

УДК 517.954+517.956.37+517.98

Памяти Людвига Дмитриевича Фаддеева

Граничное управление и томография римановых многообразий (ВС-метод)

М. И. Белишев

ВС-метод это один из подходов к обратным задачам математической физики. Его отличительная особенность – разнообразные междисциплинарные связи: помимо уравнений в частных производных, поставляющих задачи, используются теория управления и систем, асимптотические методы, функциональный анализ, теория операторов, банаховы алгебры и др. Цель работы – представить основные идеи и инструменты ВС-метода и дать обзор некоторых результатов. Для презентации выбрано одно из главных его достижений – реконструкция римановых многообразий по динамическим и спектральным граничным данным.

Библиография: 108 названий.

Ключевые слова: обратные задачи, реконструкция римановых многообразий по граничным данным, ВС-метод.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9768>

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Волновая томография	8
1.1. Геометрия	8
1.2. Волны	14
1.3. Динамика	18
1.4. Реконструкция в АТ. Вариант 1: лунки	23
1.5. Реконструкция в АТ. Вариант 2: амплитудная формула	26
1.6. Реконструкция в АТ. Вариант 3: алгебры	32
1.7. Реконструкция в ЭМТ	35
1.8. Волновая модель	44
1.9. Система Ламе	45
1.10. Комментарии	48

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-01-00529-а) и Volks-Wagen Foundation.

© М. И. Белишев, 2017

2. Импедансная томография.....	49
2.1. Постановки.....	49
2.2. Случай $n = 2$	50
2.3. О случае $n \geq 3$	52
3. Одномерный ВС-метод.....	54
Список литературы.....	59

Введение

О работе. Предмет работы – один из подходов к обратным задачам математической физики. За подходом закрепилось название “ВС-метод”¹, отражающее его связь с идеями и результатами теории граничного управления. Первая версия этого метода появилась в заметке [11]; в [14] предложен вариант, наиболее близкий к современному. Дальнейшее развитие и результаты представлены в обзорах [18], [28]; сжатое изложение см. в [26], [36].

ВС-метод – сугубо междисциплинарный подход. В нем, помимо уравнений в частных производных, поставляющих задачи, используются теория управления и систем, асимптотические методы (геометрическая оптика), функциональный анализ и теория операторов. Выявлены перспективные связи с банаховыми алгебрами [22], [62], некоммутативной геометрией [41], [42], [37], функциональными моделями линейных операторов [34], [56]. Разнообразие связей и их содержательность мы относим к сильным сторонам подхода.

Работа ставит целью представить ВС-метод и дать обзор некоторых его результатов. Для презентации выбрано одно из наиболее выразительных его достижений – реконструкция риманова многообразия по динамическим и спектральным граничным данным. Первые результаты в этом направлении были получены в [47], [49].

О содержании.

- К обратным относят задачи, состоящие в восстановлении системы (ее структуры, параметров) по отображению “вход–выход”, описывающему реакцию системы на внешнее воздействие. Под томографией многообразий мы понимаем круг обратных задач для систем, ассоциированных с римановыми многообразиями. В них требуется восстановить многообразие по тем или иным данным о решениях (прямых) граничных задач, известным на крае многообразия. Приведем примеры из приложений, поясняющие и мотивирующие соответствующие постановки.

Импедансная томография (ИТ). Имеется тонкая оболочка Ω сложной формы (риманова поверхность с краем), проводящая ток. К ее границе Γ прикладывается потенциал f (вход), индуцирующий потенциал u^f и ток ∇u^f внутри Ω . Внешний наблюдатель, оперирующий на границе, имеет возможность варьировать f и измерять ток $\nu \cdot \nabla u^f$, текущий через границу (выход; здесь ν – внешняя нормаль к Γ). Измерения формализуются заданием оператора реакции

$$R: f \mapsto \nu \cdot \nabla u^f|_{\Gamma}.$$

¹от “boundary control”; русский вариант – *БЦ-метод* или *метод граничного управления*.

Это так называемый DN-оператор; он определяется оболочкой: ее геометрией, проводимостью и т. п. Предположим, что оболочка недоступна для наблюдателя и, зондируя ее токами с границы, он пытается определить ее форму и параметры. Иными словами, ставится обратная задача: в какой мере оператор R определяет оболочку Ω и, если определяет, как ее восстановить?

Акустическая томография (АТ). Пусть оболочка Ω выполнена из упругого материала и смещение f точек ее границы приводит к появлению волны сжатий u^f , распространяющейся по оболочке с конечной скоростью. Волна рассеивается на неоднородностях, появляются вторичные волны, возвращающиеся к границе и взаимодействующие с ней. Возникающие при взаимодействии силы $\nu \cdot \nabla u^f$ регистрируются наблюдателем на Γ . Измерения задают оператор реакции

$$R: f \mapsto \nu \cdot \nabla u^f \Big|_{\Gamma \times [0, T]}$$

(T – время наблюдения). Обратная задача состоит в восстановлении Ω по R .

Задачи ИТ и АТ ставятся и в многомерном случае, а в размерности 3 имеют содержательные приложения (дефектоскопия, геофизика, ультразвуковая диагностика в медицине и др.).

Электромагнитная томография (ЭМТ). Область Ω в искривленном пространстве (трехмерное риманово многообразие с краем) просвечивается электромагнитными волнами $u^f = \{e^f, h^f\}$, инициированными граничными источниками $f = \nu \wedge e$. Наблюдатель располагает оператором

$$R: f \mapsto \nu \wedge h^f \Big|_{\Gamma \times [0, T]}$$

и ставит цель восстановить Ω .

Задачи АТ и ЭМТ можно объединить термином “*волновая томография*”. В них инструментом зондирования Ω служат волны, распространяющиеся с конечной скоростью.

• Отметим отличие приведенных постановок от традиционных коэффициентных обратных задач. В последних носитель Ω подлежащих определению коэффициентов предполагается известным: есть возможность фиксировать точку $x \in \Omega$ и обсуждать, как восстановить в ней искомую функцию (проводимость оболочки, плотность среды, скорость волн и т. п.). В наших же постановках определению подлежит *сам носитель*, что выводит задачу на другой уровень сложности.

Дополнительным осложнением является то, что соответствие $\Omega \mapsto R$ неинъективно. Будем говорить, что многообразия Ω и Ω' *эквивалентны*, если они имеют общий край $\partial\Omega = \partial\Omega' = \Gamma$ и совпадающие операторы реакции $R = R'$. Такие многообразия одинаково реагируют на внешнее воздействие и в принципе неразличимы для внешнего наблюдателя. Тривиальным примером служит случай, когда Ω и Ω' связаны изометрией $i: \Omega \rightarrow \Omega'$ такой, что $i|_{\Gamma} = \text{id}$. В этом случае для общего входа f и отвечающих ему решений u^f и u'^f выполнено равенство $u^f = i^* u'^f$, что влечет $R = R'$.

В этой ситуации естественно поставить две задачи:

1) описать класс эквивалентности, отвечающий заданному R (в частности, выяснить, исчерпывается ли он изометричными многообразиями);

2) построить (указать, описать, предъявить, ...) риманово многообразие $\tilde{\Omega}$ с оператором реакции $\tilde{R} = R$.

Вторая задача ставится в предположении, что R заведомо является оператором реакции некоторого многообразия (*оригинала*) Ω , так что речь идет о его *копии* $\tilde{\Omega}$ – некотором каноническом представителе класса эквивалентности. Заметим, что, с точки зрения теории систем, для наблюдателя построение копии $\tilde{\Omega}$ по оператору R и есть единственно релевантное понимание самой задачи “восстановить Ω ” (см. [87; гл. 10]).

• ВС-метод доставляет конкретные способы построения копий по оператору реакции. Образно говоря, решается вопрос о том, из какого “материала” можно построить $\tilde{\Omega}$ и как извлечь его из R . В данной статье представлены два варианта: близкий к оригинальному [11], [13], [26] и алгебраический [22], [30], [41], [35], [42]. В обоих вариантах обыгрывается биективность соответствия $x \leftrightarrow \delta_x$ между точками Ω и сосредоточенными в них мерами Дирака. По оператору R в пространстве входов наблюдатель определяет адекватные копии (представления) $\tilde{\delta}_x$ мер Дирака, выполняющие роль “материала”. Из них составляется множество $\{\tilde{\delta}_x\} =: \tilde{\Omega}$. Оно оснащается адекватной римановой структурой и, по построению, оказывается изометрической копией оригинала Ω , решающей задачу 2). Вместе с тем решается вопрос 1): в волновой томографии эквивалентные многообразия изометричны, в двумерной ИТ – конформно эквивалентны.

Варианты отличаются тем, как именно идентифицируются $\tilde{\delta}_x$. Первый вариант решает задачи волновой томографии. В нем наблюдатель использует инфинитезимальную конструкцию (“ \hbar -лунки”) и предельным переходом получает $\tilde{\delta}_x$ как функционалы над входами f .

В алгебраическом варианте по R определяется операторная алгебра $\tilde{\mathfrak{E}}(\Omega)$ (“алгебра эйконалов”), изометрически изоморфная алгебре непрерывных функций $C(\Omega)$. Роль $\tilde{\Omega}$ играет спектр (множество характеров $\tilde{\delta}$) алгебры $\tilde{\mathfrak{E}}(\Omega)$. Поскольку алгебры изометричны, их спектры гомеоморфны. Как известно, спектр $C(\Omega)$ гомеоморфен Ω . Как следствие, $\tilde{\Omega}$ гомеоморфно Ω . Оснастив $\tilde{\Omega}$ римановой структурой, наблюдатель получает копию оригинала Ω , решающую задачу реконструкции.

Двумерная задача ИТ решается по вполне аналогичной схеме. Вместо $C(\Omega)$ используется алгебра голоморфных функций \mathfrak{A} , спектр которой гомеоморфен Ω . Наблюдатель по заданному R строит ее изометрическую копию $\tilde{\mathfrak{A}}$ и, определив спектр $\tilde{\Omega}$ последней, получает требуемую копию многообразия Ω .

По существу, в алгебраическом варианте ВС-метода реконструкция сводится к *геометризации* по Гельфанду адекватной алгебры, определяемой данными обратной задачи. Тем самым, геометризация доставляет единый подход к обратным задачам для физически весьма далеких друг от друга систем: в волновой томографии процессы описываются эволюционными (гиперболическими) уравнениями, а в импедансной – стационарными (эллиптическими).

Для полноты изложения мы кратко описываем еще один вариант ВС-метода, использующий геометрическую оптику – *амплитудные формулы* [14], [48], [18], [38], [45], [36]. В тексте он помещен вторым. Именно он применяется для разработки численных алгоритмов.

Подробно рассматривается технически более простая задача АТ.

Комментарии.

- Термин “граничное управление” в заголовке статьи и названии метода – дань той роли, которую в волновой томографии играет *задача граничного управления*. Она состоит в нахождении входа (управления) f по заданному состоянию y , т. е. в решении уравнения $u^f = y$. Качество ее разрешимости имеет критическое значение. В благоприятных случаях говорят о граничной управляемости соответствующей системы; на другом языке речь идет о полноте состояний в областях, замечаемых волнами.

- Присутствие “внешнего наблюдателя” для математической работы не характерно, но, как мы надеемся, прибавляет наглядности изложению. В методологии ВС-метода, в терминах и понятиях, которыми он оперирует, ясно прослеживается философия теории систем. Отдельные приемы и элементы метода служат выразительной иллюстрацией ее основных тезисов (см. [87; разд. 10.6 “Теория абстрактной реализации”]).

- Алгебраическая версия подхода созвучна общим идеям *координатизации*, изложенным в замечательной книге И. Р. Шафаревича [104]. По существу, эта версия есть координатизация точек $x \in \Omega$ посредством адекватных алгебраических объектов – характеров δ_x алгебры $C(\Omega)$. Наблюдатель извлекает копию (представление) $\tilde{C}(\Omega)$ алгебры $C(\Omega)$ из данных обратной задачи, находит характеры $\tilde{\delta}_x$ этой копии и составляет из последних копию $\tilde{\Omega}$ недоступного оригинала Ω .

- Обратные задачи нелинейны. Главное преимущество классических подходов, восходящих к работам И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, М. Г. Крейна, В. А. Марченко, состоит в том, что решение обратных задач сводится к решению линейных уравнений. ВС-метод в полной мере обладает этим преимуществом: в нем решение обратной задачи фактически равносильно обращению линейного оператора. Именно, требуется обратить *связывающий оператор* динамической системы, ассоциированной с многообразием. В многомерных задачах с качеством обратимости возникают проблемы, но линейность сохраняется.

В динамических задачах ВС-метод оптимален по времени: глубина восстановления параметров пропорциональна длительности наблюдений на границе. Это важное для приложений свойство унаследовано от *локального подхода* А. С. Благовещенского [65], [66], учеником которого автор является.

- ВС-метод использует многочисленные результаты из весьма далеких друг от друга областей. В то же время его собственный аналитический аппарат весьма прост и, грубо говоря, исчерпывается интегрированием по частям.

Схема метода достаточно сложна, что неизбежно в подходе, ставящем целью восстановить сложный объект – риманово многообразие произвольной размерности и топологии. Копия $\tilde{\Omega}$ конструируется в несколько шагов, на каждом из которых последовательно вводятся вспомогательные объекты (операторы, подпространства и др.), определяемые данными обратной задачи. Они суть копии соответствующих объектов внутреннего пространства, в которое наблюдатель доступа не имеет. После того как очередной объект-копия введен, он объявляется доступным наблюдателю и используется в дальнейших рассмотрениях. В конце концов доступной оказывается копия $\tilde{\Omega}$.

- Используемые в тексте обороты типа “по A восстановим B ” (или “найдем, определим, перейдем к ...”) призваны разнообразить речь, но всякий раз означают одно: существует единственный объект B , соответствующий A в текущем адекватном смысле. Эффективность восстановления не обсуждается ввиду нечеткости самого понятия “эффективный”. Как нам представляется, определено о ней можно говорить лишь применительно к результатам численного моделирования. Оно тоже входит в сферу интересов ВС-метода [46], [86].

- Стремясь к максимальной простоте изложения, мы почти не приводим доказательств: нужные результаты отнесены в предложения и снабжены соответствующими ссылками. С той же целью приняты завышенные требования к гладкости многообразий, функций и др.: всюду в работе “гладкий” означает C^∞ -гладкий. До раздела 2 все функции, пространства, классы и др. вещественны.

- Автор признателен рецензентам за высказанные замечания и пожелания. Они помогли существенно улучшить изложение.

1. Волновая томография

1.1. Геометрия. Всяду в работе Ω – гладкое риманово многообразие размерности $n \geq 2$ с краем Γ . Дополнительные предположения (компактность, ориентируемость, связность края и др.) принимаются отдельно по мере необходимости.

1.1.1. *Эйконалы.* Для произвольного $A \subset \Omega$ определим метрические окрестности

$$\Omega^r[A] := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, A) < r\}, \quad \Omega^r := \Omega^r[\Gamma], \quad r > 0.$$

Множества

$$\Gamma^s[A] := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, A) = s\}, \quad s \geq 0,$$

суть *эквидистанты* A ; эквидистанты края обозначим через $\Gamma^s := \Gamma^s[\Gamma]$.

Функцию

$$\tau_A(x) := \text{dist}(x, A), \quad x \in \Omega,$$

назовем *эйконалом* множества A ; для краткости обозначим $\tau(x) := \tau_\Gamma(x)$. По общим свойствам расстояния все эйконалы непрерывны: $\tau_A \in C_{\text{loc}}(\Omega)$.

Пусть

$$\sigma_\varepsilon(\gamma) := \{\gamma' \in \Gamma \mid \text{dist}(\gamma', \gamma) < \varepsilon\}$$

есть диск с центром $\gamma \in \Gamma$. Имеет место поточечная сходимоть

$$\tau_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}(\cdot) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_\gamma(\cdot) \quad \text{в } \Omega.$$

Положим $T_* := \max_\Omega \tau(\cdot) \leq \infty$. Ниже, в динамических системах, эта величина имеет смысл времени, за которое волны, идущие от края с единичной скоростью, заполняют все многообразие.

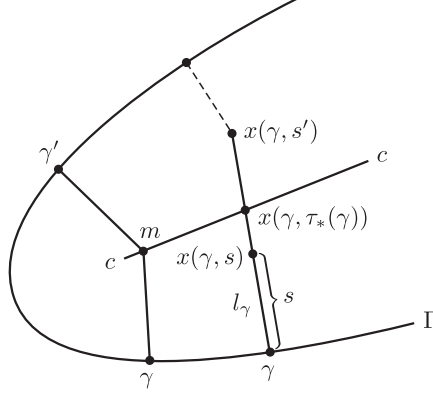


Рис. 1. Множество раздела

1.1.2. *Множество раздела.* Для $x \in \Omega$ определим *геодезическую проекцию*

$$\text{pr } x := \{\gamma \in \Gamma \mid \tau(x) = \text{dist}(x, \gamma)\},$$

состоящую из ближайших к x точек края. Примем $\text{pr } A := \{\text{pr } x \mid x \in A\}$.

Будем говорить, что точка $m \in \Omega$ *кратная*, если $\text{pr } m$ состоит более чем из одной точки края. В дальнейшем c_0 есть множество кратных точек.

Пусть l_γ есть геодезическая, исходящая из $\gamma \in \Gamma$ и идущая внутрь Ω по нормали к Γ , $l_\gamma[0, s]$ – ее отрезок длины s , $x(\gamma, s)$ – его конец. Величина

$$\tau_*(\gamma) := \sup\{s > 0 \mid \tau(x(\gamma, s)) = s\}$$

называется *критической длиной*: при $s \leq \tau_*(\gamma)$ (и только при таких s) отрезок $l_\gamma[0, s]$ является кратчайшей, соединяющей $x(\gamma, s)$ с Γ . Функция $\tau_*(\cdot)$ непрерывна на Γ [81] и выполнено неравенство $\tau_*(\cdot) \leq T_*$.

Точка $x(\gamma, \tau_*(\gamma))$ называется *точкой раздела* геодезической l_γ . Множество

$$c := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma, \tau_*(\gamma))$$

называется *множеством раздела* (cut locus) многообразия относительно его края: см. рис. 1. Справедливы соотношения

$$\text{vol } c = 0, \quad \text{dist}(c, \Gamma) > 0, \quad c = \overline{c_0} \tag{1.1}$$

(черта – замыкание в Ω).²

Гладкость эквидистант Γ^s может нарушаться только на множестве раздела, их части $\Gamma^s \setminus c$ суть гладкие многообразия.

Введем подмножества края

$$\sigma_+^s := \text{pr}[\Gamma^s \setminus c], \quad \sigma_0^s := \text{pr}[\Gamma^s \cap c], \quad \sigma_-^s := \Gamma \setminus [\sigma_+^s \cup \sigma_0^s];$$

обозначим $\Omega_\perp^s := \Omega \setminus \overline{\Omega^s}$.

²Эти факты хорошо известны в “геометрическом фольклоре”. О плотности кратных точек в c автору сообщил (и привел доказательство) Ю. Д. Бураго.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $0 \leq s < T_*$. Множества σ_{\pm}^s открыты в Γ , и выполнены соотношения

$$\text{dist}([\sigma_+^s \cup \sigma_0^s], \Omega_{\perp}^s) = s; \quad \text{dist}(\gamma, \Omega_{\perp}^s) > s \quad \forall \gamma \in \sigma_-^s. \quad (1.2)$$

Эти факты легко следуют из принятых выше определений и общих свойств расстояния на римановом многообразии.

1.1.3. *Полугеодезические координаты (пгк).* Для любого $x \in \Omega \setminus c$ проекция на край состоит из единственной точки $\gamma(x) := \text{pr } x$; при этом $x = x(\gamma(x), \tau(x))$. Соответствие

$$i: x \mapsto (\gamma(x), \tau(x))$$

есть биекция $\Omega \setminus c$ на множество $\Theta := i(\Omega \setminus c) \subset \Gamma \times [0, T_*]$, называемое *выкройкой* многообразия Ω . График критической длины,

$$\theta := \{(\gamma, \tau_*(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma\},$$

служит ее границей в цилиндре $\Gamma \times [0, T_*]$. Ниже обозначаем $\bar{\Theta} := \Theta \cup \theta$. Рис. 2 соответствует $T < T_*$; указаны $\Theta^T = i(\Omega^T \setminus c)$ и граница выкройки θ , она же – график критической длины τ_* .

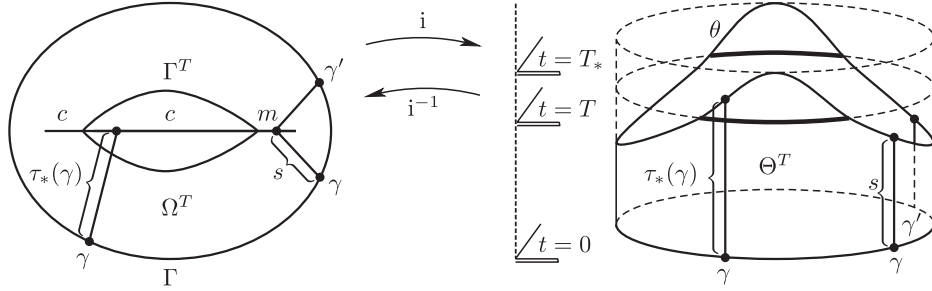


Рис. 2. Выкройка

Пару $(\gamma(x), \tau(x))$ назовем *полугеодезическими координатами* (пгк) точки $x \in \Omega \setminus c$. Выкройка – это область значений пгк; она же – подграфик критической длины $\tau_*(\cdot)$. Малость множества раздела в смысле (1.1) позволяет использовать пгк на Ω “в большом”.

Для численной реализации пгк выбирают открытое подмножество $\sigma \subset \Gamma$ и локальные координаты $\gamma^1, \dots, \gamma^{n-1}$ на σ . Наборы

$$\{\gamma^1(x), \dots, \gamma^{n-1}(x), \tau(x)\}, \quad \text{где } \gamma^k(x) := \gamma^k(\text{pr } x),$$

образуют координаты в *трубке*

$$B_{\sigma} := \{x \in \Omega \setminus c \mid \gamma(x) \in \sigma, 0 \leq \tau(x) < \tau_*(\gamma(x))\}.$$

В них элементы длины и объема суть

$$ds^2 = d\tau^2 + g_{kl}(\gamma, \tau) d\gamma^k d\gamma^l, \quad dx = \beta(\gamma, \tau) d\Gamma d\tau, \quad (1.3)$$

где $k, l = 1, \dots, n-1$, $d\Gamma$ – элемент площади края и

$$\beta(\gamma, \tau) = \sqrt{\frac{\det\{g_{kl}(\gamma, \tau)\}}{\det\{g_{kl}(\gamma, 0)\}}}$$

– плотность объема в пгк. Трубки B_σ в совокупности (для разных σ) образуют атлас на $\Omega \setminus c$.

Оператор Бельтрами–Лапласа в пгк имеет известный вид:

$$\Delta = g^{-1/2} \partial_\tau g^{1/2} \partial_\tau + g^{-1/2} \partial_{\gamma^k} g^{1/2} g^{kl} \partial_{\gamma^l}, \quad (1.4)$$

где g^{kl} есть матрица, обратная к g_{kl} , и $g := \det\{g_{kl}\}$. Компоненты вектора градиента в пгк суть

$$(\nabla\phi)^k = g^{kl} \partial_{\gamma^l} \phi, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad (\nabla\phi)^n = \partial_\tau \phi. \quad (1.5)$$

1.1.4. *Метрика через эйконалы.* Семейство эйконалов $\mathcal{E} := \{\tau_\gamma(\cdot) \mid \gamma \in \Gamma\}$ вполне определяет риманову структуру на Ω : атлас карт и метрический тензор. Приведем факты, из которых это следует.

- Пусть $x^* \in \Omega \setminus \Gamma$ есть внутренняя точка, $\Omega^\varepsilon[x^*]$ – ее окрестность. На крае выберем точку $\gamma(x^*) \in \text{rg } x^*$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то вблизи $\gamma(x^*)$ можно выбрать точки $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ такие, что эйконалы $\tau_{\gamma_1}(\cdot), \dots, \tau_{\gamma_n}(\cdot)$ образуют регулярную систему координат на $\Omega^\varepsilon[x^*]$; в геометрии такие координаты называют *дистанционными*. Отсюда видно, что непустые открытые множества

$$B_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}^{a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n} := \{x \in \Omega \mid 0 < a_i < \tau_{\gamma_i}(x) < b_i, \gamma_i \in \Gamma, 1 \leq i \leq n\}$$

в совокупности составляют базу метрической топологии, имеющейся на Ω . Эти множества суть “бруссы”, образованные трансверсально пересекающимися “сферическими” слоями $\Omega^{b_i}[\gamma_i] \setminus \overline{\Omega^{a_i}[\gamma_i]}$. Среди них есть те, которые покрываются координатами $\tau_{\gamma_1}(\cdot), \dots, \tau_{\gamma_n}(\cdot)$ и, вместе с последними, образуют дистанционные карты. Такие карты согласованы и составляют атлас на $\Omega \setminus \Gamma$.

Трубки B_σ с пгк образуют атлас на $\Omega \setminus c$. Отметим, что входящая в пгк координата $\tau = \tau(\cdot)$ также определяется семейством \mathcal{E} , поскольку $\tau(\cdot) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \tau_\gamma(\cdot)$.

Объединяя оба атласа, получим атлас на Ω , определяемый семейством \mathcal{E} .

- Опишем процедуру, позволяющую восстановить метрику по эйконалам. Пусть B_σ есть трубка с пгк; фиксируем $\eta \in \sigma$. Эйконал $\tau_\eta(\cdot) \in \mathcal{E}$, как и любая дистанционная функция, удовлетворяет уравнению $|\nabla \tau_\eta|^2 = 1$ в B_σ .

Выберем точки $\eta_1, \dots, \eta_{n(n+1)/2}$ и составим уравнения для градиентов соответствующих эйконалов. С учетом (1.3) получим систему

$$(\partial_\tau \tau_{\eta_i})^2 + g^{kl}(\gamma, \tau) (\partial_{\gamma^k} \tau_{\eta_i}) (\partial_{\gamma^l} \tau_{\eta_i}) = 1, \quad i = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \quad (1.6)$$

относительно компонент g^{kl} . Нетрудно показать, что для точек η_i в общем положении она невырождена и однозначно определяет все компоненты. Тем самым, по эйконалам восстанавливается метрический тензор в $\Omega \setminus c$.

Остается определить тензор в точках $x \in c$. Для этого достаточно повторить описанный выше прием, используя вместо пгк подходящие дистанционные координаты $\tau_{\gamma_1}, \dots, \tau_{\gamma_n}$ [41].

Полезно отметить *локальный* характер процедуры восстановления метрики: все γ_i, η_j , используемые в (1.6) для нахождения g^{kl} в окрестности точки x^* , можно выбирать из (малой) окрестности $\sigma \ni \gamma(x^*)$. В приложениях локальность дает возможность работать с данными, известными лишь на части края [21], [29].

• Таким образом, по семейству \mathcal{E} можно однозначно определить всю риманову структуру на Ω . О такой возможности мы будем говорить как об *определяющем свойстве* системы эйконалов. В то же время, как легко видеть, по подсемейству $\mathcal{E}^T := \{\tau_\gamma \in \mathcal{E} \mid \tau_\gamma(\cdot) < T\}$ восстанавливается риманова структура в части многообразия Ω^T , примыкающей к краю.

1.1.5. *Копия $\tilde{\Omega}$* . Забегая вперед, наметим, как определяющее свойство используется в обратной задаче.

В ходе реконструкции наблюдатель получает множество $\tilde{\Omega}$, связанное с Ω некоторой (не известной ему) биекцией $b: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$. Вместе с тем в его распоряжении оказываются функции $\tilde{\tau}_\sigma(\cdot) := \tau_\sigma(b^{-1}(\cdot))$ (пересаженные на $\tilde{\Omega}$ эйконалы) для всевозможных $\sigma \subset \Gamma$. Из этого материала наблюдатель может изготовить изометрическую копию оригинала Ω по следующей схеме.

• Поскольку $\tau_\sigma(x) = 0$ в точках $x \in \bar{\sigma} \subset \Gamma$ и только в них, образ $b(\bar{\sigma})$ определяется в $\tilde{\Omega}$ условием $b(\bar{\sigma}) = \{\tilde{x} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{\tau}_\sigma(\tilde{x}) = 0\}$. Далее в $\tilde{\Omega}$ распознается “край”

$$\tilde{\Gamma} := b(\Gamma) = \bigcup_{\sigma \subset \Gamma} b(\bar{\sigma}).$$

Затем идентифицируются его отдельные точки: $\tilde{\gamma} := b(\gamma) = \bigcap_{\sigma \ni \gamma} b(\bar{\sigma})$.

В дальнейшем условимся отождествлять $\tilde{\gamma}$ с γ , так что у Ω и $\tilde{\Omega}$ оказывается общий край $\Gamma = \tilde{\Gamma}$.

• Напомним, что $\sigma_\varepsilon(\gamma) := \{\gamma' \in \Gamma \mid \text{dist}(\gamma', \gamma) < \varepsilon\}$ есть диск с центром γ . Используя отмеченную в п. 1.1.1 сходимую эйконалов, найдем в $\tilde{\Omega}$ функции $\tilde{\tau}_\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\tau}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}$. Составим семейство $\tilde{\mathcal{E}} := \{\tilde{\tau}_\gamma(\cdot) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

• Используя вместо эйконалов $\tau_\gamma \in \mathcal{E}$ их “копии” $\tilde{\tau}_\gamma \in \tilde{\mathcal{E}}$, оснастим $\tilde{\Omega}$ римановой структурой по схеме п. 1.1.4. В результате получим риманово многообразие, которое имеет общий край с Ω и изометрично Ω по построению. Оно и будет решением задачи реконструкции.

Если в начале построения наблюдатель располагает только копиями эйконалов с дополнительным ограничением $\tilde{\tau}_\sigma(\cdot) < T$, то описанная процедура приведет его к многообразию $\tilde{\Omega}^T$, изометричному части Ω^T и имеющему общий с ней край $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.

1.1.6. *Лунки*. Зафиксируем точку $\gamma \in \Gamma$; выберем положительное $s \leq T_*$ и малое $\varepsilon > 0$. Множество

$$\begin{aligned} \omega_{\gamma, \varepsilon}^s &:= \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap [\Omega^s \setminus \Omega^{s-\varepsilon}] \\ &= \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \sigma_\varepsilon(\gamma)) < s, s - \varepsilon \leq \tau(x) < s\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

мы называем *лункой*. Лунки суть инфинитезимальные области в Ω ; их назначение – служить метками внутренних точек. Для дальнейшего существенно их поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будем говорить, что лунка исчезает, если для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, s) > 0$ выполнено равенство $\omega_{\gamma, \varepsilon}^s = \emptyset$ при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$. Имеет место следующая альтернатива (см. [28; приложение, лемма 1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $0 < s \leq \tau_*(\gamma)$, то выполнено равенство*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\omega_{\gamma, \varepsilon}^s} = x(\gamma, s),$$

т.е. лунка монотонно стягивается к точке $x(\gamma, s)$. Если $s > \tau_(\gamma)$, то лунка $\omega_{\gamma, \varepsilon}^s$ исчезает.*

Такое поведение иллюстрирует рис. 3: на нем лунка $\omega_{\gamma, \varepsilon}^s$ затенена, а лунка $\omega_{\gamma', \varepsilon}^s$ исчезла в силу $s > \tau_*(\gamma')$.

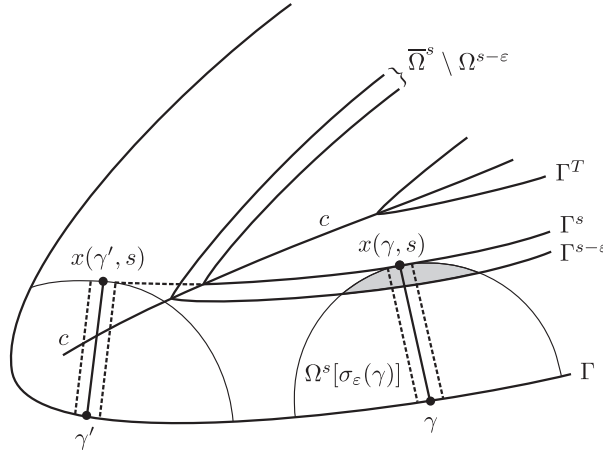


Рис. 3. Лунки

Подготовим один из фрагментов процедуры реконструкции – характеристику выкройки. Пусть $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$. Для измеримого $A \subset \Omega$ определим подпространство

$$\mathcal{H}\langle A \rangle := \{\chi_{Ay} \in \mathcal{H} \mid y \in \mathcal{H}\},$$

где χ_A – индикатор множества A . Подпространства такого вида будем называть *геометрическими*. Соответствие $A \leftrightarrow \mathcal{H}\langle A \rangle$ позволяет “кодировать” области в Ω соответствующими подпространствами, что используется во всех вариантах ВС-метода.

Подпространство $\mathcal{H}\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle$ функций, локализованных в $\omega_{\gamma, \varepsilon}^s$, назовем *h-лункой*. Предложение 2 очевидным образом ведет к следующей альтернативе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Либо $\mathcal{H}\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle \neq \{0\}$ при всех $\varepsilon > 0$ и тогда $s \leq \tau_*(\gamma)$ (т.е. $(\gamma, s) \in \overline{\Theta}$), либо найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\mathcal{H}\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle = \{0\}$ при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$, и тогда $s > \tau_*(\gamma)$ (т.е. $(\gamma, s) \notin \overline{\Theta}$).*

Таким образом, по поведению h -лунок можно сортировать пары (γ, s) , отбирая те из них, которые принадлежат выкройке. Как выяснится позже, такой отбор может провести внешний наблюдатель, располагающий оператором реакции.

1.1.7. *Меры Дирака.* Пусть $X\langle A \rangle$ есть проектор в \mathcal{H} на $\mathcal{H}\langle A \rangle$. Геометрические подпространства выделены важным свойством: все такие проекторы коммутируют между собой, а действие каждого сводится к умножению на соответствующий индикатор: $X\langle A \rangle y = \chi_A y$, т.е. к срезке функций на A . Как следствие, из определения лунки (1.7) получаем представление:

$$X\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle = X\langle \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \rangle [X\langle \Omega^s \rangle - X\langle \Omega^{s-\varepsilon} \rangle]. \quad (1.8)$$

Пусть $1(\cdot) \equiv 1$ есть единичная функция, а $y(\cdot)$ – гладкая функция в Ω . Фиксируем $(\gamma, s) \in \bar{\Theta}$; пусть $\delta_{x(\gamma, s)}$ – мера Дирака с носителем $x(\gamma, s) \in \Omega$. В этом случае лунка $\omega_{\gamma, \varepsilon}^s$ стягивается к точке $x(\gamma, s)$, из чего следует представление:

$$\langle \delta_{x(\gamma, s)}, y \rangle = y(x(\gamma, s)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } \omega_{\gamma, \varepsilon}^s} \int_{\omega_{\gamma, \varepsilon}^s} y(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(X\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle y, 1)_{\mathcal{H}}}{(X\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle 1, 1)_{\mathcal{H}}}. \quad (1.9)$$

Если $m = x(\gamma, s) = x(\gamma', s)$ есть кратная точка, то предельный переход в (1.9) для разных γ и γ' приведет к одной и той же мере δ_m . Отсюда заключаем, что множество $\{\delta_{x(\gamma, s)}\}_{(\gamma, s) \in \bar{\Theta}}$ биективно многообразию Ω ; при этом индексация его элементов точками (замкнутой) выкройки не является инъективной: при переходе от точек $\bar{\Theta}$ к мерам происходит склейка границы θ по точкам, отвечающим кратным точкам множества раздела.

Поясним, как последнее представление сработает в обратной задаче. По ее данным, с использованием предложения 3, будет определена выкройка. Затем по (1.9) найдем функционалы $\tilde{\delta}_{(\gamma, s)}$ над пространством входов, являющиеся адекватными копиями мер $\delta_{x(\gamma, s)}$. По ним образуем множество

$$\tilde{\Omega} := \{\tilde{\delta}_{(\gamma, s)}\}_{(\gamma, s) \in \bar{\Theta}}.$$

Оснастив его надлежащей римановой структурой, получим изометрическую копию оригинала Ω . Копия $\tilde{\Omega}$ и будет решением задачи реконструкции.

1.2. Волны. В задачах АТ и ЭМТ наблюдатель зондирует многообразие волнами от граничных источников: это единственный инструмент, с помощью которого он получает информацию о внутреннем строении Ω . Для реконструкции принципиальны фундаментальные свойства волн: конечность скорости распространения и локальная полнота.

1.2.1. *Задача I^T .* Распространение акустических волн в Ω описывается начально-краевой задачей I^T :

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad (1.10)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1.11)$$

$$u|_{\Gamma \times [0, T]} = f, \quad (1.12)$$

в которой Δ есть оператор Бельтрами–Лапласа в Ω , $t = T > 0$ – финальный момент времени, f – *граничное управление*, $u = u^f(x, t)$ – решение. С физической точки зрения $u^f(x, t)$ есть давление в точке x в момент t , а u^f – звуковая волна, инициированная граничным источником f и распространяющаяся в неоднородной среде. Приведем известные свойства решений.

- Пусть

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^\infty(\Gamma \times [0, T]) \mid \text{supp } f \subset \Gamma \times (0, T)\}$$

есть линейал гладких управлений, аннулирующихся вблизи $t = 0$. При $f \in \mathcal{M}^T$ задача I^T имеет единственное классическое гладкое решение u^f .

- Через D_{T-s}^T обозначим оператор запаздывания, действующий на зависящие от времени функции по правилу

$$[D_{T-s}^T y](\cdot, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T - s, \\ y(\cdot, t - (T - s)), & T - s \leq t \leq T, \end{cases}$$

где (\cdot) – другие возможные переменные, $s \in (0, T]$ – параметр: $T - s$ есть величина задержки, s – время действия задержанной функции. Независимость определяющего эволюцию волн оператора Δ от времени приводит к известным соотношениям:

$$u^{D_{T-s}^T f}(\cdot, T) = u^f(\cdot, s); \quad u^{f_t} = u_t^f; \quad u^{f_{tt}} = u_{tt}^f \stackrel{(1.10)}{=} \Delta u. \quad (1.13)$$

- Пусть $\sigma \subseteq \Gamma$ есть открытое подмножество края, а управление f действует с σ , т. е. $\text{supp } f \subset \sigma \times [0, T]$. В силу гиперболичности задачи I^T имеем соотношение

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \Omega^t[\sigma], \quad t > 0. \quad (1.14)$$

Оно означает, что волны в Ω распространяются с конечной скоростью, не превосходящей 1, и локализованы в окрестности носителей управлений. Как следствие, $\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \Omega^T$ при всех f и $t < T$. Это позволяет оптимизировать постановку (1.10)–(1.12), записав ее в виде задачи I_*^T

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в } (\Omega^T \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad (1.15)$$

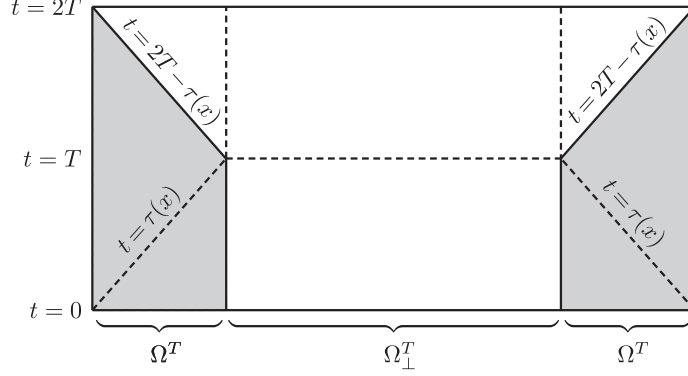
$$u|_{t < \tau(x)} = 0, \quad (1.16)$$

$$u|_{\Gamma \times [0, T]} = f. \quad (1.17)$$

Решение этой задачи вполне определяется окрестностью края Ω^T : дополнение $\Omega \setminus \Omega^T$ в самой постановке не участвует и не оказывает на u^f никакого влияния.

- Рассмотрим пространственно-временную область

$$\mathcal{D}^{2T} := \{(x, t) \mid x \in \Omega^T \setminus \Gamma, 0 < t < 2T - \tau(x)\}.$$

Рис. 4. Область \mathcal{D}^{2T}

На рис. 4 показано ее вертикальное сечение (затенено). В силу конечности области влияния следующая начально-краевая задача I_*^{2T} оказывается корректной:

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}^{2T}, \quad (1.18)$$

$$u|_{t < \tau(x)} = 0, \quad (1.19)$$

$$u|_{\Gamma \times [0, 2T]} = f. \quad (1.20)$$

При $f \in \mathcal{M}^{2T}$ она имеет единственное классическое гладкое решение u^f .

Задача I_*^{2T} является естественным расширением задачи I_*^T по гиперболичности. Ее решение тоже вполне определяется частью многообразия Ω^T .

1.2.2. Множества единственности. При $T < T_*$ в Ω есть область $\Omega_{\perp}^T = \Omega \setminus \overline{\Omega^T}$, не заполненная волнами и ограниченная эквидистантой Γ^T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $T < T_*$, и пусть $\omega \subset \Omega^T$ есть связное открытое множество, содержащее край Γ и область Ω_{\perp}^T . Если управление f таково, что $u^f(\cdot, T) = 0$ в ω , то $f = 0$ и, следовательно, $u^f \equiv 0$.

Приведенные условия, грубо говоря, означают, что ω должно содержать канал, соединяющий край с незаполненной областью. Приведем набросок доказательства.

- Соответствие $f \mapsto u^f$ непрерывно из $L_2(\Gamma \times [0, T])$ в $C([0, T]; L_2(\Omega))$ [90], [91]. Поэтому оно расширяется по непрерывности с гладкого линейала \mathcal{M}^T на все $L_2(\Gamma \times [0, T])$. Образы при действии расширения суть обобщенные решения u^f задачи (1.10)–(1.12) для $f \in L_2(\Gamma \times [0, T])$.

- Пусть $f \in L_2(\Gamma \times [0, T])$ таково, что $u^f(\cdot, T) = 0$ в ω . Образует функцию

$$U(x, t) := \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ u^f(x, t), & 0 \leq t < T, \\ -u^f(x, 2T - t), & T \leq t < 2T, \\ 0, & 2T \leq t < \infty. \end{cases}$$

Можно показать, что она является решением уравнения

$$U_{tt} - \Delta U = -2u^f(\cdot, T)\delta'(t - T) \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_t,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. При этом, поскольку $\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \overline{\Omega^T}$, имеем

$$U = 0 \quad \text{в } \Omega_{\perp}^T \times \mathbb{R}_t. \quad (1.21)$$

- Применяя преобразование Фурье по времени, для образа \tilde{U} получаем

$$p^2 \tilde{U}(\cdot, p) + \Delta \tilde{U}(\cdot, p) = 2ip e^{-ipT} u^f(\cdot, T) \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_p.$$

При этом $\tilde{U}(\cdot, p)|_{\Omega_{\perp}^T} = 0$ для всех p в силу (1.21).

- Как видно, $\tilde{U}(\cdot, p)$ есть решение однородного эллиптического уравнения $p^2 \tilde{U}(\cdot, p) + \Delta \tilde{U}(\cdot, p) = 0$ вне носителя $u^f(\cdot, T)$ и, в частности, на открытом множестве ω . Последнее содержит открытое подмножество Ω_{\perp}^T , на котором $\tilde{U}(\cdot, p) = 0$. По теореме единственности Е. М. Ландиса заключаем, что при всех p равенство $\tilde{U}(\cdot, p) = 0$ выполнено всюду в ω и, в частности, в окрестности края Γ .

- Возвращаясь к Фурье-преобразованиям, получаем, что $U(\cdot, t) = 0$ в окрестности края при всех t . Отсюда и из определения U следует, что $f = u^f|_{\Gamma \times [0, T]} = 0$. Из последнего имеем $u^f = 0$, что и доказывает предложение.

1.2.3. *Полнота.* Вернемся к задаче I^T . Линеал гладких управлений, действующих с σ , обозначим через \mathcal{M}_{σ}^T :

$$\mathcal{M}_{\sigma}^T := \{f \in \mathcal{M}^T \mid \text{supp } f \subset \sigma \times (0, T]\};$$

при $f \in \mathcal{M}_{\sigma}^T$ выполнено (1.14). Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть y есть гладкая в Ω функция и для всех $f \in \mathcal{M}_{\sigma}^T$ выполнено равенство $\int_{\Omega} y(x) u^f(x, t) dx = 0$. Тогда $y = 0$ всюду в $\Omega^t[\sigma]$.

Это свойство играет ключевую роль в ВС-методе [18], [28]. О нем говорят как о полноте волн в областях, которые они заполняют (*локальной полноте*). В отличие от общеизвестного соотношения (1.14), которое выводится из достаточно простых энергетических оценок (см., например, [83]), доказательство полноты отнюдь не просто. Оно базируется на фундаментальном результате теории гиперболических уравнений – *теореме Хольмгрена-Йона-Татару* [106] о единственности продолжения решения через нехарактеристическую поверхность. До выхода в 1993 г. препринта работы Д. Татару этот результат был известен лишь для уравнений с аналитическими коэффициентами, а ВС-метод вынужденно позиционировался как подход, пригодный для систем, в которых полнота волн имеет место. Подробности можно найти в [18], [38].

Отметим еще прямую связь полноты волн с известным в физике правилом Гюйгенса построения волнового фронта по огибающим [15]. Полнота позволяет установить соотношение

$$\bigcup_{f \in \mathcal{M}_{\sigma}^T} \text{supp } u^f(\cdot, t) = \Omega^t[\sigma], \quad t > 0, \quad (1.22)$$

усиливающее вложение (1.14). Из него следует, что волны распространяются со скоростью, не меньшей 1.

1.2.4. *Определяющее свойство.* Как решения задачи I_*^T , волны u^f вполне определяются частью Ω^T многообразия Ω . Обратное тоже верно в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\tilde{\Omega}^T$ есть множество, связанное с Ω^T биекцией $b: \Omega^T \rightarrow \tilde{\Omega}^T$, и пусть задано отображение $f \mapsto \tilde{u}^f(\cdot, T) := u^f(b^{-1}(\cdot), T)$ из \mathcal{M}^T в множество функций на $\tilde{\Omega}^T$. Тогда на $\tilde{\Omega}^T$ существует единственная риманова структура такая, что b оказывается изометрией римановых многообразий.

Функции $\tilde{u}^f(\cdot, T)$ суть пересаженные на $\tilde{\Omega}^T$ волны. Имеются различные способы определить по ним требуемую риманову структуру [47], [18], [39]. Наметим один из них.

- В силу первого из соотношений (1.13) и равенства (1.22) имеем:

$$\Omega^s[\sigma] = \bigcup_{f \in \mathcal{M}_\sigma^T} \text{supp } u^{D_{T-s}^T f}(\cdot, T).$$

Отсюда находим

$$\tilde{\Omega}^s[\sigma] := b(\Omega^s[\sigma]) = \bigcup_{f \in \mathcal{M}_\sigma^T} \text{supp } \tilde{u}^{D_{T-s}^T f}(\cdot, T), \quad 0 < s \leq T.$$

- Для эйконала τ_σ имеем представление

$$\tau_\sigma(x) = \inf\{s > 0 \mid \Omega^s[\sigma] \ni x\}.$$

Как следствие, его копию $\tilde{\tau}_\sigma(\cdot) := \tau_\sigma(b^{-1}(\cdot))$ можно идентифицировать в $\tilde{\Omega}^T$ по представлению $\tilde{\tau}_\sigma(\tilde{x}) = \inf\{s > 0 \mid \tilde{\Omega}^s[\sigma] \ni \tilde{x}\}$.

- Копии $\tilde{\tau}_\sigma$, $\sigma \in \Gamma$, определяют риманову структуру на $\tilde{\Omega}^T$ по схеме п. 1.1.5.

Извлечение геометрии из картины волн – “фирменный прием” ВС-метода, используемый во всех его вариантах [32], [31], [39].

1.3. Динамика.

1.3.1. *Система α^T .* Задаче (1.15)–(1.17) поставим в соответствие динамическую систему. Обозначим ее через α^T и снабдим стандартными атрибутами теории управления – пространствами и операторами.

- Пространство управлений (входов) $\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0, T])$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \int_{\Omega} fg \, d\Gamma \, dt$$

называется *внешним*. Класс гладких управлений \mathcal{M}^T плотен в \mathcal{F}^T .

- Волны (состояния системы) $u^f(\cdot, t)$ суть элементы пространства $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, зависящие от времени. В силу (1.14) они входят в подпространство $\mathcal{H}^T := \mathcal{H}\langle \Omega^T \rangle$ – *внутреннее пространство* системы α^T .

- Соответствие “вход–состояние” реализуется *оператором управления*

$$W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^T, \quad \text{Dom } W^T = \mathcal{M}^T,$$

действующим по правилу

$$W^T f := u^f(\cdot, T).$$

Специфика акустической системы состоит в том, что оператор W^T является ограниченным [90].

При $T < T_*$ оператор управления инъективен: $\text{Ker } W^T = \{0\}$. Для доказательства достаточно в предложении 4 взять $\omega = \Omega^T$.

- Отображение “вход–выход” реализуется *оператором реакции*

$$R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T, \quad \text{Dom } R^T = \mathcal{M}^T,$$

действующим по правилу

$$R^T f := u_\nu^f|_{\Gamma \times [0, T]},$$

где $(\cdot)_\nu$ есть производная по внешней нормали. В отличие от оператора управления он не является ограниченным.

С задачей (1.18)–(1.20) связан *расширенный оператор реакции*

$$R_*^{2T} f := u_\nu^f|_{\Gamma \times [0, 2T]},$$

действующий в \mathcal{F}^{2T} на гладком линейале \mathcal{M}^{2T} . Вместе с решением u^f оператор R_*^{2T} вполне определяется частью многообразия Ω^T , что и делает его атрибутом системы α^T .³ Он имеет абстрактный аналог, не предполагающий гиперболичности системы [19].

- *Связывающий оператор* $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ вводится определением

$$C^T := (W^T)^* W^T. \quad (1.23)$$

Из определения следует, что

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^T} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}^T}, \quad (1.24)$$

т.е. C^T связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. При $T < T_*$ по инъективности W^T имеем $\text{Ker } C^T = \{0\}$.

Центральную роль в ВС-методе играет следующий факт: связывающий оператор явно и просто выражается через оператор реакции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Справедливо представление*

$$C^T = 2^{-1}(S^T)^* R_*^{2T} J^{2T} S^T, \quad (1.25)$$

в котором $S^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ есть продолжение управлений по времени t с $\Gamma \times [0, T]$ на $\Gamma \times [0, 2T]$ по нечетности относительно $t = T$, а $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ –

интегрирование: $(J^{2T} f)(\cdot, t) = \int_0^t f(\cdot, s) ds$.

³Как нетрудно видеть, в силу конечности области влияния оператор R_*^{2T} совпадает с (нерасширенным) оператором реакции R^{2T} системы α^{2T} . Однако последняя в наших рассуждениях никак не участвует и методически правильно эти операторы различать [19]. Также отметим простой факт, следующий из определений и соотношений (1.13): оператор R_*^{2T} определяет операторы R^s при всех $s \leq 2T$.

Опуская вывод (см. [18], [38]), приведем соотношение, на котором он основан. Для управлений $f, g \in \mathcal{M}^T$ и отвечающих им волн u^f, u^g имеем:

$$\begin{aligned}
[\partial_t^2 - \partial_s^2](u^f(\cdot, s), u^g(\cdot, t))_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} [u^f(x, s)u_{tt}^g(x, t) - u_{ss}^f(x, s)u^g(x, t)] dx \\
&= \int_{\Omega} [u^f(x, s)\Delta u^g(x, t) - \Delta u^f(x, s)u^g(x, t)] dx \\
&= \int_{\Gamma} [u^f(\gamma, s)u_{\nu}^g(\gamma, t) - u_{\nu}^f(\gamma, s)u^g(\gamma, t)] d\Gamma \\
&\stackrel{(1.17)}{=} \int_{\Gamma} [f(\gamma, s)(R^T g)(\gamma, t) - (R^T f)(\gamma, s)g(\gamma, t)] d\Gamma \\
&=: F(s, t).
\end{aligned}$$

Как видно, скалярное произведение волн $w = (u^f, u^g)_{\mathcal{H}}$ удовлетворяет уравнению однородной струны $\square w = F$ с правой частью, определяемой данными обратной задачи – оператором реакции. Этот факт был обнаружен А. С. Благовещенским; он сыграл ключевую роль в решении обратной задачи с динамическими граничными данными. Последующее интегрирование уравнения струны по Даламберу и привело к (1.25).

Представление (1.25) открывает замечательную возможность: внешний наблюдатель, располагающий оператором R_*^{2T} в результате измерений на крае, может по заданным управлениям находить скалярные произведения невидимых ему волн.

Добавим в заключение, что оператор R_*^{2T} выражается через операторы R^T и C^T явной формулой [19].

- В еще одном важном случае внутреннее скалярное произведение выражается через граничные данные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $a \in \mathcal{H}^T$ – гармоническая в Ω^T функция, гладкая вплоть до края, и $f \in \mathcal{M}^T$. Справедливо равенство

$$(a, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}} = ((R^T)^*[\varkappa^T a|_{\Gamma}] - [\varkappa^T a_{\nu}|_{\Gamma}], f)_{\mathcal{F}^T}, \quad (1.26)$$

в котором $\varkappa^T(\gamma, t) := T - t$.

Приведем вывод:

$$\begin{aligned}
(a, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega^T} a(x)u^f(x, T) dx \stackrel{(1.11)}{=} \int_{\Omega^T} dx a(x) \int_0^T (T-t)u_{tt}^f(x, t) dt \\
&= \int_{\Omega^T} dx a(x) \int_0^T (T-t)\Delta u^f(x, t) dt \\
&= \int_0^T dt (T-t) \int_{\Omega^T} a(x)\Delta u^f(x, t) dx \\
&= \int_0^T dt (T-t) \int_{\Gamma} [a(\gamma)u_{\nu}^f(\gamma, t) - a_{\nu}(\gamma)u^f(\gamma, t)] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma \times [0, T]} [(T-t)a(\gamma)(R^T f)(\gamma, t) - (T-t)a_{\nu}(\gamma)f(\gamma, t)] d\Gamma dt \\
&= ((R^T)^*[\varkappa^T a|_{\Gamma}] - \varkappa^T a_{\nu}|_{\Gamma}, f)_{\mathcal{F}^T}.
\end{aligned}$$

При интегрировании по частям интеграл по границе Γ^T исчезает, так как волна $u^f(\cdot, t)$ аннулируется в ее окрестности.

В частном случае, когда $a(\cdot) \equiv 1$ в Ω^T , из (1.26) имеем

$$(1, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}} = ((R^T)^*[\varkappa^T 1], f)_{\mathcal{F}^T}. \quad (1.27)$$

1.3.2. *Управляемость.* Внешнее пространство содержит подпространства

$$\mathcal{F}_\sigma^{T,s} := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subseteq \bar{\sigma} \times [T-s, T]\}, \quad 0 < s \leq T,$$

образованные управлениями, действующими с σ с запаздыванием $T-s$ (s есть время действия). Упрощая обозначения, примем $\mathcal{F}^{T,s} := \mathcal{F}_\Gamma^{T,s}$.

Запаздывающие подпространства содержат плотные гладкие линейалы

$$\mathcal{M}_\sigma^{T,s} := \mathcal{M}^T \cap \mathcal{F}_\sigma^{T,s}.$$

• Множество волн

$$\mathcal{U}_\sigma^s := \{u^f(\cdot, s) \mid f \in \mathcal{M}_\sigma^T\} \stackrel{(1.13)}{=} \{u^f(\cdot, T) \mid f \in \mathcal{M}_\sigma^{T,s}\} = W^T \mathcal{M}_\sigma^{T,s} \quad (1.28)$$

называется *достижимым* (с части границы σ , к моменту $t = s$); ниже для краткости обозначаем $\mathcal{U}_\Gamma^s =: \mathcal{U}^s$.

Из (1.14) следует вложение $\mathcal{U}_\sigma^s \subset \mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma]\rangle$. Для дальнейшего принципиально важен его характер. В силу предложения 5 оно оказывается плотным, так что выполнено равенство

$$\overline{\mathcal{U}_\sigma^s} = \mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma]\rangle, \quad s > 0 \quad (1.29)$$

(замыкание берется в \mathcal{H}). В теории управления это равенство интерпретируется как *приближенная локальная граничная управляемость* системы α^T . Оно показывает, что достижимые множества достаточно богаты: любую функцию с носителем в $\Omega^s[\sigma]$ можно аппроксимировать (в \mathcal{H} -метрике) волной $u^f(\cdot, T)$ при надлежащем выборе управления f .

Для обратных задач управляемость есть факт позитивного характера. Согласно общим принципам теории систем [87], чем богаче множество состояний, которые внешний наблюдатель может создать в системе, тем разнообразней информация о ее внутренних свойствах, которую он может извлечь из отображения “вход–выход”.

• Задача граничного управления (ЗГУ) для системы α^T состоит в следующем. По заданному $y \in \mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma]\rangle$ требуется найти управление f , действующее с σ и обеспечивающее равенство $u^f(\cdot, T) = y$. Другими словами, ставится вопрос: можно ли создавать волны требуемой формы, манипулируя граничными источниками?⁴ Результат (1.29) показывает, что ЗГУ разрешима для плотного множества целевых функций y .

Заметим, что при $T < T_*$ равенство (1.29) становится неверным без замыкания: $\mathcal{U}_\sigma^T \neq \mathcal{H}\langle\Omega^T[\sigma]\rangle$. В самом деле, если $\omega \subset \Omega$ – множество единственности,

⁴В зарубежных работах по теории управления эта задача имеет выразительное название “wave shaping problem”.

описанное в предложении 4, а $\text{supp } y \subset \Omega^T \setminus \omega$, то уравнение $u^f(\cdot, T) = y$ заведомо не разрешимо. В то же время на компактных Ω , удовлетворяющих определенным условиям на геометрию, ЗГУ становится разрешимой при достаточно больших T [10], [9]. В этом случае говорят о *точной* или *полной* управляемости системы.

Отсутствие точной управляемости при $T < T_*$ означает, что оператор управления W^T не является изоморфизмом. Как следствие, оператор C^T тоже не изоморфизм и обратный к нему оператор $[C^T]^{-1}$ оказывается неограниченным.

Опыт, накопленный в ВС-методе, подводит к следующему тезису философского плана: решить обратную задачу фактически означает решить адекватную ЗГУ, т. е. обратить оператор управления W^T .⁵ Последнее равносильно обращению соответствующего связывающего оператора. Описанные выше проблемы с обратимостью C^T типичны для многомерных задач и являются глубинной причиной их некорректности.

• Следствием управляемости является существование *волновых базисов* – основного инструмента численной реализации ВС-метода [45], [46], [86].

Выберем $T > 0$ и $0 < s \leq T$. В подпространстве $\mathcal{F}_\sigma^{T,s}$ выберем полную линейно независимую систему управлений $\{f_j^{\sigma,s}\}_{j=1}^\infty$. В силу равенства (1.29) волны $\{u^{f_j^{\sigma,s}}(\cdot, T)\}_{j=1}^\infty$ образуют полную систему в подпространстве $\mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma]\rangle$.

Проводя ортогонализацию по билинейной форме $(C^T f', f'')_{\mathcal{F}_T}$, построим систему $\{g_k^{\sigma,s}\}_{k=1}^\infty$, полную в $\mathcal{F}_\sigma^{T,s}$ и такую, что $(C^T g_k^{\sigma,s}, g_l^{\sigma,s})_{\mathcal{F}_T} = \delta_{kl}$. Соответствующая система волн

$$\{u_k^{\sigma,s}(\cdot, T)\}_{k=1}^\infty, \quad u_k^{\sigma,s} := W^T g_k^{\sigma,s},$$

полна в $\mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma]\rangle$ и такова, что

$$(u_k^{\sigma,s}(\cdot, T), u_l^{\sigma,s}(\cdot, T))_{\mathcal{H}} \stackrel{(1.24)}{=} (C^T g_k^{\sigma,s}, g_l^{\sigma,s})_{\mathcal{F}_T} = \delta_{kl}. \quad (1.30)$$

Другими словами, $\{u_k^{\sigma,s}(\cdot, T)\}_{k=1}^\infty$ есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma]\rangle$. Такие базисы мы называем *волновыми*.

Система управлений, порождающая волновой базис, доступна внешнему наблюдателю: имея оператор R_*^{2T} , он может определить C^T по (1.25) и, выполнив описанные выше построения, получить $\{g_k^{\sigma,s}\}_{k=1}^\infty$.

• Пусть P_σ^s есть проектор в \mathcal{H} на достижимое подпространство $\overline{\mathcal{U}_\sigma^s}$; обозначим $P_\Gamma^s =: P^s$. Такие проекторы мы называем *волновыми*. Используя волновой базис, имеем представление

$$P_\sigma^s = \sum_{k=1}^\infty (\cdot, u_k^{\sigma,s}(\cdot, T))_{\mathcal{H}} u_k^{\sigma,s}(\cdot, T). \quad (1.31)$$

Действуя волновым проектором на волны и гармонические функции, получаем:

$$\begin{aligned} P_\sigma^s u^f(\cdot, T) &\stackrel{(1.24)}{=} \sum_{k=1}^\infty (C^T f, g_k^{\sigma,s})_{\mathcal{F}_T} u_k^{\sigma,s}(\cdot, T), \\ P_\sigma^s 1 &\stackrel{(1.27)}{=} \sum_{k=1}^\infty ((R^T)^* [\mathcal{L}^T 1], g_k^{\sigma,s})_{\mathcal{F}_T} u_k^{\sigma,s}(\cdot, T). \end{aligned} \quad (1.32)$$

⁵О прямой связи обратных задач с ЗГУ см. [51].

1.3.3. *Меры Дирака в волновом представлении.* Напомним, что $X\langle A \rangle$ есть проектор в \mathcal{H} на $\mathcal{H}\langle A \rangle$, срезающий функции на множество $A \subset \Omega$. Обозначим для краткости

$$X_\sigma^s := X\langle \Omega^s[\sigma] \rangle, \quad X^s := X\langle \Omega^s \rangle.$$

Равенство

$$P_\sigma^s = X_\sigma^s \tag{1.33}$$

является формой записи соотношения (1.29). Представление (1.8) записывается в виде

$$X\langle \omega_{\gamma,\varepsilon}^s \rangle = P_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [P^s - P^{s-\varepsilon}]. \tag{1.34}$$

С учетом последнего представление (1.9) преобразуется к виду

$$\langle \delta_{x(\gamma,s)}, y \rangle = y(x(\gamma, s)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(P_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [P^s - P^{s-\varepsilon}] y, 1)_{\mathcal{H}}}{(P_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [P^s - P^{s-\varepsilon}] 1, 1)_{\mathcal{H}}}. \tag{1.35}$$

В дальнейшем внешний наблюдатель сможет находить этот предел благодаря тому, что правая часть выражена в “волновых” терминах.

1.4. Реконструкция в АТ. Вариант 1: лунки. Как отмечалось, оператор реакции R_*^{2T} вполне определяется областью Ω^T – частью многообразия, захваченной волнами к финальному моменту $t = T$. Спрашивается, в какой мере она сама определяется этим оператором и, если определяется, как восстановить Ω^T по R_*^{2T} . Как разъяснялось во введении, “восстановить” означает построить по R_*^{2T} риманово многообразие (*копию*) $\tilde{\Omega}^T$ с краем $\tilde{\Gamma} = \Gamma$, имеющее оператор реакции $\tilde{R}_*^{2T} = R_*^{2T}$.

Принятая постановка *оптимальна по времени* в следующем смысле. В силу конечности скорости волн оператор $R_*^{2(T-\varepsilon)}$ не содержит информации о слое $\Omega^T \setminus \Omega^{T-\varepsilon}$: волны не успевают доставить ее на край в интервале наблюдений $0 \leq t \leq T$. Значит, восстановить Ω^T по $R_*^{2(T-\varepsilon)}$ в принципе невозможно. В то же время информация, содержащаяся в $R_*^{2(T+\varepsilon)}$, для поставленной задачи оказывается избыточной.⁶

Реконструкция проводится в несколько шагов; на каждом из них наблюдатель получает в распоряжение объекты, определяемые оператором R_*^{2T} . Очередной объект объявляется доступным и используется в дальнейших построениях. В конце концов доступной окажется копия $\tilde{\Omega}^T$ многообразия Ω^T ; она и решит задачу.

Всюду ниже $T > 0$ выбрано произвольно и фиксировано; оператор R_*^{2T} задан.

1.4.1. *Модель.* Первый шаг реконструкции – построение *модели*.

Пусть

$$W^T = U^T |W^T|, \quad |W^T| := [(W^T)^* W^T]^{1/2} \stackrel{(1.23)}{=} [C^T]^{1/2}, \tag{1.36}$$

⁶Таким образом, большему времени наблюдения отвечает большая глубина восстановления, что важно в ряде приложений, например в геофизике (сейсмике). О процедурах, обладающих этим свойством, говорят, что они восстанавливают параметры в реальном времени. Такие процедуры для многомерных обратных задач – одно из главных достижений ВС-метода [18], [38], [28].

есть полярное разложение оператора управления; в нем $U^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^T$ есть изометрия $\text{Ran } |W^T|$ на $\text{Ran } W^T$ (см., например, [64]). Образ

$$\text{Ran } U^T = \text{Ran } W^T = \mathcal{U}^T$$

есть множество, достижимое с края: см. (1.28).

Подпространство

$$\widetilde{\mathcal{H}}^T := \overline{|W^T| \mathcal{M}^T} \subset \mathcal{F}^T$$

назовем модельным внутренним пространством системы α^T , а оператор

$$\widetilde{W}^T := |W^T| = (U^T)^* W^T$$

– модельным оператором управления. Условимся объекты пространства \mathcal{H}^T называть *оригиналами*, а двойственные им через изометрию U^T объекты в $\widetilde{\mathcal{H}}^T$ называть их *копиями*. Так, элементы вида

$$\tilde{u}^f(T) = (U^T)^* u^f(\cdot, T) = \widetilde{W}^T f$$

суть копии волн, $\widetilde{\mathcal{U}}_\sigma^s = (U^T)^* \mathcal{U}_\sigma^s$ – копии достижимых множеств и т. д.

Множество \mathcal{U}^T плотно в \mathcal{H}^T (управляемость!), а множество $\widetilde{\mathcal{U}}^T$ плотно в $\widetilde{\mathcal{H}}^T$ по определению. Поэтому изометрия U^T расширяется по непрерывности до унитарного оператора из $\widetilde{\mathcal{H}}^T$ на \mathcal{H}^T ; в дальнейшем за расширением сохраняем обозначение U^T .

Модель – промежуточный, но важный объект, используемый во всех вариантах ВС-метода.

1.4.2. *Базисы и проекторы.* На втором шаге наблюдатель создает копии волновых базисов и по ним образует копии волновых проекторов.

Выберем $\gamma \in \Gamma$, $0 < s < T$ и малое $\varepsilon > 0$; напомним, что $\sigma_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma$ есть диск с центром в γ радиуса ε .

В подпространствах $\mathcal{F}^{T,s}$, $\mathcal{F}^{T,s-\varepsilon}$ и $\mathcal{F}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^{T,s}$ выберем C^T -ортонормированные системы управлений $\{g_k^s\}_{k=1}^\infty$, $\{g_k^{s-\varepsilon}\}_{k=1}^\infty$ и $\{g_k^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\}_{k=1}^\infty$, порождающие волновые базисы в \mathcal{H}^s , $\mathcal{H}^{s-\varepsilon}$ и $\mathcal{H}\langle \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \rangle$ соответственно (см. (1.30)). Действуя на них оператором \widetilde{W}^T , в модельном внутреннем пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}^T$ найдем системы $\{\tilde{u}_k^s\}_{k=1}^\infty$, $\{\tilde{u}_k^{s-\varepsilon}\}_{k=1}^\infty$ и $\{\tilde{u}_k^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\}_{k=1}^\infty$ – копии соответствующих волновых базисов.

По базисам образуем проектор

$$\tilde{P}^s = (U^T)^* P^s U^T \stackrel{(1.31)}{=} \sum_{k=1}^\infty (\cdot, \tilde{u}_k^s)_{\widetilde{\mathcal{H}}^T} \tilde{u}_k^s \quad (1.37)$$

и, аналогично, проекторы $\tilde{P}^{s-\varepsilon}$ и $\tilde{P}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s$ – копии $P^{s-\varepsilon}$ и $P_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s$. Затем, по построению и представлению (1.34), получаем

$$\tilde{X}\langle \omega_{\gamma,\varepsilon}^s \rangle := (U^T)^* X\langle \omega_{\gamma,\varepsilon}^s \rangle U^T = \tilde{P}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [\tilde{P}^s - \tilde{P}^{s-\varepsilon}]$$

– копию проектора, срезающего функции на лунку $\omega_{\gamma,\varepsilon}^s$. Соответственно, подпространство

$$\widetilde{\mathcal{H}}\langle \omega_{\gamma,\varepsilon}^s \rangle := \tilde{X}\langle \omega_{\gamma,\varepsilon}^s \rangle \widetilde{\mathcal{H}}^T = (U^T)^* \mathcal{H}\langle \omega_{\gamma,\varepsilon}^s \rangle$$

модельного пространства $\widetilde{\mathcal{H}}^T$ есть копия h -лунки.

Подпространство $\widetilde{\mathcal{H}}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle$ естественно назвать \tilde{h} -лункой. Она доступна наблюдателю: саму лунку $\omega_{\gamma,\varepsilon}^s$ он не видит, но кодирующий ее объект – \tilde{h} -лунку – может извлечь из данных обратной задачи.

1.4.3. *Выкройка.* Далее находятся \tilde{h} -лунки для разных $\gamma \in \Gamma, s \leq T$ и контролируется их поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$. По предложению 3 либо $\widetilde{\mathcal{H}}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle \neq \{0\}$ при всех $\varepsilon > 0$ и тогда $s \leq \tau_*(\gamma)$ (т.е. $(\gamma, s) \in \overline{\Theta}$), либо найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\widetilde{\mathcal{H}}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle = \{0\}$ при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ и тогда $s > \tau_*(\gamma)$ (т.е. $(\gamma, s) \notin \overline{\Theta}$). Отобразив пары $(\gamma, s) \in \overline{\Theta}$, наблюдатель получает множество $\overline{\Theta}^T$ – часть выкройки, отвечающую области Ω^T , захваченной волнами.

1.4.4. *Функционалы $\tilde{\delta}$.* В пространстве \mathcal{F}^T выберем C^T -ортонормированную систему $\{g_k^T\}_{k=1}^\infty$, порождающую волновой базис в \mathcal{H}^T . Найдем его копию $\{\tilde{u}_k^T\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{H}}^T$.

Напомним, что $1 \in \mathcal{H}^T$ есть функция, равная 1 всюду в Ω^T ; элемент $\tilde{1} = (U^T)^*1$ – ее копия в $\widetilde{\mathcal{H}}^T$. В силу (1.37) и (1.32) имеем представление

$$\tilde{1} = \sum_{k=1}^{\infty} ((R^T)^*[\varkappa^T 1], g_k^T)_{\mathcal{F}^T} \tilde{u}_k^T, \quad (1.38)$$

по которому эта копия доступна наблюдателю.

Пусть $f \in \mathcal{M}^T$ – произвольное управление, $u^f(\cdot, T)$ – волна, а $\tilde{u}^f(T) = \widetilde{W}^T f$ – ее копия в $\widetilde{\mathcal{H}}^T$. В силу изометричности соответствия “оригинал-копия” имеем равенства

$$\begin{aligned} (P_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [P^s - P^{s-\varepsilon}] u^f(\cdot, T), 1)_{\mathcal{H}} &= (\tilde{P}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [\tilde{P}^s - \tilde{P}^{s-\varepsilon}] \tilde{u}^f(T), \tilde{1})_{\widetilde{\mathcal{H}}^T}, \\ (P_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [P^s - P^{s-\varepsilon}] 1, 1)_{\mathcal{H}} &= (\tilde{P}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [\tilde{P}^s - \tilde{P}^{s-\varepsilon}] \tilde{1}, \tilde{1})_{\widetilde{\mathcal{H}}^T}, \end{aligned}$$

правые части которых доступны наблюдателю.

Парам $(\gamma, s) \in \overline{\Theta}^T$ поставим в соответствие функционалы $\tilde{\delta}_{(\gamma,s)}$, действующие на линейале \mathcal{M}^T по правилу

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}_{(\gamma,s)}, f \rangle &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\tilde{P}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [\tilde{P}^s - \tilde{P}^{s-\varepsilon}] \tilde{u}^f(T), \tilde{1})_{\widetilde{\mathcal{H}}^T}}{(\tilde{P}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s [\tilde{P}^s - \tilde{P}^{s-\varepsilon}] \tilde{1}, \tilde{1})_{\widetilde{\mathcal{H}}^T}} \\ &\stackrel{(1.35)}{=} u^f(x(\gamma, s), T), \quad s > 0; \\ \tilde{\delta}_{(\gamma,0)} &:= \tilde{\delta}_{(\gamma,+0)}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

так что $\langle \tilde{\delta}_{(\gamma,0)}, f \rangle = f(\gamma, T)$ в силу $x(\gamma, 0) = \gamma$.

1.4.5. *Копия $\tilde{\Omega}^T$.* Множество $\tilde{\Omega}^T := \{\tilde{\delta}_{(\gamma,s)} \mid (\gamma, s) \in \overline{\Theta}^T, s < T\}$ по построению биективно области Ω^T и доступно наблюдателю по представлению (1.39). Его подмножество $\tilde{\Gamma} := \{\tilde{\delta}_{(\gamma,0)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ биективно краю по соответствию $\tilde{\Gamma} \ni \tilde{\delta}_{(\gamma,0)} \leftrightarrow \gamma \in \Gamma$.

На $\tilde{\Omega}^T$ определены и доступны “пересаженные волны”

$$\tilde{u}^f(\tilde{\delta}_{(\gamma,s)}, T) := \langle \tilde{\delta}_{(\gamma,s)}, f \rangle = u^f(x(\gamma, s), T).$$

В итоге наблюдатель имеет отображение $f \mapsto \tilde{u}^f(\cdot, T)$.⁷ Последнее, по определяющему свойству волн (предложение 6), задает метрику и риманову структуру, превращающую $\tilde{\Omega}^T$ в изометрическую копию многообразия Ω^T . Отождествляя края $\tilde{\Gamma}$ и Γ по упомянутому выше соответствию, наблюдатель получает копию недоступного ему оригинала Ω^T , удовлетворяющую условию $\tilde{R}_*^{2T} = \tilde{R}^{2T}$ по построению. *Реконструкция закончена.*

• В дополнение укажем еще один способ извлечения метрики из картины волн.

Почти весь оригинал Ω^T (за исключением множества раздела) покрывается полугеодезическими координатами (γ, τ) . С учетом (1.4) волновое уравнение (1.15) в пгк имеет вид

$$[g^{-1/2} \partial_\tau g^{1/2} \partial_\tau + g^{-1/2} \partial_{\gamma^k} g^{1/2} g^{kl} \partial_{\gamma^l}] u^f(x(\gamma, \tau), T) = u_{tt}^f(x(\gamma, \tau), T) \\ \stackrel{(1.13)}{=} u^{f_{tt}}(x(\gamma, \tau), T), \quad (\gamma, \tau) \in \Theta^T, \quad 0 < t < T.$$

Копии волн суть $\tilde{u}^f(\tilde{\delta}_{(\gamma, \tau)}, T) = u^f(x(\gamma, \tau), T)$, а их носитель – копия $\tilde{\Omega}^T$ – координатизирован теми же пгк. Как следствие, копии волн удовлетворяют уравнению

$$[g^{-1/2} \partial_\tau g^{1/2} \partial_\tau + g^{-1/2} \partial_{\gamma^k} g^{1/2} g^{kl} \partial_{\gamma^l}] \tilde{u}^f(\tilde{\delta}_{(\gamma, \tau)}, T) = \tilde{u}^{f_{tt}}(\tilde{\delta}_{(\gamma, \tau)}, T), \quad (1.40) \\ (\gamma, \tau) \in \Theta^T, \quad 0 < t < T.$$

Умея находить $\tilde{u}^f(\cdot, T)$ по f и составляя систему уравнений (1.40) для разных f , наблюдатель может определить из нее g_{kl} – компоненты метрического тензора в пгк, т.е. восстановить риманову структуру почти всюду на $\tilde{\Omega}^T$. Ее продолжение в точки, отвечающие множеству раздела, требует некоторой дополнительной работы: см., например, [47].

1.5. Реконструкция в АТ. Вариант 2: амплитудная формула. Вторым вариантом реконструкции в АТ использует формулы геометрической оптики, описывающие эволюцию разрывов волновых полей [8], [83], [107].

1.5.1. *Изображения.* Напомним, что β есть плотность риманова объема в пгк: см. (1.3). Пусть $y \in \mathcal{H}^T$; функцию на $\Sigma^T := \Gamma \times [0, T]$ вида

$$\tilde{y}(\gamma, \tau) := \begin{cases} \beta^{1/2}(\gamma, \tau) y(x(\gamma, \tau)), & (\gamma, \tau) \in \Theta^T, \\ 0, & (\gamma, \tau) \in \Sigma^T \setminus \Theta^T, \end{cases} \quad (1.41)$$

назовем *изображением* функции (оригинала) y .

Оператор изображения $I^T: \mathcal{H}^T \rightarrow L_2(\Sigma^T)$, $I^T y := \tilde{y}$, есть изометрия, поскольку

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega^T} u(x)v(x) dx \stackrel{(1.3)}{=} \int_{\Theta^T} u(x(\gamma, \tau))v(x(\gamma, \tau))\beta(\gamma, \tau) d\Gamma d\tau \\ = \int_{\Theta^T} \tilde{u}(\gamma, \tau)\tilde{v}(\gamma, \tau) d\Gamma d\tau = (I^T u, I^T v)_{L_2(\Sigma^T)}.$$

⁷Т.е. фактически наблюдатель видит волны u^f , локализованные в недоступной области! О такой возможности говорят как о *визуализации волн*.

Легко проверяются следующие факты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Справедливы соотношения*

$$(I^T)^* I^T = \mathbb{I}, \quad I^T (I^T)^* = X_{\Theta^T},$$

в которых \mathbb{I} – единичный оператор в \mathcal{H}^T , X_{Θ^T} – проектор в $L_2(\Sigma^T)$, срезающий функции на выкройку. Имеет место представление в пгк:

$$\tilde{\Delta} := I^T \Delta (I^T)^* = \partial_\tau^2 + \partial_{\gamma^k} g^{kl} \partial_{\gamma^l} + g^0, \quad (1.42)$$

где g^0 – гладкая функция.

Переходя в (1.15) от волн к изображениям, получаем уравнение

$$\tilde{u}_{tt}^f - \tilde{\Delta} \tilde{u}^f = 0 \quad \text{в } \Sigma^T \times (0, T), \quad (1.43)$$

описывающее эволюцию изображений.

1.5.2. *Задача II^T* . В пространственно-временной области

$$\mathcal{E}^T := \{(x, t) \mid x \in [\Omega^T \setminus \Gamma], \tau(x) < t < T\}$$

рассмотрим начально-краевую задачу II^T :

$$v_{tt} - \Delta v = 0 \quad \text{в } \mathcal{E}^T, \quad (1.44)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = y \quad \text{в } \Omega^T, \quad (1.45)$$

$$v|_{\Gamma \times [0, T]} = 0. \quad (1.46)$$

По принципу конечности области влияния (гиперболичности волнового уравнения) она корректна и при $y \in \mathcal{H}^T$ имеет единственное решение с конечной энергией $v = v^y(x, t)$. В работах [90], [91] установлена непрерывность соответствия $y \mapsto v_\nu^y|_{\Gamma \times [0, T]}$ в L_2 -нормах. Реализующий это соответствие оператор $O^T: \mathcal{H}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ называется *оператором наблюдения* системы α^T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Справедливо соотношение*

$$O^T = -Y^T (W^T)^*, \quad (1.47)$$

в котором $(Y^T f)(\cdot, t) := f(\cdot, T - t)$, $0 \leq t \leq T$.

Вывод сводится к интегрированию по частям [18]. В теории управления подобные равенства называют соотношениями двойственности “управление–наблюдение”.

1.5.3. *Амплитудная формула*. Выберем $s < T$, и пусть X^s есть проектор в \mathcal{H}^T , срезающий функции на подобласть Ω^s . Дополнительный проектор $X_\perp^s = \mathbb{I} - X^s$ срезает функции на $\Omega_\perp^s = \Omega^T \setminus \overline{\Omega^s}$. Напомним, что подмножества края $\sigma_\perp^s = \text{rg}[\Gamma^s \setminus c]$ введены в п. 1.1.

• Выберем начальные данные (1.45) специальным образом. Пусть y есть гладкая в Ω^T функция, а $y_\perp^s := X_\perp^s y$ – ее срезка на область Ω_\perp^s . В условиях (1.45) примем $v_t|_{t=0} = y_\perp^s$; соответствующее решение есть $v = v^{y_\perp^s}(x, t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{t \rightarrow s+0} v_{\nu}^{y_{\perp}^s}(\gamma, t) = \begin{cases} -\beta^{1/2}(\gamma, s)y(x(\gamma, s)), & \gamma \in \sigma_{+}^s, \\ 0, & \gamma \in \sigma_{-}^s. \end{cases} \quad (1.48)$$

Подобные формулы составляют предмет геометрической оптики для данного класса гиперболических задач; техника их вывода (*лучевой метод*) основана на конструкции (анзаце) Адамара [8], [107], [83]. Соотношение (1.48) извлекается, например, из результатов работы [48], в которой приведены подробный вывод и обоснование формул лучевого метода (см. также приложение в [38]). Здесь мы ограничимся соображениями, поясняющими его происхождение.

Начальное возмущение скорости y_{\perp}^s разрывно на Γ^s , причем разрыв отделен от края расстоянием s . Как следствие, при временах $t > 0$ волна $v_{\nu}^{y_{\perp}^s}$ имеет разрыв скорости, который распространяется вдоль пространственно-временных лучей, составляющих характеристическую поверхность $\{(x, t) \mid t = \text{dist}(x, \Gamma^s)\}$.⁸ При $t < s$ в силу отделенности возмущения от края имеем $v_{\nu}^{y_{\perp}^s} = 0$. В момент $t = s$ разрыв достигает освещенной части края σ_{+}^s и взаимодействует с ней. Амплитуда взаимодействия рассчитывается лучевым методом и дает верхнюю строку в (1.48). Нижняя строка – следствие неравенства в (1.2): в момент $t = s$ волна еще не достигает точек σ_{-}^s .

• Условия в первой и второй строках правой части (1.48) равносильны условиям $(\gamma, s) \in \Theta^T$ и $(\gamma, s) \in \Sigma^T \setminus \overline{\Theta^T}$ соответственно. С учетом определений операторов имеем:

$$v_{\nu}^{y_{\perp}^s} \Big|_{\Gamma \times [0, T]} = O^T X_{\perp}^s y \stackrel{(1.47)}{=} -Y^T (W^T)^* X_{\perp}^s y,$$

а самой формуле (1.48) можно придать следующий вид:

$$(I^T y)(\gamma, s) = \lim_{t \rightarrow s+0} (Y^T (W^T)^* X_{\perp}^s y)(\gamma, s+0), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T.$$

Используя управляемость (1.33), обозначая $P_{\perp}^s := \mathbb{I} - P_{\perp}^s$ и вспоминая, как действует Y^T , получаем *амплитудную формулу*

$$(I^T y)(\gamma, s) = \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((W^T)^* P_{\perp}^s y)(\gamma, t), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T. \quad (1.49)$$

Она связывает геометрию и динамику: определяемое геометрией изображение функции представлено в виде совокупности амплитуд волновых разрывов, прошедших через многообразие и зарегистрированных наблюдателем на крае.

• Выберем управление $f \in \mathcal{M}^T$ и подставим $y = u^f(\cdot, T) = W^T f$ в формулу (1.49). Амплитудная формула

$$\begin{aligned} \tilde{u}^f(\gamma, s; T) &:= (I^T u^f(\cdot, T))(\gamma, s) \\ &= \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((W^T)^* P_{\perp}^s W^T f)(\gamma, t), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T, \end{aligned} \quad (1.50)$$

играет ключевую роль в обратных задачах.

Если в (1.49) взять $y = 1$, получим

$$\tilde{\Gamma}(\gamma, s) = \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((W^T)^* P_{\perp}^s 1)(\gamma, t), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T. \quad (1.51)$$

⁸Это явление – распад разрыва – подробно исследовано в [107].

1.5.4. *Реконструкция.* Пусть заданы $T > 0$ и R_*^{2T} . Предположим, что уже построена модель $\tilde{\mathcal{H}}^T$, т. е. в распоряжении наблюдателя имеются копии волновых базисов, проекторы \tilde{P}^s (см. (1.37)), дополнительные проекторы $\tilde{P}_\perp^s = \mathbb{I} - \tilde{P}^s$ и элемент $\tilde{\mathbb{I}} \in \tilde{\mathcal{H}}^T$ (см. (1.38)). Далее, как и в варианте 1, обыгрывается изометричность соответствия “оригинал–копия”.

• Подставляя $W^T = U^T \tilde{W}^T$, $P_\perp^s = U^T \tilde{P}_\perp^s (U^T)^*$ и $1 = (U^T)^* \tilde{\mathbb{I}}$ в амплитудные формулы (1.50) и (1.51), получаем представления⁹

$$\begin{aligned} \tilde{u}^f(\gamma, s; T) &= \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((\tilde{W}^T)^* \tilde{P}_\perp^s \tilde{W}^T f)(\gamma, t), \\ \tilde{\mathbb{I}}(\gamma, s) &= \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((\tilde{W}^T)^* \tilde{P}_\perp^s \tilde{\mathbb{I}})(\gamma, t), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T, \end{aligned} \quad (1.52)$$

доступные наблюдателю. В них цилиндр Σ^T выполняет роль “экрана”, на котором наблюдатель визуализирует изображения невидимых ему волн. Более того, используя соотношение

$$\tilde{u}^f(\dots, t) \stackrel{(1.13)}{=} \tilde{u}^{D_{T-t}^T f}(\dots, T), \quad 0 < t \leq T,$$

наблюдатель имеет возможность видеть на экране весь волновой процесс. Остается извлечь геометрию из картины изображений.

• Поскольку плотность β положительна на выкройке Θ^T и

$$\tilde{\mathbb{I}}(\gamma, s) \stackrel{(1.41)}{=} \begin{cases} \beta^{1/2}(\gamma, \tau), & (\gamma, \tau) \in \Theta^T, \\ 0, & (\gamma, \tau) \in \Sigma^T \setminus \Theta^T, \end{cases}$$

из (1.52) определяются и выкройка и плотность на ней. Другая возможность – использовать представление

$$\overline{\Theta^T} = \overline{\bigcup_{f \in \mathcal{M}^T} \text{supp } \tilde{u}^f(\dots; T)}, \quad (1.53)$$

легко следующее из (1.22) с $\sigma = \Gamma$.

• Из (1.43) следуют равенства $\tilde{\Delta} \tilde{u}^f = \tilde{u}_{tt}^f \stackrel{(1.13)}{=} \tilde{u}^{f_{tt}}$. Из них получаем представление для графика оператора $\tilde{\Delta}$:

$$\text{graph } \tilde{\Delta} = \{ \{ \tilde{u}^f(\dots, T), \tilde{u}^{f_{tt}}(\dots, T) \} \mid f \in \mathcal{M}^T \}, \quad (1.54)$$

доступное наблюдателю вместе с изображениями волн.

График определяет коэффициенты g^{kl} , g^0 в (1.42). По ним наблюдатель находит g_{kl} и, тем самым, оснащает выкройку метрическим тензором, превращающим Θ^T в изометрическую копию многообразия $\Omega^T \setminus c$.

Выполняя склейку Θ^T по границе θ и продолжая метрический тензор на образовавшийся при склейке “шов”, наблюдатель получает копию $\tilde{\Omega}^T$, изометричную оригиналу Ω^T по построению.

Реконструкция выполнена.

⁹Во избежание конфликта обозначений напомним, что $\tilde{\mathbb{I}}(\dots)$ есть функция на Σ^T , а $\tilde{\mathbb{I}}$ – элемент модельного внутреннего пространства $\tilde{\mathcal{H}}^T$.

1.5.5. *Комментарии.* Приведем несколько замечаний и дополнений к вариантам 1 и 2.

- Возможность, которую доставляет амплитудная формула, в известной мере удивительна. Вспомним задачу АТ, описанную во введении. Пусть оболочка Ω есть полусфера с краем по экватору Γ , сотней ручек и полусотней вклеенных в нее листов Мёбиуса. Наблюдатель генерирует волны, идущие от границы; они постепенно заполняют оболочку, многократно отражаются от неоднородностей и рассеиваются на топологических препятствиях, порождая волны, возвращающиеся к Γ . Можно представить, насколько сложен этот процесс и сколь сложной оказывается картина волн. Тем не менее наблюдатель, не покидая границы и регистрируя возвращающиеся волны, может создать себе экран в виде выкройки и увидеть на нем весь процесс в реальном времени!

- Отметим еще одну опцию в варианте 2. В силу следующего из определения (1.41) равенства

$$u^f(x(\gamma, s), T) = \frac{\tilde{u}^f(\gamma, s; T)}{\tilde{1}(\gamma, s)}, \quad (\gamma, s) \in \Theta^T,$$

наблюдателю доступны не только изображения, но и сами волны, пересаженные на выкройку. Дальше он может сослаться на определяющее свойство волн (предложение 6) и объявить задачу решенной.

- Если распространение волн в Ω описывается уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0$$

с потенциалом q , можно поставить задачу о восстановлении Ω^T вместе с $q|_{\Omega^T}$. Она решается по той же схеме с использованием только первой амплитудной формулы в (1.52). Функция 1 не используется (и не может быть использована), но картина изображений волн достаточно богата, чтобы определить выкройку Θ^T по (1.53) и восстановить на ней и метрику, и потенциал (в пгк) из графика оператора

$$\tilde{\Delta} = \partial_\tau^2 + \partial_{\gamma^k} g^{kl} \partial_{\gamma^l} + g^0 - q.$$

- Визуализация волн по амплитудной формуле фактически производится оператором $I^T W^T: \mathcal{F}^T \rightarrow L_2(\Sigma^T)$. Отождествив “экран” Σ^T с пространственно-временным цилиндром $\Gamma \times [0, T]$, наблюдатель получает оператор

$$I^T W^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T,$$

действующий во внешнем пространстве. Вместе с ним наблюдателю доступен оператор $V^T := Y^T I^T W^T$, действующий в \mathcal{F}^T . Последний выделен свойством *треугольности*: из определения (1.41) и конечности скорости волн (1.14) легко усматривается вложение $V^T \mathcal{F}^{T,s} \subset \mathcal{F}^{T,s}$ при всех $0 < s \leq T$. В то же время в силу изометричности операторов I^T и Y^T имеем:

$$(V^T)^* V^T = (Y^T I^T W^T)^* Y^T I^T W^T = (W^T)^* W^T = C^T.$$

Таким образом, оператор V^T доставляет *треугольную факторизацию* оператора C^T относительно цепочки запаздывающих подпространств $\{\mathcal{F}^{T,s}\}_{0 < s \leq T}$.

В работах [54], [18] предложено представление V^T в виде операторного интеграла, обобщающего классическую конструкцию интеграла треугольного усечения [80].

- В наши дальнейшие планы входит разработка версии ВС-метода для трехмерной динамической задачи рассеяния для акустического уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0.$$

Наиболее подходящим представляется вариант, использующий амплитудную формулу и связь с треугольной факторизацией. В ходе исследования прямой задачи выяснилось новое обстоятельство: в соответствующей динамической системе возможна потеря управляемости (полноты волн). Ее следствием является интересный эффект: в системе появляются *возвращающиеся волны*, приходящие из бесконечности и уходящие на бесконечность по одной и той же траектории. Существование таких волн оказывается препятствием к факторизации данных рассеяния по Р. Ньютоу [59].

- Пусть Ω компактно, $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ суть собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= \lambda\varphi \quad \text{в } \Omega, \\ \varphi|_\Gamma &= 0, \end{aligned}$$

нормированные условием $(\varphi_i, \varphi_j)_{\mathcal{H}} = \delta_{ij}$. Набор $\mathcal{S}_\Omega := \{\lambda_i; \partial_\nu \varphi_i|_\Gamma\}_{i=1}^\infty$ называется спектральными данными (Дирихле) многообразия Ω . Обратная спектральная задача состоит в восстановлении Ω по \mathcal{S}_Ω (см. [49], [18]). Поскольку спектральные данные определяют оператор реакции R_*^{2T} для всех $T > 0$ (см. [23]), спектральная задача сводится к динамической. Обратное тоже верно: из R_*^{2T} извлекаются адекватные спектральные данные, отвечающие подобласти Ω^T (см. [23], [28]).

- Оба варианта реконструкции работоспособны, если данные известны лишь на части края [18], [21], [29]. В этом случае в динамической задаче предполагается известным оператор $R_*^{2T}|_{\mathcal{M}_\sigma^T}$, описывающий отклик системы на управления, действующие только с σ . В спектральной задаче задаются редуцированные спектральные данные $\mathcal{S}_\sigma := \{\lambda_i; \partial_\nu \varphi_i|_\sigma\}_{i=1}^\infty$. По таким данным восстанавливается “освещенная с σ ” часть многообразия – трубка

$$\{x(\gamma, s) \mid \gamma \in \sigma, 0 \leq s \leq \tau_{\text{фоc}}(\gamma)\},$$

где $\tau_{\text{фоc}}(\gamma)$ есть длина отрезка геодезической l_γ от ее основания γ до первой фокальной точки.

Восстановление параметров по динамическим данным на части границы особенно актуально в геофизике. Для этого случая наиболее подходит вариант 2, использующий амплитудную формулу. На его основе разработаны и протестированы численные алгоритмы, решающие двумерную обратную задачу определения скорости звука в неоднородной среде [46], [86].

- Модификация варианта, использующего лунки, предложена в работе [31] в качестве основы для разработки численного алгоритма. План эксперимента включает восстановление топологических особенностей многообразия. Мы надеемся, что когда-нибудь его удастся реализовать.

- Как отмечалось во введении, требование C^∞ -гладкости Ω является завышенным. Характер гладкости определяется двумя требованиями: надо, чтобы, во-первых, была справедлива теорема Татару [106], обеспечивающая локальную полноту волн, и, во-вторых, можно было оправдать вывод амплитудной формулы (1.48) лучевым методом. Для первого достаточно C^2 -гладкости, для второго – конечной гладкости, зависящей от размерности многообразия [48].

1.6. Реконструкция в АТ. Вариант 3: алгебры. В этой версии ВС-метода, как и в варианте 1, материалом для построения копии многообразия служат копии мер Дирака. Различие состоит в способе их извлечения из данных обратной задачи. Здесь наблюдатель по R_*^{2T} определяет адекватную алгебру и реализует ее по Гельфанду в виде алгебры функций на ее спектре. Точки спектра суть характеры алгебры $\tilde{\delta}$, биективные мерам δ_x . Спектр оснащается римановой структурой и в результате оказывается копией $\tilde{\Omega}^T$, решающей задачу.

1.6.1. *Геометризация.* Приводимые ниже минимальные сведения об алгебрах имеются, например, в [89]. Они относятся как к вещественным, так и к комплексным алгебрам, но последние появятся позже (см. раздел 2) в задаче ИТ.

- *Коммутативная банахова алгебра* (КБА) есть (вещественное или комплексное) банахово пространство с коммутативным умножением, удовлетворяющим неравенству $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$. Элемент $e \in \mathfrak{A}$ такой, что $ea = ae = a$, называется единицей, а алгебра с единицей называется унитарной. В дальнейшем унитарность предполагается.

Алгебра называется регулярной, если выполнено равенство $\|a^2\| = \|a\|^2$.

Пусть \mathcal{X} есть топологическое пространство. Пространство непрерывных функций $C(\mathcal{X})$ с поточечными линейными операциями и умножением, нормой $\|f\| = \sup_{\mathcal{X}} |f(\cdot)|$ и единицей $e(\cdot) \equiv 1$ есть регулярная унитарная КБА.

- Пусть \mathfrak{A} есть КБА, \mathfrak{A}' – сопряженное пространство. Элемент $\mu \in \mathfrak{A}'$ называется мультипликативным функционалом (или *характером*), если

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b).$$

Множество характеров $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$, снабженное *-слабой топологией из \mathfrak{A}' , называется *спектром* алгебры \mathfrak{A} . Спектр есть компактное хаусдорфово пространство. Спектры изометрически изоморфных алгебр канонически гомеоморфны.

- Пусть \mathfrak{A} есть КБА, $C(\mathcal{M}_{\mathfrak{A}})$ – алгебра непрерывных функций на ее спектре. Преобразование Гельфанда

$$\mathfrak{A} \ni a \xrightarrow{G} \tilde{a} \in C(\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}), \quad \tilde{a}(\mu) := \mu(a), \quad (1.55)$$

реализует элементы алгебры в виде функций на спектре. О переходе от \mathfrak{A} к $C(\mathcal{M}_{\mathfrak{A}})$ говорят как о *геометризации* этой алгебры. Если \mathfrak{A} – регулярная КБА, то преобразование Гельфанда есть изометрия \mathfrak{A} на образ $G\mathfrak{A}$.

• Пусть \mathcal{X} есть топологическое пространство, $C(\mathcal{X})$ – алгебра непрерывных функций. Меры Дирака $\delta_x \in C'(\mathcal{X})$, $\delta_x(f) = f(x)$, очевидно, входят в ее спектр. Если, кроме того, \mathcal{X} компактно и хаусдорфово, то меры Дирака исчерпывают его: $\mathcal{M}_{C(\mathcal{X})} = \{\delta_x \mid x \in \mathcal{X}\}$. В силу этого алгебра $C(\mathcal{X})$ и ее геометризация $C(\mathcal{M}_{C(\mathcal{X})})$ фактически тождественны: преобразование Гельфанда сводится к пересадке функций с \mathcal{X} на $\mathcal{M}_{C(\mathcal{X})}$ по биекции (гомеоморфизму) $x \xrightarrow{\beta} \delta_x$, т. е. $\tilde{f}(\cdot) = f(\beta^{-1}(\cdot))$.

Этот факт иллюстрирует один из центральных тезисов некоммутативной геометрии: топологическое пространство характеризуется (кодируется) адекватной алгеброй. Если об алгебре \mathfrak{A} известно, что она изометрична алгебре $C(\mathcal{X})$ (но само \mathcal{X} неизвестно!), то, определив ее спектр $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$, мы получим гомеоморфную копию пространства \mathcal{X} и, в этом смысле, восстановим \mathcal{X} по \mathfrak{A} .

По этой схеме будет решена задача АТ: по R_*^{2T} наблюдатель определит адекватную изометрическую копию $\tilde{\mathfrak{E}}$ алгебры $C(\Omega)$, найдет ее спектр $\mathcal{M}_{\tilde{\mathfrak{E}}} =: \tilde{\Omega}$ и тем самым получит гомеоморфную копию подлежащего реконструкции оригинала Ω .

1.6.2. *Алгебра эйконалов.* Наложим два дополнительных условия:

- (а) многообразие Ω компактно, так что $\text{diam } \Omega < \infty$;
- (б) время наблюдения достаточно велико: $T > \text{diam } \Omega$, так что

$$\Omega^s[\sigma] = \Omega \quad \text{при } s > T \text{ для любого } \sigma \subset \Gamma.$$

Эти условия позволяют упростить изложение, но не являются необходимыми и легко обходятся в общем случае.

• Напомним определение эйконала:

$$\tau_\sigma(x) := \text{dist}(x, \sigma).$$

Пусть \mathcal{O} есть семейство открытых подмножеств края Γ . Следующие свойства легко выводятся из общих свойств расстояния:

- 1) эйконалы суть непрерывные функции: $\tau_\sigma \in C(\Omega)$;
- 2) эйконалы разделяют точки: для любых различных $x', x'' \in \Omega$ найдутся такие $\sigma', \sigma'' \in \mathcal{O}$, что $\tau_{\sigma'}(x') \neq \tau_{\sigma''}(x'')$;
- 3) в Ω нет точек, в которых все τ_σ одновременно обращаются в 0;
- 4) семейство эйконалов $\{\tau_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\}$ определяет риманову структуру в Ω (см. п. 1.1.4).

• Пусть \mathfrak{A} есть банахова алгебра и $S \subset \mathfrak{A}$ – подмножество. Через $\vee S$ обозначим минимальную замкнутую (под)алгебру в \mathfrak{A} , содержащую S . Алгебру

$$\mathfrak{E}(\Omega) := \vee\{\tau_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\} \subset C(\Omega)$$

назовем *алгеброй эйконалов*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Справедливо соотношение $\mathfrak{E}(\Omega) = C(\Omega)$.*

Этот факт следует из свойств 1)–3) в силу известной теоремы Стоуна [96]. Таким образом, эйконалы, как образующие, порождают всю алгебру непрерывных функций.

• Эйконалам поставим в соответствие операторы умножения $\tau^\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, действующие по правилу

$$(\tau^\sigma y)(x) := \tau_\sigma(x)y(x), \quad x \in \Omega,$$

и для краткости сохраним за ними название “эйконалы”.

Напомним, что $X_\sigma^s = X\langle \Omega^s[\sigma] \rangle$ суть проекторы в \mathcal{H} , срезающие функции на подобласти $\Omega^s[\sigma]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Справедливо представление*

$$\tau^\sigma = \int_{[0, T]} s dX_\sigma^s, \quad (1.56)$$

в котором интеграл есть сильный предел соответствующих операторных интегральных сумм.

Наметим доказательство. Поскольку $X_\sigma^s = \mathbb{I}$ при $s > \text{diam } \Omega$, интегрирование в (1.56) фактически ведется по конечному промежутку $[0, \text{diam } \Omega]$, а интеграл не зависит от T . Выбрав гладкую функцию y , имеем

$$\tau^\sigma y = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N s_i \Delta X_\sigma^{s_i} y,$$

где $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = T$ – разбиение, $r = \max_{1 \leq i \leq N} (s_i - s_{i-1})$ – его ранг, $\Delta X_\sigma^{s_i} := X_\sigma^{s_i} - X_\sigma^{s_{i-1}}$. Слагаемые интегральной суммы суть

$$(s_i \Delta X_\sigma^{s_i} y)(x) = \begin{cases} s_i y(x) = \tau_\sigma(x)y(x) + o(r), & x \in \Delta \Omega_i^s[\sigma], \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Delta \Omega_i^s[\sigma], \end{cases}$$

где

$$\Delta \Omega_i^s[\sigma] := \Omega_i^s[\sigma] \setminus \Omega_{i-1}^s[\sigma] = \{x \in \Omega \mid s_{i-1} \leq \tau_\sigma(x) < s_i\}$$

– “тонкий” слой. Предельный переход при $r \rightarrow 0$ приводит к (1.56).

Отметим, что проекторы X_σ^s суть спектральные проекторы оператора эйконала, а (1.56) – его разложение в смысле спектральной теоремы.

• Поскольку $\|\tau^\sigma\| = \max_\Omega \tau_\sigma \leq \text{diam } \Omega$, то операторные эйконалы ограничены, т. е. являются элементами $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – банаховой алгебры ограниченных операторов в \mathcal{H} .

• Условимся, говоря об изометрии алгебр, всегда подразумевать изометрический изоморфизм и писать $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Для топологических пространств запись $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$ будет означать, что \mathcal{X} и \mathcal{Y} гомеоморфны.

Пусть $\mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega) := \vee \{\tau^\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ есть алгебра операторных эйконалов. В силу известного равенства $\|\tau^\sigma\| = \|\tau_\sigma\|$ соответствие $\tau_\sigma \mapsto \tau^\sigma$ есть изометрия алгебр: $\mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega) \cong \mathfrak{E}(\Omega)$. Отсюда, по предложению 12, имеем $\mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega) \cong C(\Omega)$, из чего следует гомеоморфность спектров:

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega)} \cong \mathcal{M}_{C(\Omega)} \cong \Omega. \quad (1.57)$$

1.6.3. *Реконструкция.* Отметим, что, поскольку $T > \text{diam } \Omega$, для любого σ выполнено равенство $\Omega^T[\sigma] = \Omega$. Поэтому $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}$ и, как следствие управляемости (1.29), имеет место равенство $\overline{\mathcal{U}_\sigma^T} = \mathcal{H}$. При этом оператор U^T из полярного разложения (1.36) есть унитарный оператор из \mathcal{F}^T на \mathcal{H} .

Будем считать, что наблюдатель построил модель $\tilde{\mathcal{H}}$ по R_*^{2T} и уже располагает копиями \tilde{P}_σ^s всех волновых проекторов. Последующие шаги таковы.

- По представлению

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^\sigma &:= (U^T)^* \tau^\sigma U^T \stackrel{(1.56)}{=} (U^T)^* \left[\int_{[0,T]} s dX_\sigma^s \right] U^T = \int_{[0,T]} s d[(U^T)^* X_\sigma^s U^T] \\ &\stackrel{(1.33)}{=} \int_{[0,T]} s d[(U^T)^* P_\sigma^s U^T] = \int_{[0,T]} s d\tilde{P}_\sigma^s \end{aligned}$$

наблюдатель получает копии операторных эйконалов, действующие в модельном внутреннем пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$. По ним он образует алгебру

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{E}}^{\text{op}}(\Omega) &:= \vee\{\tilde{\tau}^\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\} = \vee\{(U^T)^* \tau^\sigma U^T \mid \sigma \in \mathcal{O}\} \\ &= (U^T)^* [\vee\{\tau^\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\}] U^T = (U^T)^* \mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega) U^T \\ &\cong \mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega) \cong \mathfrak{C}(\Omega) = C(\Omega) \end{aligned}$$

(см. предложение 12), являющуюся изометрической копией основной алгебры $C(\Omega)$. При этом имеем:

$$\mathcal{M}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\text{op}}(\Omega)} \cong \mathcal{M}_{\mathfrak{E}^{\text{op}}(\Omega)} \stackrel{(1.57)}{\cong} \Omega. \quad (1.58)$$

• Наблюдатель проводит геометризацию алгебры $\tilde{\mathfrak{E}}^{\text{op}}(\Omega)$ (см. (1.55)): находит ее спектр $\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathfrak{E}}^{\text{op}}(\Omega)} =: \tilde{\Omega}$ и функции на спектре $\tilde{\tau}_\sigma = G\tilde{\tau}^\sigma$. По построению $\tilde{\Omega}$ есть гомеоморфная копия оригинала Ω (см. (1.58)), а функции $\tilde{\tau}_\sigma$ суть пересажённые (по гомеоморфизму β : см. п. 1.6.1) с Ω на $\tilde{\Omega}$ эйконалы τ_σ . В этот момент можно говорить о визуализации эйконалов, вполне аналогичной визуализации волн в вариантах 1 и 2.

• Семейство $\{\tilde{\tau}_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\}$ определяет на $\tilde{\Omega}$ риманову структуру. Используя процедуру п. 1.1.5, наблюдатель получает изометрическую копию $\tilde{\Omega}$ с краем $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ и оператором реакции $\tilde{R}_*^{2T} = R_*^{2T}$. Последнее равенство есть очевидное следствие изометричности $\tilde{\Omega}$ и Ω .

Реконструкция закончена.

1.7. Реконструкция в ЭМТ. С должными изменениями, все три приведенных выше варианта реконструкции многообразия пригодны для решения задачи электромагнитной томографии (ЭМТ). Мы приводим соответствующие результаты, основываясь на параллелях с задачей АТ и обсуждая необходимые изменения. Параллели подчеркиваются одинаковыми обозначениями подобных объектов.

В ЭМТ Ω есть *трехмерное ориентированное* многообразие. На нем определены операции на векторных полях: поточечные скалярное произведение $a \cdot b$ и векторное произведение $a \wedge b$, ротор $\text{rot } a$ и дивергенция $\text{div } a$. Их определения имеются в [103; разд. 3.5]; краткая сводка приведена в [39], [41].

1.7.1. Система α^T . • Распространение электромагнитных волн в Ω описывается системой Максвелла

$$e_t = \operatorname{rot} h, \quad h_t = -\operatorname{rot} e \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad (1.59)$$

$$e|_{t=0} = 0, \quad h|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1.60)$$

$$e_{\tan}|_{\Gamma \times [0, T]} = f, \quad (1.61)$$

где $e_{\tan} := e - (e \cdot \nu)\nu$ есть касательная компонента вектора e на границе, f – *граничное управление* (зависящее от времени поле векторов, касательных к Γ), $e = e^f(x, t)$ и $h = h^f(x, t)$ суть электрическое и магнитное поля (*волны*). При f из класса \mathcal{M}^T гладких управлений, аннулирующихся вблизи $t = 0$, система имеет единственное классическое гладкое решение $\{e^f, h^f\}$. Отклик системы на воздействие управления описывается *оператором реакции*, действующим по правилу

$$R^T f := \nu \wedge h^f|_{\Gamma \times [0, T]} \stackrel{(1.59)}{=} -\nu \wedge \operatorname{rot} e^{J^T f}|_{\Gamma \times [0, T]},$$

где J^T – интегрирование по времени:

$$(J^T f)(\cdot, t) := \int_0^t f(\cdot, \eta) d\eta.$$

• Отделяя электрическую компоненту, что мотивировано видом управления, переходим к *электрической подсистеме* системы Максвелла (задаче I^T):

$$e_{tt} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} e = 0 \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad (1.62)$$

$$e|_{t=0} = e_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1.63)$$

$$e_{\tan}|_{\Gamma \times [0, T]} = f. \quad (1.64)$$

Волны распространяются с конечной (единичной) скоростью, в силу чего корректными оказываются задача I_*^T :

$$e_{tt} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} e = 0 \quad \text{в } (\Omega^T \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad (1.65)$$

$$e|_{t < \tau(x)} = 0, \quad (1.66)$$

$$e_{\tan}|_{\Gamma \times [0, T]} = f \quad (1.67)$$

и ее расширение по гиперболичности – задача I_*^{2T} :

$$e_{tt} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} e = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}^{2T}, \quad (1.68)$$

$$e|_{t < \tau(x)} = 0, \quad (1.69)$$

$$e_{\tan}|_{\Gamma \times [0, 2T]} = f. \quad (1.70)$$

С последней связан *расширенный оператор реакции*

$$R_*^{2T} f := -\nu \wedge \operatorname{rot} e^{J^T f}|_{\Gamma \times [0, 2T]},$$

играющий роль данных обратной задачи. Он вполне определяется подобластью Ω^T , захваченной волнами к финальному моменту $t = T$.

• Динамическая система α^T ассоциирована с задачей I_*^T . Ее *внешним пространством* служит пространство квадратично-суммируемых управлений \mathcal{F}^T со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \int_{\Gamma \times [0, T]} f(\gamma, t) \cdot g(\gamma, t) d\Gamma dt.$$

Гладкий класс \mathcal{M}^T плотен в \mathcal{F}^T . Внешнее пространство содержит подпространства

$$\mathcal{F}_\sigma^{T,s} := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subset \bar{\sigma} \times [T-s, T]\}, \quad 0 < s \leq T,$$

образованные управлениями, которые действуют с σ с запаздыванием $T-s$ (s есть время действия). Для краткости обозначим $\mathcal{F}^{T,s} := \mathcal{F}_\Gamma^{T,s}$. Запаздывающие подпространства содержат плотные гладкие линеалы

$$\mathcal{M}_\sigma^{T,s} := \mathcal{M}^T \cap \mathcal{F}_\sigma^{T,s}.$$

• Пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ квадратично-суммируемых векторных полей содержит (под)пространство роторов

$$\mathcal{H} := \{\text{rot } h \mid h, \text{rot } h \in \vec{L}_2(\Omega)\}$$

со скалярным произведением

$$(a, b)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega} a(x) \cdot b(x) dx.$$

Пространство \mathcal{H} играет роль *внутреннего пространства* системы α^T : поля $e^f(\cdot, t)$ суть его элементы.

Для $A \subset \Omega$ полагаем

$$\mathcal{H}\langle A \rangle := \{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset A\};$$

через $X\langle A \rangle$ обозначаем проектор в \mathcal{H} на $\mathcal{H}\langle A \rangle$.

Подчеркнем, что, в отличие от скалярного \mathcal{H} , в пространстве роторов включение $y \in \mathcal{H}$, вообще говоря, не влечет за собой включения $\chi_A y \in \mathcal{H}$. Соответственно, действие проекторов $X\langle A \rangle$ не сводится к срезке, а его описание довольно сложно: см. предложение 14 в п. 1.7.4. Эти проекторы действуют нелокально (могут расширять носитель поля) и не коммутируют для разных A . Именно это делает задачу ЭМТ технически более сложной [44], [20], [68].

• Соответствие “вход-состояние” реализуется *оператором управления*

$$W^T: \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H},$$

действующим по правилу

$$W^T f := e^f(\cdot, T)$$

и определенным на линеале \mathcal{M}^T . В отличие от своего акустического аналога, оператор W^T не является ограниченным, но допускает замыкание [71]. Для него справедливо полярное разложение

$$W^T = U^T |W^T|, \quad |W^T| := [(W^T)^* W^T]^{1/2},$$

аналогичное акустическому разложению (1.36).

- Операторы R^T и R_*^{2T} , определенные на соответствующих гладких линейных, реализуют отображение “вход–выход”.
- *Связывающий оператор* системы α^T есть оператор

$$C^T := (W^T)^* W^T,$$

действующий в \mathcal{F}^T на адекватной области определения.¹⁰ Выполнены соотношения

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}} = (e^f(\cdot, T), e^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}},$$

связывающие гильбертовы метрики внешнего и внутреннего пространств.

Как и в акустической системе, связывающий оператор явно и просто выражается через оператор реакции. Справедливо представление

$$C^T = \frac{1}{2}(S^T)^* R_*^{2T} J^{2T} S^T, \quad (1.71)$$

в котором стандартные операторы S^T и J^{2T} те же, что и в (1.25). Буквальное совпадение представлений – следствие их весьма общего системного характера: см. [19].

- Множество

$$\mathcal{U}_\sigma^s := W^T \mathcal{M}_\sigma^{T,s}$$

называется *достижимым* (с части края σ , в момент $t = s$). В силу конечности скорости волн имеем соотношение $\text{supp } e^f(\cdot, s) \subset \overline{\Omega^s[\sigma]}$, ведущее к вложению $\mathcal{U}_\sigma^s \subset \mathcal{H}(\Omega^s[\sigma])$. Вложение оказывается плотным:

$$\overline{\mathcal{U}_\sigma^s} = \mathcal{H}(\Omega^s[\sigma]), \quad s > 0. \quad (1.72)$$

Этот факт выводится из векторного варианта теоремы единственности Хольмгрена–Йона–Татару [72]. Он показывает, что ключевое для нашего подхода свойство – полнота волн в заполняемой ими области – имеет место и в системе Максвелла. О нем говорят также как о локальной граничной управляемости электрической подсистемы α^T .

1.7.2. Постановка. Как и раньше, восстановить Ω^T по R_*^{2T} означает построить риманово многообразие (копию) $\widetilde{\Omega}^T$, имеющее общий с Ω^T край и такое, что $\widetilde{R}_*^{2T} = R_*^{2T}$.

Как и в случае АТ, по (1.71) наблюдатель может найти оператор C^T , затем $\widetilde{W}^T = |W^T| = [C^T]^{1/2}$ и построить во внешнем пространстве модель $\widetilde{\mathcal{H}}^T = \widetilde{W}^T \mathcal{M}^T$. Она используется во всех вариантах реконструкции. В рамках модели наблюдателю доступны копии достижимых множеств $\widetilde{\mathcal{U}}_\sigma^s = \widetilde{W}^T \mathcal{M}_\sigma^{T,s}$.

¹⁰Вполне корректно оператор C^T вводится через соответствующую билинейную форму: см. [42].

1.7.3. *Вариант 1.* В электрической подсистеме аналогом акустической h -лунки является подпространство $\mathcal{H}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle$, состоящее из соленоидальных полей, локализованных в лунке $\omega_{\gamma,\varepsilon}^s$. Для него справедливо представление¹¹

$$\mathcal{H}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle = \mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]\rangle \cap [\mathcal{H}\langle\Omega^s\rangle \ominus \mathcal{H}\langle\Omega^{s-\varepsilon}\rangle]. \quad (1.73)$$

С учетом изометрии соответствия “оригинал–копия” и полноты (1.72), копии h -лунок представимы в виде

$$\widetilde{\omega}_{\gamma,\varepsilon}^s = (U^T)^* \mathcal{H}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle \stackrel{(1.73)}{=} \overline{\mathcal{U}_{\sigma_\varepsilon(\gamma)}^s} \cap [\overline{\mathcal{U}^s} \ominus \overline{\mathcal{U}^{s-\varepsilon}}] \quad (1.74)$$

и, следовательно, доступны наблюдателю.

- Контролируя поведение лунок по предложению 3 (с заменой оригиналов $\mathcal{H}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle$ на копии $\widetilde{\mathcal{H}}\langle\omega_{\gamma,\varepsilon}^s\rangle$), наблюдатель получает возможность восстановить выкройку Θ^T .

- \widetilde{h} -лунки определяют правило склейки выкройки по границе $\Theta^T \cap \theta$ и метрику dist_{Θ^T} , превращающую склеенную выкройку в изометрическую копию $\widetilde{\Omega}^T$ оригинала Ω^T . Подробности можно найти в [39]; здесь мы опишем прием, позволяющий восстановить расстояния на Θ^T .

Выберем точку (γ_0, s_0) на уже восстановленной выкройке и выберем малое $\varepsilon > 0$. Лунка $\omega_{\gamma_0,\varepsilon}^{s_0}$ находится в малой окрестности точки $x(\gamma_0, s_0) \in \Omega^T$. На рис. 5 лунка затенена. На крае выберем точку γ . Наша цель – определить расстояние от $x(\gamma_0, s_0)$ до γ (отмечено волнистой линией).

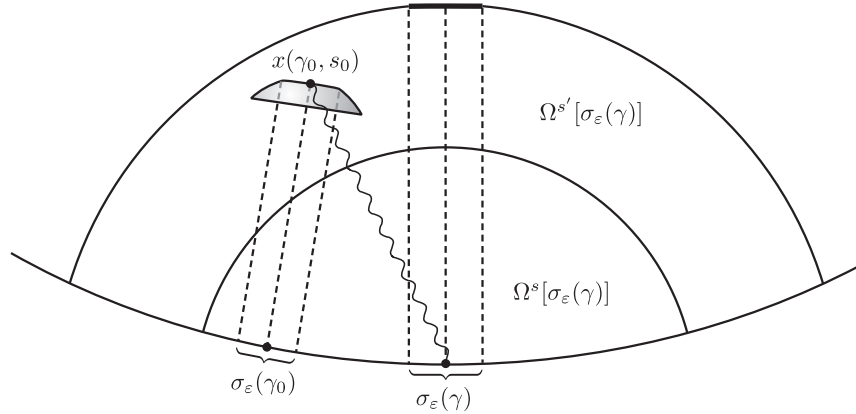


Рис. 5. Поглощение лунки

При малых s “полушар” $\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ отделен от лунки:

$$\omega_{\gamma_0,\varepsilon}^{s_0} \cap \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] = \emptyset.$$

С увеличением s он раздувается и, начиная с некоторого $s = s(\gamma_0, \gamma, \varepsilon)$, поглощает лунку:

$$\omega_{\gamma_0,\varepsilon}^{s_0} \cap \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \neq \emptyset \quad \text{при } s > s(\gamma_0, \gamma, \varepsilon).$$

¹¹Проектирование на подпространства $\mathcal{H}\langle A \rangle$ не сводится к срезке (см. предложение 14 в п. 1.7.4), и это представление приходится доказывать: см. [28], [39].

Как нетрудно видеть, $s(\gamma_0, \gamma, \varepsilon) \approx \text{dist}_\Omega(x(\gamma_0, s_0), \gamma)$, причем точность равенства возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому, положив

$$\text{dist}_{\Theta^T}((\gamma_0, s_0), (\gamma, 0)) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{s > 0 \mid \omega_{\gamma_0, \varepsilon}^{s_0} \cap \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \neq \emptyset\},$$

мы получим $\text{dist}_{\Theta^T}((\gamma_0, s_0), (\gamma, 0)) = \text{dist}_\Omega(x(\gamma_0, s_0), \gamma)$ по построению. Переходя от областей к подпространствам, приходим к представлению

$$\text{dist}_{\Theta^T}((\gamma_0, s_0), (\gamma, 0)) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{s > 0 \mid \mathcal{H}\langle \omega_{\gamma_0, \varepsilon}^{s_0} \rangle \cap \mathcal{H}\langle \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \rangle \neq \{0\}\}.$$

Наблюдатель может воспользоваться этим представлением, заменяя подпространства доступными ему волновыми копиями согласно (1.74):

$$\text{dist}_{\Theta^T}((\gamma_0, s_0), (\gamma, 0)) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{s > 0 \mid \widetilde{\mathcal{H}}\langle \omega_{\gamma_0, \varepsilon}^{s_0} \rangle \cap \widetilde{\mathcal{H}}\langle \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \rangle \neq \{0\}\}.$$

Этот способ вполне корректен для γ , близких к γ_0 . Варьируя положение γ и используя дистанционные координаты, наблюдатель восстановит метрику в окрестности (γ_0, s_0) на Θ^T . Такие окрестности покрывают всю выкройку.

• К этим кропотливым построениям уместен следующий комментарий методического плана. По правилам игры в обратных задачах, внешний наблюдатель оперирует на крае многообразия, не имея доступа к его внутренности. Волны, порожденные граничными источниками, – единственный инструмент, с помощью которого он получает информацию о внутренности многообразия. Через модель наблюдателю доступны копии таких волн. Вместе с последними ему доступны копии тех (и только тех!) объектов – областей, подпространств, операторов и др., – которые могут быть охарактеризованы в волновых терминах.¹² Информацию о внутренней геометрии наблюдатель может извлечь только из волновых копий. Осознание этого принципиального ограничения и разработка адекватного “волнового” языка, описывающего оригиналы, есть стержневая тема в ВС-методе.

1.7.4. *Вариант 2.* Разработка версии ВС-метода для обратной задачи электродинамики началась с естественного вопроса: что получит наблюдатель, применив в системе Максвелла прямой аналог акустической амплитудной формулы (1.52)? Что за изображения он увидит на выкройке? Ответ оказался нетривиальным и привел к серии работ по восстановлению переменной скорости волн в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. В работе [44] задача решена в *регулярной зоне* – области Ω^T с $T < T_c := \text{dist}(c, \Gamma)$, в которой регулярны полугеодезические координаты. В работе [69] это ограничение снято и получено в известном смысле окончательное решение задачи. Здесь мы кратко изложим ответ на заданный вопрос – что дает амплитудная формула – и опишем, как она используется для восстановления метрики. Для простоты ограничимся восстановлением в регулярной зоне. С той же целью будем считать Ω компактным.

• Выберем положительное $T < T_c$. В этом случае все эквидистанты края Γ^s ($0 < s \leq T$) суть гладкие поверхности, а выкройка Θ^T области Ω^T совпадает с цилиндром $\Gamma \times [0, T]$.

¹²Как пример: лунку $\omega_{\gamma, \varepsilon}^s$ наблюдатель не видит, но \tilde{h} -лунка $\widetilde{\mathcal{H}}\langle \omega_{\gamma, \varepsilon}^s \rangle$ ему доступна по волновому представлению (1.74).

Во внутреннем пространстве \mathcal{H}^T выделено семейство подпространств \mathcal{H}^s ($0 < s \leq T$), состоящих из полей, локализованных в подобластях Ω^s . Пусть X^s есть проектор в \mathcal{H}^T на \mathcal{H}^s ; важный вопрос – как он действует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $y \in \mathcal{H}^T$ есть гладкое поле. Справедливо представление

$$X^s y = \begin{cases} y - \nabla p & \text{в } \Omega^s, \\ 0 & \text{в } \Omega^T \setminus \Omega^s, \end{cases} \quad (1.75)$$

в котором p есть решение задачи

$$\Delta p = 0 \quad \text{в } \Omega^s, \quad (1.76)$$

$$p = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.77)$$

$$\nabla \tau \cdot \nabla p = \nabla \tau \cdot y \quad \text{на } \Gamma^s, \quad (1.78)$$

где $\tau = \text{dist}(\cdot, \Gamma)$ – эйконал края.

Как видно, в отличие от акустического случая, действие X^s не сводится к срезке. Тем не менее поле $X^s y$, вообще говоря, разрывно на Γ^s , причем в силу (1.78) разрыв $X^s y|_{\Gamma^{s-0}}$ оказывается полем, касательным к Γ^s .

• Пусть

$$\mathcal{L}^T := \{y \in \vec{L}_2(\Omega^T) \mid \nabla \tau \cdot y = 0 \text{ в } \Omega^T\}$$

есть пространство поперечных полей (с \vec{L}_2 -метрикой). Определим преобразование $M^T : \mathcal{H}^T \rightarrow \mathcal{L}^T$ формулой

$$M^T y := X^s y|_{\Gamma^{s-0}} \quad \text{на } \Gamma^s, \quad 0 < s \leq T.$$

Как видно, образ $M^T y$ послойно состоит из разрывов, образующихся при проектировании поля y на подпространства \mathcal{H}^s .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Преобразование M^T расширяется по непрерывности с гладких полей на все \mathcal{H}^T до унитарного оператора из \mathcal{H}^T на \mathcal{L}^T .

Добавим, что при $T > T_c$ преобразование M^T может стать лишь частично-изометрическим – приобрести ядро. Это происходит, когда на эквидистантах Γ^s образуются складки [68].

Преобразование M^T – главный инструмент варианта, использующего геометрическую оптику в ЭМТ. Оно корректно определено для любого трехмерного риманова многообразия с краем и может оказаться полезным в других приложениях.

• Пусть $v \in \mathcal{L}^T$ есть поперечное поле; через $\check{v}(\gamma, s)$ обозначим результат параллельного переноса вектора $v(x(\gamma, s))$ из точки $x(\gamma, s) \in \Omega^T$ в точку $x(\gamma, 0) = \gamma \in \Gamma$ вдоль геодезической l_γ . Очевидно, что этот результат есть вектор, касательный к краю.

Пусть $\vec{L}_2(\Sigma^T) := L_2([0, T]; \vec{L}_2(\Gamma))$ есть пространство касательных к краю полей, зависящих от параметра $0 \leq \tau \leq T$. Элемент этого пространства вида

$$\tilde{v}(\gamma, \tau) = (I^T v)(\gamma, \tau) := \beta^{1/2}(\gamma, \tau) \check{v}(\gamma, \tau),$$

где β есть плотность риманова объема в пгк, назовем *изображением* поля v . Как нетрудно проверить, I^T есть унитарный оператор из \mathcal{L}^T на $\vec{L}_2(\Sigma^T)$.

• С использованием лучевого метода для уравнений Максвелла [8] устанавливается соотношение

$$\begin{aligned}\tilde{e}^f(\gamma, s; T) &:= (I^T e^f(\cdot, T))(\gamma, s) \\ &= \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((W^T)^* X_{\perp}^s W^T f)(\gamma, t), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T,\end{aligned}$$

где $X_{\perp}^s := \mathbb{I} - X^s$. Технику вывода см. в [44]; как и в акустике, в ее основе лежит анализ эволюции разрывов волновых полей.

В последнем соотношении, в силу равенства (1.72) (полнота волн!) можно заменить X^s на волновой проектор P^s в \mathcal{H}^T на достижимое подпространство $\overline{\mathcal{W}^s}$. Наконец, используя изометрию “оригинал–копия”, этому соотношению можно придать вид *амплитудной формулы*

$$\tilde{e}^f(\gamma, s; T) = \lim_{t \rightarrow T-s-0} ((\tilde{W}^T)^* \tilde{P}_{\perp}^s \tilde{W}^T f)(\gamma, t), \quad (\gamma, s) \in \Sigma^T, \quad (1.79)$$

где

$$\tilde{P}_{\perp}^s = \mathbb{I} - \tilde{P}^s = \mathbb{I} - (U^T)^* P^s U^T.$$

Все операторы в правой части (1.79) доступны внешнему наблюдателю. Задав управление f , наблюдатель может получить на “экране” Σ^T изображение \tilde{e}^f невидимой ему волны e^f .

• Переходя в (1.65) от волн к изображениям, получаем уравнение

$$\tilde{e}_{tt}^f + \tilde{\Delta} \tilde{e}^f = 0 \quad \text{в } \Sigma^T \times (0, T) \quad (1.80)$$

с оператором $\tilde{\Delta} := I^T \text{rot rot}(I^T)^*$, определяющим эволюцию изображений. Анализ, вполне аналогичный проведенному в [44] для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, приводит к представлению

$$\tilde{\Delta} = -\partial_{\tau}^2 - \partial_{\gamma^k} g^{kl} \partial_{\gamma^l} + \dots, \quad (1.81)$$

в котором опущенные члены суть псевдодифференциальные операторы порядка не выше первого.

В силу независимости $\tilde{\Delta}$ от времени имеем $\tilde{\Delta} \tilde{e}^f \stackrel{(1.80)}{=} -\tilde{e}_{tt}^f = -\tilde{e}^{f_{tt}}$. Как следствие, имеем представление для графика:

$$\text{graph } \tilde{\Delta} = \{ \{ \tilde{e}^f(\dots, T), -\tilde{e}^{f_{tt}}(\dots, T) \} \mid f \in \mathcal{M}^T \}, \quad (1.82)$$

аналогичное акустическому (1.54).

• Наблюдатель, располагающий оператором R_*^{2T} , может визуализировать изображения волн по амплитудной формуле (1.79). Как следствие, ему доступен график (1.82). Выделяя главные члены в представлении (1.81), наблюдатель восстановит g_{kl} – метрический тензор в пгк. Определяемая этим тензором метрика по построению превращает Σ^T в изометрическую копию многообразия Ω^T . *Реконструкция закончена.*

Преобразование M^T корректно определено на любом трехмерном римановом многообразии с краем. Это один из канонических объектов, открытых ВС-методом.

1.7.5. *Вариант 3.* Алгебраическая версия ВС-метода для ЭМТ следует той же схеме, что и варианты 1, 2. За основу берется инструмент, работающий в АТ, и определяется его адекватный “электромагнитный” аналог. Он и используется для реконструкции. В данном случае речь идет об алгебре эйконалов.

Как и в акустике, для простоты полагаем, что Ω компактно, а время наблюдения достаточно велико: $T > \text{diam } \Omega$. В этом случае $\Omega^T = \Omega$ и, соответственно, $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}$.

• Пусть $\sigma \in \mathcal{O}$ есть открытое подмножество края. По аналогии с (1.56) определим в \mathcal{H} оператор (*эйконал*)

$$\varepsilon^\sigma := \int_{[0,T]} s dX_\sigma^s. \quad (1.83)$$

В силу компактности Ω он ограничен, но вопрос о том, как он действует, отнюдь не тривиален, поскольку действие проекторов X_σ^s не сводится к срезке. Ответ содержится в следующем результате, установленном М. Н. Демченко в [41].

Пусть $\mathfrak{E} := \vee \{\varepsilon^\sigma \mid \sigma \in \mathcal{O}\}$ есть (под)алгебра в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, порожденная электрическими эйконалами, и $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – идеал компактных операторов. Обозначим $\mathfrak{K}[\mathfrak{E}] := \mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}$, и пусть $\mathfrak{E}_* := \mathfrak{E}/\mathfrak{K}[\mathfrak{E}]$ есть факторалгебра, а $\pi: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}_*$ – каноническая проекция. Как и раньше, $C(\Omega)$ есть алгебра непрерывных функций; напомним, что она порождается скалярными эйконалами: см. предложение 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. 1) *Справедливо представление*

$$\varepsilon^\sigma = \tau_\sigma + K_\sigma^T, \quad (1.84)$$

в котором τ_σ есть умножение поля на функцию $\tau_\sigma(\cdot) = \text{dist}(\cdot, \sigma)$, а K_σ^T – компактный оператор из \mathcal{H} в $\vec{L}_2(\Omega)$.¹³

2) *Алгебра \mathfrak{E}_* коммутативна, а соответствие $\pi\varepsilon^\sigma \mapsto \tau_\sigma$ между образующими алгебр \mathfrak{E}_* и $C(\Omega)$ продолжается до изометрии этих алгебр.*

Следствием утверждения 2) является гомеоморфизм спектров:

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{E}_*} \cong \mathcal{M}_{C(\Omega)} \cong \Omega. \quad (1.85)$$

• Приступим к реконструкции. Пусть наблюдатель уже построил по R_*^{2T} модель \mathcal{H} со всеми ее атрибутами: модельным оператором управления \widetilde{W}^T , копиями волновых проекторов \widetilde{P}_σ^s и др.

По представлению

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}^\sigma &:= (U^T)^* \varepsilon^\sigma U^T \stackrel{(1.83)}{=} \int_{[0,T]} s d[(U^T)^* X_\sigma^s U^T] \\ &\stackrel{(1.72)}{=} \int_{[0,T]} s d[(U^T)^* P_\sigma^s U^T] = \int_{[0,T]} s d\widetilde{P}_\sigma^s \end{aligned}$$

¹³Отметим, что в правой части (1.84) действие каждого слагаемого по отдельности, вообще говоря, выводит из пространства роторов \mathcal{H} .

наблюдателю доступны копии электрических эйконалов. Они определяют алгебру

$$\tilde{\mathfrak{E}} := \vee \{ \tilde{\varepsilon}^\sigma \mid \sigma \subset \mathcal{O} \} \subset \mathfrak{B}(\tilde{\mathcal{H}}).$$

Факторизуя ее по содержащимся в ней компактным операторам, наблюдатель получает алгебру

$$\tilde{\mathfrak{E}}_* = \vee \{ \pi \tilde{\varepsilon}^\sigma \mid \sigma \subset \mathcal{O} \}$$

– изометрическую копию алгебры \mathfrak{E}_* .

Проводя геометризацию алгебры $\tilde{\mathfrak{E}}_*$ по Гельфанду, наблюдатель получает спектр

$$\tilde{\Omega} := \mathcal{M}_{\tilde{\mathfrak{E}}_*} \cong \mathcal{M}_{\mathfrak{E}_*} \stackrel{(1.85)}{\cong} \Omega$$

и визуализирует на нем образующие $\pi \tilde{\varepsilon}^\sigma$ в виде непрерывных функций. Эти функции по построению суть эйконалы τ_σ , пересаженные с Ω на $\tilde{\Omega}$ по соответствующему гомеоморфизму. Они определяют риманову структуру, превращающую $\tilde{\Omega}$ в изометрическую копию оригинала Ω . *Реконструкция выполнена.*

В оставшейся части раздела 1 дается обзор других результатов ВС-метода.

1.8. Волновая модель. Поиски материала для построения копии $\tilde{\Omega}$ привели к новому объекту теории операторов – *волновому спектру* [34]¹⁴. Это топологическое пространство, каноническим образом определяемое симметрическим полуограниченным оператором L_0 с ненулевыми индексами дефекта. Определение использует абстрактную *динамическую систему с граничным управлением*, ассоциированную с оператором; ее эволюция определяется уравнением

$$u_{tt} + L_0^* u = 0,$$

а волновой спектр конструируется из достижимых множеств \mathcal{U}^s . Сама конструкция довольно сложна и проводится в несколько шагов [34], [40]. В конечном итоге волновой спектр определяется как множество атомов адекватной решетки подпространств. Из них и составляется копия $\tilde{\Omega}$. Здесь, на примере задачи АТ, мы кратко поясним, откуда берутся решетки и атомы. Относящиеся к решеткам определения и термины см. в [63].

• Для $A \subset \Omega$ условимся обозначать $A^t := \Omega^t[A]$, $A^0 := A$. Через \mathcal{O} обозначим решетку открытых множеств в Ω . Она не содержит атомов¹⁵.

Пусть \mathfrak{L} есть решетка (замкнутых) подпространств пространства $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ с частичным порядком $A \subseteq B$, операциями $A \vee B := \overline{A + B}$, $A \wedge B := A \cap B$, наибольшим и наименьшим элементами \mathcal{H} и $\{0\}$, а также топологией, определяемой сильной сходимостью проекторов:

$$A_j \rightarrow A \quad \Leftrightarrow \quad P_{A_j} \rightarrow P_A.$$

Решетка \mathfrak{L} содержит (под)решетку геометрических подпространств

$$\mathfrak{D} := \{ \mathcal{H}\langle A \rangle \mid A \in \mathcal{O} \}.$$

Атомов в ней нет.

¹⁴В этой работе обнаружен ряд неточностей. Мы предполагаем устранить их в ближайших публикациях по данной теме.

¹⁵*Атомом* (минимальным элементом) частично-упорядоченного множества \mathcal{P} называется элемент $a \in \mathcal{P}$ такой, что из $0 < p \leq a$ следует $p = a$.

От \mathfrak{D} перейдем к решетке $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$, состоящей из \mathfrak{D} -значных функций от $t \geq 0$ с поточечными порядком, операциями и сходимостью. Она содержит множество

$$\mathfrak{F}_* := \{f_A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{D}} \mid f_A(t) = \mathcal{H}\langle A^t \rangle, A \in \mathcal{O}, t \geq 0\},$$

которое тоже не имеет атомов. Однако в замыкании $\overline{\mathfrak{F}_*}$ появляются функции вида $\mathbf{a}_x(t) = \mathcal{H}\langle \{x\}^t \rangle$, являющиеся атомами. Множество атомов $\text{At } \overline{\mathfrak{F}_*}$ биективно многообразию Ω по соответствию $\mathbf{a}_x \leftrightarrow x$.

• Проводя адекватные построения в доступной ему модели $\widetilde{\mathcal{H}}$, внешний наблюдатель последовательно определяет копии нужных подпространств и решеток, копию $\widetilde{\mathfrak{F}_*}$ и, в конце концов, получает множество атомов $\text{At } \widetilde{\mathfrak{F}_*}$. Оно и используется в качестве искомой копии $\widetilde{\Omega}$.

В построениях существенным образом используется доступная наблюдателю унитарная копия оператора L_0^* , определяющего эволюцию в системе α^T . Множество атомов $\text{At } \overline{\mathfrak{F}_*} =: \Omega_{L_0}$ и есть *волновой спектр* оператора L_0 . Кроме того, наблюдатель может реализовать элементы недоступного ему пространства \mathcal{H} как функции на Ω_{L_0} и получить функциональную (*волновую*) модель оператора L_0 , определяемую данными обратной задачи. Волновая модель – объект, перспективный для дальнейшей разработки. Ее систематическое изучение начато в [56].

1.9. Система Ламе. Здесь кратко обсуждаются результаты по динамической обратной задаче для системы Ламе – основной изотропной модели теории упругости. В отличие от рассмотренных выше задач на многообразиях, это задача об определении параметров (скоростей волновых мод) в *заданной* трехмерной области, так что вопрос о восстановлении носителя параметров не стоит. Тем не менее попытка решить ее средствами ВС-метода, работающими в АТ и ЭМТ, вполне мотивирована: система Ламе – “гибрид” акустической и электрической систем. В ней имеются два типа волн, распространяющихся с разными скоростями и взаимодействующих друг с другом. Взаимодействие сильно усложняет картину волн и затрудняет исследование системы. Задача интересна для теории и вполне актуальна в ряде важных приложений. Полностью она не решена, и здесь мы объясним, в чем состоит главное затруднение.

• Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей Γ . Уравнение Ламе описывает распространение волн в упругой среде, заполняющей Ω . Записанное покомпонентно в декартовых координатах, оно имеет вид

$$\rho(u_i)_{tt} = (\lambda + \mu)\partial_{x_i} \text{div } u + \mu\Delta u_i + (\partial_{x_i} \lambda) \text{div } u + \sum_{k=1}^3 (\partial_{x_k} \mu)(\partial_{x_k} u_i + \partial_{x_i} u_k)$$

($i = 1, 2, 3$) с гладкими

$$\rho(x) > 0, \quad \mu(x) > 0, \quad 3\lambda(x) + 2\mu(x) > 0$$

в $\overline{\Omega}$. В инвариантной (бескоординатной) форме уравнение Ламе может быть записано в виде $\rho u_{tt} = Lu$ с оператором

$$L := \nabla \varkappa \text{div} - \text{rot } \mu \text{rot} + 2([\nabla \mu \wedge \text{rot}] + [\nabla \mu \wedge \text{rot}]^* + H_\mu - q),$$

где $\varkappa := \lambda + 2\mu$, $u = u(x, t)$ есть решение (векторное поле), $[\dots]^*$ – оператор, сопряженный к $[\dots]$ по Лагранжу, H_μ – оператор умножения на матрицу-функцию вторых производных $(H_\mu)_{ik} = \partial_{x_i} \partial_{x_k} \mu$, q – оператор умножения на функцию $q = \Delta \mu$ [77].

- С параметрами Ламе λ , μ связаны функции

$$c_p := \sqrt{\frac{\varkappa}{\rho}} \quad \text{и} \quad c_s := \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

которые интерпретируются как *скорости* продольной и поперечной волновых мод (p -волн и s -волн соответственно); при этом $c_p > c_s$ всюду в $\bar{\Omega}$. Скорости определяют две конформно-евклидовых метрики с элементами длины $dl^2 = |dx|^2 / c_\alpha^2$, $\alpha = p, s$ ($|dx|^2$ – элемент длины в \mathbb{R}^3). Каждая метрика определяет в $\bar{\Omega}$ свою риманову структуру и соответствующие объекты: окрестности $\Omega_\alpha^r[A]$, эйконалы τ_α , геодезические l_γ^α , лунки $\omega_{\gamma, \varepsilon; \alpha}^r$ и др. В силу соотношения скоростей всегда выполнено вложение $\Omega_s^r[A] \subset \Omega_p^r[A]$.

- Рассмотрим начально-краевую задачу I^T вида

$$\rho u_{tt} = Lu \quad \text{в } \Omega \times [0, T], \quad (1.86)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}, \quad (1.87)$$

$$u = f \quad \text{на } \Gamma \times [0, T] \quad (1.88)$$

с граничным управлением (\mathbb{R}^3 -значной функцией) $f = f(\gamma, t)$. Управление описывает смещения точек границы, инициирующие волновой процесс в Ω . Решение $u = u^f(x, t)$ (*волна*) есть \mathbb{R}^3 -значная функция, описывающая смещения точек среды в Ω . Для гладких f , аннулирующихся вблизи $t = 0$ (класса \mathcal{M}^T), задача имеет единственное классическое гладкое решение u^f .

- Во всех вариантах ВС-метода для динамических задач принципиальны два свойства волн: конечность скорости распространения и полнота.

Первое свойство в системе Ламе имеет место: для управлений, действующих с $\sigma \subset \Gamma$ (класса \mathcal{M}_σ^T), выполнено соотношение

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \Omega_p^t[\sigma], \quad t > 0, \quad (1.89)$$

вполне аналогичное (1.14). Оно означает, что упругие волны распространяются со скоростью быстрой моды. Как следствие, можно оптимизировать постановку (1.86)–(1.88), перейдя к аналогу акустической задачи I_*^T (с заменой Ω^T на Ω_p^T и τ на τ_p). Корректным оказывается и соответствующее расширение по гиперболичности – аналог акустической задачи I_*^{2T} в области

$$\mathcal{D}_p^{2T} := \{(x, t) \mid x \in \Omega_p^T \setminus \Gamma, 0 < t < 2T - \tau_p(x)\}.$$

С расширенной задачей связан адекватный аналог R_*^{2T} расширенного акустического оператора реакции (см. [50], [27], [79]). Он вполне определяется параметрами Ламе λ , μ в “быстрой” подобласти Ω_p^T , заполняемой волнами к моменту $t = T$.

- С полнотой ситуация сложнее. Пусть

$$\mathcal{U}_\sigma^T := \{u^f(\cdot, T) \mid f \in \mathcal{M}_\sigma^T\}$$

суть достижимые множества в системе Ламе; обозначим

$$\mathcal{H} := L_2(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}\langle A \rangle := \chi_A \mathcal{H} := \{\chi_A u \mid u \in \mathcal{H}\}.$$

Отметим вложение $\mathcal{U}_\sigma^T \subset \mathcal{H}\langle \Omega_p^T[\sigma] \rangle$, следующее из (1.89). В отличие от акустической и электромагнитной систем, в системе Ламе это вложение, вообще говоря, не плотно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть σ есть открытое подмножество границы. При любом положительном $T < \inf\{t > 0 \mid \Omega_s^t[\sigma] = \Omega\}$ справедливы соотношения

$$\chi_{\Omega_s^T[\sigma]} \overline{\mathcal{U}_\sigma^T} = \mathcal{H}\langle \Omega_s^T[\sigma] \rangle, \quad \mathcal{H}\langle \Omega_p^T[\sigma] \rangle \ominus \overline{\mathcal{U}_\sigma^T} \neq \{0\}.$$

Доказательство см. в [50]; оно основано на векторном варианте теоремы Хольмгрена–Йона–Татару [72]. О первом соотношении можно говорить как о полноте волн в “медленной” подобласти $\Omega_s^T[\sigma]$, заметаемой волнами обоих типов. Второе показывает, что в зазоре $\Omega_p^T[\sigma] \setminus \Omega_s^T[\sigma]$, который покрывается только p -волнами, полноты нет.

Строение достижимого множества в зазоре – открытый вопрос, без ответа на который невозможно определить характер действия волновых проекторов P_σ^T в \mathcal{H} на \mathcal{U}_σ^T . Продвинуться удалось лишь в модельной задаче для системы типа Ламе, в которой эволюция волн описывается более простым оператором $L = \nabla \varkappa \operatorname{div} - \operatorname{rot} \mu \operatorname{rot}$ и $\rho = 1$. В этом случае $\mathcal{U}_\sigma^T|_{\Omega_p^T[\sigma] \setminus \Omega_s^T[\sigma]}$ состоит из потенциальных полей и действие волновых проекторов описывается вполне эффективно, подобно (1.75): см. [20].

- Динамическая обратная задача для системы Ламе состоит в восстановлении скоростей c_p и c_s в областях Ω_p^T и Ω_s^T соответственно по заданному оператору R_*^{2T} . Такая постановка оптимальна по времени и мотивирована, в частности, приложениями в геофизике.

Для системы типа Ламе эта задача решена тремя способами. В [27] в системе выделяются две подсистемы – акустическая (для p -волн) и электрическая (для s -волн). Все управления удается разделить на два класса, каждый из которых возбуждает только волны одного типа. В результате обратная задача распадается на отдельные задачи для подсистем, каждая из которых решается ВС-методом. Слабость подхода в том, что разделение управлений использует специфические свойства оператора реакции, отсутствующие в полной системе Ламе.

Более перспективны два других варианта, которые используют лунки¹⁶ и амплитудные формулы [78], [79]. Есть основания полагать, что оба они непосредственно, без каких-либо изменений, применимы в задаче для полной системы Ламе, но это гипотеза. Проблема в том, что не удается эффективно описать действие волновых проекторов.

¹⁶Отметим любопытный эффект: в системе типа Ламе h -лунка состоит из двух компонент $\mathcal{H}\langle \omega_{\gamma,\varepsilon;p}^r \rangle$ и $\mathcal{H}\langle \omega_{\gamma,\varepsilon;s}^r \rangle$, локализованных вблизи концов быстрой и медленной геодезических $l_\gamma^p[0, r]$ и $l_\gamma^s[0, r]$. При этом p -лунка содержит только потенциальные поля, а s -лунка – только соленоидальные [43]. Наше предположение состоит в том, что аналогичное расщепление лунок имеет место и в полной системе Ламе. Подтвердив его, можно было бы существенно продвинуться в решении обратной задачи.

1.10. Комментарии. ВС-метод существует уже тридцать лет и имеет в активе ряд выразительных достижений. К ним мы, в частности, относим решение многомерных динамических обратных задач в оптимальных по времени постановках (восстановление по R_*^{2T}). Такие задачи вряд ли могут быть решены другими средствами. В то же время “передний край” подхода весьма изрезан: остается нерешенным ряд важных задач. Обсудим некоторые из них и наметим возможные направления дальнейшей работы.

Проблема младших членов. В ВС-методе есть давняя “больная” тема: восстановление переменных коэффициентов σ и $b = \{b^1, \dots, b^n\}$ в волновом уравнении

$$u_{tt} - \Delta u + \sigma u_t + b \cdot \nabla u + qu = 0.$$

Подчеркнем, что речь идет об *оптимальной постановке*: требуется определить $\sigma, b|_{\Omega T}$ по R_*^{2T} . Восстановление диссипации σ актуально в медицинской томографии и геофизике (сейсмике).

Известные результаты в этом направлении – классическая теорема единственности В. М. Исакова [85] и вариант ВС-метода [17] – не оптимальны: искомые коэффициенты определяются лишь в некоторой подобласти $\Omega_*^T \subset \Omega^T$, выделяемой условиями геометрического характера. Важные результаты получены Л. Н. Пестовым в работах [99], [100]: автором предложен вариант ВС-метода, использующий технику билинейных форм. Этот вариант тоже не оптимален, но за счет увеличения времени наблюдения T дает устойчивую линейную процедуру восстановления. Числовой алгоритм на базе этого варианта разработан и успешно протестирован (Л. Н. Пестов, В. М. Филатова и др.).

Отметим, что оптимального результата до сих пор нет даже в одномерной задаче с σ . Главная трудность выявлена в [16]: определение диссипации равносильно восстановлению *нелокального* оператора, но к решению задачи это понимание не привело.

Многоскоростные системы. Речь идет о системах, в которых имеется несколько волновых мод, распространяющихся с разными скоростями и взаимодействующих друг с другом. Один из примеров – система Ламе – обсуждался выше. Важное и интересное обобщение – обратные задачи для *анизотропных* моделей теории упругости. Работ на эту тему много, но оптимальное по времени восстановление – трудный открытый вопрос. То же относится к задачам кристаллооптики в электродинамике. Разработка вариантов ВС-метода для таких систем – одно из наиболее интересных и перспективных направлений его развития.

Нестационарные системы. Так называют системы, в которых эволюция определяется параметрами (операторами), зависящими от времени. Обратные задачи для таких систем с одной пространственной переменной изучались, в частности, в [97]. Многомерные задачи – важная, но малоисследованная область. К ним относится, например, электромагнитная томография поля тяготения “живой” звезды: восстановление нестационарной метрики в режиме реального времени. Здесь отметим пионерские работы Г. И. Эскина [73], [75], использующие идеи и инструменты ВС-метода. Упомянем работу того же автора [74] по восстановлению параметров движущейся среды.

Устойчивость. В обратных задачах вопрос об устойчивости решений в общей форме ставится так: обеспечивает ли близость данных (например, операторов реакции) близость подлежащих восстановлению объектов (коэффициентов, метрик и др.)? Этой важной теме посвящено большое количество статей и книг: см. [85], [101], [102] и др. Такие результаты имеются в многомерных обратных спектральных задачах: см. [2], [84]. В задачах для волнового уравнения их гораздо меньше [105], [108].

В ВС-методе адекватной устойчивостью обладает версия, использующая технику билинейных форм (Л. Н. Пестов [99], [100]). Однако она использует времена наблюдения $T \geq T_*$, а вопрос об устойчивости вариантов 1–3, доставляющих *оптимальную по времени* реконструкцию в многомерных задачах, остается открытым. Причина – в сложности процедур, по которым выполняется реконструкция. Возможным подходом является изучение устойчивости треугольной факторизации $C^T = (V^T)^* V^T$, описанной в п. 1.5.5. Однако факторизация связана с обращением C^T , и проблема состоит в уже упоминавшемся факте: в многомерных задачах связывающий оператор не является изоморфизмом. Остается надеяться, что задача факторизации все же условно-корректна в каком-то слабом смысле.

Характеризация данных. Под характеристикой понимается описание данных, дающее необходимые и достаточные условия разрешимости соответствующей обратной задачи. Не вполне четкое пожелание к такому описанию состоит в его “эффективности”. Под этим понимают возможность проверить условия, не решая саму обратную задачу. В многомерных обратных спектральных задачах такие результаты известны [76], [98]; в динамических задачах, особенно в оптимальных постановках, их мало. В [19] предложена характеристика R_*^{2T} , обеспечивающая разрешимость “в малом”; в недавней работе [60] приведены условия разрешимости в задаче для волнового уравнения с потенциалом. В обеих работах эти условия обеспечивают выполнимость процедуры реконструкции по ВС-методу. Список условий довольно велик, и считать ли их эффективными – все же дело вкуса. К примеру, в [60] одним из ключевых условий является коммутирование модельных волновых проекторов \tilde{P}_σ^s . Допускает ли оно проверку – скорее вопрос дефиниций. С большей определенностью об эффективности можно говорить в одномерных задачах: см. ниже раздел 3. В многомерных задачах длинный список условий типичен и, вероятно, неизбежен; как пример, приведем характеристику в задаче реконструкции риманова многообразия по спектральной тройке [67].

2. Импедансная томография

2.1. Постановки. В общем случае задача ИТ ставится для гладкого компактного риманова многообразия произвольной размерности $n \geq 2$ с краем.

Прямая задача имеет вид

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \Gamma, \quad (2.1)$$

$$u|_\Gamma = f. \quad (2.2)$$

При гладком f она имеет единственное классическое гладкое решение $u = u^f(x)$. С задачей ассоциируется оператор Кальдерона¹⁷

$$\Lambda: C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma), \quad \Lambda f := u_\nu^f|_\Gamma,$$

где $(\cdot)_\nu$ – производная по внешней нормали.

Обратная задача (*задача ИТ*) состоит в восстановлении Ω по оператору Кальдерона. В точном смысле, как и в волновой томографии, требуется по Λ построить копию Ω – риманово многообразие $\tilde{\Omega}$ с краем $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ и оператором $\tilde{\Lambda}$ такое, что $\tilde{\Lambda} = \Lambda$.

2.2. Случай $n = 2$. Отметим специфику случая $\dim \Omega = 2$. Пусть Ω и Ω' суть два многообразия с метриками g и g' и общим краем Γ , связанные диффеоморфизмом $j: \Omega' \rightarrow \Omega$ таким, что $g' = \rho j^* g$, где ρ – гладкая положительная функция (т. е. Ω и Ω' конформно-эквивалентны). Тогда $\Lambda' = \rho^{-1/2} \Lambda$, а дополнительное условие $\rho|_\Gamma = 1$ ведет к равенству $\Lambda' = \Lambda$. Это означает, что класс эквивалентных многообразий не исчерпывается изометричными многообразиями, а, как минимум, содержит все конформно-эквивалентные. Как будет показано, последние этот класс исчерпывают¹⁸.

2.2.1. Алгебры. Дополнительно предположим, что Ω ориентировано и согласованным образом ориентирован его край Γ . Пусть $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ есть коммутативная банахова алгебра непрерывных на Ω комплекснозначных функций с нормой $\|a\| = \sup_{\Omega} |a(\cdot)|$, символ \star обозначает оператор Ходжа на Ω и $i = \sqrt{-1}$.

Главную роль в реконструкции сыграет алгебра голоморфных функций

$$\mathfrak{A} := \{a = u + u_* i \mid a \in C_{\mathbb{C}}(\Omega) \cap C_{\mathbb{C}}^\infty(\Omega \setminus \Gamma); du_* = \star du \text{ в } \Omega \setminus \Gamma\}. \quad (2.3)$$

Приведем ее известные свойства.

1. Алгебра \mathfrak{A} есть замкнутая подалгебра в $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Ее гладкая часть $\mathfrak{A}^\infty := \mathfrak{A} \cap C_{\mathbb{C}}^\infty(\Omega)$ плотна в \mathfrak{A} .
2. Меры Дирака $\delta_x: a \mapsto a(x)$ исчерпывают спектр $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$ алгебры \mathfrak{A} . Как следствие, соответствие $\beta: x \mapsto \delta_x$ есть гомеоморфизм Ω на $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$, а преобразование Гельфанда (1.55) сводится к пересадке функций с Ω на $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$ по этому соответствию: $Ga(\cdot) = a(\beta^{-1}(\cdot))$.

По второму свойству¹⁹ алгебра \mathfrak{A} кодирует многообразие в нужном нам смысле: каким-либо образом получив ее изометрическую копию $\tilde{\mathfrak{A}}$, внешний наблюдатель найдет спектр $\mathcal{M}_{\tilde{\mathfrak{A}}}$, который в силу соотношений $\mathcal{M}_{\tilde{\mathfrak{A}}} \cong \mathcal{M}_{\mathfrak{A}} \cong \Omega$ окажется искомой копией оригинала Ω .

- Пусть

$$\mathfrak{B} := \{a|_\Gamma \mid a \in \mathfrak{A}\} \subset C_{\mathbb{C}}(\Gamma)$$

¹⁷ другое название – DN-оператор; по принятой нами терминологии это оператор реакции.

¹⁸ Этот результат впервые был представлен в статье [92]. К сожалению, полностью понять ее содержание и подтвердить правильность доказательства мы не смогли. Другой подход к двумерной задаче ИТ, использующий технику многомерных интегралов типа Коши, см. в [82]. Подход предлагает процедуру реконструкции, приводит к характеристизации данных (оператора Λ) и, что важно, допускает численную реализацию: см. [1].

¹⁹ оно хорошо известно в “фольклоре”; набросок доказательства имеется в [22].

есть алгебра граничных значений. Гладкая подалгебра

$$\mathfrak{B}^\infty := \{a|_\Gamma \mid a \in \mathfrak{A}^\infty\} \subset C^\infty(\Gamma)$$

плотна в \mathfrak{B} .

В силу принципа максимума соответствие $a \mapsto a|_\Gamma$ есть изометрия алгебр \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . Отсюда имеем гомеоморфизм $\mathcal{M}_\mathfrak{A} \cong \mathcal{M}_\mathfrak{B}$ и его следствие $\mathcal{M}_\mathfrak{B} \cong \Omega$. Значит, алгебра \mathfrak{B} подойдет в качестве копии алгебры \mathfrak{A} . Наблюдателю остается извлечь \mathfrak{B} из оператора Λ .

2.2.2. Оператор Гильберта. На вещественном гладком линеале $C^\infty(\Gamma)$ определим дифференцирование $f \mapsto \dot{f}$ по длине в направлении, задаваемом ориентацией края. Обозначим

$$\dot{C}^\infty(\Gamma) := \{\dot{f} \mid f \in C^\infty(\Gamma)\}$$

и отметим, что оператор Λ аннулирует постоянные функции. В силу последнего, в $\dot{C}^\infty(\Gamma)$ корректно определен *оператор Гильберта*

$$H := \Lambda J,$$

где J есть интегрирование: $J\dot{f} = f \pmod{\text{const}}$.²⁰

В определении (2.3) функции $u = \text{Re } a$ и $u_* = \text{Im } a$ сопряжены по Коши–Риману. Как следствие, обе они гармоничны: $\Delta u = \Delta u_* = 0$ в $\Omega \setminus \Gamma$. Каждая является решением задачи (2.1), (2.2), первая – с $f = u|_\Gamma$, а вторая – с $f_* = u_*|_\Gamma$:

$$u = u^f \quad \text{и} \quad u_* = u^{f*}.$$

Условия Коши–Римана на крае приводят к соотношению $\dot{f}_* = H\dot{f}$ и его следствию $\dot{f} = -H^2\dot{f}$. Последнее равносильно равенству

$$(\mathbb{I} + H^2)\dot{f} = 0 \quad \text{для } f \in C^\infty(\Gamma). \quad (2.4)$$

Будем говорить, что функция f имеет сопряженную f_* , если $u^f + u^{f*}i \in \mathfrak{A}$, т.е. если решения u^f и u^{f*} задачи (2.1), (2.2) суть гармонически сопряженные функции. Если Ω гомеоморфно кругу $D \subset \mathbb{C}$, то любая гладкая f имеет сопряженную f_* . Если же $\Omega \not\cong D$, то это не верно, а равенство (2.4) дает необходимое условие существования сопряженной функции. Как показано в [22], оно является и достаточным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Гладкая функция f имеет (гладкую) сопряженную f_* тогда и только тогда, когда $(\mathbb{I} + H^2)\dot{f} = 0$. В этом случае*

$$\dot{f}_* = H\dot{f} \quad \text{и} \quad f + f_*i \in \mathfrak{B}^\infty.$$

²⁰Если $\Omega = D \subset \mathbb{C}$ – единичный круг, то H совпадает с классическим преобразованием Гильберта, связывающим вещественную и мнимую части функции, голоморфной в D .

2.2.3. *Реконструкция.* Пусть наблюдателю известен оператор Λ на линейном пространстве $C^\infty(\Gamma)$. Вместе с ним он располагает оператором Гильберта $H = \Lambda J$, действующим в $\dot{C}^\infty(\Gamma)$.

- Критерий предложения 18 позволяет отобрать гладкие f такие, что $\dot{f} \in \text{Ker}(\mathbb{I} + H^2)$, и найти соответствующие f_* . Всевозможные функции $f + f_*i$ образуют подалгебру \mathfrak{B}^∞ . Замыкая последнюю по норме в $C_\mathbb{C}(\Gamma)$, наблюдатель получает алгебру граничных значений \mathfrak{B} , изометричную недоступной ему алгебре \mathfrak{A} .²¹

- Проводя геометризацию алгебры \mathfrak{B} по Гельфанду, наблюдатель определяет спектр $\mathcal{M}_\mathfrak{B}$, связанный с многообразием (неизвестным) гомеоморфизмом $\beta: \Omega \rightarrow \mathcal{M}_\mathfrak{B}$, и восстанавливает на спектре функции $\tilde{a}(\cdot) = a(\beta^{-1}(\cdot))$. Последние суть функции из \mathfrak{A} , пересаженные с Ω на $\mathcal{M}_\mathfrak{B}$.

- Семейство функций $\{\tilde{a} = GF \mid F = f + f_*i \in \mathfrak{B}^\infty\}$ определяет на $\mathcal{M}_\mathfrak{B}$ структуру риманова многообразия с краем следующим образом.

Край $\tilde{\Gamma} = \beta\Gamma \subset \mathcal{M}_\mathfrak{B}$ состоит из мер δ_γ , $\gamma \in \Gamma$, и отождествляется с краем Γ по правилу $\delta_\gamma \equiv \gamma$.

Функции $u = \text{Re } a$ и $u_* = \text{Im } a$ можно использовать как локальные координаты x^1, x^2 на Ω . Соответственно, наблюдатель может использовать функции $\tilde{x}^1 = \text{Re } \tilde{a}$, $\tilde{x}^2 = \text{Im } \tilde{a}$ в качестве локальных координат на $\mathcal{M}_\mathfrak{B}$ и тем самым оснастить последнее структурой вещественного двумерного гладкого многообразия.

В Ω , в координатах x^1, x^2 , уравнение $\Delta u^f = 0$ имеет известный вид

$$\partial_{x^i} g^{1/2} g^{ij} \partial_{x^j} u^f = 0 \quad (i, j = 1, 2).$$

В $\mathcal{M}_\mathfrak{B}$ ему отвечает “пересаженное” уравнение

$$\partial_{\tilde{x}^i} \tilde{g}^{1/2} \tilde{g}^{ij} \partial_{\tilde{x}^j} \tilde{u}^f = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

для $\tilde{u}^f := \text{Re } \tilde{a}$ с $\tilde{a} = G(f + f_*i)$. Записывая его для разных $f \in C^\infty(\Gamma)$, наблюдатель может использовать это уравнение для нахождения функций $\tilde{g}^{1/2} \tilde{g}^{ij}$. Зная последние, он определит компоненты метрического тензора \tilde{g}_{ij} с точностью до произвольного гладкого положительного множителя ρ . Выбрав этот множитель так, чтобы выполнялось условие $\rho|_\Gamma = 1$, наблюдатель получает риманово многообразие $\tilde{\Omega} := \mathcal{M}_\mathfrak{B}$ с некоторой метрикой \tilde{g}_{ij} .

В результате многообразия $(\tilde{\Omega}, \tilde{g}_{ij})$ и (Ω, g_{ij}) по построению конформно-эквивалентны, имеют общий край и выполнено равенство $\tilde{\Lambda} = \Lambda$. *Реконструкция закончена.*

2.3. О случае $n \geq 3$. Задача ИТ в размерностях больше 2 является одной из центральных в теории обратных задач. До сих пор должным образом она не решена: известные результаты относятся к многообразиям с весьма специальными типами метрик.

²¹В терминах ВС-метода \mathfrak{B} есть доступная наблюдателю копия алгебры \mathfrak{A} .

Один из подходов использует геометро-оптические решения, являющиеся продвинутой версией экспоненциально растущих функций Грина–Фаддеева [88], [70].

В работе [37] предпринята попытка использовать алгебры в трехмерной задаче ИТ. Проиллюстрируем ее идею простым примером.

- Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой границей Γ . Для упрощения записи удобно включить границу в состав самой области, так что $\Omega = \overline{\Omega}$. Пару $p := \{\alpha, u\}$, состоящую из вещественной функции α и векторного поля u , заданных в Ω , будем называть *кватернионным полем*.

Множество непрерывных полей

$$\mathcal{C}(\Omega) := \{p \mid \alpha \in C(\Omega), u \in C(\Omega; \mathbb{R}^3)\}$$

с нормой

$$\|p\| = \sup_{x \in \Omega} [\alpha^2(x) + |u(x)|^2]^{1/2}$$

является банаховым пространством.

Для $p = \{\alpha, u\}$ и $q = \{\beta, v\}$ определим “кватернионное” произведение

$$pq := \{\alpha\beta - u \cdot v, \alpha v + \beta u + u \wedge v\}. \quad (2.5)$$

Пространство $\mathcal{C}(\Omega)$ с таким умножением есть банахова алгебра. Она не коммутативна.

- Введенная алгебра содержит (под)пространство *гармонических* полей

$$\mathcal{Q}(\Omega) := \{p \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \nabla \alpha = \text{rot } u, \text{ div } u = 0 \text{ в } \Omega \setminus \Gamma\}. \quad (2.6)$$

Первое из определяющих его элементов условий в эквивалентной записи имеет вид $d\alpha = \star du'$, где u' есть 1-форма, отвечающая полю u .

Родство условий Коши–Римана в (2.6) и (2.3) мотивирует попытку рассматривать $\mathcal{Q}(\Omega)$ как трехмерный аналог алгебры \mathfrak{A} . Однако такая попытка встречает немедленное препятствие: пространство $\mathcal{Q}(\Omega)$ не является алгеброй (умножение (2.5) таково, что из $p, q \in \mathcal{Q}(\Omega)$, вообще говоря, не следует $pq \in \mathcal{Q}(\Omega)$). Тем не менее $\mathcal{Q}(\Omega)$ содержит подпространства-алгебры, к описанию которых мы переходим.

- Пусть $e \in \mathbb{R}^3$, $|e| = 1$, есть орт и $e(\cdot) \equiv e$ – постоянное векторное поле в Ω . Функцию φ назовем *аксиальной* (осевой, с осью e), если $\nabla \varphi \cdot e = 0$. Будем говорить, что кватернионное поле $p = \{\varphi, \psi e\}$ является аксиальным, если аксиальны φ и ψ . Следующие факты проверяются несложными вычислениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. Пусть φ, ψ – функции, гладкие в Ω . Поле $p = \{\varphi, \psi e\}$ является гармоническим в том и только том случае, если $\nabla \varphi \wedge e = \nabla \psi$. При этом функции φ и ψ аксиальны с осью e и гармоничны: $\Delta \varphi = \Delta \psi = 0$ в $\Omega \setminus \Gamma$. Если p и $q = \{\lambda, \mu e\}$ суть два таких поля, то их произведение имеет вид $pq = \{\varphi\lambda - \psi\mu, [\varphi\mu + \psi\lambda]e\}$ и тоже является гармоническим полем.

Как видно, содержащиеся в $\mathcal{Q}(\Omega)$ аксиальные поля образуют коммутативные алгебры \mathcal{A}_e , индексруемые ортами $e \in S^2$.

• Пусть e_1, e_2, e_3 есть стандартный базис в \mathbb{R}^3 . Пары {число, вектор} вида $\{a_0, a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3\}$ будем отождествлять с кватернионами $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}$.

Линейные операторы

$$\delta_x : \mathcal{Q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}, \quad \delta_x(p) := p(x), \quad x \in \Omega,$$

суть кватернионные аналоги мер Дирака. На аксиальных алгебрах они мультипликативны: для $p, q \in \mathcal{A}_\epsilon$ выполнено равенство

$$\delta_x(pq) = \delta_x(p)\delta_x(q).$$

Для некоторого класса областей последнее свойство *характеризует* меры δ_x среди прочих \mathbb{H} -значных линейных функционалов на $\mathcal{Q}(\Omega)$.

• Работа [37] – попытка найти аналоги аксиальных алгебр и кватернионных мер на трехмерном римановом многообразии и использовать их для реконструкции. Поиски стимулирует важное обстоятельство: во *всех* размерностях ≥ 3 имеют место адекватные версии предложения 18. Они играют ключевую роль в построении копий сопряженных (по Коши–Риману) полей и позволяют напрямую извлекать из оператора Λ содержательную информацию о топологии Ω : см. [25], [55].

Успех попытки оказался ограниченным. Как выяснилось, аксиальные алгебры “выживают” только на многообразиях с метриками весьма специального вида. Именно, требуется, чтобы элемент длины допускал представление

$$dl^2 = d\tau^2 + \rho(\tau)h_{ij}(\gamma) d\gamma^i d\gamma^j$$

в подходящих полугеодезических координатах γ^1, γ^2, τ .

Тем не менее мы сохраняем надежду на подход: предполагается, что Ω все же можно идентифицировать как “спектр” некоторого алгебраического объекта, копия которого доступна внешнему наблюдателю, располагающему оператором Λ . Остается понять, что это за объект.

3. Одномерный ВС-метод

Оригинальный вариант подхода [11] и его последующие разработки предназначались для решения многомерных коэффициентных обратных задач. Позже ВС-метод использовался и в задачах с одной пространственной переменной. Приведем некоторые результаты.

• Речь идет о классических интегральных уравнениях теории обратных задач.

Уравнения Гельфанда–Левитана появились в обратной спектральной задаче для оператора Штурма–Лиувилля $L = -d^2/dx^2 + q$, состоящей в восстановлении потенциала q на полуоси по спектральной функции оператора L . В соответствующей динамической задаче требуется определить потенциал q в уравнении $u_{tt} + Lu = 0$ по оператору реакции R_*^{2T} .

Уравнения М. Г. Крейна используются для решения обратной задачи о восстановлении плотности неоднородной струны по ее спектральной функции. Динамическая задача состоит в нахождении функции ρ в уравнении $u_{tt} + Lu = 0$ с $L = -\rho^{-1} d^2/dx^2$ по оператору R_*^{2T} .

Уравнения Марченко решают обратную спектральную задачу рассеяния для оператора $L = -d^2/dx^2 + q$: требуется восстановить потенциал q на полуоси по заданному коэффициенту отражения (элементу матрицы рассеяния). Динамическая задача состоит в определении потенциала в уравнении $u_{tt} + Lu = 0$ по адекватному оператору реакции R .

Связи и параллели между этими задачами и уравнениями хорошо известны. Тем не менее наиболее четко их родство и общая динамическая природа проявляются в ВС-методе: каждое из уравнений равносильно соответствующей задаче граничного управления $u^f(\cdot, T) = y$ с целевой функцией y , удовлетворяющей уравнению $Ly = 0$ [51]. Такой взгляд на классические уравнения приводит к их естественным многомерным версиям [12]. Адекватный ВС-аналог уравнений Крейна решает обратные задачи на графах [57].

ВС-метод дает еще одну единую интерпретацию: в каждой из задач решения классических уравнений суть ядра модельных волновых проекторов \tilde{P}^s . В работе [58] это прослежено на примере уравнения Марченко в динамической задаче рассеяния с локально возмущенным центробежным потенциалом. Ее особенность состоит в нарушении управляемости аналога системы α^T : входящие из бесконечности волны не полны в областях (частях полуоси), которые они заходят. Нарушение имеет ту же природу, что и в трехмерной задаче [59], но “недостижимые” подпространства $\mathcal{H}^T \ominus \mathcal{U}^T$ здесь конечномерны.

• Ряд работ по ВС-методу посвящен одномерным двухскоростным динамическим системам вида

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - (Gu_x)_x + Au_x + Bu &= 0, & x > 0, & 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0, & x \geq 0, \\ u|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где коэффициенты ρ , G , A , B суть (2×2) -матрицы-функции от x (при этом ρ и G диагональны и положительны), $f = f(t)$ – граничное управление (\mathbb{R}^2 -значная функция), $u = u^f(x, t)$ – решение (\mathbb{R}^2 -значная функция). Оператор реакции $R^T: f \mapsto u_x^f|_{x=0}$ имеет адекватное расширение по гиперболичности R_*^{2T} . Обратная задача состоит в восстановлении коэффициентов по R_*^{2T} .

Как и в трехмерной системе Ламе, здесь имеются два типа волн, распространяющихся с разными скоростями и взаимодействующих друг с другом. Пример из приложений – балка Тимошенко. Как и в системе Ламе, из-за различия в скоростях волновых мод нарушается управляемость: достижимые множества \mathcal{U}^T не полны в естественных объемлющих пространствах \mathcal{H}^T . Тем не менее в одномерной системе все проще: удается разобраться со строением достижимых множеств и действием соответствующих волновых проекторов. Как следствие, получена характеристика данных – необходимые и достаточные условия на оператор, при которых он является оператором реакции одномерной двухскоростной системы [33], [53].

• Осложнения, связанные с отсутствием управляемости, встречаются и в односторонних системах. Помимо упоминавшейся задачи рассеяния [58], этот эффект имеет место в системе Дирака

$$\begin{aligned} iu_t + Ju_x + Vu &= 0, & x > 0, & 0 < t < T, \\ u|_{t=0} &= 0, & x &\geq 0, \\ u_1|_{x=0} &= f, & 0 &\leq t \leq T, \end{aligned}$$

где $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ – матричный потенциал, в котором $p = p(x)$ и $q = q(x)$ суть вещественные функции, $f = f(t)$ есть \mathbb{C}^2 -значное граничное управление, $u = \begin{pmatrix} u_1^f(x, t) \\ u_2^f(x, t) \end{pmatrix}$ есть \mathbb{C}^2 -значное решение. Оператор реакции $R^T: f \mapsto u_2^f(0, \cdot)$ имеет адекватное расширение R_*^{2T} . Обратная задача состоит в восстановлении $V|_{\Omega^T}$ по R_*^{2T} .

Волны в системе распространяются с единичной скоростью и заматают интервалы $\Omega^T := [0, T]$ полуоси $x \geq 0$. При этом достижимые множества $\mathcal{U}^T = \{u^f(\cdot, T) \mid f \in L_2([0, T]; \mathbb{C}^2)\}$ в заматаемых областях не полны:

$$L_2(\Omega^T; \mathbb{C}^2) \ominus \mathcal{U}^T \neq \{0\} \quad \text{при любом } T > 0.$$

Осложнение с неполнотой волн преодолевается с помощью приема, предложенного В. С. Михайловым: за счет удвоения размерности пространства управлений удается достичь управляемости соответствующей расширенной системы. В последней обратная задача решается стандартными средствами ВС-метода: см. статью [52]; в ней же приводится характеристическое описание оператора R_*^{2T} .

• В свое время в обратных задачах превалировал идущий от классических работ интерес к спектральным постановкам. Подходы к решению динамических задач сводились к рекомендации: 1) сделав преобразование Фурье по времени, перейти к спектральной задаче и определиться с ее решением; 2) вернувшись к Фурье-преобразованиям, оформить результат для динамической постановки. Образно говоря, частотно-временной дуализм работал лишь в одном направлении.

Разработка ВС-метода показала, что обратное направление тоже вполне продуктивно: целый ряд фактов спектральной теории получил прозрачную динамическую интерпретацию. Выявлены тонкие связи между разными типами данных в обратных задачах [94].

Решена динамическая обратная задача для дискретного оператора Шрёдингера. Полученная в ней характеристика данных дала ответ на вопрос Б. Саймона о том, чем выделены *спектральные данные* дискретного оператора Шрёдингера среди таковых для прочих разностных операторов Якоби [93].

Выявлены соответствия с теорией Де Бранжа. В частности, достижимые множества \mathcal{U}^T оказались напрямую связаны с пространствами Де Бранжа, а решения ВС-версии уравнений Гельфанда–Левитана – с воспроизводящими

ядрами этих пространств. В развитие этих связей построены аналоги пространств Де Бранжа для системы Дирака и дискретного оператора Шрёдингера [95].

Планируется изучение связей с теорией Де Бранжа для канонических систем и разработка версии ВС-метода для соответствующей обратной задачи.

- Одномерный ВС-метод успешно справляется с характеристикой данных. Во всех случаях [58], [53], [52], [93] главное из условий на оператор \mathcal{R} (кандидат на роль оператора реакции R_*^{2T}) состоит в *положительной определенности* оператора $\mathcal{C} = 2^{-1}(S^T)^* \mathcal{R} J^{2T} S^T$ (кандидата на роль связывающего оператора C^T : см. (1.25)). Во многих случаях нетрудно предложить простые достаточные условия на \mathcal{R} , которые обеспечивают положительную определенность. В этом смысле характеристика эффективна, в отличие от ситуации в многомерных задачах, где эффективность весьма проблематична.

Главное действие при решении обратной задачи – это обращение оператора \mathcal{C} . Положительная определенность обеспечивает хорошую обратимость. Как следствие, решение задачи является устойчивым: близким \mathcal{R} отвечают близкие искомые коэффициенты. В этом смысле одномерные задачи, в отличие от многомерных, корректны. Отсутствие устойчивости в многомерных задачах и их неизбежная некорректность объясняются неограниченностью оператора \mathcal{C}^{-1} , что обсуждалось в п. 1.3.2.

- Отдельная тема в ВС-методе – обратные задачи на графах. Относить их к одномерным можно лишь условно: граф имеет топологию, что радикально отличает эти задачи от таковых с $x \in \mathbb{R}$. По той же причине прослеживается четкий водораздел: задачи для деревьев и задачи для графов с циклами. Последние значительно сложнее по многим причинам; некоторые мы затронем здесь.

В [57] по спектральным и динамическим данным восстанавливается конечный граф-дерево Ω , состоящий из струн переменной плотности. Струны скреплены во внутренних вершинах так, что выполнены стандартные условия Кирхгофа. Данные задаются в граничных вершинах $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. По ним требуется определить структуру графа и плотности струн. Задачу решает адекватная ВС-версия уравнений Крейна. Существенным образом используется *управляемость* дерева: для любой точки $x_0 \in \Omega$ за счет подбора (обобщенного) граничного управления f наблюдатель может создать волну $u^f(\cdot, T) = \delta_{x_0}$ за время T , не превосходящее половины оптического диаметра дерева. На примере показано, что версия допускает численную реализацию.

Как отмечалось, одно из преимуществ ВС-метода – восстановление параметров в реальном времени: глубина восстановления увеличивается с увеличением длительности наблюдений. Эта возможность использовалась в серии работ [3]–[7], в том числе для более сложных механических систем: графов из двухскоростных балок и др.

Основной тренд ВС-метода – идентификация мер Дирака по граничным данным – ясно прослеживается в подходе первой работы по графам [24]. Наблюдатель распознает их по характеристическому признаку: меры

$$\{c\delta_{x_0} \mid x_0 \in \Omega, c = \text{const}\}$$

суть функционалы на гладких волнах, имеющие носители нулевого оптического диаметра. Определять диаметр с границы удается благодаря тому, что граф является деревом. Выделив множество функционалов нулевого диаметра, наблюдатель снабжает его адекватной метрикой и получает *оптический образ* дерева $\tilde{\Omega}$ – изометрическую копию оригинала Ω .

Попытка распространить этот прием на графы с циклами дала некоторый результат. В [61] приведен критерий, по которому наблюдатель в принципе может проверить, является исследуемый граф деревом или содержит циклы. Однако конструктивного рецепта – как определить структуру графа с циклами – этот критерий не дает. Глубинная причина в том, что присутствие циклов приводит к нарушению управляемости динамической системы α^T , ассоциированной с графом.

• Успешное применение алгебр в АТ и ЭМТ мотивировало попытку использовать их в задачах на графах. Ожидалось, что подход, восстанавливающий столь сложный объект – многообразие произвольной размерности и топологии, – способен без особых проблем справиться с реконструкцией конечного графа. Имелась в виду та же программа: по данным обратной задачи, через модель, наблюдатель находит копию алгебры эйконалов, проводит ее геометризацию и получает в качестве спектра копию графа. Жизнь оказалась сложнее и интересней.

В [62] введен аналог алгебры акустических эйконалов для *произвольного* конечного связного графа, состоящего из однородных струн. Для соответствующей динамической системы α^T удалось выяснить строение достижимых множеств \mathcal{U}_γ^s , отвечающих управлениям, которые действуют с граничных вершин $\gamma \in \Gamma$, и описать действие волновых проекторов P_γ^s и операторных эйконалов

$$\tau^\gamma = \int_0^T s dP_\gamma^s.$$

Описание оказалось достаточно эффективным для того, чтобы делать заключения о строении алгебры \mathfrak{E} , порожденной эйконалами. Установлено, что она допускает представление в виде конечной прямой суммы

$$\mathfrak{E} = \bigoplus_j \mathfrak{b}_j, \quad (3.1)$$

в которой слагаемые \mathfrak{b}_j суть *блок-алгебры*. Каждая \mathfrak{b}_j изометрична подалгебре $\tilde{\mathfrak{b}}_j \subset \mathfrak{B}(L_2([0, h_j]; \mathbb{R}^{M_j}))$, образованной операторами, которые умножают элементы пространства $L_2([0, h_j]; \mathbb{R}^{M_j})$ (векторнозначные функции от $r \in [0, h_j]$) на матрицы-функции вида $B_{\gamma,j}^* D_{\gamma,j}(r) B_{\gamma,j}$ ($\gamma \in \Gamma$). Здесь каждая $B_{\gamma,j}$ есть постоянная матрица-проектор; $D_{\gamma,j}$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой суть линейные функции вида $T_{\gamma,j} \pm r$, где $T_{\gamma,j} \in (0, T]$. Эти функции непрерывны, и, следовательно, имеет место вложение алгебр $\tilde{\mathfrak{b}}_j \subset C([0, h_j]; \mathbb{M}^{M_j})$, где последняя есть алгебра непрерывных вещественных $(M_j \times M_j)$ -матриц-функций на $[0, h_j]$.

Алгебра (3.1) не коммутативна, и превратить ее в коммутативную какой-либо факторизацией невозможно. Как следствие, вместо преобразования Гельфанда ее геометризация должна использовать другие средства: примитивные

идеалы, спектр и топологию по Джекобсону и др. На простых примерах показано, что возможен интересный обусловленный некоммутативностью эффект: соответствующий спектр может оказаться *нехаусдорфовым* пространством, содержащим группы неразделимых точек (кластеры). Есть основания полагать, что их наличие и состав связаны с внутренними вершинами и их кратностью. В представлении (3.1) прослеживается связь строения алгебры \mathfrak{E} со структурой графа, но эта связь имеет весьма неявный характер. Предстоит разработка увлекательной темы – связи алгебраических инвариантов \mathfrak{E} с топологическими инвариантами и структурой Ω .

Добавление при корректуре. Найден кандидат на роль “алгебраического объекта”, о котором говорилось в самом конце п. 2.3. Для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ это алгебра

$$\mathfrak{B} := \vee \{p|_{\Gamma} \mid p \in \mathcal{Q}(\Omega)\} \subset C(\Gamma; \mathbb{H}),$$

порожденная граничными значениями гармонических полей; она имеет адекватный аналог в случае, когда Ω – риманово многообразие. Пусть $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ есть ее структурное пространство (множество примитивных идеалов: см. [96]). Мы полагаем и надеемся на то, что $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}} \cong \Omega$. Подтверждение этой гипотезы было бы существенным продвижением в решении трехмерной задачи ИТ.

Список литературы

- [1] A. D. Agaltsov, G. M. Henkin, “Explicit reconstruction of Riemann surface with given boundary in complex projective space”, *J. Geom. Anal.*, **25**:4 (2015), 2450–2473; <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00912925>.
- [2] G. Alessandrini, “Stable determination of conductivity by boundary measurements”, *Appl. Anal.*, **27**:1-3 (1988), 153–172.
- [3] S. A. Avdonin, A. S. Blagoveshchensky, A. E. Choque Rivero, V. S. Mikhaylov, “Dynamical inverse problem for two-velocity systems on finite trees”, *Proceedings of the international conference “Days on diffraction 2016”* (St. Petersburg, 2016), 2016, 25–31.
- [4] S. Avdonin, A. Choque Rivero, G. Leugering, V. Mikhaylov, “On the inverse problem of the two-velocity tree-like graph”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **95**:12 (2015), 1490–1500.
- [5] S. Avdonin, G. Leugering, V. Mikhaylov, “On an inverse problem for tree-like networks of elastic strings”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **90**:2 (2010), 136–150.
- [6] S. A. Avdonin, A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, “On some applications of the boundary control method to spectral estimation and inverse problems”, *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, **6**:1 (2015), 63–78.
- [7] S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, K. B. Nurtazina, “On inverse dynamical and spectral problems for the wave and Schrödinger equations on finite trees. The leaf peeling method”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 45, Зап. науч. сем. ПОМИ, **438**, ПОМИ, СПб., 2015, 7–21.
- [8] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972, 456 с.; англ. пер.: V. M. Babič, V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory. Asymptotic methods*, Springer Ser. Wave Phenomena, **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, xi+445 pp.

- [9] C. Bardos, M. I. Belyshev, “The wave shaping problem”, *Partial differential equations and functional analysis*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **22**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996, 41–59.
- [10] C. Bardos, L. Lebeau, J. Rauch, “Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary”, *SIAM J. Control Optim.*, **30**:5 (1992), 1024–1065.
- [11] М. И. Белишев, “Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения”, *Докл. АН СССР*, **297**:3 (1987), 524–527; англ. пер.: M. I. Belishev, “On an approach to multidimensional inverse problems for the wave equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **36**:3 (1988), 481–484.
- [12] М. И. Белишев, “Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 17, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **165**, Изд-во “Наука”, Ленингр. отд., Л., 1987, 15–20; англ. пер.: M. I. Belishev, “Equations of the Gel’fand–Levitan type in a multidimensional inverse problem for the wave equation”, *J. Soviet Math.*, **50**:6 (1990), 1940–1944.
- [13] М. И. Белишев, “Волновые базисы в многомерных обратных задачах”, *Матем. сб.*, **180**:5 (1989), 584–602; англ. пер.: M. I. Belishev, “Wave bases in multidimensional inverse problems”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:1 (1990), 23–42.
- [14] М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей*, Препринт Р-1-90, ЛОМИ, Л., 1990.
- [15] М. И. Белишев, “К обоснованию правила Гюйгенса”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 24, Зап. науч. сем. ПОМИ, **218**, ПОМИ, СПб., 1994, 17–24; англ. пер.: M. I. Belishev, “Justification of Huygens’ rule”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **86**:3 (1997), 2667–2672.
- [16] М. И. Белишев, “Консервативная модель диссипативной динамической системы”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 25, Зап. науч. сем. ПОМИ, **230**, ПОМИ, СПб., 1995, 21–35; англ. пер.: M. I. Belishev, “The conservative model of a dissipative dynamical system”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **91**:2 (1998), 2711–2721.
- [17] М. И. Белишев, “О единственности восстановления младших членов волнового уравнения по динамическим граничным данным (ВС-метод)”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 29, Зап. науч. сем. ПОМИ, **249**, ПОМИ, СПб., 1997, 55–76; англ. пер.: M. I. Belishev, “On a unique recovery of lower-order terms in the wave equation from dynamical boundary measurements”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **101**:5 (2000), 3408–3421.
- [18] M. I. Belishev, “Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)”, *Inverse Problems*, **13**:5 (1997), R1–R45.
- [19] M. I. Belishev, “Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data”, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 659–682.
- [20] М. И. Белишев, “Об унитарном преобразовании в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, связанном с разложением Вейля”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 30, Зап. науч. сем. ПОМИ, **275**, ПОМИ, СПб., 2001, 25–40; англ. пер.: M. I. Belishev, “On a unitary transform in the space $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ connected with the Weyl decomposition”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **117**:2 (2003), 3900–3909.
- [21] M. I. Belishev, “How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists)”, *Ill-posed and inverse problems*, VSP, Zeist, 2002, 67–84.
- [22] M. I. Belishev, “The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method”, *SIAM J. Math. Anal.*, **35**:1 (2003), 172–182.
- [23] М. И. Белишев, “О связи данных динамических и спектральных обратных задач”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 32, Зап. науч.

- сем. ПОМИ, **297**, ПОМИ, СПб., 2003, 30–48; англ. пер.: M. I. Belishev, “Relations between the data of dynamical and spectral inverse problems”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **127**:6 (2005), 2353–2363.
- [24] M. I. Belishev, “Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC-method”, *Inverse Problems*, **20**:3 (2004), 647–672.
- [25] M. I. Belishev, “Some remarks on impedance tomography problem for 3d-manifolds”, *CUBO*, **7**:1 (2005), 43–55.
- [26] M. I. Belishev, “Boundary control method and inverse problems of wave propagation”, *Encyclopedia of mathematical physics*, v. 1, Academic Press/Elsevier Science, Oxford, 2006, 340–345.
- [27] M. I. Belishev, “Dynamical inverse problem for a Lamé type system”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **14**:8 (2006), 751–766.
- [28] M. I. Belishev, “Recent progress in the boundary control method”, *Inverse Problems*, **23**:5 (2007), R1–R67.
- [29] M. I. Belishev, “Dynamical inverse problem for the equation $u_{tt} - \Delta u - \nabla \ln \rho \cdot \nabla u = 0$ (the BC-Method)”, *CUBO*, **10**:2 (2008), 15–30.
- [30] M. Belishev, “Geometrization of rings as a method for solving inverse problems”, *Sobolev spaces in mathematics. III*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **10**, Springer, New York, 2009, 5–24.
- [31] М. И. Белишев, “О реконструкции риманова многообразия по граничным данным: теория и план численного эксперимента”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 40, Зап. науч. сем. ПОМИ, **380**, ПОМИ, СПб., 2010, 8–30; англ. пер.: M. I. Belishev, “On the reconstruction of a Riemannian manifold from boundary data: the theory and plan of a numerical experiment”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **175**:6 (2011), 623–636.
- [32] М. И. Белишев, “Определение расстояний до виртуального источника по динамическим граничным данным”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 41, Зап. науч. сем. ПОМИ, **393**, ПОМИ, СПб., 2011, 29–45; англ. пер.: M. I. Belishev, “Determination of distances to a virtual source through dynamical boundary data”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **185**:4 (2012), 526–535.
- [33] M. I. Belishev, “Boundary control method in dynamical inverse problems – an introductory course”, *Dynamical inverse problems: theory and application*, CISM Courses and Lect., **529**, Springer, Vienna, 2011, 85–150.
- [34] M. I. Belishev, “A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstruction of manifolds”, *J. Operator Theory*, **69**:2 (2013), 299–326.
- [35] M. I. Belishev, “Algebras in reconstruction of manifolds”, *Spectral theory and partial differential equations*, Contemp. Math., **640**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, 1–12.
- [36] M. I. Belishev, “Boundary control method”, *Encyclopedia of applied and computational mathematics*, v. 1, Springer, Heidelberg, 2015, 142–146.
- [37] М. И. Белишев, “Об алгебрах трехмерных кватернионных гармонических полей”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 46, Зап. науч. сем. ПОМИ, **451**, ПОМИ, СПб., 2016, 14–28; англ. пер.: M. I. Belishev, *On algebras of three-dimensional quaternionic harmonic fields*, 2017 (v1 – 2016), 15 pp., arXiv: 1611.08523v2.
- [38] М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн*, СПбГУ, СПб., 1999, 268 с.
- [39] M. I. Belishev, M. N. Demchenko, “Time-optimal reconstruction of Riemannian manifold via boundary electromagnetic measurements”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **19**:2 (2011), 167–188.

- [40] М. И. Белишев, М. Н. Демченко, “Динамическая система с граничным управлением, связанная с симметрическим полуограниченным оператором”, *Математические вопросы теории распространения волн*, 42, Зап. науч. сем. ПОМИ, **409**, ПОМИ, СПб., 2012, 17–39; англ. пер.: М. I. Belishev, M. N. Demchenko, “Dynamical system with boundary control associated with a symmetric semibounded operator”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **194**:1 (2013), 8–20.
- [41] M. I. Belishev, M. N. Demchenko, “Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **78** (2014), 29–47.
- [42] М. И. Белишев, М. Н. Демченко, А. Н. Попов, “Некоммутативная геометрия и томография многообразий”, Тр. ММО, **75**, МЦНМО, М., 2014, 159–180; англ. пер.: М. I. Belishev, M. N. Demchenko, A. N. Popov, “Noncommutative geometry and the tomography of manifolds”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **75**:2 (2014), 133–149.
- [43] М. И. Белишев, В. Г. Фоменко, “О достижимых множествах динамической системы типа Ламе”, Проблемы матем. анализа, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2013, 57–70; англ. пер.: М. I. Belishev, V. G. Fomenko, “Reachable sets of a Lamé type dynamical system”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **191**:2 (2013), 162–177.
- [44] М. И. Белишев, А. К. Гласман, “Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод)”, *Алгебра и анализ*, **12**:2 (2000), 131–187; англ. пер.: М. I. Belishev, A. K. Glasman, “Dynamical inverse problem for the Maxwell system: recovering the velocity in the regular zone (the BC-method)”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:2 (2001), 279–316.
- [45] M. I. Belishev, V. Yu. Gotlib, “Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **7**:3 (1999), 221–240.
- [46] M. I. Belishev, I. B. Ivanov, I. V. Kubyshev, V. S. Semenov, “Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **24**:2 (2016), 159–180.
- [47] М. И. Белишев, А. П. Качалов, “Граничное управление и квазифотоны в задаче реконструкции риманова многообразия по динамическим данным”, *Математические вопросы теории распространения волн*, 22, Зап. науч. сем. ПОМИ, **203**, Наука, СПб., 1992, 21–51; англ. пер.: М. I. Belishev, A. P. Kachalov, “Boundary control and quasiphotons in the problem of reconstruction of a Riemannian manifold via dynamical data”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **79**:4 (1996), 1172–1190.
- [48] М. И. Белишев, А. П. Качалов, “Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*, 14, Зап. науч. сем. ПОМИ, **215**, Наука, СПб., 1994, 9–37; англ. пер.: М. I. Belishev, A. P. Kachalov, “An operator integral in a multidimensional spectral inverse problem”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **85**:1 (1997), 1559–1577.
- [49] M. I. Belishev, Ya. V. Kurylev, “To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method)”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:5-6 (1992), 767–804.
- [50] M. I. Belishev, I. Lasiecka, “The dynamical Lamé system: regularity of solutions, boundary controllability and boundary data continuation”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **8** (2002), 143–167.
- [51] M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, “Unified approach to classical equations of inverse problem theory”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **20**:4 (2012), 461–488.
- [52] M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, “Inverse problem for a one-dimensional dynamical Dirac system (BC-method)”, *Inverse Problems*, **30**:12 (2014), 125013, 26 pp.
- [53] М. И. Белишев, А. Л. Пестов, “Характеризация данных обратной задачи для одномерной двухскоростной динамической системы”, *Алгебра и анализ*, **26**:3 (2014), 89–130; англ. пер.: М. I. Belishev, A. L. Pestov, “Characterization of

- the inverse problem data for one-dimensional two-velocity dynamical system”, *St. Petersburg Math. J.*, **26**:3 (2015), 411–440.
- [54] М. И. Белишев, А. Б. Пушницкий, “К треугольной факторизации положительных операторов”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 26, Зап. науч. сем. ПОМИ, **239**, ПОМИ, СПб., 1997, 45–60; англ. пер.: М. I. Belishev, A. B. Pushnitskii, “On the triangular factorization of positive operators”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **96**:4 (1999), 3312–3320.
- [55] М. Belishev, V. Sharafutdinov, “Dirichlet to Neumann operator on differential forms”, *Bull. Sci. Math.*, **132**:2 (2008), 128–145.
- [56] М. И. Белишев, С. А. Симонов, “Волновая модель оператора Штурма–Лиувилля на полуоси”, *Алгебра и анализ*, **29**:2 (2017), 3–33; англ. пер.: М. I. Belishev, S. A. Simonov, *Wave model of the Sturm–Liouville operator on the half-line*, 2017, 33 pp., arXiv: 1703.00176v1.
- [57] М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, “Inverse problems on graphs: recovering the tree of strings by the BC-method”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **14**:1 (2006), 29–46.
- [58] М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, “Inverse scattering problem for the wave equation with locally perturbed centrifugal potential”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **17**:2 (2009), 127–157.
- [59] М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, “ s -points in three-dimensional acoustical scattering”, *SIAM J. Math. Anal.*, **42**:6 (2010), 2703–2720.
- [60] М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, “On characterization of inverse data in the boundary control method”, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **48** (2016), 49–77.
- [61] М. I. Belishev, N. Wada, “On revealing graph cycles via boundary measurements”, *Inverse Problems*, **25**:10 (2009), 105011, 21 pp.
- [62] М. I. Belishev, N. Wada, “A C^* -algebra associated with dynamics on a graph of strings”, *J. Math. Soc. Japan*, **67**:3 (2015), 1239–1274.
- [63] Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Наука, М., 1984, 566 с.; пер. с англ.: G. Birkhoff, *Lattice theory*, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967, vi+418 pp.
- [64] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, 2-е изд., испр. и доп., Лань, СПб.–М.–Краснодар, 2010, 464 с.; англ. пер. 1-го изд.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **5**, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1987, xv+301 pp.
- [65] А. С. Благовещенский, “О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны”, *Математические вопросы теории дифракции и распространения волн*. 1, Тр. МИАН СССР, **115**, Наука, Л., 1971, 28–38; англ. пер.: A. S. Blagoveshchenskii, “On a local method of solution of a nonstationary inverse problem for a nonhomogeneous string”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **115** (1971), 30–41.
- [66] A. S. Blagoveshchenskii, *Inverse problems of wave processes*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., **23**, VSP, Utrecht, 2001, 137 pp.
- [67] A. Connes, “On the spectral characterization of manifolds”, *J. Noncommut. Geom.*, **7**:1 (2013), 1–82.
- [68] М. Н. Демченко, “О частично изометрическом преобразовании соленоидальных векторных полей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 40, Зап. науч. сем. ПОМИ, **370**, ПОМИ, СПб., 2009, 22–43; англ. пер.: M. N. Demchenko, “On a partially isometric transform of divergence-free vector fields”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **166**:1 (2010), 11–22.

- [69] М. Н. Демченко, “Динамическая трехмерная обратная задача для системы Максвелла”, *Алгебра и анализ*, **23**:6 (2011), 32–79; англ. пер.: M. N. Demchenko, “The dynamical 3-dimensional inverse problem for the Maxwell system”, *St. Petersburg Math. J.*, **23**:6 (2012), 943–975.
- [70] D. Dos Santos Ferreira, Ya. Kurylev, M. Lassas, M. Salo, “The Calderón problem in transversally anisotropic geometries”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **18**:11 (2016), 2579–2626.
- [71] M. Eller, “Symmetric hyperbolic systems with boundary conditions that do not satisfy the Kreiss–Sakamoto condition”, *Appl. Math. (Warsaw)*, **35**:3 (2008), 323–333.
- [72] M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura, D. Tataru, “Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell and elasticity systems”, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France seminar, vol. 14 (Paris, 1997/1998), Stud. Math. Appl., **31**, North-Holland, Amsterdam, 2002, 329–349.
- [73] G. Eskin, “Inverse hyperbolic problems with time-dependent coefficients”, *Comm. Partial Differential Equations*, **32**:10–12 (2007), 1737–1758.
- [74] G. Eskin, “Optical Aharonov–Bohm effect: an inverse hyperbolic problems approach”, *Comm. Math. Phys.*, **284**:2 (2008), 317–343.
- [75] G. Eskin, “Inverse problems for general second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients”, *Bull. Math. Sci.* (to appear); 2017 (v1 – 2015), 71 pp., arXiv: 1503.00825.
- [76] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем.*, **3**, ВИНТИ, М., 1974, 93–180; англ. пер.: L. D. Faddeev, “Inverse problem of quantum scattering theory. II”, *J. Soviet Math.*, **5**:3 (1976), 334–396.
- [77] В. Г. Фоменко, “Оператор реакции системы Ламэ”, *Складні системи і процеси*, **1(17)** (2010), 13–18.
- [78] В. Г. Фоменко, “Динамическая обратная задача для системы типа Ламе (BC-метод)”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 44, посвящается столетию со дня рождения Георгия Ивановича Петрашова, Зап. науч. сем. ПОМИ, **426**, ПОМИ, СПб., 2014, 218–259; англ. пер.: V. G. Fomenko, “The dynamical inverse problem for a Lamé type system (the BC method)”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **214**:3 (2016), 392–421.
- [79] В. Г. Фоменко, *Динамическая обратная задача для системы типа Ламе (BC-метод)*, Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, СПбГУ, СПб., 2016, 86 с.
- [80] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967, 508 с.; англ. пер.: I. Ts. Gohberg, M. G. Krein, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Transl. Math. Monogr., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, x+430 pp.
- [81] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971, 347 с.; пер. с нем.: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannische Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Math., **55**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1968, vi+287 pp.
- [82] G. Henkin, V. Michel, “On the explicit reconstruction of a Riemann surface from its Dirichlet–Neumann operator”, *Geom. Funct. Anal.*, **17**:1 (2007), 116–155.
- [83] М. Икава, *Hyperbolic partial differential equations and wave phenomena*, Transl. from the Japanese, Transl. Math. Monogr., **189**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, xxii+190 pp.
- [84] M. I. Isaev, R. G. Novikov, “Effectivized Hölder-logarithmic stability estimates for the Gel’fand inverse problem”, *Inverse Problems*, **30**:9 (2014), 095006, 18 pp.
- [85] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, Appl. Math. Sci., **127**, Springer-Verlag, New York, 1998, xii+284 pp.

- [86] I. B. Ivanov, M. I. Belishev, V. S. Semenov, *The reconstruction of sound speed in the Marmousi model by the boundary control method*, 2016, 27 pp., arXiv: 1609.07586.
- [87] Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, *Очерки по математической теории систем*, Мир, М., 1971, 400 с.; пер. с англ.: R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto, ON–London, 1969, xiv+358 pp.
- [88] С. Е. Кениг, М. Сало, Г. Ухлманн, “Reconstructions from boundary measurements on admissible manifolds”, *Inverse Probl. Imaging*, **5**:4 (2011), 859–877.
- [89] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е перераб. изд., Наука, М., 1976, 543 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. I, II, Graylock Press, Albany, NY, 1957, 1961, ix+129 pp., ix+128 pp.
- [90] I. Lasiecka, J.-L. Lions, R. Triggiani, “Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **65**:2 (1986), 149–192.
- [91] I. Lasiecka, R. Triggiani, “Recent advances in regularity of second-order hyperbolic mixed problems, and applications”, *Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N. S.)*, **3**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 104–162.
- [92] M. Lassas, G. Uhlmann, “On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **34**:5 (2001), 771–787.
- [93] A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, “Dynamical inverse problem for the discrete Schrödinger operator”, *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, **7**:5 (2016), 842–853.
- [94] A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, “Connection of the different types of inverse data for the one-dimensional Schrödinger operator on the half-line”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 46, Зап. науч. сем. ПОМИ, **451**, ПОМИ, СПб., 2016, 134–155.
- [95] A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Boundary control method and De Branges spaces. Schrödinger equation, Dirac system and discrete Schrödinger operator*, 2017, 21 pp., arXiv: 1701.08424v1.
- [96] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, 2-е изд., Наука, М., 1968, 664 с.; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Naimark, *Normed rings*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1970, xvi+572 pp.
- [97] Л. П. Нижник, *Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений*, Наукова думка, Киев, 1991, 232 с.
- [98] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, “ $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния”, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 93–152; англ. пер.: R. G. Novikov, G. M. Henkin, “The $\bar{\partial}$ -equation in the multidimensional inverse scattering problem”, *Russian Math. Surveys*, **42**:3 (1987), 109–180.
- [99] L. Pestov, “Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **20**:1 (2012), 103–110.
- [100] L. Pestov, “On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **22**:2 (2014), 245–250.
- [101] V. G. Romanov, *Investigation methods for inverse problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2002, xii+280 pp.
- [102] В. Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, Научный мир, М., 2005, viii+296 с.
- [103] G. Schwarz, *Hodge decomposition – a method for solving boundary value problems*, Lecture Notes in Math., **1607**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, viii+155 pp.
- [104] И. Р. Шафаревич, *Основные понятия алгебры*, 2-е изд., испр. и доп., РХД, М.–Ижевск, 2001, 350 с.; англ. пер. 1-го изд.: I. R. Shafarevich, *Basic notions*

- of algebra*, Encyclopaedia Math. Sci., **11**, Algebra, 1, Springer, Berlin, 2005, ii+258 pp.
- [105] E. Sincich, S. Vessella, “Wave equation with Robin condition, quantitative estimates of strong unique continuation at the boundary”, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **48** (2016), 221–243.
- [106] D. Tataru, “Unique continuation for solutions to PDE’s: between Hormander’s and Holmgren’s theorem”, *Comm. Partial Differential Equations*, **20**:5-6 (1995), 855–884.
- [107] Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*, МГУ, М., 1982, 295 с.; англ. пер.: В. Vainberg, *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York, 1989, viii+498 pp.
- [108] S. Vessella, “Stability estimates for an inverse hyperbolic initial boundary value problem with unknown boundaries”, *SIAM J. Math. Anal.*, **47**:2 (2015), 1419–1457.

Михаил Игоревич Белишев
(**Mikhail I. Belishev**)

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук;
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru, m.belishev@spbu.ru

Поступила в редакцию
10.05.2017