АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН

ЦЕНТР ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ НАУКИ
И НОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН РТ ИМ. А. ДЖУРАЕВА
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ

Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора

Илолова Мамадшо
(Душанбе, 14-15 марта 2018 г.)

Душанбе - 2018

УДК 511+512+519.4, 517.927
С-56 ББК: 22.1

Печатается по решению Президиума АН РТ

Под редакцией Президента АН РТ, академика Рахими Ф.К.

Редакторы: Гольдина В.Д., Саидусайнов М.С.

В сборник включены материалы, принятые оргкомитетом для участия в Международной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 70-летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (Душанбе, 14-15 марта 2018г.).

ОРГКОМИТЕТ:

Председатель: Рахими Ф.К., академик, президент АН РТ
Сопредседатель: Имомзода М.С., академик, ректор ТНУ
Заместители председателя: Ахмедов Х.М., Рахмонов З.Х., Шабозов М.Ш.

ЧЛЕНЫ ОРГКОМИТЕТА:

Джангибеков Г.Дж., Иванов В.И., Мирзоахмедов Ф.М., Муминов Х.Х., Мустафакулов Р.М., Мухамадиев Э.М., Одинаев Р.О., Раджабов Н.Р., Саидусайнов М.С., Усманов З.Дж., Худжаназарова Г.Х., Юсупов Г.А., Кучакшоев Х.С. - (ученый секретарь).

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

Председатель: Рахими Ф.К.
Заместители председателя: Самойленко А.М., Шабозов М.Ш.,
Раджабов Н.Р.,Рахмонов З.Х.

ЧЛЕНЫ ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА:

Абдуллаев Ф.Г., Баев А.Д., Бабенко А.Г., Байзаев С.Б., Гликлих Ю.П., Исхоков С.А., Козоброд В.Н., Курбонов Н.К., Курбоншоев С.З.,Новиков И.Я., Нуров И.Н., Перестюк Н.А., Рейнов О.И., Сафаров Дж.С., Табаров А.Х., Федоров В.Е., Эльназаров А.А., Юмагулов М.Г.

ISBN: 978-99975-55-63-2

Муайянкунадаи матрисаи дар тарафи чапи баробарии (8)–ро ҳисоб мекунем:

$$\begin{vmatrix} t & x+k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & x+k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots t & x+k \\ x+k & 0 & 0 & \dots & t \end{vmatrix} = t^{2n} - (x+k)^{2n}. \tag{9}$$

Муодилаи (9)–ро ҳал мекунем:

$$t^{2n} - (x+k)^{2n} = 0,$$
$$(x+k)^{2n} = t^{2n},$$

$$\begin{cases} x = t - k, \quad t > k \\ y = k, \\ z = 2t - k. \end{cases}$$

Қиматҳои x, y, z муодилаи (5)–ро қаноат намекунанд:

$$(t-k)^n = (2t-k)^n - k^n$$

t, k ададҳои бутуни мусбат ва $t > k$ аст мебошад. (Теоремаи Ферма барои $x > y > z$ исбот шуд.).

Адабиётҳо

1. Давлятов Р.Д., Олимов М.И., Аликулов Р.К. Алгебраи матрисаҳо. Душанбе 1990 с.
2. Суфиев А., Олимов М.И. Алгебраи матрисаҳо ва векторҳо. Китоб дастури методӣ Душанбе 2010. 160 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М: Наука, 1967 г.
4. П.Ланкастер Теория матриц. М. 1967 г.

ОПЕРАТОРЫ С ЯДЕРНЫМИ СОПРЯЖЕННЫМИ

О. И. Рейнов

С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия

Банахово пространство X обладает свойством аппроксимации AP, если тождественный оператор $id_X : X \to X$ лежит в замыкании множества всех конечномерных операторов в топологии компактной сходимости. Или (что то же): для всякой стремящейся к нули последовательности $(x_n) \in c_0(X)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор R в X, что $\sup_n ||Rx_n - x_n|| \leq \varepsilon$. Оператор $T : X \to Y$ называется ядерным, если он представим в виде $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle y_k$, $x \in X$, где $(x'_k) \subset X^*, (y_k) \subset Y$, $\sum_k ||x'_k|| \, ||y_k|| < \infty$. Обозначение: $T \in N(X, Y)$

Если T — ядерный, то сопряженный оператор T^* тоже ядерный (Grothendieck, [1]). Вопрос А. Гротендика (1955): Пусть T – ограниченный линейный оператор из банахова пространства X в банахово пространство Y. Верно ли, что если T^* является ядерным, то и T также ядерный? Впервые отрицательный ответ был получен Т. Фигелем и У.Б.Джонсоном в [2] Некоторые достаточные условия для положительного ответа приведены в [1]. Именно, в первой части предложения 15,2 [1, chap. I, p. 86] утверждается: *Если $T : X \to Y$, X^**

имеет свойство AP *и* $T^* \in N(Y^*, X^*)$, *то* $T \in N(X, Y)$. Доказательство можно найти в [3]. Вторая часть предложения 15,2 [1, chap. I, p. 86] утверждает, что ответ положителен также в случае, когда Y^{**} обладает свойством AP. Э. Ойа и О.И. Рейнов в [4] показали, что последнее утверждение неверно:

I. *Пусть* $T \in L(X, Y)$ *и предположим, что* $Y^{***} \in AP$. *Если* $T^* \in N(Y^*, X^*)$, *то* $T \in N(X, Y)$. **II.** *Существуют банаховы пространства* X, Y *и не ядерный оператор* $T : X \to Y$ *такие, что* X *и* Y^{**} *обладают свойство аппроксимации и* T^* *— ядерный.*

О.И. Рейнов получил в дальнейшем существенные обобщения этих результатов Гротендика и Ойа–Рейнова. Нам понадобится еще ряд определений. Оператор $T : X \to Y$ называется s-ядерным $(0 < s \leq 1)$, если он представим в виде $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle y_k$, $x \in X$, где $(x'_k) \subset X^*$, $(y_k) \subset Y$, $\sum_k ||x'_k||^s \, ||y_k||^s < \infty$. Мы используем обозначение $N_s(X, Y)$.

Следующий вопрос был поставлен известными немецкими математиками (Hinrichs A., Pietsch A.) в 2010 году в статье [5, Problem 10.1]. *Пусть* T *оператор, действующий между банаховыми пространствами* X *и* Y, *и пусть* $s \in (0, 1)$. *Верно ли, что если* T^* *—* s*-ядерный, то и* T *является* s*-ядерным?* Отрицательный ответ, однако, был получен О.И.Рейновым еще в 2003 году. Поэтому в 2013 г. мы рассмотрели несколько иной вопрос: *При каких условиях, налагаемых на рассматриваемые банаховы пространства, справедливо, что оператор* $T : X \to Y$ *является ядерным, если* T^* *—* s*-ядерный?* Точный ответ получен автором в работе [6] (теоремы 1 и 2 ниже).

Пусть $0 < q \leq \infty$ и $1/s = 1/q + 1$. Мы говорим, что X имеет свойство AP_s, если для любой абсолютно q-суммируемой последовательности $(x_n) \in l_q(X)$ (где $l_q(X)$ означает $c_0(X)$ для $q = \infty$) и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор R в X, что $\sup_n ||Rx_n - x_n|| \leq \varepsilon$. Отметим, что AP_1 есть в точности свойство аппроксимации Гротендика и $AP_1 \implies AP_s$ для любого s.

Теорема 1. *Пусть* $s \in (0, 1]$, $T \in L(X, Y)$ *и пусть либо* $X^* \in AP_s$, *либо* $Y^{***} \in AP_s$. *Если* $T \in N_s(X, Y^{**})$, *то* $T \in N(X, Y)$.

Теорема 2. *Для каждого* $s \in (2/3, 1]$ *существуют банахово пространство* Z_s *и не ядерный оператор* $T_s : Z_s^{**} \to Z_s$ *такие, что* Z_s^{**} *имеет свойство аппроксимации,* Z_s^{***} *обладает свойством* AP_r *для каждого* $r \in (0, s)$ *и* T_s^* *—* s*-ядерный.*

Замечание: Пространство Z_1^{***} изоморфно пространству типа $Z_1^* \oplus E$, где E — асимптотически гильбертово пространство. Это дает нам еще один пример асимптотически гильбертова пространства без свойства аппроксимации (определения и некоторые обсуждения см. в статье [7]).

В 2017 г. автором были получены существенные обобщения всех приведенных выше результатов (соответствующая статья готовится к печати).

Литература

1. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 1955. V. 16. PP. 196 + 140.
2. Figiel T., Johnson W. B. The approximation property does not imply the bounded approximation property // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 41. P. 197–200.
3. Diestel J., Uhl J. J. Jr. Vector measures. American Mathematical Society, Providence, RI. 1977.
4. Oja E., Reinov O. I. Un contre-exemple à une affirmation de A.Grothendieck // C. R. Acad. Sc. Paris, Serie I. 1987. V. 305. P. 121–122.
5. Hinrichs A., Pietsch A. p-nuclear operators in the sense of Grothendieck // Math. Nachr. 2010. V. 283. P. 232–261.
6. Reinov O. I. On linear operators with s-nuclear adjoints, $0 < s \leq 1$. // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 415 . P. 816–824.

7. Casazza P. G., García C. L., Johnson W. B. An example of an asymptotically Hilbertian space which fails the approximation property // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 3017–3024.

ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Савчук

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

Пусть h_∞ – класс ограниченных действительнозначных гармонических функций f, определенных в круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для которых $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$ и $\overline{h}_\infty$ – класс гармонических функций, сопряженных к функциям из h_∞, т.е. $\overline{h}_\infty := \{f$ гармоническая в $\mathbb{D} : \widetilde{f} \in h_\infty\}$.

Пусть далее K – компактное подмножество интервала $\mathbb{I} := (-1, 1)$, $\mathfrak{h}$ и $\overline{\mathfrak{h}}$ – сужение классов h_∞ и $\overline{h}_\infty$, соответственно, на компакт K и пусть σ – положительная мера на K такая, что $\sigma(K) < \infty$. Обозначим через $L_q := L_q(K, \sigma)$ пространство Лебега функций f на K с нормой $\|f\|_q = (\int_K |f|^q d\sigma)^{1/q}$, $1 \le q < \infty$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in K} |f(x)|$.

Рассмотрим задачу о n-поперечниках по Колмогорову, Гельфанду и линейном n-поперечнике классов $\mathfrak{h}$ и $\overline{\mathfrak{h}}$ в пространстве L_q:

$$d_n(\mathfrak{H}; L_q) := \inf_{X_n} \sup_{f\in\mathfrak{H}} \inf_{g\in X_n} \|f - g\|_q,$$

$$d^n(\mathfrak{H}; L_q) := \inf_{X^n} \sup_{f\in\mathfrak{H}\cap X^n} \|f\|_q,$$

$$\delta_n(\mathfrak{H}; L_q) := \inf_{L_n} \sup_{f\in\mathfrak{H}} \|f - P_n(f)\|_q,$$

где $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}\vee\overline{\mathfrak{h}}$, X_n – n-мерное подпространство L_q, X^n – подпространство L_q коразмерности n и $P_n : L_q \to X_n$ – непрерывный линейный оператор, ранга n.

Пусть $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ – последовательность точек в $\mathbb{I}$, среди которых могут быть точки конечной и даже бесконечной кратности, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ – система функций Такенака–Мальмквиста (TM-система), порожденная последовательностью $\mathbf{a}$:

$$\varphi_0(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_0|^2}}{1 - a_0 z}, \quad \varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{1 - a_k z} \cdot \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{a_j} \cdot \frac{z - a_j}{1 - a_j z}}_{=:B_k(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим через B_n^* минимальное на компакте K произведение Бляшке степени n, нули которого лежат в $\mathbb{I}$, т.е. произведение Бляшке, для которого $\|B_n^*\|_q = \min\{\|B_n\|_q : \{\operatorname{zeros} B_n\} \subset \mathbb{I}\}$ и пусть φ^* – соответствующая этому произведению TM-система.

Обозначим $\Phi_{k,n}(x) := \lambda_{k,n}(x)\varphi_k^*(x)$ и $\Psi_{k,n}(x) := \mu_{k,n}(x)\varphi_k^*(x)$, где

$$\lambda_{k,n}(x) := \frac{1}{1 + |B_n^*(x)|^2} \left(1 - x\frac{1 - a_k^* x}{x - a_k^*} \left|\prod_{j=k}^{n-1} \frac{x - a_j^*}{1 - a_j^* x}\right|^2\right),$$

$$\mu_{k,n}(x) := \frac{1 + |B_n^*(x)|^2}{1 - |B_n^*(x)|^2} \lambda_{k,n}(x).$$

Теорема. *Пусть $K \subset \mathbb{I}$, $1 \le q \le \infty$ и D_n – любой из выше приведенных поперечников. Тогда для каждого натурального n*

$$D_n(\mathfrak{h}; L_q) = \frac{4}{\pi} \|\operatorname{arctg} B_n^*\|_q \quad \text{и} \quad D_n(\overline{\mathfrak{h}}; L_q) = \frac{2}{\pi} \left\|\ln \frac{1 + B_n^*}{1 - B_n^*}\right\|_q.$$