Позиционная оптимизация и сценарное моделирование ценообразования для скоропортящихся товаров

Ван Дань Смирнов Николай Васильевич Го Чжао

Санкт-Петербургский государственный университет

Шестой Российский экономический конгресс
Москва, 26–30 октября 2026 г.

Содержание

1. Постановка задачи
2. Математическая модель
3. Стратегии и показатели
4. Имитационный эксперимент
5. Обсуждение и заключение

Актуальность и проблема

- Ежегодно в мире теряется до 1,3 млрд тонн продовольствия; рентабельность в торговле свежими продуктами составляет $\approx 1{,}7\%$.
- Необходимо находить динамический баланс между прибылью и потерями при неопределённом спросе.
- На практике цена часто задаётся экзогенно, а оптимизируется только пополнение запасов.

Проблема исследования

Отсутствует количественное сравнение ценовых стратегий в единой системе скользящей оптимизации.

Цель и основной вклад

Цель

Построить платформу многосценарного имитационного анализа для сравнения экзогенных ценовых стратегий в замкнутой системе скользящей оптимизации пополнения запасов через оптовую закупку.

- Динамическая модель запасов с эндогенным $u(k)$ и экзогенной $p(k)$; на каждом шаге решается задача ЛП.
- Стратегии (4): статическая; линейное снижение; ликвидация остатков; акции в выходные.
- Метрики (5): прибыль, списания, уровень обслуживания, волатильность прибыли, конечный остаток.

Ключевой вклад: систематическое количественное сравнение ценовых стратегий для скоропортящихся товаров в единой модели с обратной связью.

Динамическая модель процесса торговли

Доля продаж (степенная модель спроса):

$$s_c(k) = \left(\frac{c_o}{p(k)}\right)^{\beta} \tag{1}$$

Уравнение динамики запасов:

$$x(k) = (1 - a(k))(1 - s_c(k))x(k-1) + u(k), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Функция прибыли в k-й день:

$$r(k) = p(k)s_c(k)x(k-1) + p_d a(k)(1-s_c(k))x(k-1) - c_s x(k-1) - c_o u(k). \tag{3}$$

где: $x(k)$ — теоретический остаток запасов на конец k-го дня; $u(k)$ — объём пополнения (управляемая переменная); $a(k)$ — коэффициент порчи; $p(k)$ — цена реализации; c_o — себестоимость единицы товара; $\beta > 0$ — коэффициент ценовой чувствительности; p_d — цена утилизации просроченного товара; c_s — затраты на хранение единицы товара.

Скользящая оптимизация и общее решение

В каждый день j известно фактическое состояние $x_r(j)$. Для будущих дней $k > j$ теоретический запас рассчитывается рекурсивно.
Общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$x(k) = M_j(k)U_j(k) + \eta_j(k), \quad k = j+1, \ldots, N, \tag{4}$$

где вектор решений $U_j(k) = [u(j+1), u(j+2), \ldots, u(k)]^T$, а компоненты определены как:

$$M_j(k) = \big(A(k)A(k-1)\cdots A(j+2),\ \ldots,\ A(k),\ 1\big),$$
$$\eta_j(k) = A(k)A(k-1)\cdots A(j+1)x_r(j).$$

где: $A(k) = (1-a(k))(1-s_c(k))$; $M_j(k)$ — вектор-строка длины $k-j$; $U_j(k)$ — вектор-столбец; $\eta_j(k)$ — скалярная величина, зависящая от текущего фактического запаса $x_r(j)$; j — число прошедших дней ($j = 0, \ldots, N-1$).

Сведение целевой функции к векторному виду

После подстановки общего решения (4) в функцию прибыли (3), для $k = j + 1$ получаем:

$$r(j+1) = \gamma(j+1)x_r(j) - c_o u(j+1),$$

а для $k > j + 1$ (с учётом $x(k-1) = M_j(k-1)U_j(k-1) + \eta_j(k-1)$):

$$r(k) = \gamma(k)M_j(k-1)U_j(k-1) - c_o u(k) + \gamma(k)\eta_j(k-1).$$

Чтобы унифицировать выражение, введем вектор-строку $Q_j(k)$ длины $N - j$. Тогда для всех k:

$$r(k) = Q_j(k)U_j(N) + \begin{cases} \gamma(j+1)x_r(j), & k = j+1, \\ \gamma(k)\eta_j(k-1), & k > j+1. \end{cases} \tag{5}$$

Сведение целевой функции к векторному виду

Суммируя по k и отбрасывая постоянные члены (не зависящие от $U_j(N)$), получаем эквивалентную задачу:

$$\max_{U_j(N)} Q_{S_j}(N)U_j(N), \quad \text{где } Q_{S_j}(N) = \sum_{k=j+1}^{N} Q_j(k). \qquad (6)$$

где: $\gamma(k) = p(k)s_c(k) + p_d a(k)(1 - s_c(k)) - c_s$ — коэффициент прибыли; $Q_j(k)$ включает в себя $\gamma(k)$, $M_j(k-1)$ и $-c_o$.

Формирование системы ограничений

1. Ограничение по вместимости склада $(0 \le x(k) \le g)$.
Подставим общее решение $x(k) = M_j(k)U_j(k) + \eta_j(k)$:

$$0 \le M_j(k)U_j(k) + \eta_j(k) \le g, \quad k = j+1, \ldots, N.$$

Поскольку $U_j(k)$ — это первые $k-j$ компонент полного вектора $U_j(N)$, вектор-строку $M_j(k)$ необходимо дополнить $N-k$ нулями. Обозначим расширенный вектор как $\widetilde{M}_{j,k}$:

$$0 \le \widetilde{M}_{j,k}U_j(N) + \eta_j(k) \le g. \tag{7}$$

Формирование системы ограничений

2. Ограничение на объем пополнения:

$$0 \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad k = j+1, \ldots, N. \tag{8}$$

Таким образом, динамическая задача управления запасами на каждом шаге j сводится к стандартной задаче линейного программирования (ЛП): максимизировать (6) при ограничениях (7) и (8).

где: $\widetilde{M}_{j,k} = (M_j(k), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{1\times(N-j)}$; g — максимальная вместимость склада; $u_{\max}$ — максимальный объем суточного заказа.

Алгоритм скользящей оптимизации

KwIn: $x_r(0)$, N, $\{a(k)\}$, $\{p(k)\}$, c_o, p_d, c_s, g, $u_{\max}$. **KwOut:** остатки, пополнения, прибыль и показатели для каждого дня.

Цикл `for` $j = 0$ до $N - 1$:

1. Решается задача ЛП (6)–(8) на основе $x_r(j)$ и $\{p(j+1), \ldots, p(N)\}$; получается $U_j^*(N)$.
2. Выполняется пополнение: $u(j+1) \leftarrow U_j^*(j+1)$.
3. Фиксируется фактический объём продаж $D^{\text{real}}(j+1)$:

$$\max\left\{0, \min\left(x_r(j), \mathcal{N}\left(s_c(j+1)x_r(j), 0{,}1 s_c(j+1)x_r(j)\right)\right)\right\}.$$

4. Обновляется фактический остаток $x_r(j+1)$ (согласно формуле (13)):

$$x_r(j+1) = (1 - a(j+1))\left(x_r(j) - D^{\text{real}}(j+1)\right) + u(j+1).$$

5. Регистрируется прибыль $r(j+1)$ (в формуле (4) значение x берётся как фактическое $x_r(j)$).

Рассчитываются и возвращаются показатели эффективности.

Четыре экзогенные ценовые стратегии

Стратегия	**Правило** $p(k)$	**Параметр**
статическая	$p^{(1)}(k) = p_0$	—
линейное снижение	$p^{(2)}(k) = p_0\left(1 - \gamma\frac{k-1}{N-1}\right)$	$\gamma = 0{,}3$
ликвидация остатков	$p^{(3)}(k) = p_0(1-\delta)$ при $k \geq N - L + 1$	$\delta = 0{,}2$, $L = 3$
акции в выходные	$p^{(4)}(k) = p_0(1-\omega)$ при $k \bmod 7 \in \{0, 6\}$	$\omega = 0{,}15$

Во всех сценариях $\{p(k)\}$ — экзогенная детерминированная последовательность. Эндогенно оптимизируется только $u(k)$; поэтому $\gamma(k)$ и $A(k) = (1 - a(k))(1 - s_c(k))$ известны на каждом шаге, и задача сохраняет линейную структуру.

Пять показателей эффективности

Показатель	**Определение**
Общая прибыль	$J_{\text{total}} = \sum_{k=1}^{N} r(k)$
Объём списаний	$W_{\text{total}} = \sum_{k=1}^{N} a(k)\big(x_r(k-1) - D^{\text{real}}(k)\big)$
Уровень обслуживания	$SL = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} D^{\text{real}}(k)}{\sum_{k=1}^{N} s_c(k) x_r(k-1)} \times 100\%$
Волатильность прибыли	$\sigma_\pi = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \big(r(k) - \bar{r}\big)^2}$
Конечный остаток	$I_{\text{end}} = x(N)$

J_{total}, W_{total} отражают финансовый результат и потери; SL — операционное качество; σ_π — риск; I_{end} — риск будущих списаний.

Параметры эксперимента

Параметр	**Обозначение**	**Значение**
Стоимость заказа	c_o	15
Стоимость хранения единицы	c_s	0,55
Доход от утилизации (может быть отрицательным)	p_d	8
Максимальная вместимость склада	g	150
Максимальный дневной объём пополнения	$u_{\max}$	90
Коэффициент ценовой чувствительности	β	0,796
Базовая цена	p_0	46,6
Длина планового периода	N	9
Начальный фактический остаток запасов	$x_r(0)$	33,5

Последовательность коэффициентов порчи:
$a = [0{,}214;\ 0{,}260;\ 0{,}130;\ 0{,}157;\ 0{,}271;\ 0{,}105;\ 0{,}218;\ 0{,}202;\ 0{,}151]$ (дни 1–9).

Алгоритм моделирования (по разд. 5.2):

- $D^{\text{real}} = \max\{0, \min(x_r, \mathcal{N}(s_c x_r, 0{,}1 s_c x_r))\}$
- 10 запусков с разными генераторами (seed 42)
- Результат — среднее значение

Результаты имитационного моделирования

Стратегия	**Приб. (Yuan)**	**Списания**	SL**, %**	σ_π	I_{end}
S1 стат.	13 344,36	122,99	104,54	920,63	76,26
S2 сниж.	10 503,01	124,97	93,28	873,97	58,70
S3 ликв.	11 601,39	127,70	96,10	870,54	72,42
S4 акции	12 282,81	127,26	98,92	905,30	79,72

- **S1:** Максимальная общая прибыль и минимальные списания, но наибольшая волатильность прибыли.
- **S2:** Минимальный остаток запасов на конец периода, но наименьшая общая прибыль.
- **S3:** Наименьшая волатильность прибыли (870,54).
- **S4:** Уровень обслуживания, наиболее близкий к целевому (98,92%), и второе место по прибыли.

Динамика цен и спроса

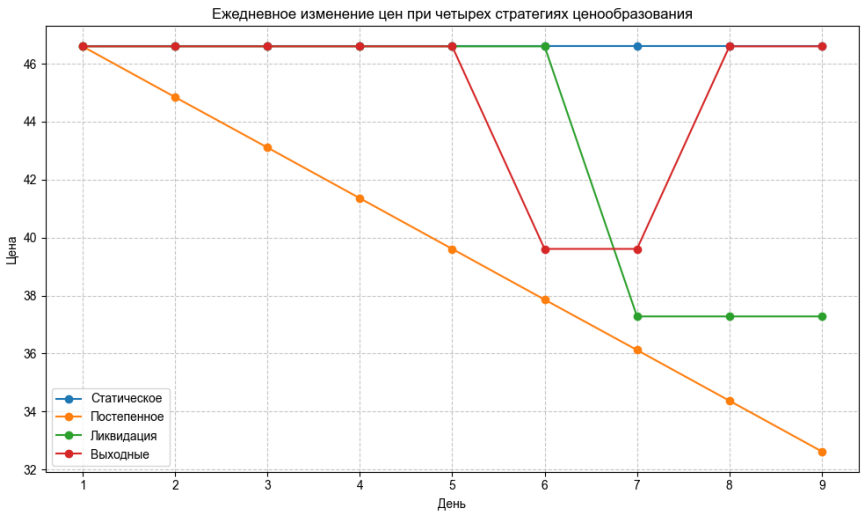


Рис. 1: Динамика ежедневных цен

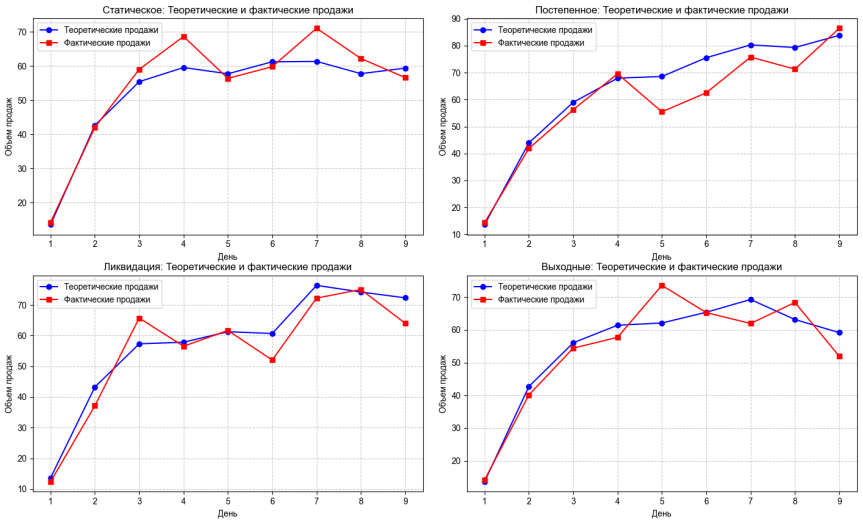


Рис. 2: Теоретический и фактический объём продаж

Пополнение и динамика запасов

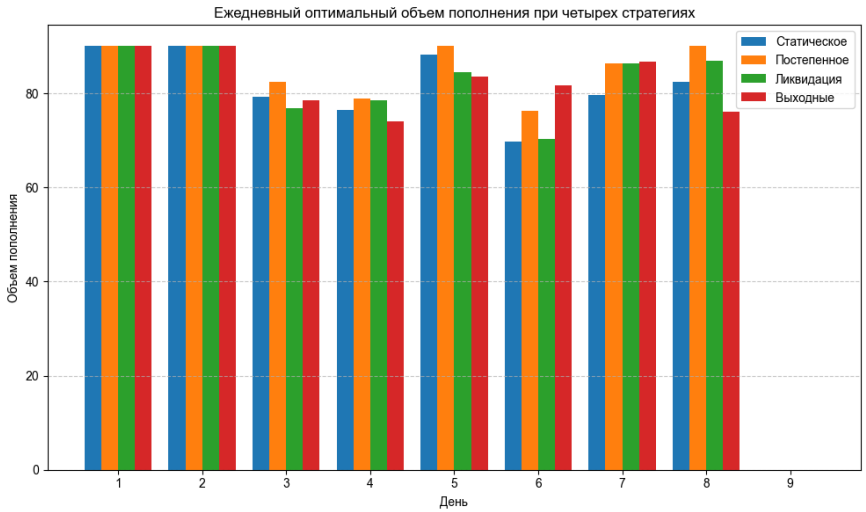


Рис. 3: Оптимальные ежедневные объёмы пополнения

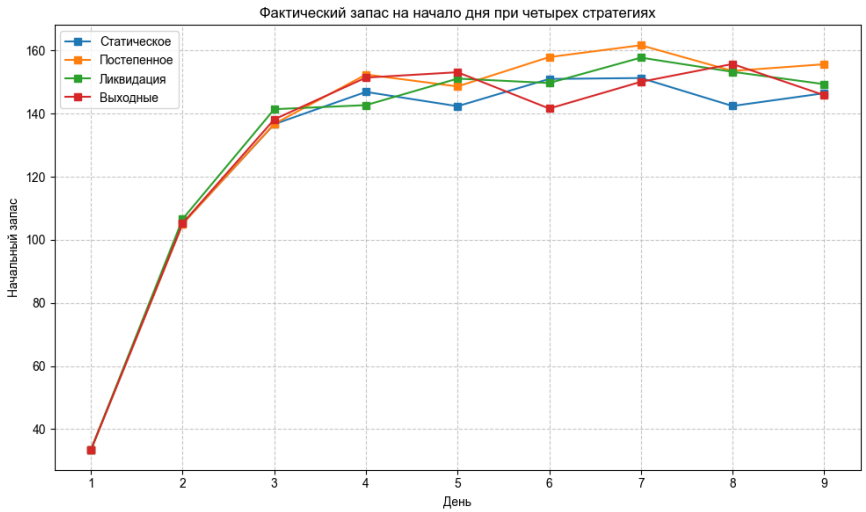


Рис. 4: Изменение начального остатка запасов

Динамика дневной прибыли

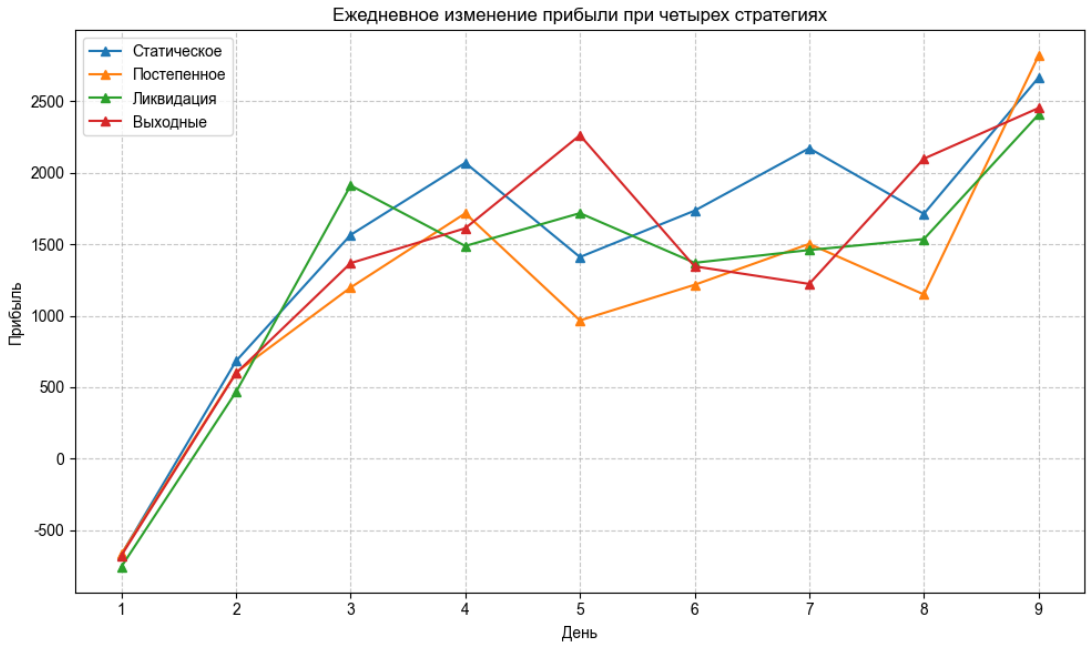


Рис. 5: Прибыль $r(k)$ по дням

Многокритериальное сравнение

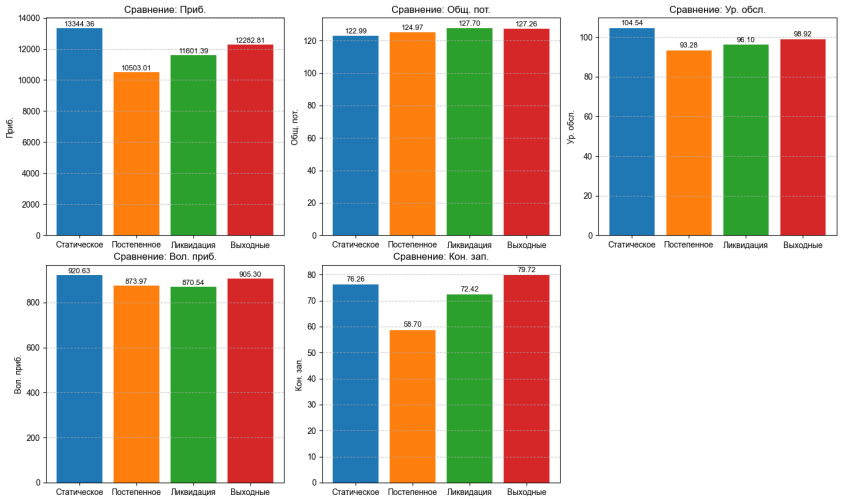


Рис. 6: По показателям

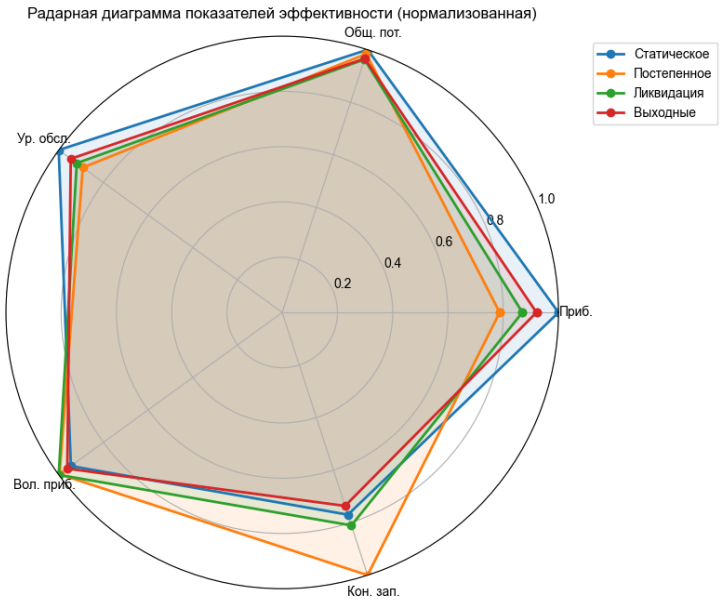


Рис. 7: Радар нормированных метрик

Обсуждение: механизмы компромиссов

Почему S1 максимизирует прибыль

При низкой ценовой эластичности ($\beta = 0{,}796 < 1$) рост продаж из-за снижения цен не компенсирует потери от снижения цены за единицу. Кроме того, положительный доход от утилизации ($p_d = 8$) означает, что просроченная продукция сохраняет частичную стоимость, снижая стимул к уменьшению списаний за счёт скидок.

Компромиссы других стратегий

- **S2:** минимальный остаток запасов на конец периода (**58,70**), однако наименьшая общая прибыль (**10 503,01**).
- **S3:** наименьшая волатильность прибыли (**870,54**) при средних значениях остальных показателей.
- **S4:** уровень обслуживания, наиболее близкий к целевому (**98,92%**), и второе место по общей прибыли (**12 282,81**).

Заключение

Основные результаты и выводы

- Динамическая задача сведена к задачам **линейного программирования (ЛП)**; создана имитационная платформа с 4 стратегиями.
- Системное сравнение по 5 метрикам выявило механизм компромисса.
- **S1:** макс. прибыль (**13 344,36**), но макс. волатильность (**920,63**).
- **S2:** мин. остатки (**58,70**), но мин. прибыль (**10 503,01**).
- **S4:** лучший сервис (**98,92%**) и 2-е место по прибыли.
- Универсального лидера нет: выбор зависит от целей бизнеса.

Дальнейшие исследования

Координация в многоуровневых цепях поставок.

Список литературы

1. FAO. (2025). *On the International Day of Awareness of Food Loss and Waste: Learn how FAO is leveraging data to save food and advance the 2030 Agenda*. Rome: FAO.
2. FMI. (2025). *The Food Retailing Industry Speaks 2025*. Arlington, VA: FMI.
3. Muriana, C. (2020). Inventory management policy for perishable products with Weibull deterioration... *Int. J. of Operational Research*, 39(4), 516–538.
4. Srinivasan, A., et al. (2025). A stochastic deteriorated single product inventory system... *Int. J. of Applied and Computational Mathematics*, 11(3), 171.
5. Petruzzi, N. C., & Dada, M. (1999). Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions. *Operations Research*, 47(2), 183–194.
6. Chehrazi, N., Sanders, R. E., & Stamatopoulos, I. (2025). Inventory information frictions explain price rigidity in perishable groceries. *Marketing Science*, 44(2), 411–436.
7. Hou, L., Nie, T., & Zhang, J. (2024). Pricing and inventory strategies for perishable products in a competitive market considering strategic consumers. *Transportation Research Part E*, 184, 103478.
8. Ван, Д., Смирнов, Н. В., Го, Ч. (2025). Оптимальное управление логистикой торговой фирмы... // *Вестник СПбГУ. Прикладная математика...*, 21(2), 277–290.
9. Ван, Д., Смирнов, Н. В., Го, Ч. (2025). Оптимальное управление логистикой торговой фирмы... // *Процессы управления и устойчивость*, Т. 12, № 1, С. 517–523.

Спасибо за внимание!