УТВЕРЖДАЮ

И.о. декана
(должность)

Математико-механического факультета

Е.В.Кустова
(подпись) *(инициалы, фамилия)*

«17» марта 2026

М.П.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ
Федерального государственного бюджетного учреждения высшего Образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

По итогам рассмотрения и обсуждения
Диссертации Алцыбеева Глеба Олеговича
(ФИО соискателя ученой степени)

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Ученая степень
по теме «Применение сплайнов для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений»
(тема диссертации)
по научной специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
шифр и наименование научной специальности (научных специальностей)

и выполненной в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»,
наименование организации и год представления

а также представленных соискателем научных публикаций, в которых излагаются основные научные результаты диссертации, приняты следующие решения, замечания и рекомендации:

Диссертационная работа посвящена разработке новых численных методов решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на основе применения локальных интерполяционных сплайнов второго, пятого и седьмого порядков аппроксимации. В работе исследованы свойства полиномиальных и неполиномиальных локальных сплайнов, разработаны и теоретически обоснованы новые подходы к моделированию решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма первого и второго рода. Построены модели решений указанных уравнений с использованием локальных сплайновых аппроксимаций, исследована устойчивость полученных методов. Разработаны комплексы последовательных и параллельных программ для численного решения соответствующих классов задач. Проведено сравнение

результатов, полученных с помощью предложенных методов, с результатами, полученными при использовании других известных подходов. Показано, что применение локальных интерполяционных сплайнов позволяет получать приближенные решения с меньшей погрешностью при том же числе узлов сетки.

Актуальность темы диссертации определяется необходимостью разработки более эффективных, и устойчивых численных методов для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, широко используемых при математическом моделировании объектов и процессов в естественных, технических и прикладных науках. Несмотря на существование большого числа численных методов решения таких уравнений, многие из них имеют ограничения, связанные с точностью, устойчивостью и вычислительной эффективностью. В этой связи разработка новых методов, основанных на применении локальных сплайнов различных порядков аппроксимации, представляет значительный научный и практический интерес.

Содержание диссертационного исследования соответствует паспорту специальности 1.2.2 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», поскольку в работе решаются задачи разработки новых математических методов моделирования решений с помощью сплайнов, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий, реализации численных методов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ и проведения комплексных исследований на основе математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Работа включает шесть глав, в которых последовательно изложены теоретические результаты, описание численных методов, их программная реализация и результаты вычислительных экспериментов.

Первая глава является вспомогательной. В ней даны формулы сплайнов, теоретические оценки погрешности аппроксимации в пространстве непрерывных функций, а также продемонстрированы примеры их практического применения для аппроксимации функций.

Во второй главе разработаны новые численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода с использованием локальных интерполяционных сплайнов второго, пятого и седьмого порядков аппроксимации. Изложена общая схема построения численных методов для решения интегральных уравнений с применением рассматриваемых сплайнов. Получены вычислительные схемы для решения интегральных уравнений второго рода, в том числе для интегро-дифференциальных, интегро-алгебраических уравнений и уравнений со слабой особенностью. Проведен анализ устойчивости полученных методов.

Третья глава посвящена разработке методов решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, относящихся к классу некорректных задач. Рассмотрены подходы к регуляризации, включая метод Тихонова, и построены вычислительные схемы на основе локальных сплайнов второго, пятого и седьмого порядков аппроксимации.

В четвертой главе приведено сравнение численных результатов, полученных с помощью разработанных методов, с результатами применения других известных методов решения интегральных уравнений первого и второго рода. Показано, что предложенные методы обеспечивают более высокую точность при меньшем числе узлов сетки. Результаты представлены в виде графиков и таблиц, что позволяет наглядно продемонстрировать преимущества разработанных численных подходов.

Пятая глава посвящена программной реализации предложенных методов. Разработаны программные комплексы на языках Maple и C++, в том числе с использованием технологий OpenMP и CUDA. Созданы библиотеки для численного решения интегральных уравнений и вспомогательных задач, включая

высокоуровневые библиотеки AS::LinearAlgebra, AS::NumericalMethods и программную среду QIEquationsSolver. В работе уделено внимание как последовательным, так и параллельным алгоритмам, обеспечивающим высокую производительность при решении сложных многомерных задач.

В шестой главе проведена апробация разработанных численных методов и программных комплексов для решения задач математического моделирования. Рассмотрены задачи динамики газотурбинного двигателя, распределения температуры в длинном цилиндре с эллиптическим поперечным сечением, нелинейной деформации в интегральной форме, а также определения спектрального состава излучения. Полученные результаты подтверждают эффективность и практическую применимость предложенных подходов.

Теоретическая значимость работы состоит в разработке новых численных методов решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на основе локальных интерполяционных сплайнов второго, пятого и седьмого порядков аппроксимации, а также в получении точных оценок погрешности для соответствующих полиномиальных и неполиномиальных сплайнов. Практическая значимость определяется созданием программных комплексов, пригодных для использования в инженерных и научных расчетах, а также возможностью применения разработанных методов при решении широкого круга прикладных задач.

Наиболее значимые научные результаты, полученные автором лично:

1. Исследованы полиномиальные локальные аппроксимации пятого и седьмого порядков с носителями, занимающими пять и семь сеточных интервалов соответственно.

2. Получены точные оценки погрешностей для неполиномиальных сплайнов второго порядка аппроксимации и полиномиальных сплайнов пятого и седьмого порядков аппроксимации.

3. Разработаны новые численные методы решения интегральных, интегро-дифференциальных и интегро-алгебраических уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода, а также интегральных уравнений Фредгольма первого рода на основе применения локальных интерполяционных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов второго, пятого и седьмого порядков аппроксимации.

4. Построены новые модели решения интегральных уравнений в классах сплайнов второго, пятого и седьмого порядков аппроксимации.

5. Получены оценки устойчивости предлагаемых численных методов.

6. Разработаны комплексы последовательных и параллельных программ для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого и второго рода с использованием новых численных методов и сплайновых аппроксимаций второго, пятого и седьмого порядков.

Результаты диссертационного исследования были представлены на научных семинарах кафедры вычислительной математики, а также на ряде всероссийских и международных конференций, включая конференции «Процессы управления и устойчивость» (2021, 2023), «Наука СПбГУ» (2020, 2022, 2023), конференцию «СПИСОК» (2022, 2023), конференцию «МАТ-МЕХ. НАУКА» (2025), а также международные конференции, проходившие в Италии и Греции в 2023–2024 гг. Это свидетельствует о достаточной апробации полученных результатов и их востребованности в научном сообществе.

По теме диссертационной работы опубликовано семь статей в журналах из «Белого списка», из них шесть — в периодических изданиях, индексируемых в базах данных Scopus/Web of Science, одна — в издании из перечня ВАК. Кроме того, опубликовано семь работ в сборниках и трудах конференций, индексируемых в РИНЦ, а также одна работа в сборнике трудов конференции, индексируемом в Scopus. В ходе выполнения исследования разработаны программные комплексы, на

которые получены два свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Основные научные результаты диссертации теоретически обоснованы и проверены при помощи имитационного моделирования. Практическая значимость результатов не вызывает сомнений. Результаты являются новыми и опубликованы в авторитетных российских и зарубежных журналах. Исследованы полиномиальные локальные аппроксимации пятого и седьмого порядков аппроксимации. Разработаны новые численные методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого и второго рода и программные комплексы для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для численного решения задач математической физики, в том числе интегральных уравнений, с помощью разработанных комплексов программ.

Считаем, что диссертация Алцыбеева Глеба Олеговича, посвященная разработке новых численных методов решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на основе локальных интерполяционных сплайнов, представляет значительный фундаментальный и практический интерес. Работа вносит вклад в развитие математического моделирования, вычислительной математики, численных методов и программных комплексов. Диссертация содержит новые научные результаты, обладает теоретической и практической значимостью, хорошо апробирована и соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Нарушения со стороны Алцыбеева Глеба Олеговича
ФИО соискателя

п. 11 Приказа СПбГУ от «19» ноября 2021 г. №11181/1
не выявлены
не выявлены, выявлены

и Приказа СПбГУ от 03.07.2023 № 9287/1
не выявлены
не выявлены, выявлены

Все основные выносимые на защиту научные материалы диссертации опубликованы в предложенных соискателем статьях.

Коллектив сотрудников Кафедры вычислительной математики
наименование подразделения

рекомендовал
рекомендовал / не рекомендовал / рекомендовал при условии устранения замечаний

диссертацию Алцыбеева Глеба Олеговича
ФИО соискателя

по теме Применение сплайнов для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений
тема диссертации

к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
ученая степень

по научной специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные

методы и комплексы программ
шифр и наименование научной специальности (научных специальностей)

При проведении голосования коллектива сотрудников подразделения (протокол заседания № 44/8/5-02-1 от 10.03.2026 г.) в количестве 5 человек, участвовавших в заседании из 5 человек штатного состава:
Проголосовали «за»: 5,
«против»: 0,
«воздержались»: 0.

Подписал: профессор
(должность)
Кафедры вычислительной математики
(наименование структурного подразделения)
доктор физико-математических наук
(ученая степень)
профессор
(ученое звание)


(подпись)

В.М. Рябов, 10.03.2026
Расшифровка подписи, дата