

ФУНКЦИОНАЛ ВОЛНОВОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ И ЕГО СВОЙСТВА¹⁾

© 2026 г. С. П. Кшевецкий^{1,2,3,*}, Ю. А. Курдяева^{4,**}, Н.М. Гаврилов^{2,***}

¹236041 Калининград, ул. А. Невского, 14, Балтийский федеральный университет имени И.Канта, Россия

²199034 Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

³119017 Москва, Пыжевский переулок, 3, Институт физики атмосферы имени А.М. Обухова РАН, Россия

⁴236035 Калининград, ул. Пионерская, 61, Калининградский филиал Института Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн имени Н.В. Пушкова РАН, Россия

*e-mail: spkshev@gmail.com

**e-mail: yakurdyeva@gmail.com

***e-mail: n.gavrilov@spbu.ru

Поступила в редакцию 24.03.2026 г.

Переработанный вариант 29.05.2026 г.

Принята к публикации 05.07.2026 г.

Рассматриваются нелинейные волновые процессы в стратифицированном идеальном газе (атмосфере). Предложен обобщающий невозрастающий функционал волновой энергии для нелинейных уравнений гидродинамики, развивающий классический подход линейной теории. На его основе показано, что для консервативных разностных схем соблюдение закона неотрицательности производства энтропии является необходимым условием устойчивости. Данное условие дополнено принципом минимального производства энтропии. Выведено уравнение переноса волновой энергии для нелинейного случая и проведено его сравнение с линеаризованным аналогом. Библ. 48. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, волновая энергия, функция Ляпунова, негладкие решения.

DOI: 10.7868/S3034533226100067

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует множество численных моделей атмосферных процессов, различающихся по назначению и математическим методам. К ним относятся метеорологические модели (планетарные [1], региональные [2], модели с разрешением облаков и вихрей [3]), термосферные модели [4]–[6] и комплексы для моделирования распространения волн от поверхности Земли до верхних слоев атмосферы [7]. Для моделирования атмосферных процессов используются также такие системы, как мезомасштабная WRF [8], блочно-адаптивная БАРС [9], икосаэдрическая ICON/ICON-LAM [10] и другие. Большинство моделей создавалось преимущественно эмпирически; полное математическое обоснование зачастую отсутствует в силу высокой сложности и громоздкости рассматриваемых задач.

Оценки показывают, что для атмосферных волн с периодами от секунд до часов и масштабами в десятки–сотни километров молекулярной вязкостью и теплопроводностью на высотах до 100 км можно пренебречь [11], [12]. При численном моделировании эти эффекты, как и турбулентная диссипация, значимы лишь на очень мелких сетках (с шагом от долей метра до десятков метров, в зависимости от высоты). Поскольку в реальных расчетах используются существенно более крупные шаги (от 100 м до нескольких километров), влияние молекулярной и турбулентной диффузии на численные результаты при таких больших шагах незначительно.

Приведенные соображения указывают на целесообразность изучения недиссипативных уравнений гидродинамики и совершенствования численных методов их решения. Известно, что гладкие решения недиссипативных уравнений газодинамики существуют лишь конечное время [13], [14]. Утрата гладкости со временем не

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект № 124032000025-1) в части формулировки функционала волновой энергии (Теорема 1 и ее доказательство); Минобрнауки РФ (проект проект 17.1) в части обобщения функционала волновой энергии на негладкие решения Разд. 4.1, 4.2, 4.3; РНФ (проект 25-17-00166) в части сравнения уравнений переноса волновой энергии и априорная оценка решения Разд 4.4, 4.5.

обязательно влечет за собой образование разрывов. Согласно экспериментальным исследованиям, в атмосфере часто наблюдаются так называемые тонкие структуры — внутренние гравитационные волны с вертикальным масштабом от десяти метров до нескольких километров [15], [16]. Их энергетический спектр при больших волновых числах ведет себя как k_z^{-3} (см. [17], [18]). При такой асимптотике спектра описывающие гидродинамические переменные функции непрерывны, но недифференцируемы по вертикали. Таким образом, негладкость решения необязательно проявляется в разрывах, а может заключаться в недифференцируемости гидродинамических полей при сохранении их непрерывности.

В подобной ситуации естественно рассматривать волновые возмущения в недиссипативной атмосфере как обобщенные (слабые) решения уравнений гидродинамики [20]–[22]. Однако в работах [23], [24] отмечается, что вопрос о единственности слабых решений в общем случае остается открытым. Проблема не сводится к чисто математической, поскольку искомые решения должны обладать ясным физическим смыслом. Сами же физические требования могут зависеть от конкретной задачи: в одних случаях они жесткие, в других — допускают определенные упрощения.

Для выделения физически оправданных решений обычно привлекается энтропийное условие, которое запрещает убывание энтропии, но не ограничивает ее рост. Последний может быть избыточным, что приводит к физически неправдоподобным результатам. С точки зрения неравновесной термодинамики условия на энтропию требуют уточнения.

Многие динамические процессы в атмосфере можно считать слабонелинейными, так как амплитуда гидродинамической скорости существенно меньше скорости звука. Тем не менее нелинейные эффекты накапливаются со временем, что делает необходимым использование полных нелинейных уравнений для адекватного моделирования. Традиционный теоретический анализ атмосферных волн базируется на упрощенных линейаризованных уравнениях [12], позволяющих выделять акустические, внутренние гравитационные волны и волны Россби [12], [11].

Для линейаризованных уравнений динамики атмосферных волн нет проблемы неединственности или неустойчивости: для реальной устойчивой стратификации атмосферы доказаны существование, единственность и устойчивость решения [25]. Построены алгоритмы численного решения, учитывающие реальную стратификацию среды, для которых доказаны устойчивость и сходимости к точным решениям [25]. Численные методы решения линейаризованных уравнений хорошо исследованы. В частности, показано, что вычислительные ошибки могут быстро накапливаться. В связи с этим разработаны методы, минимизирующие накопление погрешностей и позволяющие с достаточной точностью вычислять решения на больших временных интервалах, на порядки превышающих периоды моделируемых волн; представлены сравнения приближенных решений с точными [25].

В доказательствах существования, единственности и устойчивости решений линейаризованных уравнений существенно используется сохраняющийся квадратичный функционал волновой энергии для акустико-гравитационных волн [12], [28]. Этот же функционал применяется при определении слабых решений в теории волн малой амплитуды. В связи с такими полезными свойствами функционала волновой энергии представляется естественным поиск аналогичного обобщающего выражения, применимого к нелинейным уравнениям динамики газа в поле тяжести. Можно надеяться, что такой функционал будет полезен при построении и обосновании устойчивых численных схем.

В настоящей работе представлен так называемый общий функционал волновой энергии. Он сконструирован как специальная линейная комбинация энергии, энтропии и массы. Предложенный функционал обладает рядом принципиальных свойств: он сохраняется на гладких решениях системы уравнений; его плотность неотрицательна; в пределе малых амплитуд он переходит в классическую квадратичную плотность волновой энергии в линейной теории [12], [28]. Более того, как и в линейной теории, этот функционал может быть представлен в виде квадратичной формы (интеграла от суммы квадратов) искомым функций.

Формально данный функционал встречался в литературе. В рамках гамильтоновского формализма он применялся для построения аналитических моделей распространения волн методом теории возмущений [30], [29]. Кроме того, похожая конструкция использовалась в работе [31] при анализе асимптотик в уравнениях Навье–Стокса. Тем не менее, важные для исследования устойчивости свойства этого общего функционала волновой энергии ранее не были замечены, и не использовались.

Поскольку на больших временах классическое решение нелинейных недиссипативных гидродинамических уравнений, как правило, отсутствует, важным является вопрос о расширении предложенного функционала на негладкие (слабые) решения. Здесь естественна связь с неравновесной термодинамикой [33], [32], так как в структуру функционала входит энтропия с отрицательным знаком. В неравновесной термодинамике неубывание энтропии формулируется как локальный принцип неотрицательности производства энтропии, и этот принцип целесообразно применять при определении и моделировании слабых решений.

Традиционно принцип неубывания энтропии применяется при моделировании ударных волн [14], [22], однако здесь он выступает как фундаментальный для всех задач и в указанной, локальной формулировке. Также

анализ показывает, что принцип неотрицательности производства энтропии должен быть дополнен принципом минимального производства энтропии из неравновесной термодинамики [33], [32].

В общей теории квазилинейных гиперболических систем, к которым относятся и уравнения Эйлера, фундаментальную роль играет “принцип энтропии” [35], [34]. Однако следует разграничивать чисто математическую “функцию энтропии” Даффермоса и физическую энтропию, рассматриваемую в классической термодинамике и в настоящем исследовании. Разработке численных алгоритмов, адекватно воспроизводящих закон неубывания энтропии, посвящен ряд современных исследований [39]–[42]. В данной работе неубывание энтропии — это часть более общего вопроса; важно обеспечить физически правильное поведение решения на значительных временах, и только неубывания энтропии для этого недостаточно.

В работе также выведено уравнение переноса волновой энергии для нелинейного случая и проведено его сравнение с аналогичным уравнением в линейной теории. Отмечены некоторые осложняющие обстоятельства в нелинейном уравнении переноса. Для линеаризованных уравнений из очевидного физического требования конечности волновой энергии прямо следует интегрируемость функции, описывающей поток волновой энергии. В нелинейном случае связь не столь однозначна, и для обеспечения требуемых свойств потока волновой энергии может потребоваться дополнительная регуляризация уравнений.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Для описания динамики атмосферы на высотах до 100 км традиционно используется приближение уравнений Эйлера для идеального газа [12]. В двумерном случае система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p)u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho E + p)w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения: ρ — плотность; $p = \frac{\rho R T}{\mu}$ — давление; $E = \left(\frac{u^2 + w^2}{2} + g z + c_V T \right)$ — удельная полная энергия; T — абсолютная температура; R — универсальная газовая постоянная; μ — молярная масса воздуха ($\mu \approx 0.029$ кг/моль); c_V — удельная изохорная теплоемкость воздуха ($c_V = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu}$ для двухатомного газа); γ — показатель адиабаты ($\gamma = 1.4$), связанный с теплоемкостью соотношением $R/\mu = (\gamma - 1)c_V$; $\mathbf{v} = (u, w)$ — вектор скорости с горизонтальной и вертикальной компонентами; t — время; x, z — горизонтальная и вертикальная координаты; g — ускорение свободного падения. Уравнения (1) записаны для случая двух пространственных измерений. Трехмерный случай аналогичен, однако приводит к значительному усложнению вида уравнений.

Система (1) рассматривается в прямоугольной области $\Omega = (-L, L) \times (0, Z)$, где нижняя граница $z = 0$ соответствует поверхности Земли ($L > 0, Z > 0$). На всей границе $\partial\Omega$ задано условие непротекания:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе области.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И МЕТОД ЕЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Значительная плотность газа в приземном слое обуславливает малую амплитуду волновых возмущений на высотах до 100 км. Это позволяет в ряде задач переходить от нелинейной системы (1) к линеаризованным уравнениям, полученным стандартным методом [12], [25]:

$$\begin{aligned} (\rho_0 \Psi)_t + (\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z &= 0, & (\rho_0 u)_t + \rho_0 g H(\Psi + \Phi)_x &= 0, \\ (\rho_0 w)_t + (\rho_0 g H(\Psi + \Phi))_z + \rho_0 g \Psi &= 0, & (\rho_0 \Phi)_t + (\gamma - 1) \left((\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z \right) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) использованы относительные возмущения плотности $\Psi = \frac{\rho(x, z, t) - \rho_0(z)}{\rho_0(z)}$ и температуры $\Phi = \frac{T(x, z, t) - T_0(z)}{T_0(z)}$. Здесь $T_0(z)$ — фоновый профиль температуры, зависящий от вертикальной координаты z и определяющий стратификацию среды; $\rho_0(z) = \rho_0(0) \frac{H(0)}{H(z)} \exp\left(-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)$ — соответствующая температурному профилю фоновая плотность; $H(z) = \frac{RT_0(z)}{g\mu}$ — локальная высота однородной атмосферы, параметр $\alpha = \left(\gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz}\right)$ должен быть положительным во всей рассматриваемой области. В данной модели предполагается отсутствие фонового ветра.

Для системы уравнений (3), при условии существования гладкого решения, справедлив квадратичный закон сохранения волновой энергии [12], [25]:

$$\frac{dH_{\text{lin}}}{dt} = 0, \quad H_{\text{lin}} = \int_{\Omega} h_{\text{lin}}(x, z, t) d\Omega, \quad (4)$$

$$h_{\text{lin}} = \rho_0(z) \left[\frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{gH}{2\gamma} (\Phi + \Psi)^2 + \frac{gH}{2\gamma\alpha} (\Phi - (\gamma - 1)\Psi)^2 \right].$$

Для закона сохранения волновой энергии справедлива еще одна полезная формулировка:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\text{lin}} + \nabla \cdot (\rho_0(z) gH (\Psi + \Phi) \mathbf{v}) = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{v} = (u, w)$. Формулировка (4) закона сохранения волновой энергии следует из (5) и граничных условий (2). Уравнение (5) можно использовать вместо одного из уравнений системы (3), например, вместо четвертого уравнения.

Введем столбец $\xi(x, z, t) = (\Psi(x, z, t), u(x, z, t), w(x, z, t), \Phi(x, z, t))^T$ и определим для него норму $\|\xi\|_{h_{\text{lin}}} = \sqrt{2h_{\text{lin}}}$. Выбор данной нормы обоснован не только формально-математически, но и физически, поскольку она напрямую связана с энергией волновых возмущений. Из закона сохранения энергии (4) следует устойчивость решения $\xi(x, z, t)$ системы уравнений (3): $\|\xi(x, z, t)\|_{h_{\text{lin}}} = \|\xi(x, z, 0)\|_{h_{\text{lin}}}$ и единственность решения [25].

Численный метод для решения системы уравнений (3), пригодный для любой устойчивой стратификации среды, предложен и обоснован в [25]. Метод позволяет решать различные задачи, но нацелен на задачи о распространении длинных внутренних гравитационных волн. Этот вид волн доминирует в спокойных атмосферных процессах, и в пределе длинных внутренних гравитационных волн система уравнений (3) вырождается в том смысле, что слагаемое $(\rho_0 w)_t$ является малым по сравнению с другими слагаемыми уравнений. Это обстоятельство нужно учитывать при разработке численного метода.

В теории численного метода решения системы (3) существенную роль играют сеточные аналоги функционала (4) и уравнения переноса волновой энергии (5). Определим в области Ω равномерную сетку с шагами h_x и h_z по соответствующим координатам. Устойчивая дифференциально-разностная аппроксимация уравнений (3), согласно [25], записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0(z_j) \Psi_{i,j}) + \delta_x [\rho_0(z_j) u_{i,j}] + \delta_z [\rho_0(z_j) w_{i,j}] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0(z_j) u_{i+1,j}) + \delta_x [\rho_0(z_j) gH_j (\Psi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j})] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0(z_{j+1}) w_{i,j+1}) + \delta_z [\rho_0(z_{j+1}) gH(z_{j+1}) (\Psi_{i,j+1} + \Phi_{i,j+1})] + \epsilon_{j+1}^1 \Psi_{i,j+2} + \epsilon_{j+1}^2 \Psi_{i,j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0(z_j) \Phi_{i,j}) + (\gamma - 1) \{ \delta_x [\rho_0(z_j) u_{i,j}] + \delta_z [\rho_0(z_j) w_{i,j}] \} + \lambda_j^1 w_{i,j+1} + \lambda_j^2 w_{i,j-1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь использована разнесенная сетка “крест”, изображенная на фиг. 1 (вместо ρ и T используются связанные с ними Ψ и Φ). Индексы i, j — четные, разностные операторы δ_x, δ_z определены соотношениями:

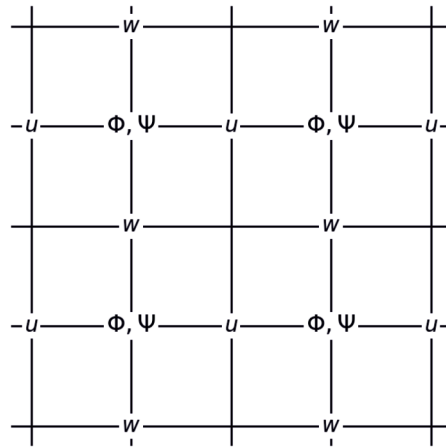
$$\delta_x [y_{i,j}] = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2h_x}, \quad \delta_z [y_{i,j}] = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2h_z}.$$

Коэффициенты $\lambda_j^1, \lambda_j^2, \epsilon_{j+1}^1, \epsilon_{j+1}^2$ выписаны в [25].

Для системы уравнений (6) можно записать дискретный аналог закона сохранения волновой энергии (4):

$$\begin{aligned} \frac{dH_{\text{grid}}}{dt} &= 0, \\ H_{\text{grid}} &= \frac{4h_x h_z}{2} \left\{ \sum_{\Omega} \frac{\rho_0(z_j) gH(z_j)}{\gamma} \left[(\Phi_{i,j} + \Psi_{i,j})^2 + \frac{(\Phi_{i,j} - (\gamma - 1)\Psi_{i,j})^2}{\alpha(z_j)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\Omega} \rho_0(z_j) u_{i+1,j}^2 + \sum_{\Omega} \rho_0(z_{j+1}) w_{i,j+1}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

В (7) сумма берется по четным i, j в области Ω .



Фиг. 1. Разнесенная разностная сетка типа “крест”. Переменные Φ, Ψ определены в узлах (x_i, z_k) с четными i, k . Компоненты скорости задаются между этими узлами: u — в узлах с нечетным i , w — в узлах с нечетным k .

Формула (7) определяет не только сеточный аналог волновой энергии, но и функцию Ляпунова H_{grid} [26], [27] для аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6).

Построим из сеточных функций $\Psi_{\text{grid}}(t)$, $u_{\text{grid}}(t)$, $w_{\text{grid}}(t)$, $\Phi_{\text{grid}}(t)$ с соответствующими элементами $\Psi_{ij}(t)$, $u_{ij}(t)$, $w_{ij}(t)$, $\Phi_{ij}(t)$ столбец

$$\xi_{\text{grid}}(t) = \begin{pmatrix} \Psi_{\text{grid}}(t) \\ u_{\text{grid}}(t) \\ w_{\text{grid}}(t) \\ \Phi_{\text{grid}}(t) \end{pmatrix}$$

и определим сеточную норму $\|\xi_{\text{grid}}(t)\| = \sqrt{2H_{\text{grid}}}$. В [25] показано, что решение $\xi_{\text{grid}}(t)$ системы уравнений (6) существует, единственно, устойчиво в смысле введенной нормы.

Более того, в [25] показано, что если восполнить сеточную функцию $\xi_{\text{grid}}(t)$ между узлами сетки кусочно-постоянными значениями, то предел получаемой восполненной кусочно-постоянной функции при шагах сетки $h_x, h_z \rightarrow 0$ дает обобщенное (слабое) решение системы уравнений (3).

Решать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6) можно, например, с помощью методов Рунге-Кутты. Приемлемый метод решения уравнений (6) описан в [25], в этой же статье приведены примеры тестовых расчетов. Уравнения (6) позволяют моделировать не только гладкие решения уравнений (3), но и распространение волн с разрывами.

Обсудим негладкие решения системы уравнений (3) [25]. Перепишем для краткости систему уравнений (3) в виде одного матричного уравнения вида $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \hat{L}\xi = 0$, где $\hat{L}$ — матричный дифференциальный оператор, вид которого легко восстановить по (3). Введем скалярное произведение

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_{\text{lin}}} = \int_{\Omega} \rho_0(z) \left[u_1 u_2 + w_1 w_2 + \frac{gH}{\gamma} (\Phi_1 + \Psi_1)(\Phi_2 + \Psi_2) + \frac{gH}{\gamma\alpha} (\Phi_1 - (\gamma - 1)\Psi_1)(\Phi_2 - (\gamma - 1)\Psi_2) \right] d\Omega. \quad (9)$$

Обозначим гильбертово пространство со скалярным произведением (9) символом $\mathbf{H}$. Рассмотрим множество $\tilde{M}$ вектор-функций $\xi_s(x, z, t)$, определенных в $\Omega \otimes [0, t_0]$. Пусть $\xi_s(x, z, t) \in C^1(\Omega) \otimes C^1[0, t_0]$ и $(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0$, где $\mathbf{v} = (u, w)$, а $\mathbf{n}$ — нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω . Введем на $\tilde{M}$ норму

$$\|\xi_s\| = \left(\int_0^{t_0} \left(\|\xi_s\|_{H_{\text{lin}}}^2 + \|\xi_{s,t}\|_{H_{\text{lin}}}^2 + \|\hat{L}\xi_{s,x}\|_{H_{\text{lin}}}^2 + \|\hat{L}\xi_{s,z}\|_{H_{\text{lin}}}^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Здесь нижние индексы x, z и t обозначают соответствующие частные производные.

Пополнение множества $\tilde{M}$ дает банахово пространство, которое обозначим через M .

Согласно [25], обобщенным (слабым) решением называется такой столбец $\xi \in M$, что для любой гладкой вектор-функции $\xi_s \in M$ и такой, что $\xi_s \equiv 0$ при $t > t_1 < t_0$ выполняется

$$\langle \xi(x, z, t = 0), \xi_s(x, z, t = 0) \rangle_{H_{\text{lin}}} + \int_0^{t_0} \langle \xi, \left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{L} \right) \xi_s \rangle_{H_{\text{lin}}} dt = 0. \quad (10)$$

Поскольку множество M всюду плотно в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и поскольку решение устойчиво по начальным данным, то обобщенное решение вида (10) можно построить для любой $\xi(x, z, 0) \in \mathbf{H}$. То есть, система уравнений (6) позволяет моделировать, в частности, также и негладкие решения системы уравнений (3).

Мы можем не углубляться здесь в вопрос, что представляют из себя негладкие решения. Отметим лишь, что в этой конструкции негладкое решение можно с любой точностью аппроксимировать в метрике, порожденной энергетической нормой, каким-то гладким решением.

4. ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ВОЛНОВОЙ ЭНЕРГИИ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Поскольку в слое атмосферы до 80 км абсолютная температура варьируется в пределах 15%, в теоретических моделях фоновый температурный профиль часто аппроксимируют константой. В рамках изотермического приближения фоновая температура $T_0 = \text{const}$ обуславливает экспоненциальную стратификацию плотности невозмущенного газа: $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, где $H \approx 8$ км. В настоящей работе мы придерживаемся допущения о постоянстве фоновой температуры.

Для линеаризованной системы (3) известно множество аналитических решений, что позволило в [25] детально протестировать дифференциально-разностную аппроксимацию (6). Особое внимание было уделено анализу накопления вычислительных погрешностей. Известно, что вычислительные погрешности со временем накапливаются, и точность приближенного решения постепенно может стать неудовлетворительной. В [25] предложены методы решения уравнений (6) с медленно накапливающейся вычислительной погрешностью; представлены результаты тестового сравнения точных аналитических и приближенных решений, демонстрирующие очень медленное накопление вычислительных ошибок.

Амплитуды акустико-гравитационных волн в атмосфере обычно сравнительно невелики. Поскольку методы решения линеаризованных уравнений хорошо теоретически обоснованы и проверены тестированием, естественно попытаться построить такие методы решения полных нелинейных уравнений Эйлера (1), которые естественным образом обобщают эти хорошо обоснованные методы теории линеаризованных уравнений и в пределе волн малых амплитуд переходят в методы для линейных уравнений.

Поскольку доказательства существования, единственности, устойчивости решений линеаризованных уравнений и теория численного решения этих уравнений существенно используют функционал волновой энергии (4) и уравнение переноса волновой энергии (5), естественно попытаться построить аналогичный функционал для нелинейных уравнений, который обобщал бы функционал (4) на нелинейные уравнения.

Нелинейный аналог функционала (4) будем называть общим функционалом волновой энергии. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть решение уравнений (1) гладкое. Тогда функционал

$$H_{\text{nonl}} = \int_{\Omega} \left[\rho_0(z) c_V T_0 (\gamma - 1) + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho g z + \rho c_V T - \rho c_V T_0 \left(\gamma + \ln \frac{T}{T_0} - (\gamma - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_0(0)} \right) \right] d\Omega \quad (11)$$

(где условия $\rho > 0$ и $T > 0$ продиктованы физическим смыслом) является интегралом движения. Подынтегральное выражение в (11) неотрицательное, и в пределе волн малой амплитуды функционал (11) переходит в выражение (4).

Доказательство. Для гладких решений системы (1) справедливы законы сохранения массы, энергии и энтропии. Искомый интеграл движения строится как линейная комбинация этих сохраняющихся величин:

$$\int_{\Omega} \left[A \rho (\ln T - (\gamma - 1) \ln \rho) + B \rho + D + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho g z + \rho c_V T \right] d\Omega. \quad (12)$$

Здесь A, B, D — неизвестные пока постоянные. Очевидно, выписанная комбинация сохраняется. Введем далее функции u', w', Φ', Ψ' соотношениями:

$$u = \varepsilon u' \sqrt{gH}, \quad w = \varepsilon w' \sqrt{gH}, \quad \rho = \rho_0(z)(1 + \varepsilon \Psi'), \quad T = T_0(1 + \varepsilon \Phi'). \quad (13)$$

Здесь ε — безразмерный амплитудный параметр, вводимый для исследования предела малых амплитуд; Ψ', Φ', u', w' — безразмерные функции. Постоянные A, B, D вычислим из условия, что члены нулевой и первой степени в разложении подынтегральной функции в (12) по ε взаимно сокращаются. Тогда члены старшего порядка по ε будут квадратичными. Легко обнаружить, что они совпадут с соответствующими членами в (4). То есть в пределе волн малых амплитуд построенный функционал переходит в (4). Подставим вычисленные постоянные A, B, D

в функционал (12). Тогда (12) совпадает с (11). В переменных Ψ' , Φ' , u' , w' функционал волновой энергии для нелинейных уравнений выглядит следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left[\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \Psi') \left(\frac{(u')^2 + (w')^2}{2} \right) + \frac{c_V \{[(\gamma - 1) \ln(1 + \varepsilon \Psi') - \ln(1 + \varepsilon \Phi') + \varepsilon \Phi'](1 + \varepsilon \Psi') - (\gamma - 1) \varepsilon \Psi'\}}{\gamma - 1} \right] \rho_0(z) g H d\Omega.$$

Неотрицательность подинтегральной функции переменных Ψ' , Φ' , u' , w' доказывается с помощью ее исследования; несложно показать, что минимум подинтегральной функции равен нулю. Видно, что в пределе волн малых амплитуд, при $\varepsilon \rightarrow 0$, построенный функционал (11) переходит в функционал (4).

Поскольку в пределе волн малой амплитуды функционал (11) переходит в квадратичную форму (4), его естественно интерпретировать как общий функционал волновой энергии.

4.1. Обобщение функционала волновой энергии (11) на случай негладких решений

Для гладких решений функционал волновой энергии (11) и его свойства выводятся из уравнений. Для негладких решений поведение функционала (11) во времени постулируется исходя из физических соображений.

Функционал (11) представляет собой линейную комбинацию массы, полной энергии и энтропии, и поведение функционала определяется свойствами входящих в него величин. Сохранение массы и энергии диктуется физическими соображениями. В то же время интеграл энтропии $\int_{\Omega} \rho s d\Omega$, согласно положениям термодинамики, в общем случае может изменяться. Потребуем

$$\frac{dH_{\text{nonl}}}{dt} \leq 0. \quad (14)$$

Выбор знака неравенства в (14) обоснован двумя соображениями. Во-первых, согласно второму закону термодинамики, энтропия изолированной системы не убывает со временем, но может возрастать [33], [32]. Во-вторых, в пределе волн малых амплитуд функционал (11) переходит в функционал (4), который сохраняется, что влечет за собой устойчивость решений. Стало быть, условие (14) тоже является необходимым условием устойчивости решений, но уже для нелинейных уравнений.

4.2. Условия на энтропию, следующие из неравновесной термодинамики

Согласно неравновесной термодинамике [33], [32], уравнение для энтропии можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s u}{\partial x} + \frac{\partial \rho s w}{\partial z} = \sigma, \quad \sigma \geq 0, \quad (15)$$

где $s = c_V (\ln(T) - (\gamma - 1) \ln(\rho) + \text{const})$ — удельная энтропия. Для классических гладких решений из системы (1) строго следует (15) с $\sigma = 0$.

В неравновесной термодинамике слагаемое σ в правой части (15) интерпретируется как производство энтропии. Второй закон термодинамики постулирует $\sigma \geq 0$ именно как локальное требование в каждой точке среды, что является более сильным требованием, чем интегральное условие неубывания энтропии в конечном объеме, следующее из (14).

В рассматриваемых атмосферных процессах в окрестности каждой точки среды в любой момент времени устанавливается локальное термодинамическое равновесие [33], [32], и гидродинамические частицы находятся в медленно изменяющихся внешних условиях, которые можно рассматривать как квазистационарные. В этом случае, согласно принципу минимума производства энтропии [33], [32], процессы протекают таким образом, чтобы величина σ была минимальной (при соблюдении ограничения $\sigma \geq 0$).

Следовательно, при определении слабых решений и построении дифференциально-разностных аппроксимаций уравнений гидродинамики необходимо выполнить два условия: обеспечить неотрицательность производства энтропии ($\sigma \geq 0$) и минимизировать значение σ . Точно удовлетворить второму требованию вряд ли возможно, однако при дискретизации можно подобрать такие аппроксимации, при которых величина σ будет минимальной в рамках рассматриваемого класса. Для гладких решений оба условия выполняются автоматически, так как в этом случае $\sigma = 0$. Для волн малой амплитуды, для линеаризованных уравнений, тоже выполняются оба условия, даже если решение негладкое, так как в этом случае также $\sigma = 0$.

4.3. Определение слабого решения с учетом положений неравновесной термодинамики

Традиционно представим систему уравнений (1) в компактном векторном виде:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f_x(r)}{\partial x} + \frac{\partial f_z(r)}{\partial z} = q, \quad (16)$$

где $r^T = (\rho, \rho u, \rho w, \rho E)$ — вектор консервативных переменных; $f_x^T(r) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u w, \rho(E + p)u)$ и $f_z^T(r) = (\rho w, \rho u w, \rho w^2 + p, \rho(E + p)w)$ — векторы соответствующих потоков, $q^T = (0, 0, -\rho g, 0)$ — вектор источников членов. Плотность полной энергии задается выражением $E = \frac{u^2 + w^2}{2} + gz + c_V T$.

Для определения обобщенного (слабого) решения системы (1) воспользуемся стандартным подходом [22], [21] и получим из (16) интегральное уравнение:

$$\int_{\Omega} r_s(x, z, 0) r(x, z, 0) d\Omega + \int_{Q_{t_0}} \left(r \frac{\partial r_s}{\partial t} + f_x(r) \frac{\partial r_s}{\partial x} + f_z(r) \frac{\partial r_s}{\partial z} \right) dQ_{t_0} + \int_{Q_{t_0}} q r_s dQ_{t_0} = 0. \quad (17)$$

Здесь в (17) $Q_{t_0} = \Omega \times [0, t_0]$ — пространственно-временной цилиндр, $0 \leq t \leq t_0$; $r_s = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ — произвольная пробная вектор-функция из класса $C^1(Q_{t_0})$, компоненты которой удовлетворяют условию $\zeta_i(x, z, t_0) = 0$ при $i = 1, 2, 3, 4$.

Мы имеем два дополнительных условия на энтропию. По аналогии с (17), сформулируем интегральное соотношение для энтропии. Для любой неотрицательной функции $\phi(x, z, t) \in C^1(Q_{t_0})$ такой, что $\phi(x, z, t_0) = 0$, должно выполняться условие:

$$-\int_{\Omega} \phi(x, z, 0) \varepsilon(x, z, 0) d\Omega + \int_{Q_{t_0}} \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \varepsilon w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dQ_{t_0} = \int_{Q_{t_0}} \phi(x, z, t) \sigma(x, z, t) dQ_{t_0} \geq 0. \quad (18)$$

Здесь для краткости введено обозначение $\varepsilon(x, z, t) = \rho(x, z, t) s(x, z, t)$. В силу линейности соотношения (18) относительно ε , неотрицательной пробной функции достаточно для корректного описания закона неубывания энтропии.

Обобщенным (слабым) решением системы законов сохранения (16), удовлетворяющим условию неотрицательности производства энтропии, назовем столбец-функцию $r(x, z, t)$, для которой справедливы интегральные соотношения (17) и (18). Предполагается, что компоненты векторов $r(x, z, t)$, $f_x(r(x, z, t))$, $f_z(r(x, z, t))$, а также функции $\varepsilon(x, z, t)$, $\varepsilon(x, z, t)u(x, z, t)$, $\varepsilon(x, z, t)w(x, z, t)$ принадлежат пространству $L_1(Q_{t_0})$, тогда как начальные данные $r|_{t=0}$, $\varepsilon|_{t=0}$ принадлежат $L_1(\Omega)$.

Сформулированное определение принимается в качестве рабочей гипотезы. Оно полезно при построении разностных аппроксимаций уравнений гидродинамики (1) и помогает отобрать варианты, приемлемые как с точки зрения устойчивости, так и с позиций неравновесной термодинамики. Требование (18) целесообразно дополнить локальным принципом минимума производства энтропии, который также способствует отбору физически адекватных разностных схем. Данный принцип является фундаментальным в неравновесной термодинамике, и численное решение, претендующее на достоверность, должно соответствовать ему хотя бы приближенно.

Условие (18) на производство энтропии в локальной форме записано здесь в терминах неравновесной термодинамики, вероятно, впервые. Однако требование неубывания энтропии в локальной форме используется, например, в [41], [44]. Отметим, что требование неубывания энтропии, предложенное П. Лаксом [21], широко используется при моделировании ударных волн.

Требования к локальному производству энтропии представляются особенно важными при моделировании атмосферных процессов, так как соответствующие расчеты обычно выполняются на длительных временных интервалах. В этих условиях недостаточная или избыточная диссипация, накапливаясь со временем, может сделать решение физически неадекватным. С математической точки зрения критически важным является условие локальной неотрицательности производства энтропии, поскольку оно непосредственно связано с устойчивостью численного алгоритма.

Предлагаемая формулировка является переопределенной: для четырех искоемых функций (ρ , T , u , w) заданы четыре уравнения и два дополнительных ограничения на поведение энтропии. Кроме того, сеточные аппроксимации должны быть консервативными; в этом случае из их консервативности и выполнения энтропийных условий будет следовать невозрастание функционала волновой энергии. Это, в свою очередь, обеспечит устойчивость решения и возможность непрерывного предельного перехода к классическому случаю волн малых амплитуд.

4.4. Сравнение уравнений переноса волновой энергии в линейном и нелинейном случаях

Исходя из физических соображений, естественно потребовать, чтобы в пределе волн малых амплитуд определение слабых решений (17), с учетом энтропийных условий, переходило в определение (10). Мы полагаем, что наличие непрерывного предельного перехода в численных методах к случаю волн малой амплитуды позволит снять возможную проблему с неединственностью решения нелинейной задачи, по крайней мере, для волн умеренной амплитуды.

Первые три уравнения системы (3) являются линеаризованными аналогами соответствующих уравнений системы (16). Следовательно, в интегральных формах (10) и (17) соответствующие вклады в линейном приближении практически совпадают, различаясь лишь второстепенными деталями в определении пробных функций.

Четвертое уравнение (3) по виду существенно отличается от четвертого уравнения системы (16). Однако из системы (3) следует уравнение энергии, которое совпадает с законом сохранения энергии из (16), взятым в приближении волн малой амплитуды.

Из уравнений (3) и дифференциально-разностных уравнений (6) можно вывести уравнение для энтропии. Примечательно, что в линеаризованной теории производство энтропии равно нулю даже при наличии разрывов. Следовательно, в нелинейном случае величина σ должна стремиться к нулю при уменьшении амплитуды волн (в том числе на разрывах), что согласуется с принципами неотрицательности и минимума производства энтропии из неравновесной термодинамики.

В разд. 4 при доказательстве теоремы 1 были сопоставлены выражения для волновой энергии в линейной и нелинейной постановках. Однако закон изменения волновой энергии содержит не только плотность волновой энергии, но и плотность ее потока. В связи с этим представляется целесообразным провести детальный сравнительный анализ этих величин.

Подставим в выражение для волновой энергии (11) соотношения:

$$\rho(x, z, t) = \rho_0(z)(1 + \Psi(x, z, t)), \quad T(x, z, t) = T_0(1 + \Phi(x, z, t)), \quad (19)$$

где $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(-z/H)$, $H = RT_0/(g\mu)$, $R/\mu = (\gamma - 1)c_V$. Мы предполагаем $-1 < \Psi(x, z, t)$ и $-1 < \Phi(x, z, t)$.

Очевидно, что функция $[\ln(1 + \Psi)(1 + \Psi) - \Psi]$ переменной Ψ и функция $[\ln(1 + \Phi) - \Phi]$ переменной Φ выпуклы вниз и принимают минимальные значения, равные нулю при $\Psi = 0$ и $\Phi = 0$ соответственно.

Определим непрерывно дифференцируемые монотонные функции $\kappa(\Psi)$ и $\eta(\Phi)$ формулами:

$$\begin{aligned} \kappa(\Psi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\ln(1 + \Psi)(1 + \Psi) - \Psi}, & \Psi \geq 0 \\ -\sqrt{\ln(1 + \Psi)(1 + \Psi) - \Psi}, & -1 < \Psi < 0 \end{pmatrix}, \\ \eta(\Phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi - \ln(1 + \Phi)}, & \Phi \geq 0 \\ -\sqrt{\Phi - \ln(1 + \Phi)}, & -1 < \Phi < 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Когда Ψ растет в интервале $(-1, \infty)$, функция $\kappa(\Psi)$ монотонно растет в интервале $(-1, \infty)$ (см. фиг. 2). Аналогично, когда Φ растет в интервале $(-1, \infty)$, функция $\eta(\Phi)$ монотонно растет в интервале $(-1, \infty)$.

Используя введенные функции $\kappa(\Psi)$ и $\eta(\Phi)$, функционал H_{nonl} из (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_{\text{nonl}}(t) &= \int_{\Omega} h_{\text{nonl}}(x, z, t) d\Omega, \\ h_{\text{nonl}}(x, z, t) &= \rho(x, z, t) \left(\frac{u(x, z, t)^2}{2} + \frac{w(x, z, t)^2}{2} + \frac{gH(\eta(\Phi(x, z, t)))^2}{(\gamma - 1)} \right) + \rho_0(z)gH(\kappa(\Psi(x, z, t)))^2. \end{aligned} \quad (21)$$

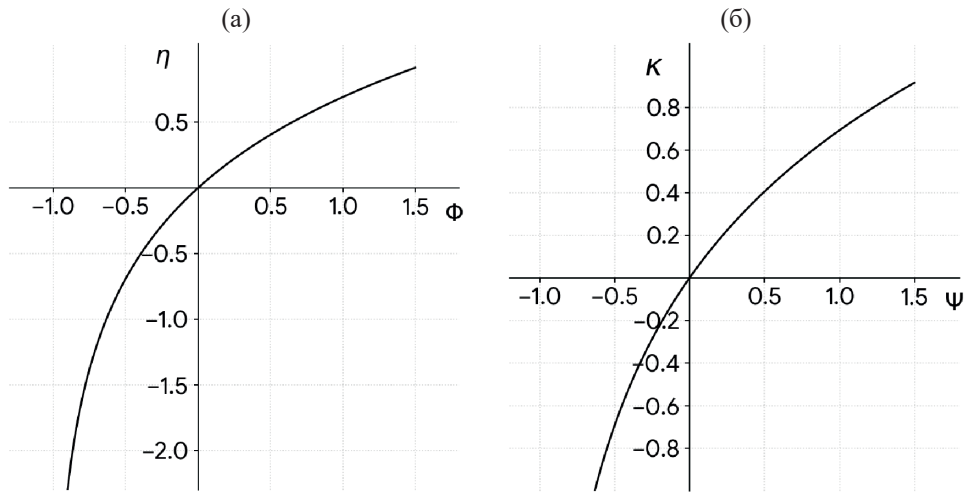
Неотрицательность функционала (21) очевидна; функционал принимает минимальное значение, когда $\Psi = 0$, $\Phi = 0$, $u = 0$ и $w = 0$ для всех x, z .

Можно записать дифференциальное уравнение, которому $h_{\text{nonl}}(x, z, t)$ удовлетворяет:

$$\frac{\partial h_{\text{nonl}}}{\partial t} + \frac{\partial j_{x, h_{\text{nonl}}}}{\partial x} + \frac{\partial j_{z, h_{\text{nonl}}}}{\partial z} = -\rho T_0 \sigma \leq 0, \quad (22)$$

где σ — производство энтропии из (15), а вектор потока волновой энергии равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{h_{\text{nonl}}} &= \mathbf{v}(x, z, t) \left[\rho(x, z, t) \left(\frac{u^2 + w^2}{2} + gz + c_V T(x, z, t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_V T_0 \left(\gamma + \ln \left(\frac{T(x, z, t)}{T_0} \right) - (\gamma - 1) \ln \left(\frac{\rho(x, z, t)}{\rho_0(0)} \right) \right) \right) + P(x, z, t) \right] = (h_{\text{nonl}} + p_1(x, z, t)) \mathbf{v}(x, z, t). \end{aligned} \quad (23)$$



Фиг. 2. Графики функций $\eta(\Phi)$ (а) и $\kappa(\Psi)$ (б).

Здесь $P(x, z, t) = P_0(z) + p_1(x, z, t)$ — давление, где $p_1(x, z, t)$ является волновой добавкой к фоновому давлению $P_0(z) = \rho_0(z)gH$.

Таким образом, переход к уравнениям линейного приближения заключается, в частности, в том, что выражение для h_{nonl} из (21) упрощается, и переходит в h_{lin} из (4). В обоих случаях, и h_{nonl} и h_{lin} , записываются в виде квадратичных форм.

Из предполагаемой конечности интеграла волновой энергии H_{nonl} следует, что u, w, η, κ являются функциями, квадратично интегрируемыми с весом $\rho(x, z, t)$ или $\rho_0(z)$. Поскольку η и κ — монотонные дифференцируемые функции переменных Φ и Ψ , то температура T и плотность ρ однозначно восстанавливаются по η и κ , и наоборот.

Существенное различие между линейной и нелинейной задачами проявляется именно в структуре потока $\mathbf{j}_{h_{\text{nonl}}}$ из (23). При переходе к линейному приближению слагаемое $h_{\text{nonl}}\mathbf{v}(x, z, t)$ в (23) отбрасывается. Предыдущий анализ показывает, что h_{nonl} является интегрируемой функцией пространственных переменных, однако произведение может оказаться неинтегрируемой функцией. Для сравнения, в линейной задаче поток волновой энергии $p_1(x, z, t)h_{\text{nonl}}\mathbf{v}(x, z, t) = \rho_0(z)gH(\Phi + \Psi)\mathbf{v}(x, z, t)$ всегда описывается интегрируемой функцией, если только конечен интеграл волновой энергии. Кроме того, поскольку величина $h_{\text{nonl}}\mathbf{v}(x, z, t)$ выражается через произведение более чем двух функций, наличие этого члена допускает перенос энергии по спектру в область коротких волн. Следовательно, помимо учета положений неравновесной термодинамики, может потребоваться дополнительная регуляризация уравнений. Например, при учете вязкости, если поле скорости $\mathbf{v}(x, z, t)$ достаточно гладкое, проблема возможной неинтегрируемости или сильной осцилляции функции $h_{\text{nonl}}\mathbf{v}(x, z, t)$ полностью снимается.

4.5. Априорная оценка энергетической нормы решения

Поскольку ρ и T связаны с κ и η монотонными непрерывно дифференцируемыми функциями, то мы можем равноценно использовать κ и η вместо ρ и T .

На основании выражения (21) представляется естественным ввести энергетическую норму вектора состояния $\mathbf{q}^T = \{u, w, \eta, \kappa\}$ через удвоенную энергию:

$$\|\mathbf{q}\|_E^2 = 2H_{\text{nonl}} = \int_{\Omega} \left[\rho(u^2 + w^2) + \frac{2gH\rho}{\gamma - 1}\eta^2 + 2\rho_0gH\kappa^2 \right] d\Omega. \quad (24)$$

Из условия неотрицательности производства энтропии следует неравенство $\frac{dH_{\text{nonl}}}{dt} \leq 0$, что позволяет получить априорную оценку:

$$\|\mathbf{q}(t)\|_E \leq \|\mathbf{q}(0)\|_E \quad \forall t > 0. \quad (25)$$

Эта оценка гарантирует, что энергетическая норма решения, если решение описанной выше задачи существует, не превышает своего начального значения. С математической точки зрения это необходимое условие устойчивости решения в пространстве $L_2(\Omega)$, а с физической — подтверждение, что без внешнего притока энергии

возмущения не могут неограниченно расти. Наличие такой оценки является важным условием корректности нелинейной задачи.

Из конечности интеграла (24) следует, что компоненты скорости u и w и трансформированные переменные η , κ являются функциями, квадратично интегрируемыми с весами ρ или $\rho_0(z)$. Для придания пространству состояний структуры гильбертова пространства $L_2(\Omega)$, целесообразно ввести новые переменные:

$$\tilde{u} = \sqrt{\rho}u, \quad \tilde{w} = \sqrt{\rho}w, \quad \tilde{\eta} = \sqrt{\frac{2gH\rho}{\gamma-1}}\eta, \quad \tilde{\kappa} = \sqrt{2\rho_0gH}\kappa. \quad (26)$$

В этих переменных квадрат энергетической нормы (24) превращается в каноническую форму:

$$\|\mathbf{q}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\tilde{u}^2 + \tilde{w}^2 + \tilde{\eta}^2 + \tilde{\kappa}^2) d\Omega. \quad (27)$$

Такое определение нормы позволяет использовать аппарат гильбертовых пространств для исследования устойчивости слабых решений, так как метрика пространства не зависит от текущего $\rho(x, z, t)$.

Метрика, порожденная энергетической нормой (27)

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \left(\int_{\Omega} [(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)^2 + (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)^2 + (\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2)^2 + (\tilde{\kappa}_1 - \tilde{\kappa}_2)^2] d\Omega \right)^{1/2}, \quad (28)$$

задает естественную меру “близости” двух различных волновых полей. Это формализует понятие устойчивости нелинейной задачи.

В силу нелинейности задачи решение может быть устойчивым при одних начальных данных и неустойчивым при других. Использование метрики (28) позволяет исследовать зависимость устойчивости решения от начальных условий.

Разработанные численные методы для линейных уравнений тестировались в [25] на точных решениях для линейных внутренних гравитационных волн. Качество моделирования признано хорошим. Численные методы для нелинейных уравнений тестировались в [45]–[48] на задачах о распаде внутренних гравитационных волн на уединенные волны (солитоны), для которой известны приближенные аналитические решения. Выбор такого тестирования обусловлен тем, что внутренние гравитационные волны доминируют во многих атмосферных процессах, и численные методы изначально создавались для моделирования нелинейных внутренних гравитационных волн. Поскольку в модели решаются полные уравнения, то и другие типы волновых возмущений моделируются, но высокое качество моделирования других типов волновых возмущений не гарантируется.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе рассматриваются и сопоставляются нелинейные и линеаризованные уравнения динамики недиссипативного газа в поле тяжести.

Известно, что в доказательствах существования, устойчивости и единственности решений линеаризованных уравнений существенно используются функционал волновой энергии и уравнение сохранения волновой энергии. В доказательствах устойчивости численных методов и их сходимости также применяются сеточные аналоги этого сохраняющегося функционала. При этом соответствующие доказательства выполнены для случая произвольной устойчивой стратификации среды. Столь важное значение функционала объясняется его свойствами: подынтегральное выражение неотрицательно и обращается в нуль только в отсутствие волновых возмущений.

Для нелинейных уравнений упомянутые выше вопросы — например, вопрос об устойчивости численных схем — являются крайне актуальными. Учитывая важную роль функционала волновой энергии в теории линеаризованных уравнений, предпринята попытка обобщения этого функционала на нелинейный случай. Такой сохраняющийся функционал построен для гладких решений. Его подынтегральное выражение, как и в случае линеаризованных уравнений, неотрицательно и равно нулю только в отсутствие волновых возмущений и ветра.

Показано, что подобно случаю линеаризованных уравнений динамики газа в поле тяжести, функционал волновой энергии для нелинейных уравнений тоже может быть записан в квадратичной форме. Выписан закон изменения волновой энергии для нелинейного случая.

Поскольку гладкие решения нелинейных уравнений газодинамики существуют лишь конечное время, далее рассмотрен вопрос об обобщении данного функционала на случай негладких решений. С учетом положений неравновесной термодинамики показано, что в общем случае построенный функционал волновой энергии

является невозрастающим. Если решения негладкие, закон изменения волновой энергии содержит источник, учитывающий убывание функционала вследствие потери гладкости решения. Для рассматриваемых уравнений, когда эффекты вязкости и теплопроводности не учитываются, явный вид этого источника неизвестен, но он должен удовлетворять принципу минимума производства энтропии, и это обстоятельство можно конструктивно использовать при подборе разностных аппроксимаций гидродинамических уравнений.

Подобно функционалу волновой энергии для линеаризованных уравнений, явный вид функционала волновой энергии для нелинейных уравнений и требование его невозрастания могут быть использованы для построения устойчивых разностных аппроксимаций нелинейных уравнений динамики стратифицированного газа, а также при математическом исследовании уравнений в общем случае негладких решений.

Авторы выражают благодарность С.Б. Лебле, С.Ю. Доброхотову и Л.М. Алексеевой за обсуждение статьи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Satoh M., Matsuno T., Tomita H., H. Miura, Nasuno T., Iga S.* Nonhydrostatic icosahedral atmospheric model (NICAM) for global cloud resolving simulations // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. P. 3486–3514.
2. *Michalakes J., Chen S., Dudhia J., Hart L., Klemp J., Middlecoff J., Skamarock W., Bush S.* Development of a next-generation regional weather research and forecast model // *Developments in Teracomputing: Proc. of the Ninth ECMWF Workshop on the Use of High Performance Computing in Meteorology*. Eds. W. Zwiefelhofer, N. Kreitz. Singapore: World Scientific, 2001. P. 269–276.
3. *Tao W.K., Chern J.D., Atlas R., Randall D., Khairoutdinov M.F., Lin J.L., Waliser D.E., Hou A., Lin X., Peters-Lidard C., Lau W., Jiang J., Simpson J.* A multiscale modeling system // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 2009. V. 90. № 4. P. 515–536.
4. *Dickinson R.E., Ridley E.C., Roble R.G.* A three-dimensional general circulation model of the thermosphere // *J. Geophys. Res.* 1981. V. 86. № A3. P. 1499–1512.
5. *Fuller-Rowell T.J., Rees D.* A three-dimensional, time-dependent global model of the thermosphere // *J. Atmos. Sci.* 1980. V. 37. P. 2545–2567.
6. *Колесник А.Г., Королев С.С.* Трехмерная модель термосферы // *Геомагн. и аэрон.* 1983. Т. 23. С. 774–780.
7. *Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.* Numerical modeling of the propagation of nonlinear acoustic-gravity waves in the middle and upper atmosphere // *Izvestiya, Atmos. Oceanic Phys.* 2014. V. 50. № 1. P. 66–72.
8. *Skamarock W.C., Klemp J.B., Dudhia J., Gill D.O., Liu Z., Berner J., Wang W., Powers J.G., Duda M.G., Barker D.M., Huang X.Y.* A Description of the Advanced Research WRF Model Version 4. NCAR Tech. Note NCAR/TN-556+STR. 2019. 145 p.
9. *Tolstykh M.A., Shashkin V.V., Fadeev R.Y., Goyman G.S.* Vorticity–divergence semi-Lagrangian global atmospheric model SL-AV20: dynamical core // *Geosci. Model Dev.* 2017. V. 10. № 5. P. 1961–1983.
10. *Zängl G., Reinert D., Ripodas P., Baldauf J.* The ICON (Icosahedral Nonhydrostatic) modelling framework of DWD and MPI-M: Description of the nonhydrostatic dynamical core // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 2015. V. 141. № 687. P. 563–579.
11. *Дикий Л.А.* Теория колебаний земной атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 196 с.
12. *Gossard E.E., Hooke W.H.* Waves in the atmosphere. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ. Co., 1975. 456 p.
13. *Majda A.* Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. New York: Springer-Verlag, 1984. 159 p. (Appl. Math. Sci. V. 53).
14. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
15. *Dalaudier F., Sidi C., Crochet M., Vernin J.* Direct evidence of sheets in the atmospheric temperature field // *J. Atmos. Sci.* 1994. V. 51. № 2. P. 237–248.
16. *Куличков С.Н., Чунгузов И.П., Буш Г.А., Мишенин А.А., Голикова Е.В.* Пространственно-временная изменчивость тонкой структуры верхней атмосферы по данным акустического зондирования // *Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана.* 2016. Т. 52. № 3. С. 278–289.

17. *Gardner C.S.* Saturated-cascade similitude theory of gravity wave spectra // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. № D25. P. 29799–29807.
18. *Kulichkov S.N., Chunchuzov I.P., Popov O.I.* Simulating the influence of an atmospheric fine inhomogeneous structure on long-range propagation of pulsed acoustic signals // *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* 2010. V. 46. № 1. P. 60–68.
19. *Куличков С.Н.* О слоистой структуре атмосферы // *Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана.* 2010. Т. 46. № 1. С. 13–21.
20. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7. № 1. P. 159–193.
21. *Lax P.D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1957. V. 10. № 4. P. 537–566.
22. *Рухтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1. 486 с.; 1984. Т. 2. 381 с.
23. *Guo Y., Tice I.* Compressible Rayleigh–Taylor instability // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 2011. V. 201. № 1. P. 35–117.
24. *De Lellis C., Székelyhidi L.Jr.* On admissibility criteria for weak solutions of the compressible Euler equations // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 2010. V. 195. № 1. P. 225–260.
25. *Кшевевцкий С.П.* Моделирование распространения внутренних гравитационных волн в газах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2001. Т. 41. № 2. С. 308–324.
26. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1950.
27. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
28. *Гордин В.А.* Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Аналитические аспекты. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 264 с.
29. *Гончаров В.П., Павлов В.П.* Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. М.: Изд-во МГУ, 1993. 197 с.
30. *Кузнецов Е.А., Захаров В.Е.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *Успехи физ. наук.* 1997. Т. 167. № 11. С. 1137–1167.
31. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
32. *Prigogine I.* Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. New York: John Wiley & Sons, 1967. 147 p.
33. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002. 461 с.
34. *Dafermos C.M.* The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws // *J. Differ. Equat.* 1973. V. 14. № 2. P. 202–212.
35. *Dafermos C.M.* Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. Berlin: Springer, 2010. 626 p.
36. *Fjordholm U.S., Mishra S., Tadmor E.* Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially nonoscillatory schemes for systems of conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.* 2012. V. 50. № 2. P. 544–573.
37. *Lv Y., Ihme M.* Entropy-bounded discontinuous Galerkin scheme for Euler equations // *J. Comput. Phys.* 2015. V. 295. P. 715–739.
38. *Svärd M., Özcan H.* Entropy stable schemes for the Euler equations with far-field and wall boundary conditions // *J. Sci. Comput.* 2014. V. 58. № 1. P. 61–89.
39. *Tadmor E.* Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems // *Acta Numerica.* 2003. V. 12. P. 451–512.
40. *Winters A.R., Gassner G.J.* Affordable, entropy conserving and entropy stable flux functions for the ideal MHD equations // *J. Comput. Phys.* 2016. V. 304. № 2. P. 72–108.

41. Годунов С.К., Куликов И.М. Расчет разрывных решений уравнений гидродинамики с гарантией неубывания энтропии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 6. С. 1008–1021.
42. Злотник А.А. Энтропийно консервативная пространственная дискретизация многомерной квазигазодинамической системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 710–729.
43. Прокопов Г.П. Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 9. С. 1618–1630.
44. Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A New Hydrodynamic Code with Explicit Vectorization Instructions Optimizations that Is Dedicated to the Numerical Simulation of Astrophysical Gas Flow. I. Numerical Method, Tests, and Model Problems // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2019. V. 243. № 1. Art. 4. DOI 10.3847/1538-4365/ab2237
45. Кшевецкий С.П. Численное моделирование нелинейных внутренних гравитационных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 12. С. 1844–1859.
46. Kshevetskii S.P. Analytical and numerical investigation of nonlinear internal gravity waves // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2001. V. 8. № 1/2. P. 37–53.
47. Кшевецкий С.П., Курдяева Ю.А., Гаврилов Н.М., Куличков С.Н. Солитонный распад акустико-гравитационных волн в атмосфере: 1. Уравнение КДВ–Бюргерса // *Акуст. журн.* 2025. Т. 71. № 5. С. 717–730.
48. Кшевецкий С.П., Курдяева Ю.А., Гаврилов Н.М., Куличков С.Н. Солитонный распад акустико-гравитационных волн в атмосфере: 2. Численное моделирование // *Акуст. журн.* 2025. Т. 71. № 6. С. 855–865.

WAVE ENERGY FUNCTIONAL FOR NONLINEAR EQUATIONS OF GAS DYNAMICS IN A GRAVITY FIELD AND ITS PROPERTIES

S. P. Kshevetskii^{a,b,c,*}, Yu. A. Kurdyeva^{d,**}, N. M. Gavrilov^{b,***}

^aImmanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236041 Russia

^bSt. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia

^cA.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119017 Russia

^dKaliningrad Branch of the N.V. Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Kaliningrad, 236035 Russia

*e-mail: spkshev@gmail.com

**e-mail: yakurdyeva@gmail.com

***e-mail: n.gavrilov@spbu.ru

Received 24.03.2026

Revised 29.05.2026

Accepted 05.07.2026

Abstract. Nonlinear wave processes in a stratified ideal gas (atmosphere) are considered. A generalizing non-increasing wave energy functional for nonlinear equations of hydrodynamics is proposed, extending the classical approach of linear theory. Based on this functional, it is shown that for conservative difference schemes, compliance with the law of non-negative entropy production is a necessary condition for stability. This condition is supplemented by the principle of minimum entropy production. The wave energy transport equation for the nonlinear case is derived, and its comparison with the linearized counterpart is performed.

Keywords: gas dynamics equations, wave energy, Lyapunov function, non-smooth solutions.