi) + \tilde{f}_*^1(t, \varphi)\varepsilon$ , сводится к системе

$$\dot{u} = (L_*^\nu u\varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^3))\varepsilon^\nu, \quad \dot{\varphi} = (1 + \Upsilon_*^\nu\varepsilon + Q_*u + O((|u| + \varepsilon)^2))\varepsilon^\nu, \quad (26)$$

в которой, очевидно,  $\Upsilon_*^0(t, \varphi) = \Phi_{*0} + Q_*g_*^0$ ,  $\Upsilon_*^1(t, \varphi) = \Phi_{*0} + Q_*(\overline{g}_*^1 + \hat{g}_*^1)$ .

Для этого, дифференцируя замену (25) в силу систем (22) и (26) и сокращая на  $\varepsilon^\nu$ , получаем тождество

$$(R_{*0} + (u + G_*^\nu\varepsilon)Z_* + (R'_{*\varepsilon})_0\varepsilon) + O((|u| + \varepsilon)^3) = L_*^\nu u\varepsilon + G_*^{\nu'}\varepsilon(1 + \Upsilon_*^\nu\varepsilon + Q_*u) + H_*^{\nu'}u\varepsilon + F_*^{\nu'}\varepsilon^2 + (\dot{G}_*^\nu + \dot{H}_*^\nu u + \dot{F}_*^\nu\varepsilon)\varepsilon^{1-\nu}. \quad (27)$$

Пусть сначала  $\nu = 0$ . Множители, стоящие в (27) при  $\varepsilon$ , образуют уравнение (23), имеющее единственное двупериодическое решение  $g_*^0$ .

Множители, стоящие при  $u\varepsilon$ , дают уравнение  $\dot{h}_*^0 + h_*^{0'} = Z_* - g_*^{0'}Q_* - L_*^0$ , правая часть которого имеет нулевое среднее значение в силу выбора  $L_*^0$ , что позволяет однозначно найти двупериодическое решение  $\check{h}_*^0(t, \varphi)$ .

Уравнение  $g_*^0 Z_* + (R'_{*\varepsilon})_0 = g_*^{0'}(\Phi_{*0} + g_*^0 Q_*) + f_*^{0'} + \check{f}_*^0$  образуют множители, стоящие в (27) при  $\varepsilon^2$ . Подставляя в него  $Z_*$  из предыдущего уравнения, получаем тождество  $(\overline{g}_*^0 + \check{g}_*^0)(L_*^0 + h_*^{0'} + \check{h}_*^0) + (R'_{*\varepsilon})_0 = g_*^{0'}\Phi_{*0} + f_*^{0'} + \check{f}_*^0$ , откуда  $\overline{g}_*^0 L_*^0 = \overline{\check{g}_*^{0'}\Phi_{*0} - (R'_{*\varepsilon})_0 - \check{g}_*^0(h_*^{0'} + \check{h}_*^0)}$ . Благодаря условию 3 это уравнение для средних значений разрешимо за счет выбора  $\overline{g}_*^0$  в (24<sup>0</sup>), после чего однозначно находится двупериодическая функция  $\check{f}_*^0(t, \varphi)$ .

Пусть теперь  $\nu = 1$ . Подставим в тождество (27) разложения функций  $G^1, H^1$  и  $F^1$ , введенные в замене (25).

При  $\varepsilon$  получаем уравнение  $R_{*0} = \hat{g}_*^1 + \check{g}_*^1$ , однозначно разрешимое, после разбиения на два уравнения:  $\hat{g}_*^1 = \hat{R}_{*0}$  и  $\check{g}_*^1 = \check{R}_{*0}$ .

При  $u\varepsilon$  имеем:  $Z_* = L_*^1 + \hat{g}_*^1 Q_* + \hat{h}_*^1 + \check{h}_*^1$ , откуда  $L_*^1 = \overline{Z_* - \hat{g}_*^1 Q_*}$ . Затем находим  $\hat{h}_*^1, \check{h}_*^1$  из уравнений  $\hat{h}_*^1 = \hat{Z}_* - \hat{g}_*^1 Q_*$  и  $\check{h}_*^1 = \check{Z}_*$  ( $\check{Q}_* = 0$ ).

При  $\varepsilon^2$  имеем:  $(\overline{g}_*^1 + \hat{g}_*^1)Z_* + (R'_{*\varepsilon})_0 = \check{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\Phi_{*0} + (\overline{g}_*^1 + \hat{g}_*^1)Q_*) + \hat{f}_*^1 + \check{f}_*^1$ . Действуя аналогично случаю  $\nu = 0$ , получаем уравнение  $\overline{g}_*^1 L_*^1 = \overline{\check{g}_*^1 \Phi_{*0} - (R'_{*\varepsilon})_0 - \hat{g}_*^1(\hat{h}_*^1 + \check{h}_*^1)}$ , фиксирующее указанное в (24<sup>1</sup>)  $\overline{g}_*^1$ . После этого выписываются и однозначно решаются уравнения для  $\hat{f}_*^1$  и  $\check{f}_*^1$ .

## §5. Алгоритм построения инвариантной поверхности

1<sup>0</sup>. **Завершающее усреднение и масштабирование.** В системе (26) усредним функцию  $\Upsilon_*^\nu(t, \varphi)$  (символ  $*$  заменяет для краткости выбранный индекс  $i_*$ ), сделав  $T$ - и  $\omega_{c_*}$ -периодическую замену угловой переменной

$$\varphi = \psi + \Delta_*^\nu(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon, \quad (28)$$

где  $\Delta_*^0 = \check{\delta}_*^0(t, \psi)$ ,  $\Delta^1 = \hat{\delta}_*^1(\psi) + \tilde{\delta}_*^1(t, \psi)\varepsilon$ , переводящую (26) в систему

$$\dot{u} = (L_*^\nu u \varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^3))\varepsilon^\nu, \quad \dot{\psi} = (1 + \overline{\Upsilon}_*^\nu \varepsilon + Q_*(\psi)u + O((|u| + \varepsilon)^2))\varepsilon^\nu. \quad (29)$$

Очевидно, что в замене (28)  $\Delta_*^\nu$  однозначно определяется из уравнений  $\check{\delta}_*^{0'} + \check{\delta}_*^0 = \Upsilon_*^0 - \overline{\Upsilon}_*^0$ ,  $\hat{\delta}_*^{1'} = \widehat{\Upsilon}_*^1$ ,  $\tilde{\delta}_*^1 = \widetilde{\Upsilon}_*^1$ .

Нетрудно убедиться, что обратная к (28) замена имеет вид

$$\psi = \varphi + \Omega_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon,$$

где  $\Omega_*^0 = -\check{\delta}_*^0(t, \varphi) + \check{\delta}_*^0(t, \varphi)\check{\delta}_*^{0'}(t, \varphi)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ,  $\Omega_*^1 = -\hat{\delta}_*^1(\varphi) + (\hat{\delta}_*^1(\varphi)\hat{\delta}_*^{1'}(\varphi) - \tilde{\delta}_*^1(t, \varphi))\varepsilon + O(\varepsilon^2)$  –  $T$ -периодические по  $t$  и вещественно аналитические  $\omega_{c_*}$ -периодические по  $\varphi$  функции.

Остается сделать масштабирующую замену

$$u = v\varepsilon^{3/2}, \quad (30)$$

которая преобразует систему (29) в систему

$$\dot{v} = (L_*^\nu v \varepsilon + V_*^\nu(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu, \quad \dot{\psi} = (1 + \overline{\Upsilon}_*^\nu \varepsilon + \Psi_*(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu, \quad (31)$$

где  $V_*^\nu, \Psi_*^\nu$  – непрерывные функции своих аргументов в малой окрестности  $v$  и  $\varepsilon$ , непрерывно дифференцируемые по  $v$  и  $\psi$ ,  $T$ -периодические по  $t$  и  $\omega_{c_*}$ -периодические по  $\psi$ .

В самом деле,  $V_*^\nu(t, \psi, v, \varepsilon) = O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^3)\varepsilon^{-3}$ ,  $\Psi_*^\nu(t, \psi, v, \varepsilon) = Qv + O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^2)\varepsilon^{-3/2}$ , а функции  $O(\dots)$  – вещественно аналитические при всех  $\psi$  и трижды непрерывно дифференцируемы в малой окрестности точки  $v = \varepsilon = 0$ . В частности, поэтому в этой точке  $V_*^\nu, \Psi_*^\nu$  гладкие по  $v$ .

2<sup>0</sup>. **Применение леммы Хейла.** Система (31) удовлетворяет условиям лемм 2.1, 2.2 [5], согласно которым у нее при всех достаточно малых  $\varepsilon$  существует инвариантная поверхность

$$v = \Gamma_*^\nu(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon^{1/2},$$

где  $\Gamma_*^\nu$  – непрерывная,  $T$ -периодическая по  $t$ , непрерывно дифференцируемая и  $\omega_{c_*}$ -периодическая по  $\psi$  функция.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Лемма 3.** При условиях 1–3 система (20) с  $c = c_*$  при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  имеет непрерывную,  $T$ -периодическую по  $t$ , непрерывно дифференцируемую и  $\omega_{c_*}$ -периодическую по  $\varphi$  поверхность

$$z = z_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon) \quad (\nu = 0, 1) \quad (32)$$

с  $z_*^\nu = G_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon + (F_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + \Gamma_*^\nu(t, \varphi + \Omega_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon, \varepsilon)(1 + H_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon))\varepsilon^2$ , полученную подстановкой инвариантной поверхности  $v = \Gamma_*^\nu(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon^{1/2}$  в композицию замен (25), (30) и обратной к (28).

**Следствие 1.** При условиях 1–3 система (18) с  $c = c_*$  при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  имеет непрерывную,  $T$ -периодическую по  $t$ , непрерывно дифференцируемую и  $\omega_{c_*}$ -периодическую по  $\varphi$  поверхность

$$r = r_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon) \quad (33)$$

где  $r_*^\nu = p_*^{-1}(\varphi)(z_*^\nu + q_*(\varphi)z_*^{\nu 2})$ ,  $p_* = p_{i_*}(\varphi)$ ,  $q_* = q_{i_*}(\varphi)$ ,  $i_*$  из условия 1, полученную подстановкой инвариантной поверхности (32) в замену (19).

**Следствие 2.** Инвариантная поверхность (33) имеет следующее асимптотическое разложение:

$$r_*^0 = p_*^{-1}(\varphi)(g_*^0(t, \varphi)\varepsilon + (\check{f}_*^0(t, \varphi) + \Gamma_*^0(t, \varphi, 0) + q_*(\varphi)g_*^0(t, \varphi)^2)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3), \quad (34^0)$$

$$r_*^1 = p_*^{-1}(\varphi)((\bar{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi))\varepsilon + (\hat{f}_*^1(\varphi) + \Gamma_*^1(t, \varphi, 0) + q_*(\varphi)(\bar{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi))^2)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3). \quad (34^1)$$

Используя полученные результаты, сформулируем основную теорему.

**Теорема 1.** Для всякого допустимого значения  $c_* = c_{i_*}$  ( $i_* \in \{0, 1, 2\}$ ) существует такое  $\varepsilon_0$ , что при любом положительном  $\varepsilon < \varepsilon_0$  и при выполнении условий 1–3 система  $(1_{i_*})$  имеет непрерывную  $T$ -периодическую по  $t$ , непрерывно дифференцируемую и  $\omega_{c_*}$ -периодическую по  $\varphi$  поверхность

$$x_* = C_*(c_*, \varphi)(r_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + 1), \quad y_* = S_*(c_*, \varphi)(r_*^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + 1), \quad (35)$$

где  $r_*^\nu$  из (33),  $C_* = C_{i_*}(c_*, \varphi)$ ,  $S_* = S_{i_*}(c_*, \varphi)$  –  $\omega_{c_*}$ -периодическое решение системы  $(6_{i_*})$  с начальными данными  $0, c_*, 0$ , проходящую при  $\varphi = 0$  через точку  $(c_*^\varepsilon, 0)$ , у которой  $c_*^\varepsilon \in (c_* - \sigma\varepsilon, c_* + \sigma\varepsilon)$  ( $\sigma > 0$ ).

**Следствие 3.** С учетом следствия 1 инвариантная поверхность, описанная в теореме 1, имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} x_*^0 &= C_*(c_*, \varphi)(1 + p_*^{-1}(\varphi)(g_*^0(t, \varphi)\varepsilon + (\check{f}_*^0(t, \varphi) + \Gamma_*^0(t, \varphi, 0) + \\ &\quad q_*(\varphi)g_*^0(t, \varphi)^2)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3), \\ y_*^0 &= S_*(c_*, \varphi)(1 + p_*^{-1}(\varphi)(g_*^0(t, \varphi)\varepsilon + (\check{f}_*^0(t, \varphi) + \Gamma_*^0(t, \varphi, 0) + \\ &\quad q_*(\varphi)g_*^0(t, \varphi)^2)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3); \end{aligned} \quad (36^0)$$

$$\begin{aligned} x_*^1 &= C_*(c_*, \varphi)(1 + ((\bar{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi))\varepsilon + (\hat{f}_*^1(\varphi) + \Gamma_*^1(t, \varphi, 0) + \\ &\quad q_*(\varphi)(\bar{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi))^2)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3), \\ y_*^1 &= S_*(c_*, \varphi)(1 + ((\bar{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi))\varepsilon + (\hat{f}_*^1(\varphi) + \Gamma_*^1(t, \varphi, 0) + \\ &\quad q_*(\varphi)(\bar{g}_*^1 + \hat{g}_*^1(\varphi))^2)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (36^1)$$

Используя замены (10) и (11), сформулируем полученный в теореме 1 результат для исходной системы (1).

**Теорема 2.** При условиях теоремы 1 инвариантная поверхность (35) для системы (1) при  $i_* = 0, 1, 2$  принимает соответственно вид:

$$\begin{aligned} x &= C(\varphi)(r_0^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + 1) & C(\varphi) &= C_0(\varphi, c_0); \\ y &= S(\varphi)(r_0^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + 1) & S(\varphi) &= S_0(\varphi, c_0); \end{aligned} \quad (37_0)$$

$$\begin{aligned} x &= C(\varphi) + (C(\varphi) - 1)r_1^\nu(t, \varphi, \varepsilon) & C(\varphi) &= 1 + C_1(\varphi, c_1); \\ y &= S(\varphi)(r_1^\nu(t, \varphi, \varepsilon) + 1) & S(\varphi) &= S_1(\varphi, c_1); \end{aligned} \quad (37_1)$$

$$\begin{aligned} x &= C(\varphi) + (C(\varphi) - 1)r_2^\nu(t, \varphi, \varepsilon) & C(\varphi) &= 1 + C_2(\varphi, c_2); \\ y &= S(\varphi) + (S(\varphi) - 1)r_2^\nu(t, \varphi, \varepsilon) & S(\varphi) &= 1 + S_2(\varphi, c_2); \end{aligned} \quad (37_2)$$

здесь поверхность  $r_{i_*}^\nu(t, \varphi, \varepsilon)$  определена в (33), а  $C(\varphi), S(\varphi)$  – решения системы (6).

## §6. Применение полученных результатов.

### 1<sup>0</sup>. Анализ аналитического бифуркационного уравнения.

Вернемся к формуле (21). Согласно (11) и (1<sub>i</sub>) она примет вид:

$$\overline{R}_{i0}(c_i) = \frac{1}{T\omega_{c_i}} \int_0^{\omega_{c_i}} \int_0^T (C'Y(t, C, S, 0) - S'X(t, C, S, 0)) dt d\varphi, \quad (38)$$

где  $C(0) = c_0, S(0) = 0$  ( $i = 0$ ),  $C(0) = c_i + 1, S(0) = i - 1$  ( $i = 1, 2$ ), а допустимые значения параметров  $c_i$  приведены в утверждении 1.

Предположим, что в области  $G^0 = \{(t, x, y) \mid t \in \mathbb{R}^1, |x| < x_*, |y| < y_*\}$  с константами  $x_*, y_*$ , уточненными в замечании 2,

$$X(t, x, y, 0) = \sum_{q,s=0}^{\infty} X^{(q,s)}(t)x^q y^s, \quad Y(t, x, y, 0) = \sum_{q,s=0}^{\infty} Y^{(q,s)}(t)x^q y^s \quad (39)$$



– абсолютно и равномерно относительно  $t$  сходящиеся степенные ряды с существенными непрерывными  $T$ -периодическими по  $t$  коэффициентами.

Тогда формула (38) задает абсолютно сходящийся ряд

$$\overline{R_{i0}}(c_i) = \frac{1}{T\omega_{c_i}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left( \overline{Y^{(q,s)}} \int_0^{\omega_{c_i}} C^q S^s C' d\varphi - \overline{X^{(q,s)}} \int_0^{\omega_{c_i}} C^q S^s S' d\varphi \right),$$

причем при  $s = 0$  первый интеграл обращается в ноль по замечанию 3.

Интегрируя тождество  $(C^q S^{s+1})' = qC^{q-1} S^{s+1} C' + (s+1)C^q S^s S'$  по периоду и приводя подобные члены, получаем:

$$\overline{R_{i0}}(c_i) = \frac{1}{T\omega_{c_i}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{q+1}{s} \overline{X^{(q+1,s-1)}} + \overline{Y^{(q,s)}} \right) I_i^{q,s}, \quad (40)$$

где  $I_i^{q,s} = \int_0^{\omega_{c_i}} C^q(\varphi) S^s(\varphi) C'(\varphi) d\varphi$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Подсчитаем  $I_i^{q,s}$  для допустимых значений параметров  $c_i$ .

$0^m$ ) Если  $c_0 = c_0^m \in (0, c^m)$ , то движение происходит против часовой стрелки. Положим  $I_1 = \int_{c_0}^0 \eta^q (S^-(\eta^2))^s d\eta$ ,  $I_2 = \int_0^{-c_0} \eta^q (S^-(\eta^2))^s d\eta$ ,  $I_3 = \int_{-c_0}^0 \eta^q (-S^-(\eta^2))^s d\eta$ ,  $I_4 = \int_0^{c_0} \eta^q (-S^-(\eta^2))^s d\eta$ , где  $S^-$  из (8). Очевидно, что  $I_0^{q,s} = 4I_1$ , если  $q$  четное,  $s$  нечетное. В остальных случаях  $I_0^{q,s} = 0$ .

$0^p$ ) Если  $c_0 = c_0^p \in (c^p, \infty)$ , то движение происходит по часовой стрелке и функция  $S^2(\varphi) - 1$  в каждой четверти меняет знак при  $|C(\varphi)| = c_0^p$ .

Положим  $I_1 = \int_{c_0}^{c_0^p} \eta^q (-S^-(\eta^2))^s d\eta + \int_{c_0^p}^0 \eta^q (-S^+(\eta^2))^s d\eta$ ,  $I_2 = \int_0^{-c_0^p} \eta^q (-S^+(\eta^2))^s d\eta + \int_{-c_0^p}^{-c_0} \eta^q (-S^-(\eta^2))^s d\eta$ ,  $I_3 = \int_{-c_0}^{-c_0^p} \eta^q (S^-(\eta^2))^s d\eta + \int_{-c_0^p}^0 \eta^q (S^+(\eta^2))^s d\eta$ ,  $I_4 = \int_0^{c_0^p} \eta^q (S^+(\eta^2))^s d\eta + \int_{c_0^p}^{c_0} \eta^q (S^-(\eta^2))^s d\eta$ , где  $S^-, S^+$  из (8). Очевидно, что  $I_0^{q,s} = 4I_4$ , если  $q$  четное,  $s$  нечетное. В остальных случаях  $I_0^{q,s} = 0$ .

Таким образом, в случае 0) формула (40) принимает вид

$$\overline{R_{00}}(c_0) = \frac{4}{T\omega_{c_0}} \sum_{q,s=0}^{\infty} \left( \frac{2q+1}{2s+1} \overline{X^{(2q+1,2s)}} + \overline{Y^{(2q,2s+1)}} \right) I_0^{q,s}, \quad (41_0)$$

где  $I_0^{q,s} = \int_{c_0}^0 \eta^{2q} (S^-(\eta^2))^{2s+1} d\eta$  для  $0^m$ ) и  $I_0^{q,s} = \int_0^{c_0^p} \eta^{2q} (S^+(\eta^2))^{2s+1} d\eta + \int_{c_0^p}^{c_0} \eta^{2q} (S^-(\eta^2))^{2s+1} d\eta$ ,  $c_0^p = (1 + (\gamma + (c_0^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}$  для  $0^p$ ).

Рассуждая аналогично, заключаем, что в случае 1) при  $c_1 = c_1^* - 1 \in (c_1^-, c_1^+)$  формула (40) принимает вид

$$\overline{R}_{10}(c_1) = \frac{2}{T\omega_{c_1}} \sum_{q,s=0}^{\infty} \left( \frac{q+1}{2s+1} \overline{X^{(q+1,2s)}} + \overline{Y^{(q,2s+1)}} \right) I_1^{q,s}, \quad (41_1)$$

где  $I_1^{q,s} = \int_{b_1^*}^{\bar{b}_1^*} \eta^q (S^-(\eta^2))^{2s+1} d\eta + \int_{\bar{b}_1^*}^{c_1^*} \eta^q (S^+(\eta^2))^{2s+1} d\eta + \int_{c_1^*}^{\bar{c}_1^*} \eta^q (S^-(\eta^2))^{2s+1} d\eta$ ,  
 $\bar{c}_1^* = (1 + (\gamma + ((c_1 + 1)^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}$ ,  $\bar{b}_1^* = (1 - (\gamma + ((c_1 + 1)^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}$ ,  
 $b_1 = (2 - (c_1 + 1)^2)^{1/2}$ .

Наконец, в случае 2) при  $c_2 = c_2^* - 1 \in (0, c^\gamma - 1)$  имеем

$$\overline{R}_{20}(c_2) = \frac{1}{T\omega_{c_2}} \sum_{q,s=0}^{\infty} \left( \frac{q+1}{s+1} \overline{X^{(q+1,s)}} + \overline{Y^{(q,s+1)}} \right) I_2^{q,s}, \quad (41_2)$$

где  $I_2^{q,s} = \int_{b_2^*}^{c_2^*} \eta^q ((S^+(\eta^2))^{s+1} - (S^-(\eta^2))^{s+1}) d\eta$ ,  $b_2^* = (2 - (c_2 + 1)^2)^{1/2}$ .

Здесь  $c^p, c^m, c^\gamma$  из (4), а периоды  $\omega_{c_i}$  с учётом замечания 3 подсчитаны в п. 3 § 2.

## 2<sup>0</sup>. Пример нахождения инвариантных поверхностей.

Рассмотрим  $T$ -периодическую по  $t$  систему (1) с  $\gamma = 0.5$ , в которой функции  $X(t, x, y, 0)$  и  $Y(t, x, y, 0)$  имеют вид (39), причем

$$\overline{X^{(q,s)}} = 0, \quad \overline{Y^{(q,s)}} = 0 \quad \text{для } \forall q, s \in \mathbb{Z}_+, \quad (42)$$

кроме  $\overline{Y^{(0,1)}} = 8.9$ ,  $\overline{Y^{(0,3)}} = -1.66$ ,  $\overline{Y^{(1,1)}} = -3.23$ ,  $\overline{Y^{(0,2)}} = 1$ .

Тогда формулы (41<sub>i</sub>) примут вид  $T\omega_{c_0} \overline{R}_{00}(c_0) = 4(I_0^{0,0} \overline{Y^{(0,1)}} + I_0^{0,1} \overline{Y^{(0,3)}})$ ,  
 $T\omega_{c_1} \overline{R}_{01}(c_1) = 2(I_1^{0,0} \overline{Y^{(0,1)}} + I_1^{0,1} \overline{Y^{(0,3)}} + I_1^{1,0} \overline{Y^{(1,1)}})$ ,  $T\omega_{c_2} \overline{R}_{02}(c_2) = I_2^{0,0} \overline{Y^{(0,1)}} + I_2^{0,2} \overline{Y^{(0,3)}} + I_2^{1,0} \overline{Y^{(1,1)}} + I_2^{0,1} \overline{Y^{(0,2)}}$ .

Найдутся  $c_i^l, c_i^r$  ( $c_0^l = 1.5, c_0^r = 1.501, c_1^l = 0.195, c_1^r = 0.2, c_2^l = 0.199, c_2^r = 0.2$ ) такие, что  $T\overline{R}_{0i}(c_i^l) < -10^{-6}$ ,  $T\overline{R}_{0i}(c_i^r) > 10^{-6}$  в случаях 1), 2) и  $T\overline{R}_{0i}(c_i^l) > 10^{-6}$ ,  $T\overline{R}_{0i}(c_i^r) < -10^{-6}$  в случае 0). Следовательно, найдутся такие  $c_i \in (c_i^l, c_i^r)$ , которые удовлетворяют условию 1, т.е.  $\overline{R}_{0i}(c_i) = 0$ , и являются допустимыми согласно утверждению 1. При этом  $c_0$  относится к случаю 0<sup>p</sup>), а  $c_1$  и  $c_2$  соответственно к случаям 1) и 2).

Точками  $(c_0, 0)$ ,  $(c_1 + 1, 0)$ ,  $(c_2 + 1, 1)$  зададим начальные данные для системы (6) и найдем три периодических решения  $(C(\varphi, c_i), S(\varphi, c_i))$  с периодами  $\omega_{c_i}$  ( $\omega_0 = \omega_{c_0} \approx 6.95$ ,  $\omega_1 = \omega_{c_1} \approx 12.46$ ,  $\omega_2 = \omega_{c_2} \approx 5.05$ ).

Остановимся теперь на выполнении условий 2 и 3 из §4, п. 2<sup>0</sup>, необходимых для применения теорем 1 и 2.

Хорошо известно, что условие Зигеля выполняется почти всегда по мере Лебега, и его выполнение требуется только для систем с  $\nu = 0$ , т.е. для систем с "медленным" временем.

Что касается констант  $L'_i$  из условия 3, то они могут быть с достаточной степенью точности вычислены.

Поскольку в условии 3 константа  $L_i^1 = \overline{Z}_i - \widehat{R}_{i0}Q_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), то

$$L_i^1 = \frac{1}{\omega T} \int_0^{\omega_i} \int_0^T \left( Z_i(t, \varphi) - \left( \frac{1}{T} \int_0^T R_{i0}(t, \varphi) dt \right) Q_i(\varphi) \right) dt d\varphi, \quad (43)$$

где  $Z_i = p_i^{-1}(\varphi)C'_i(\varphi)(R'_{ir})_0(t, \varphi) - 2q_i(\varphi)R_{i0}(t, \varphi) + p_i^{-1}(\varphi)p'_i(\varphi)\Phi_{i0}(t, \varphi)$  согласно (20), а  $R_{i0} = C'_i Y(t, C_0, S_0, 0) - S'_i X(t, C_0, S_0, 0)$  согласно (15) и (18).

Теперь с учетом предположений (42)  $T^{-1} \int_0^T R_{i0}(t, \varphi) dt = C'_i(\varphi)Y(\varphi)$ , где  $Y = \overline{Y^{(0,1)}}S_0(\varphi) + \overline{Y^{(0,3)}}S_0^3(\varphi) + \overline{Y^{(1,1)}}C_0(\varphi)S_0(\varphi) + \overline{Y^{(0,2)}}S_0^2(\varphi)$ . Аналогично согласно (18)  $T^{-1} \int_0^T \Phi_{i0}(t, \varphi) dt = -C_i(\varphi)p_i^{-1}(\varphi)Y(\varphi)$ ,  $T^{-1} \int_0^T (R'_{ir})_0(t, \varphi) dt = C_0(\varphi)\overline{Y^{(1,1)}}S_0(\varphi) + S_0(\varphi)(\overline{Y^{(0,1)}} + 3\overline{Y^{(0,3)}}S_0^2(\varphi) + \overline{Y^{(1,1)}}C_0(\varphi) + 2\overline{Y^{(0,2)}}S_0(\varphi))$ .

В §4, п. 1<sup>0</sup>) были найдены  $q_0(\varphi, c_0) = -p_0^{-1}(\varphi, c_0)(5/2 + \mu_0 p_0^{-1}(\varphi, c_0)) + 5/2a_0^{-1} + \mu_0 a_0^{-2}$  с  $a_0 = (a_{c_0} - \gamma)^{1/2}((a_{c_0} - \gamma)^{1/2} + 1)$ ,  $a_{c_0} \stackrel{(7)}{=} \gamma + ((c_0^p)^2 - 1)^2$  и  $c_0^p \stackrel{(6_0)}{=} c_0$ ;  $q_1(\varphi, c_1) = -p_1^{-1}(\varphi, c_1)(4 - (3/2)\mu_1 p_1^{-1}(\varphi, c_1)) + 4a_1^{-1} - 3/2\mu_1 a_1^{-2} + \int_0^\varphi p_1^{-3}(s)(p'_1(s)(2C_1^2(s) - \gamma S_1^2(s)) - \gamma p_1(s)C_1(s)S_1(s)(C_1^2(s) + 3C_1(s)S_1^2(s) + 2S_1^2(s)))ds$  с  $a_1 = (a_{c_1} - \gamma)^{1/2}(1 + (a_{c_1} - \gamma)^{1/2})^{1/2}((1 + (a_{c_1} - \gamma)^{1/2})^{1/2} - 1)$ ,  $a_{c_1} \stackrel{(7)}{=} \gamma + ((c_1 + 1)^2 - 1)^2$ ;  $q_2(\varphi, c_2) = -p_2^{-1}(\varphi, c_2)(4 - (3/2)\mu_2 p_2^{-1}(\varphi, c_2)) + 4a_2^{-1} - 3/2\mu_2 a_2^{-2} + \int_0^\varphi p_2^{-3}(s)(p'_2(s)(2C_2^2(s) + 2\gamma S_2^2(s)) - \gamma p_2(s)C_2(s)S_2(s)(C_2(s) - S_2(s))(2C_2(s) + 3C_2(s)S_2(s) + 2S_2(s)))ds$  с  $a_2 = a_{c_2}^{1/2}(1 + a_{c_2}^{1/2})^{1/2}((1 + a_{c_2}^{1/2})^{1/2} - 1)$ ,  $a_{c_2} \stackrel{(7)}{=} ((c_2 + 1)^2 - 1)^2$ .

Рассмотрим случай 0<sup>p</sup>). Для вычисления интегралов по  $\varphi$  в (43<sub>0</sub>) интерполируем с выбранной точностью решение  $C_0(\varphi, c_0), S_0(\varphi, c_0)$  системы (6<sub>0</sub>).

Дугу траектории, лежащую в первой четверти (см. приложение 1.3), удобно разбить на три части. При изменении  $-\varphi$  от 0 до  $\omega_0/4$  (движение идет по часовой стрелке) с учетом (9) и (8) положим:  $\varphi_0^1 = -\gamma^{-1} \int_{\bar{c}_0^p}^{\bar{c}_0^p} (S_0^{-3}(C_0^2) - S_0^-(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 0.475$  - значение, при котором  $C_0(\varphi_0^1) = \bar{c}_0^p, S_0(\varphi_0^1) = 1$ ;  $\varphi_0^2 = \varphi_0^1 - \gamma^{-1} \int_{\bar{c}_0^p}^1 (S_0^{+3}(C_0^2) - S_0^+(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 1.027$  - значение, при котором  $C_0(\varphi_0^2) = 1, S_0(\varphi_0^2) = \bar{d}_0^p$ , и, конечно,  $\varphi_0^3 = \omega_0/4 = \varphi_0^2 - \gamma^{-1} \int_{\bar{c}_0^p}^0 (S_0^{+3}(C_0^2) -$

$S_0^+(C_0^2))^{-1}dC_0 \approx 1.7375$  – значение, при котором  $C_0(\varphi_0^3) = 0$ ,  $S_0(\varphi_0^3) = d_0^p$ .

Будем использовать следующие интерполяционные полиномы:  $\tilde{C}_0(-\varphi) = -1.480848440\varphi^4 + 0.3737787311\varphi^3 + 0.3829829216\varphi^2 + 0.204833881\varphi + 1.5$ ,  $\tilde{S}_0(-\varphi) = -6.363433937\varphi^4 + 7.573768925\varphi^3 - 2.663502511\varphi^2 + 2.342719297\varphi$  при  $-\varphi \in [0, \varphi_1]$ ;  $\tilde{C}_0(-\varphi) = -1.877600437\varphi^5 + 11.74007434\varphi^4 - 23.54604069\varphi^3 + 18.99987935\varphi^2 - 6.690731344\varphi + 2.423281182$ ,  $\tilde{S}_0(-\varphi) = 5.577683510\varphi^5 - 15.86876842\varphi^4 + 13.97550563\varphi^3 - 4.168896722\varphi^2 + 2.110673232\varphi + 0.112799982$  при  $-\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ ;  $\tilde{C}_0(-\varphi) = 1.238106214\varphi^5 - 9.242964406\varphi^4 + 26.96946864\varphi^3 - 37.95118490\varphi^2 + 24.00487472\varphi - 3.968892727$ ,  $\tilde{S}_0(-\varphi) = 1.032821721\varphi^5 - 8.335427756\varphi^4 + 27.07822041\varphi^3 - 43.70733374\varphi^2 + 34.47136449\varphi - 8.800246690$  при  $-\varphi \in [\varphi_2, \varphi_3]$ . При подстановке этих полиномов в интеграл (3) погрешность не превышает 0.005.

Для приближений решения в трех других четвертях используем формулы:  $C_0(-\varphi) = -C_0(\omega_0/2 + \varphi)$ ,  $S_0(-\varphi) = S_0(\omega_0/2 + \varphi)$  при  $-\varphi \in [\omega_0/4, \omega_0/2]$ ;  $C_0(-\varphi) = C_0(\omega_0 + \varphi)$ ,  $S_0(-\varphi) = -S_0(\omega_0 + \varphi)$  при  $-\varphi \in [3\omega_0/4, \omega_0]$ ;  $C_0(-\varphi) = -C_0(-\omega_0/2 - \varphi)$ ,  $S_0(-\varphi) = -S_0(-\omega_0/2 - \varphi)$  при  $-\varphi \in [\omega_0/2, 3\omega_0/4]$ .

Докажем сначала первую из них. Функции  $u(\varphi) = -C_0(\omega_0/2 - \varphi, c_0)$ ,  $v(\varphi) = S_0(\omega_0/2 - \varphi, c_0)$  являются решением системы (6<sub>0</sub>). Действительно,

$$\begin{aligned} du(\varphi)/d\varphi &= \gamma((S_0^3(\omega_0/2 - \varphi)) - (S_0(\omega_0/2 - \varphi))) = \gamma(v^3(\varphi) - v(\varphi)), \\ dv(\varphi)/d\varphi &= C_0^3(\omega_0/2 - \varphi) - C_0(\omega_0/2 - \varphi) = -(u^3(\varphi) - u(\varphi)). \end{aligned}$$

При этом  $u(0) = -C_0(\omega_0/2) = c_0$ ,  $v(0) = S_0(\omega_0/2) = 0$ . Поэтому по теореме о единственности решения задачи Коши  $u(\varphi) = C_0(\varphi, c_0)$ ,  $v(\varphi) = S_0(\varphi, c_0)$ .

Вторая формула вытекает из четности  $C_0(\varphi)$  и нечетности  $S_0(\varphi)$ , а третья – из первой:  $C_0(\varphi) = C_0(\omega_0 - \varphi) = -C_0(\omega_0/2 - (\omega_0 - \varphi)) = -C_0(\omega_0/2 + \varphi)$ , для функции  $S_0(\varphi)$  – аналогично. Графики функций  $C_0(\varphi)$  и  $S_0(\varphi)$  приведены в приложении 3.

Подставляя полученные интерполяционные функции в уже выписанные формулы для нахождения константы  $L_0^1$  и разбивая интеграл по периоду  $\omega_0$  в сумму четырех интегралов по четвертям периода, после интегрирования устанавливаем, что  $L_0^1 \approx -2.8 - 4.6 - 3.5 - 1.8 = -12.7$ .

При  $i = 1, 2$  для удобства вычислений будем приближать решения не системы (6<sub>*i*</sub>), а решения  $C_0(\varphi, c_i + 1)$ ,  $S_0(\varphi, c_i + 1)$  системы (6<sub>0</sub>) или, что то же самое, системы (6), т. е. не производить сдвиги функций  $C(\varphi)$  и  $S(\varphi)$ .

В случае 1) дугу траектории, лежащую в первой четверти (см. приложение 1.4), также удобно разбить на три части. При изменении  $-\varphi$  от 0 до  $\omega_1/2$  (движение идет по часовой стрелке) с учетом (9) и (8) положим:

$\varphi_1^1 = -\gamma^{-1} \int_{c_1+1}^{\bar{c}_1^*} ((S_0)^{-3}((C_0)^2) - (S_0)^-(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 1.299$  – значение, при котором  $C_0(\varphi_1^1) = \bar{c}_1^*$ ,  $S_0(\varphi_1^1) = 1$ ;  $\varphi_1^2 = \varphi_1^1 - \gamma^{-1} \int_{\bar{c}_1^*}^{\bar{b}_1^*} (S_0^{+3}(C_0^2) - S_0^+(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 3.448$  – значение, при котором  $C_1(\varphi_1^2) = \bar{b}_1^*$ ,  $S_1(\varphi_1^2) = 1$ , и, конечно,  $\varphi_1^3 = \omega_1/2 = \varphi_1^2 - \gamma^{-1} \int_{\bar{b}_1^*}^{b_1^*} (S_0^{-3}(C_0^2) - S_0^-(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 6.228$  – значение, при котором  $C_0(\varphi_1^3) = b_1^*$ ,  $S_0(\varphi_1^3) = 0$ .

Для приближения решений в четвертой четверти используем четность и нечетность функций  $C_0(\varphi)$ ,  $S_0(\varphi)$ .

В случае 2) из-за отсутствия симметрии решение аппроксимируется на всем периоде. Здесь дугу траектории (см. приложение 1.5) удобно разбить на две части ("верхнюю" и "нижнюю"). При изменении  $-\varphi$  от 0 до  $\omega_2$  (движение также идет по часовой стрелке) с учетом (9) и (8) положим:  $\varphi_2^1 = -\gamma^{-1} \int_{c_2+1}^{b_2^*} ((S_0)^{+3}((C_0)^2) - (S_0)^+(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 1.976$  – значение, при котором  $C_0(\varphi_2^1) = b_1^*$ ,  $S_0(\varphi_2^1) = 1$ ;  $\varphi_2^2 = \omega_2 = \varphi_2^1 - \gamma^{-1} \int_{b_2^*}^{c_2+1} (S_0^{-3}(C_0^2) - S_0^-(C_0^2))^{-1} dC_0 \approx 5.048$  – значение, при котором  $C_0(\varphi_2^2) = c_2 + 1$ ,  $S_0(\varphi_2^2) = 1$ .

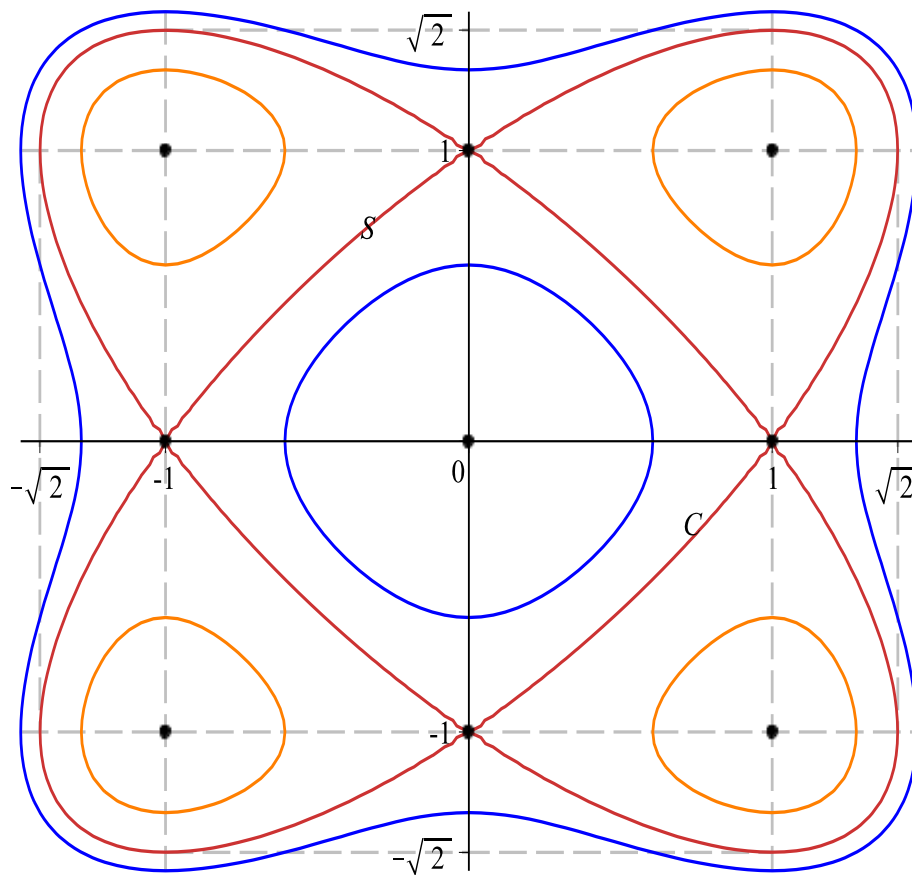
Подставляя интерполяционные функции аналогично случаю 0) в формулы (43<sub>1</sub>), (43<sub>2</sub>) и разбивая интеграл по половинам периода в случае 1), после интегрирования получаем, что  $L_1^1 \approx -1.75 - 1.03 = -2.78$ ,  $L_2^1 \approx 0.49$ .

Отметим, что при подстановке выбранных интерполяционных полиномов (см. приложение 3) вместо решения в интеграл (3) погрешность, как и в случае 0) не превышает 0.005. Кроме того, интегральные части функций  $q_1$  и  $q_2$  пришлось приближать полиномами достаточно высокой степени.

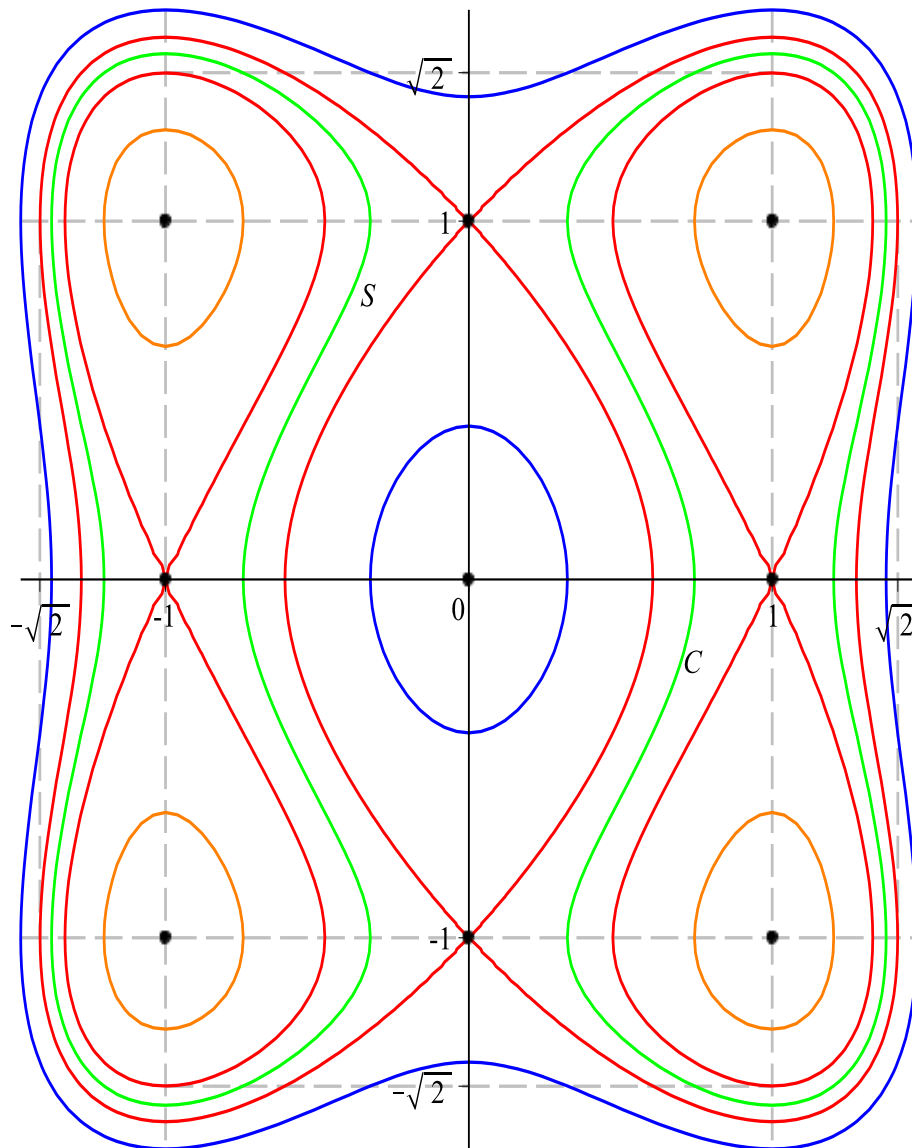
Таким образом, установлено, что система (1) с  $\gamma = 0.5$  при условиях (42) согласно теореме 1 при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  имеет три инвариантные поверхности, гомеоморфные торами. Их проекции на фазовую плоскость проходят через малые окрестности точек  $(c_0, 0)$ ,  $(c_1 + 1, 0)$  и  $(c_2 + 1, 1)$ , где  $c_i \in (c_i^l, c_i^r)$ , значения  $c_i^l, c_i^r$  приведены выше, и охватывают соответственно все 9 особых точек, точки  $(1, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  или только точку  $(1, 1)$ .

**Приложение 1. Фазовые портреты невозмущенной системы.**

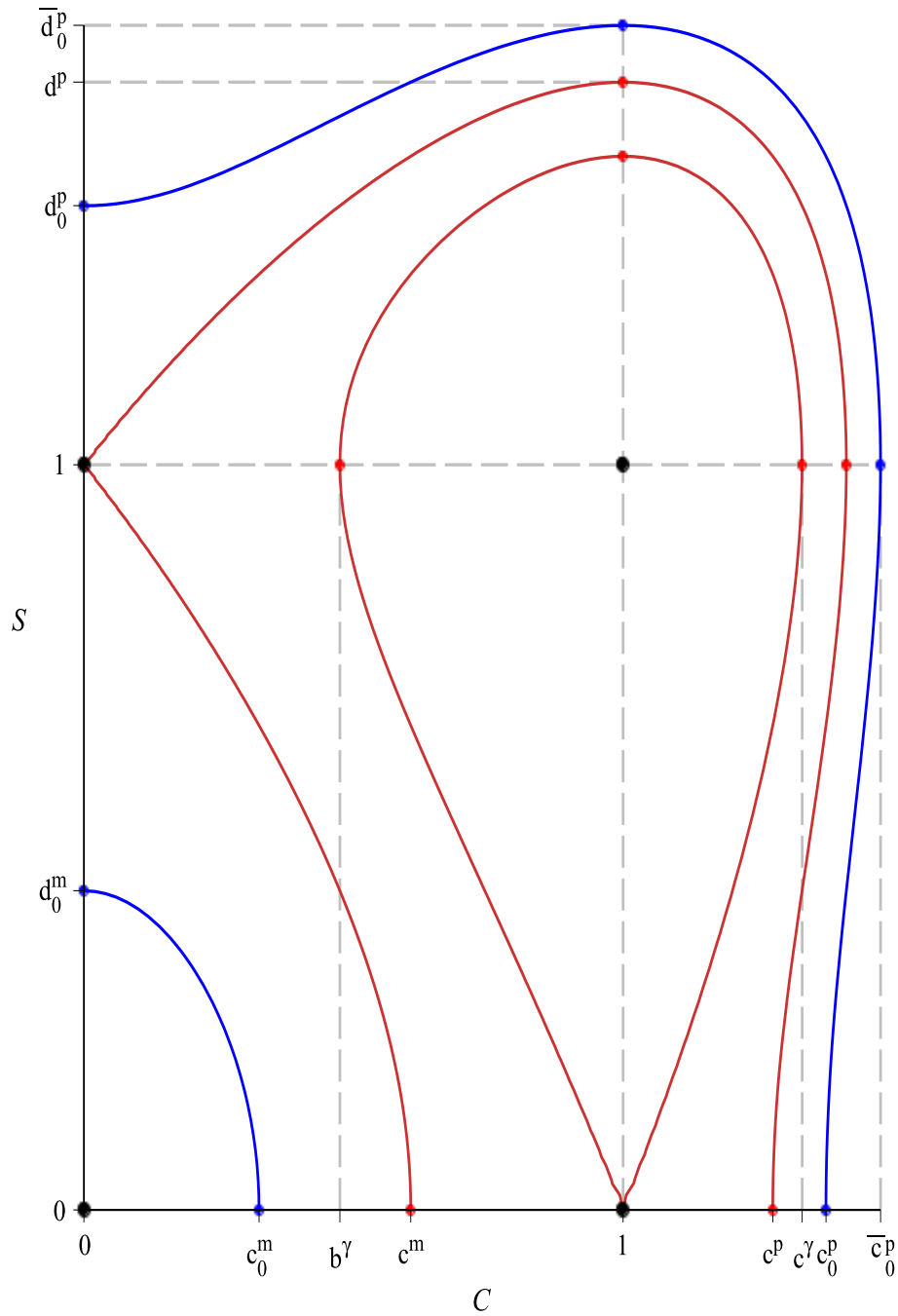
**1) Фазовый портрет (3) систем (2) и (6) при  $\gamma=1$   
(красный - сепаратрисы, черный - особые точки,  
остальные цвета - замкнутые траектории)**



**2) Фазовый портрет (3) систем (2) и (6) при  $\gamma=3/5$   
 (красный - сепаратрисы, черный - особые точки,  
 остальные цвета - замкнутые траектории)**

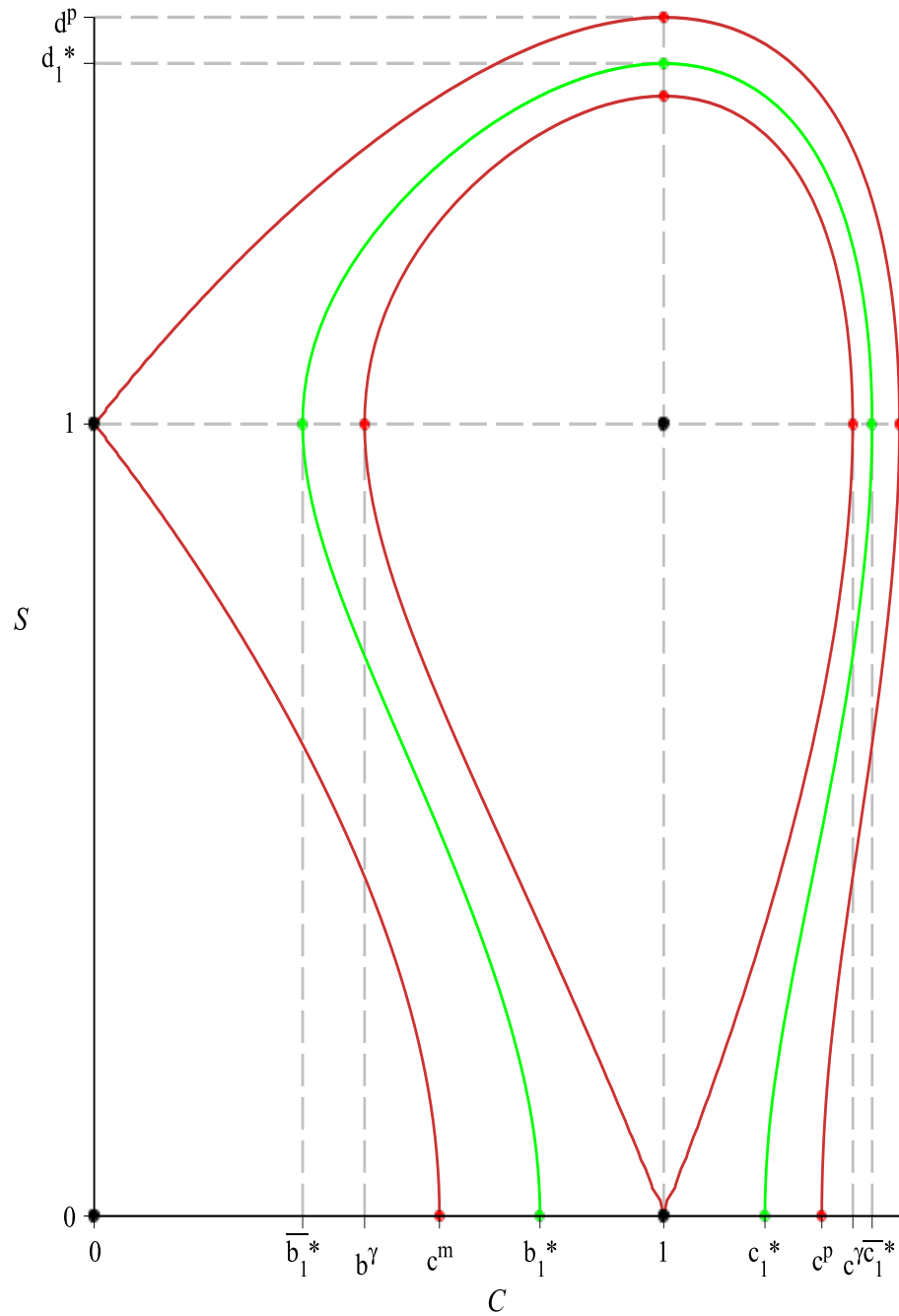


3) Траектории систем (2) и (6) при  $\gamma=3/5$  в случае 0

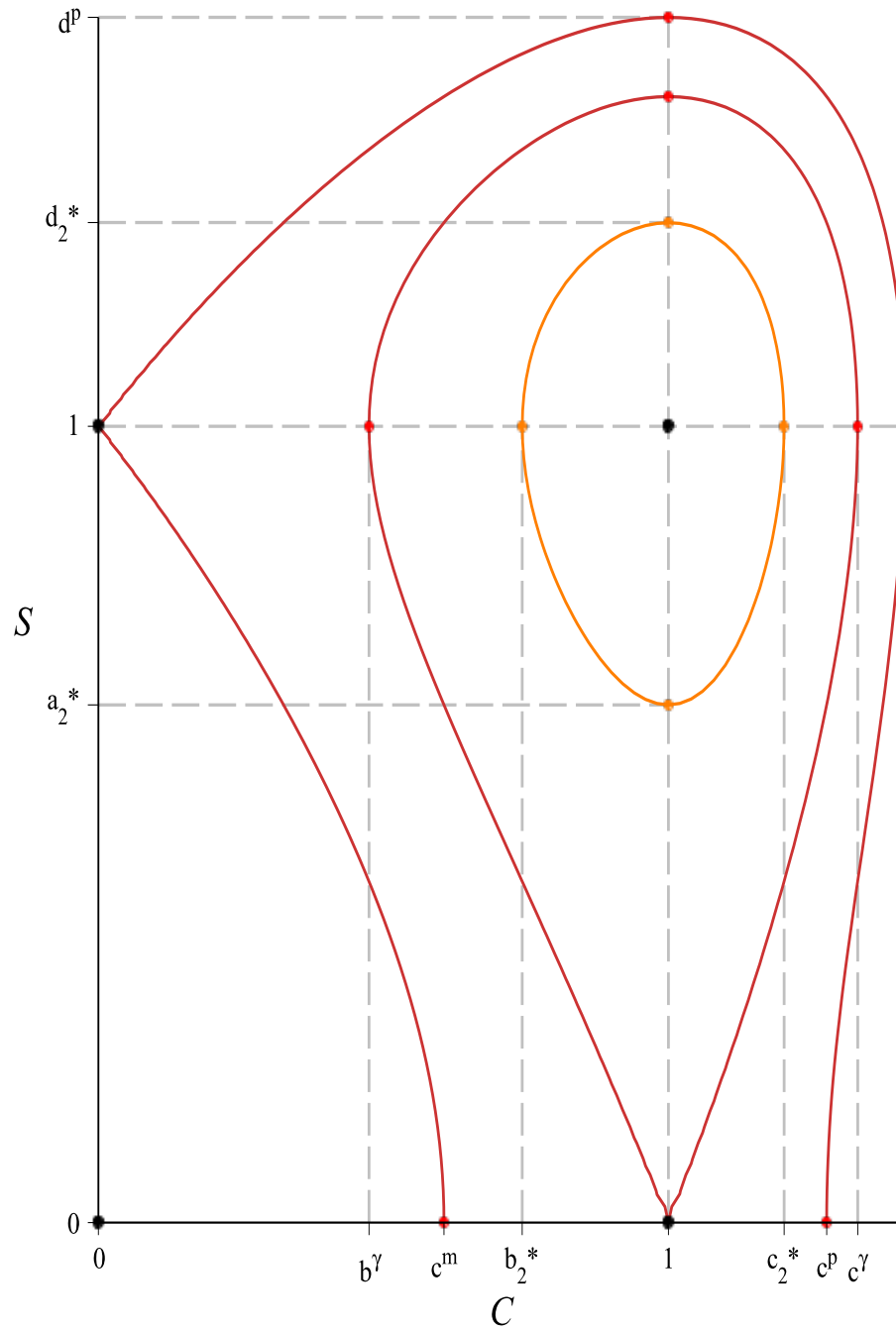




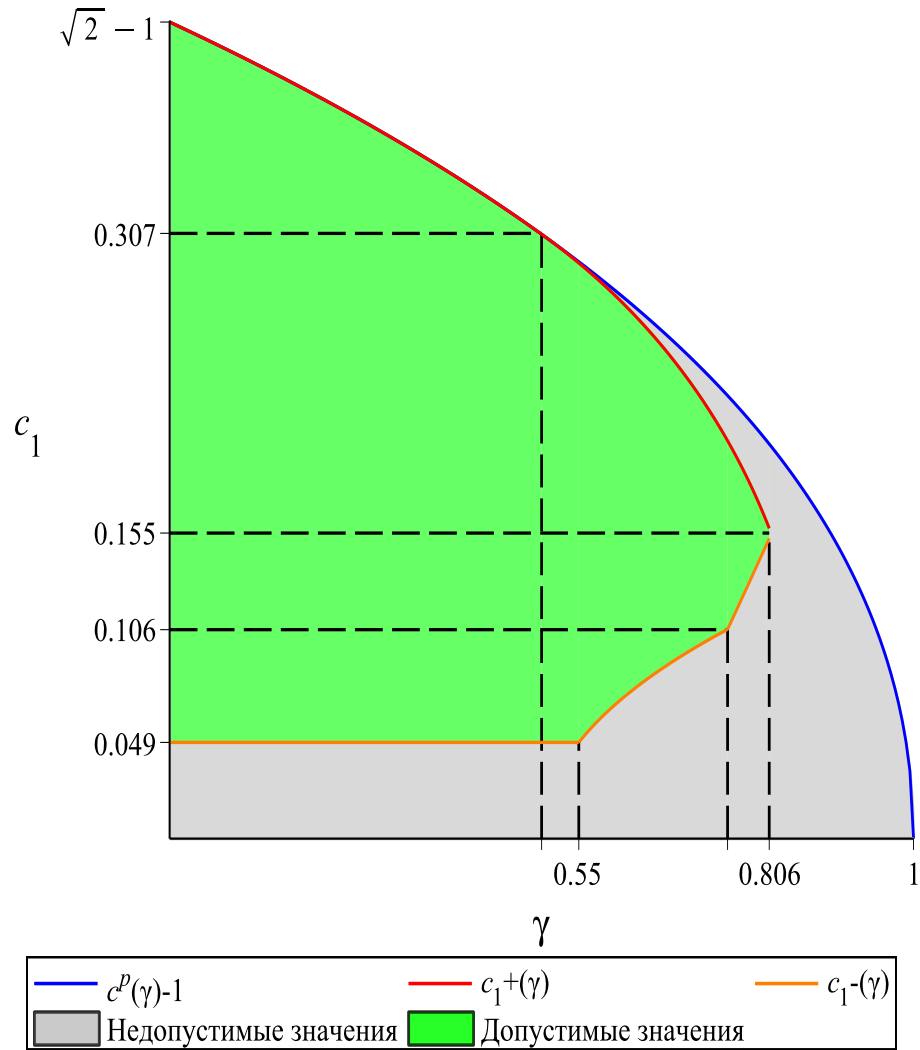
4) Траектории систем (2) и (6) при  $\gamma=3/5$  в случае 1)



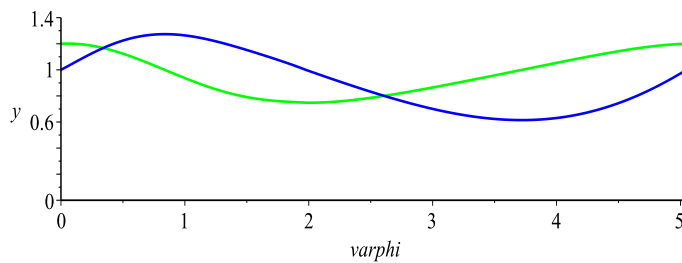
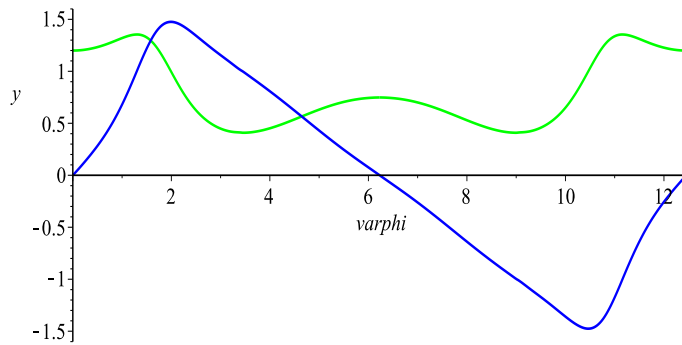
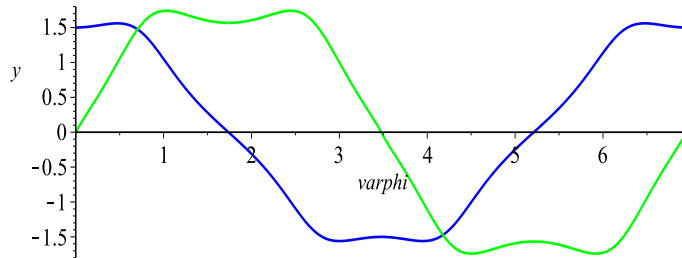
5) Траектории систем (2) и (6) при  $\gamma=3/5$  в случае 2)



Приложение 2. Допустимые значения  $c_1$  в случае 1).



**Приложение 3.**  
**Приближенное решение системы 6 в случаях 0), 1), 2)**  
**при  $\gamma=0.5$ .**  
**( $c[0]=1.5, \omega[0]=6.95, c[1]=0.2, \omega[1]=12.46, c[2]=0.2, \omega[2]=$**   
 **$5.048$ )**



## Список литературы

- [1] *Бибиков Ю. Н.* Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой колебаний // Мат. заметки 65 (1999), вып. 3, 323–336.
- [2] *Бибиков Ю. Н.* Бифуркация рождения инвариантных торов с бесконечно малой частотой // Алгебра и анализ 10 (1998), вып. 2, 81–92.
- [3] *Басов В. В.* Бифуркация положения равновесия в критическом случае двух пар нулевых корней характеристического уравнения // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, 236, Наука, М., 2002, 45–60 (<http://mi.mathnet.ru/tm275>).
- [4] *Басов В. В.* Бифуркация положения равновесия в системах с нулевыми корнями характеристического уравнения // Матем. заметки, 75 (2004), вып. 3, 323–341 (<http://mi.mathnet.ru/mz35>).
- [5] *Басов В. В.* Инвариантные поверхности двумерных периодических систем с бифурцирующей точкой покоя в первом приближении // Современная математика и ее приложения (Труды МК по динамическим системам и дифф. уравнениям. Суздаль 5-10 июля 2004 г.) 38 (2006), № 3. 10–27.
- [6] *Басов В. В.* Инвариантные поверхности стандартных двумерных систем с консервативным первым приближением третьего порядка // Дифференц. уравнения, 44 (2008) № 1, 3–18 (<http://elibrary.ru/item.asp?id=9590941>).
- [7] *Арнольд И. И.* Математические методы классической механики. М., Изд-во Наука, 1979, 432 с.
- [8] *Hale J.K.* Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems // Annals of Mathematics Second Series, 73:3 (1961), 496–531.
- [9] *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2, АН СССР, М.-Л., 1956, с. 272–331.
- [10] *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л., Изд-во ЛГУ, 1991, 144 с.