УДК 621.891

Влияние вида закона ортотропного трения на скольжение твердого тела по плоскости при осесимметричном распределении контактного давления

Н.Н. Дмитриев[1], С.В. Шилько[2]

[1]*Санкт-Петербургский государственный университет,*
Университетская наб., 7–9, г. Санкт-Петербург 199034, Россия

[2]*Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого НАН Беларуси,*
ул. Кирова, 32а, г. Гомель 246050, Беларусь

Поступила в редакцию 06.02.2026.

Построена механико-математическая модель движения твёрдого тела по плоскости в условиях ассоциированного ортотропного трения в предположении осесимметричного распределения контактного давления. Определены условия равновесия и начала движения тела, величина и направление его начального ускорения. Решена задача о финальном движении тела по инерции при ассоциированном ортотропном трении для области контакта в виде тонкого кольца и круга при различном распределении контактного давления и выявлены закономерности процесса движения. Проведено сравнение с соответствующими результатами, полученными в предположении линейного закона ортотропного трения. Установлено, что при асоциированном законе ортотропного трения финальное значение отношения скорости центра масс к угловой скорости тел, опирающихся на тонкое кольцо или на круговую площадку при осесимметричном распределении давления, будет иметь место при меньших значениях разности коэффициентов трения вдоль ортогональных осей по сравнению со случаем, когда сила трения задаётся законом линейного трения. Обсуждается возможность моделирования скольжения тел при комбинированном фрикционном взаимодействии (суперпозиции линейного и ассоциированного законов трения).

Ключевые слова: скольжение тела по плоскости, инерция, осесимметричный контакт, ортотропное трение, линейный и ассоциированный законы трения, контактное давление.

DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-109-119

Адрес для переписки:
С. Шилько
Институт механики металлополимерных систем
имени В.А. Белого НАН Беларуси,
ул. Кирова, 32а, г. Гомель 246050, Беларусь
e-mail: Shilko_mpri@mail.ru

Address for correspondence:
S.V. Shil'ko
V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of the National Academy of Sciences of Belarus,
Kirov str., 32a, Gomel 246050, Belarus
e-mail: Shilko_mpri@mail.ru

Для цитирования:
Н.Н. Дмитриев, С.В. Шилько.
Влияние вида закона ортотропного трения на скольжение твердого тела по плоскости при осесимметричном распределении контактного давления.
Трение и износ.
2026. – Т. 47, № 2. – С. 109–119.
DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-109-119

For citation:
N.N. Dmitriev and S.V. Shil'ko
[Influence of Orthotropic Friction Law on Sliding of Solid on the Plane for Axisymmetrical Distribution of Contact Pressure].
Trenie i Iznos.
2026, vol. 47, no. 2, pp. 109–119 (in Russian).
DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-109-119

Influence of Orthotropic Friction Law on Sliding of Solid on the Plane for Axisymmetrical Distribution of Contact Pressure

N.N. Dmitriev[1] and S.V. Shil'ko[2]

[1]*St. Petersburg State University,*
Universitetskaya Embankment, 7–9, St. Petersburg 199034, Russia

[2]*V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of the National Academy of Sciences of Belarus,*
Kirov str., 32a, Gomel 246050, Belarus

Received 06.02.2026.

Abstract

A mechanical-mathematical model of the motion of a rigid body on a plane under conditions of associated orthotropic friction, assuming an axisymmetric distribution of contact pressure, has been constructed. The equilibrium conditions and the conditions for the onset of motion of the body, as well as the magnitude and direction of its initial acceleration, have been determined. The problem of the final inertial motion of the body under associated orthotropic friction has been solved for a contact area in the form of a thin ring and a circle under various distributions of contact pressure, and the regularities of the motion process have been identified. A comparison has been made with the corresponding results obtained under the assumption of a linear orthotropic friction law. It has been established that, under the associated orthotropic friction law, the final value of the ratio of the center-of-mass velocity to the angular velocity of bodies resting on a thin ring or on a circular contact area under an axisymmetric pressure distribution is attained at smaller values of the difference between the friction coefficients along the orthogonal axes compared to the case where the friction force is governed by the linear friction law. The possibility of modeling the sliding of bodies under combined frictional interaction (superposition of linear and associated friction laws) is discussed.

Keywords: sliding of solid on the plane, inertia, axisymmetrical contact, orthotropic friction, linear and associate friction laws, contact pressure.

DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-109-119

Адрес для переписки:
С.В. Шилько
Институт механики металлополимерных систем
имени В.А. Белого НАН Беларуси,
ул. Кирова, 32а, г. Гомель 246050, Беларусь
e-mail: Shilko_mpri@mail.ru

Address for correspondence:
S.V. Shil'ko
V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of the National Academy of Sciences of Belarus,
Kirov str., 32a, Gomel 246050, Belarus
e-mail: Shilko_mpri@mail.ru

Для цитирования:
Н.Н. Дмитриев, С.В. Шилько.
Влияние вида закона ортотропного трения на скольжение твердого тела по плоскости при осесимметричном распределении контактного давления.
Трение и износ.
2026. – Т. 47, № 2. – С. 109–119.
DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-109-119

For citation:
N.N. Dmitriev and S.V. Shil'ko
[Influence of Orthotropic Friction Law on Sliding of Solid on the Plane for Axisymmetrical Distribution of Contact Pressure].
Trenie i Iznos.
2026, vol. 47, no. 2, pp. 109–119 (in Russian).
DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-109-119

Введение

Описанию движения тел по плоскости в условиях анизотропного трения, когда вследствие ориентации неровностей (асимметрии микрорельефа) поверхности или особых деформационных свойств контактирующих материалов коэффициент трения f зависит от направления скольжения, посвящено достаточно много научных работ, начиная с пионерного сообщения, опубликованного в Nature [1]. Частным случаем такой анизотропии является ортотропное трение, при котором фрикционное взаимодействие характеризуется различными коэффициентами трения $f_x \neq f_y$ в двух взаимно перпендикулярных направлениях скольжения. Этот вид фрикционного взаимодействия иллюстрируется на рисунке 1 для рассматриваемого в настоящей статье осесимметричного контакта.

До настоящего времени исследования анизотропного трения носили академический характер [2—6]. Так, в статье [2] на основе выпуклого математического анализа формулируется закон ассоциированного анизотропного трения, доказывается ряд утверждений, проверяемых опытным путём [3, 6]. Вместе с тем, как отмечено авторами работы [6], в трибоматериаловедении и триботехнике уже просматривается прикладное использование полученных фундаментальных результатов. Так, представленная в [7] микромеханическая модель может быть использована для расчёта коэффициентов трения, соответствующих различным направлениям скольжения индентора по наноструктурированному композитному покрытию на основе оксида алюминия, импрегнированного антифрикционным полимером.

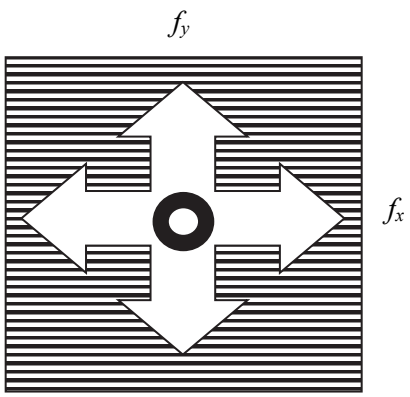

Рисунок 1 — Схема ортотропного трения при скольжении тела по плоскости с осесимметричной областью контакта

Figure 1 — Scheme of orthotropic friction during sliding of a body on a plane with an axisymmetric contact area

В работах [3, 4, 8, 9] введён ассоциированный закон ортотропного трения, а в [10, 11] — линейный закон ортотропного трения. В обоих случаях оси прямоугольной декартовой системы координат, лежащие в плоскости скольжения, являются главными осями скольжения.

В первом случае компоненты, действующие на материальную точку вдоль осей Ox и Oy равны $f_x N$ и $f_y N$ соответственно, а конец вектора силы трения скольжения описывает в плоскости Oxy эллипс

$$\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2} = 1. \tag{1}$$

Так как вектор силы трения не пересекает границу эллипса трения (1), справедливо неравенство

$$F\left(T_x, T_y\right) = \sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}} - 1 \le 0. \tag{2}$$

В предельном состоянии выполняется соотношение $F\left(T_x, T_y\right) = 0$. Составим функцию Лагранжа в виде суммы диссипативной функции и предельной функции (2):

$$L = -\left(T_x v_x + T_y v_y\right) + \lambda\left(\sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}} - 1\right), \tag{3}$$

где λ — множитель Лагранжа. В соответствии с теоремой Куна–Такера для действительного движения функция Лагранжа (3) должна иметь экстремум, что означает необходимость обращения в ноль производных по T_x и T_y [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_x} &= -v_x + \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}}} \frac{T_x}{f_x^2 N^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_y} &= -v_y + \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}}} \frac{T_y}{f_y^2 N^2} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Откуда получаем соотношения

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{f_y^2}{f_x^2}\frac{v_y}{v_x} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{f_y^2}{f_x^2}\operatorname{tg}\vartheta, \tag{5}$$

где α — угол, который составляет с осью Ox вектор силы трения $\mathbf{T} = T_x\mathbf{i} + T_y\mathbf{j}$, ϑ — угол, определяющий направление вектора скорости

$$\mathbf{v} = v\left(\cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}\right). \tag{6}$$

Из выражений (1), (4)—(6) находятся проекции силы трения на оси Ox и Oy при $\mathbf{v} \neq 0$:

$$T_x = -\frac{Nf_x^2 \cos\vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta}},$$
$$T_y = -\frac{Nf_y^2 \sin\vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta}}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует, что угол между прямыми, на которых лежат векторы силы трения и скорости материальной точки, находится по формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha - \vartheta) = \frac{\left(f_y^2 - f_x^2\right)\operatorname{tg}\alpha}{f_y^2 + f_x^2 \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\left(f_y^2 - f_x^2\right)\operatorname{tg}\vartheta}{f_x^2 + f_y^2 \operatorname{tg}^2\vartheta}.$$

1. Движение по инерции материальной точки под действием силы, описываемой ассоциированным законом ортотропного трения. Тангенциальная и нормальная оси естественного трёхгранника имеют орты

$$\boldsymbol{\tau} = \cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = -\sin\vartheta\mathbf{i} + \cos\vartheta\mathbf{j}. \quad (8)$$

Проекция силы трения на эти направления следуют из соотношений (7)

$$T_\tau = \mathbf{T}\boldsymbol{\tau} = -\frac{N\left(f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta\right)}{\sqrt{f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta}},$$
$$T_n = \mathbf{T}\mathbf{n} = -\frac{N\left(f_y^2 - f_x^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta}}.$$

Следовательно, уравнения движения материальной точки на указанные оси имеют вид

$$m\dot{v} = T_\tau = -\frac{N\left(f_x^2 + \left(f_y^2 - f_x^2\right)\sin^2\vartheta\right)}{\sqrt{f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta}},$$
$$mv\dot{\vartheta} = T_n = -\frac{N\left(f_y^2 - f_x^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2\vartheta + f_y^2 \sin^2\vartheta}}. \quad (9)$$

Из системы (9) путём деления первого уравнения на второе и последующего разделения переменных получим зависимость

$$\frac{dv}{v} = \frac{f_x^2 + \left(f_y^2 - f_x^2\right)\sin^2\vartheta}{\left(f_y^2 - f_x^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta} d\vartheta,$$

интегрирование которой при начальных условиях $t = 0$, $v = v_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, приводит к соотношению

$$v = v_0 \left|\operatorname{tg}\vartheta\right|^{\frac{f_x^2}{f_y^2 - f_x^2}} \frac{1}{\cos\vartheta} C_0, \quad C_0 = \frac{\cos\vartheta_0}{\left|\operatorname{tg}\vartheta_0\right|^{\frac{f_x^2}{f_y^2 - f_x^2}}}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что скорость материальной точки стремится к нулю при стремлении угла ϑ к нулю или π.

Замечание. Линейный закон ортотропного трения определяет величину силы трения при $v \neq 0$ формулой [4, 5]:

$$\mathbf{T} = -N\left(f_x \cos\vartheta\mathbf{i} + f_y \sin\vartheta\mathbf{j}\right), \quad (11)$$

и, следовательно, дифференциальные уравнения движения материальной точки на оси естественного трёхгранника записываются в виде:

$$m\dot{v} = -N\left(f_x + \mu\sin^2\vartheta\right), \quad mv\dot{\vartheta} = -N\mu\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$\mu = f_y - f_x \geq 0.$$

Отсюда имеем зависимость скорости от угла ϑ [11]:

$$v = v_0 \left|\operatorname{tg}\vartheta\right|^{\frac{f_x}{\mu}} \frac{1}{\cos\vartheta} C_0, \quad C_0 = \frac{\cos\vartheta_0}{\left|\operatorname{tg}\vartheta_0\right|^{\frac{f_x}{\mu}}},$$

что означает обращение в ноль скорости материальной точки при значении угла ϑ, равному нулю или π.

Отметим также, что угол между прямыми, на которых лежат векторы силы трения и скорости точки при линейном законе трения, определяется формулой

$$\operatorname{tg}(\alpha - \vartheta) = \frac{\mu \operatorname{tg}\vartheta}{f_x + f_y \operatorname{tg}^2\vartheta}.$$

Если в линейном и ассоциированном законах ортотропного трения коэффициенты f_x и f_y равны, имеет место соотношение

$$T_\tau^2 - T_{\tau acc}^2 = \left(N\left(f_x + \mu\sin^2\vartheta\right)\right)^2 - \left(N\sqrt{f_x^2 + \left(f_y^2 - f_x^2\right)\sin^2\vartheta}\right)^2 =$$
$$= -N^2\left(f_y - f_x\right)^2 \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta \leq 0, \quad f_y \geq f_x$$

Отсюда можно сделать вывод, что остановка материальной точки, движущейся по инерции при ортотропном ассоциированном трении, произойдёт за время не более, чем в случае линейного ортотропного трения.

2. Условия начала движения материальной точки. В публикации [12] на основании того факта, что радиус вектор точки и вектор скорости являются гладкими функциями времени, обосновывается условие начала движения

материальной точки, находящейся под действием активной силы $\mathbf{P} = P(\cos\delta\mathbf{i} + \sin\delta\mathbf{j})$, где P — величина силы, δ — угол между осью Ox и вектором $\mathbf{P}$ и силы ортотропного трения. Движение начинается с ускорением $\mathbf{w_0} = w_0(\cos\vartheta_0\mathbf{i} + \sin\vartheta_0\mathbf{j})$, где w_0 — величина начального ускорения, ϑ_0 — угол, определяющий направление вектора $\mathbf{w_0}$, который отсчитывается от оси Ox. Условия начала движения записываются в виде

$$\begin{aligned} mw_n &= (\mathbf{P} + \mathbf{T})\mathbf{n} = 0, \\ mw_\tau &= (\mathbf{P} + \mathbf{T})\boldsymbol{\tau} > 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ – тангенциальная и нормальная оси естественного трёхгранника. Если имеют место условия

$$\begin{aligned} mw_n &= (\mathbf{P} + \mathbf{T})\mathbf{n} = 0, \\ mw_\tau &= (\mathbf{P} + \mathbf{T})\boldsymbol{\tau} \le 0, \end{aligned} \tag{12'}$$

материальная точка остаётся в покое.

Замечание. В приведенных рассуждениях предполагается, что динамический и статический коэффициенты трения одинаковы. Кроме того, первое уравнение системы (12) и (12') позволяет найти направление начального ускорения материальной точки $\mathbf{w_0} = w_0(\cos\vartheta_0\mathbf{i} + \sin\vartheta_0\mathbf{j})$. Следует отметить, что изучаемая система уравнений (12) может иметь несколько решений. Физически реализуемы могут быть только те из них, для которых справедливо включение $\vartheta_0 \in [\delta - \pi/2, \delta + \pi/2]$.

Условия, при которых материальная точка останется в покое или начнёт движение, можно сформулировать иначе: если вектор силы $\mathbf{P}$ пересекает границу эллипса трения (1), движение начинается; при нахождении вектора $\mathbf{P}$ внутри эллипса трения (включая его границу) материальная точка останется в покое. Если движение начинается, направление ϑ_0 и величина начального ускорения определяются из условий (12). Условие пересечения вектором $\mathbf{P}$ границы эллипса трения (1) в направлении $\cos\delta\mathbf{i} + \sin\delta\mathbf{j}$ записывается в виде:

$$P > \frac{f_x f_y N}{\sqrt{f_y^2\cos^2\delta + f_x^2\sin^2\delta}} = \frac{\nu N\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}}{\sqrt{1+\nu^2\mathrm{tg}^2\delta}}, \ \nu = \frac{f_x}{f_y}. \tag{13}$$

Замечание. Линейная модель ортотропного трения [4, 5] и представленная выше модель ассоциированного ортотропного трения предполагают, что годограф силы трения описывает эллипс (1). Поэтому в случае равенства коэффициентов трения f_x, f_y в этих двух моделях эллипс будет одинаков. Следовательно, пересечение вектором активной силы границы эллипса в одном и том же направлении будет достигаться при одинаковом значении силы P. При этом движение будет начинаться в направлении $\cos\vartheta_0\mathbf{i} + \sin\vartheta_0\mathbf{j}$. Угол ϑ_0 в линейном случае равен $\vartheta_0 = \mathrm{arctg}(\nu\,\mathrm{tg}\,\vartheta)$, при ассоциированном законе трения $\vartheta_0 = \mathrm{arctg}(\nu^2\,\mathrm{tg}\,\vartheta)$, $\nu = f_x/f_y$.

3. Вывод уравнений движения твёрдого тела по горизонтальной плоскости для кольцевой и круговой области контакта. Пусть твёрдое тело имеет контакт с плоскостью в виде кольца с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2. Выберем подвижную ортогональную систему координат $C\xi\eta\zeta$ с началом в геометрическом центре площадки, причём оси $C\xi$ и $C\eta$ параллельны плоскости скольжения. Полагаем также, что центр масс тела проецируется в точку C. Поэтому вектор скорости точки C совпадает со скоростью центра масс и определяется формулой

$$\mathbf{v_C} = v_C(\cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}),$$

где v_C — величина скорости центра масс тела, ϑ — угол между осью Ox и вектором $\mathbf{v_C}$. Пусть ось $C\xi$ направлена вдоль вектора $\mathbf{v_C}$. Тогда скорость любой точки круговой области контакта тела с плоскостью определяется формулой Эйлера $\mathbf{v} = \mathbf{v_C} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r'}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела, направленный перпендикулярно плоскости скольжения, $\mathbf{r'}$ — вектор, определяющий в плоскости $C\xi\eta$ точку соприкосновения тела с плоскостью скольжения:

$$\mathbf{r'} = \xi\mathbf{e_1} + \eta\mathbf{e_2},$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ — орты осей $C\xi$ и $C\eta$ соответственно. Введём угол ψ между осью $C\xi$ и вектором $\mathbf{r'}$. Тогда вектор $\mathbf{r'}$ в проекциях на оси неподвижной системы координат записывается в виде

$$\begin{aligned} &x' = \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta, \quad y' = \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta, \\ &\xi = r\cos\psi, \quad \eta = r\sin\psi, \end{aligned} \tag{14}$$

откуда вектор скорости точки, принадлежащей области контакта в неподвижной системе координат, записывается следующим образом

$$\mathbf{v} = \left(v_{C_x} - \omega y'\right)\mathbf{i} + \left(v_{C_y} + \omega x'\right)\mathbf{j}. \quad (15)$$

Следовательно, компоненты скорости могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} v_x &= v_C \cos\vartheta - \omega r \sin\left(\vartheta + \psi\right), \\ v_y &= v_C \sin\vartheta + \omega r \cos\left(\vartheta + \psi\right), \\ v^2 &= v_C^2 + \omega^2 r^2 - 2\omega v_C r \sin\psi. \end{aligned} \quad (16)$$

Исходя из выражений для проекций силы трения на оси Ox и Oy (7), напряжения, действующие на элементарную площадку области контакта, записываются в виде

$$\tau_x = -p\frac{f_x^2 v_x}{\sqrt{f_x^2 v_x^2 + f_y^2 v_y^2}}, \quad \tau_y = -p\frac{f_y^2 v_y}{\sqrt{f_x^2 v_x^2 + f_y^2 v_y^2}}, \quad (17)$$

где $p = p\left(r, \psi\right)$ – плотность давления.

Момент относительно оси $C\zeta$, который создаёт сила трения, действующая на элементарную площадку, вычисляется по формуле

$$mom_{C\zeta}\left(\tau\right) = \tau_y x' - \tau_x y' \quad (18)$$

Для вычисления результирующих значений силы трения и момента трения относительно оси $C\zeta$ необходимо произвести интегрирование по области контакта S:

$$T_x = \iint_S \tau_x dS, \; T_y = \iint_S \tau_y dS, \; M_{C\zeta} = \iint_S \left(\tau_y x' - \tau_x y'\right) dS. \quad (19)$$

Для кольцевой области контакта при равномерном распределении давления имеем $p = \dfrac{mg}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$, где R_2, R_1 – внешний и внутренний радиус кольца соответственно, m — масса тела, g — ускорение свободного падения. Кроме того, в формулах (19) целесообразно перейти к полярным координатам и ввести безразмерные величины (отмечены звёздочками, которые далее не показаны):

$$\begin{aligned} &v_C = v_* \sqrt{\frac{R_2 g}{\pi}}, \quad \omega = \omega_* \sqrt{\frac{g}{\pi R_2}}, \quad t = t_* \sqrt{\frac{R_2 \pi}{g}}, \\ &\frac{d\vartheta_*}{dt_*} = \frac{d\vartheta}{dt}\sqrt{\frac{g}{\pi R_2}}, \quad r = r_* R_2, \quad \beta_* = \frac{v_*}{\omega_*}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражения (17) и (18) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \tau_x &= -\frac{mg}{\pi R_2^2\left(1 - \dfrac{R_1^2}{R_2^2}\right)} \times \\ &\times \frac{f_x^2\left(\beta\cos\vartheta - r\sin\left(\vartheta + \psi\right)\right)}{\sqrt{\begin{aligned} &f_x^2\left(\beta\cos\vartheta - r\sin\left(\vartheta + \psi\right)\right)^2 + \\ &+ f_y^2\left(\beta\sin\vartheta + r\cos\left(\vartheta + \psi\right)\right)^2 \end{aligned}}}, \\ \tau_y &= -\frac{mg}{\pi R_2^2\left(1 - \dfrac{R_1^2}{R_2^2}\right)} \times \\ &\times \frac{f_y^2\left(\beta\sin\vartheta + r\cos\left(\vartheta + \psi\right)\right)}{\sqrt{\begin{aligned} &f_x^2\left(\beta\cos\vartheta - r\sin\left(\vartheta + \psi\right)\right)^2 + \\ &+ f_y^2\left(\beta\sin\vartheta + r\cos\left(\vartheta + \psi\right)\right)^2 \end{aligned}}}, \\ mom_{C\zeta}\left(\tau\right) &= R_2\left(\tau_y r\cos\left(\vartheta + \psi\right) - \tau_x r\sin\left(\vartheta + \psi\right)\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Инерционное движение тела, скользящего по горизонтальной плоскости, в декартовой прямоугольной системе координат описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} = T_x, \quad m\ddot{y} = T_y, \quad J\dot{\omega} = M_{C\zeta} \\ &T_x = \int_{\frac{R_1}{R_2}}^{1}\int_0^{2\pi} \tau_x r R_2^2 dr d\psi, \quad T_y = \int_{\frac{R_1}{R_2}}^{1}\int_0^{2\pi} \tau_y r R_2^2 dr d\psi, \\ &M_{C\zeta} = \int_{\frac{R_1}{R_2}}^{1}\int_0^{2\pi} \left(\tau_y r\cos\left(\vartheta + \psi\right) - \tau_x r\sin\left(\vartheta + \psi\right)\right) R_2^3 r dr d\psi. \end{aligned} \quad (22)$$

При исследовании финального движения тел по инерции в дифференциальных уравнениях системы (22) перейдём к проекциям на оси естественного трёхгранника

$$m\dot{v} = T_\tau\left(\beta, \vartheta\right), \; mv\dot{\vartheta} = T_n\left(\beta, \vartheta\right), \; J\dot{\omega} = M_{C\zeta}\left(\beta, \vartheta\right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_\tau\left(\beta, \vartheta\right) &= T_x\left(\beta, \vartheta\right)\cos\vartheta + T_y\left(\beta, \vartheta\right)\sin\vartheta, \\ T_n\left(\beta, \vartheta\right) &= -T_x\left(\beta, \vartheta\right)\sin\vartheta + T_y\left(\beta, \vartheta\right)\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Из первого и третьего уравнения системы (23) получим равенства

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\int_{\beta_0}^{\beta_*} \frac{d\beta}{\beta - \Phi_1\left(\beta, \vartheta\right)}\right),$$

$$v = v_0 \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta_*} \frac{d\delta}{\Phi_2\left(\delta, \vartheta\right) - \delta}\right),$$

$$\Phi_1(\beta,\vartheta)=\frac{JT_\tau(\beta,\vartheta)}{M_{C\zeta}(\beta,\vartheta)},\quad \Phi_2(\delta,\vartheta)=\frac{M_{C\zeta}(\delta,\vartheta)}{JT_\tau(\delta,\vartheta)},$$

$$\beta=\frac{v}{\omega},\quad \delta=\frac{\omega}{v}$$

из которых следует, что остановка твёрдого тела происходит при выполнении условий

$$\beta_*-\Phi_1(\beta_*,\vartheta_*)=0,\quad \Phi_2(\delta_*,\vartheta_*)-\delta_*=0, \tag{24}$$

где $\beta_*, \delta_*, \vartheta_*$ — значения параметров β, δ и ϑ в момент остановки.

Можно показать, что величина $T_n(\beta,\vartheta)$ при осесимметричном распределении давления обратится в ноль при ϑ, равным 0 или $\pi/2$. Значение $\pi/2$ соответствует неустойчивому движению. Поэтому движение по инерции при $\vartheta_0\neq\pi/2$ характеризуется стремлением угла ϑ к нулю при $t\to t_*$ (t_* соответствует моменту остановки).

Решение уравнений (24) для двух вариантов опоры трения при осесимметричном распределении контактного давления представлены ниже.

4. Скольжение тела с опорой на тонкую кольцевую область. Для области контакта в виде тонкого кольца перейдём в формулах (21), (22) к пределу при $(R_1/R_2)\to 1$ и в результате получим

$$T_x=-\frac{mg}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-\sin(\vartheta+\psi)\right)d\psi}{\sqrt{\begin{aligned}&f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-\sin(\vartheta+\psi)\right)^2+\\&+f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+\cos(\vartheta+\psi)\right)^2\end{aligned}}},$$

$$T_y=-\frac{mg}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+\cos(\vartheta+\psi)\right)d\psi}{\sqrt{\begin{aligned}&f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-\sin(\vartheta+\psi)\right)^2+\\&+f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+\cos(\vartheta+\psi)\right)^2\end{aligned}}},$$

$$M_{C\zeta}=-\frac{mgR_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\begin{bmatrix}f_x^2+\Delta^2\cos^2(\vartheta+\psi)+\\+\beta\left(\Delta^2\sin\vartheta\cos(\vartheta+\psi)-f_x^2\sin\psi\right)\end{bmatrix}d\psi}{\sqrt{\begin{aligned}&f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-\sin(\vartheta+\psi)\right)^2+\\&+f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+\cos(\vartheta+\psi)\right)^2\end{aligned}}}, \tag{25}$$

$$\Delta^2=f_y^2-f_x^2=\mu(2f_x+\mu).$$

На рисунке 2 отражено влияние параметра μ на финальную величину $\beta=v/\omega$ для кольцевой области контакта и равномерном давлении при законах ортотропного трения (7) и (11). Графики соответствуют значению $f_x=0{,}42$, $\mu=f_y-f_x$, $p=mg\Big/\left[\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)\right]=\text{const}$, $R_1\to R_2$.

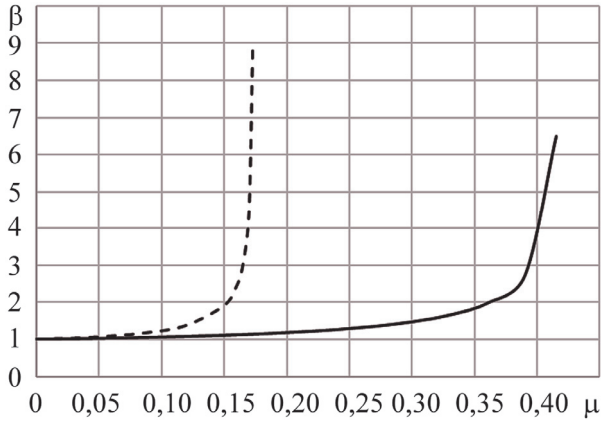

Рисунок 2 — Зависимость финальных значений величины β от параметра μ для тонкого кольца. Сплошная линия соответствует закону трения (11), пунктирная — закону (7)

Figure 2 — Dependence of the final values of β on the parameter μ for a thin ring. Solid line corresponds to friction law (11), dashed line to law (7)

5. Скольжение тела с опорой на круговую область. При опирании тела на круговую площадку, в формулах (20)—(22) положим $R_1=0$ и обозначим R_2 через R. Считая, что контактное давление распределено по закону $p(r,\psi)$, запишем выражения для вычисления проекций элементарной силы трения на оси неподвижной системы координат и момента элементарной силы трения относительно оси $C\zeta$

$$\tau_x=-p(r,\psi)\frac{f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-r\sin(\vartheta+\psi)\right)}{\sqrt{\begin{aligned}&f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-r\sin(\vartheta+\psi)\right)^2+\\&+f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+r\cos(\vartheta+\psi)\right)^2\end{aligned}}},$$

$$\tau_y=-p(r,\psi)\frac{f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+r\cos(\vartheta+\psi)\right)}{\sqrt{\begin{aligned}&f_x^2\left(\beta\cos\vartheta-r\sin(\vartheta+\psi)\right)^2+\\&+f_y^2\left(\beta\sin\vartheta+r\cos(\vartheta+\psi)\right)^2\end{aligned}}}, \tag{26}$$

$$mom_{C\zeta}(\tau)=R\left(\tau_y r\cos(\vartheta+\psi)-\tau_x r\sin(\vartheta+\psi)\right)$$

и, следовательно,

$$T_x=\int_0^1\int_0^{2\pi}\tau_x rR^2drd\psi,\quad T_y=\int_0^1\int_0^{2\pi}\tau_y rR^2drd\psi,$$
$$M_{C\zeta}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\tau_y r\cos(\vartheta+\psi)-\tau_x r\sin(\vartheta+\psi)\right)R^3rdrd\psi. \tag{27}$$

Уравнения (23) для круговой области контакта решены для равномерного распределения давления $p = mg/\pi R^2 = \text{const}$ [13], распределения давления по законам Буссинеска $p = 0,5\left(mg/\pi R^2\right)\left(1/\sqrt{1-r^2}\right)$ [14] и Герца $p = 1,5\left(mg/\pi R^2\right)\sqrt{1-r^2}$ [15].

На рисунках 3—5 представлены предельные финальные значения величины $\beta = v/\omega$ для ассоциированного закона ортотропного трения в сопоставлении с аналогичными результатами, полученными в предположении линейного закона трения, заданного формулой (11).

Так, рисунок 3 иллюстрирует влияние параметра μ на финальную величину β для круговой области контакта радиуса R при равномерном контактном давлении $p = mg/\pi R^2 = \text{const}$.

На рисунке 4 представлены результаты исследования скольжения диска при распределении контактного давления по зависимости Буссинеска $p = 0,5\left(mg/\pi R^2\right)\left(1/\sqrt{1-r^2}\right)$.

При распределении контактного давления по закону Герца $p = 1,5\left(mg/\pi R^2\right)\sqrt{1-r^2}$ зависимость финальных значений величины β от параметра μ представлена на рисунке 5.

Анализ результатов численного решения уравнений (23) позволяют сделать вывод, что величина $\beta = v/\omega$ в момент остановки при некоторых коэффициентах ортотропного трения $\left(\mu = f_y - f_x \geq 0\right)$ принимают конечные значения, что означает обращение в ноль угловой скорости тела и его скорости центра масс в один и тот же момент времени t_*. При увеличении параметра μ происходит рост величины $\beta\left(t_*\right)$.

Превышение параметром μ некоторого порога в момент остановки будет характеризоваться стремлением $\beta\left(t_*\right)$ к бесконечности, то есть угловая скорость тела будет стремиться к нулю быстрее, чем скорость его центра масс и финальное движение становится поступательным. Вектор скорости центра масс однородного тела при осесимметричном распределении давления в рассмотренных случаях стремится принять

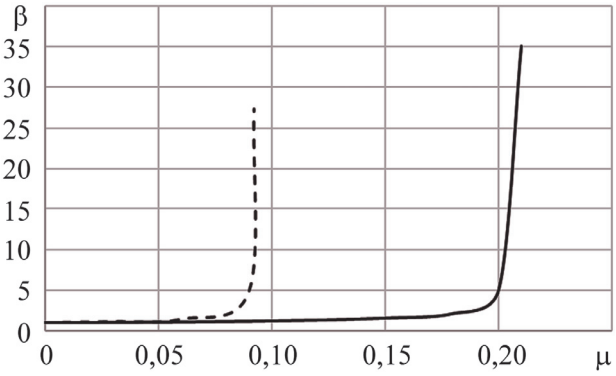

Рисунок 4 — Зависимость финальных значений величины β от параметра μ для диска при распределении давления по закону Буссинеска. Сплошная линия соответствует закону трения (11), пунктирная — закону (7)

Figure 4 — Dependence of the final values of β on the parameter μ for a disk under Boussinesq pressure distribution. Solid line corresponds to friction law (11), dashed line to law (7)

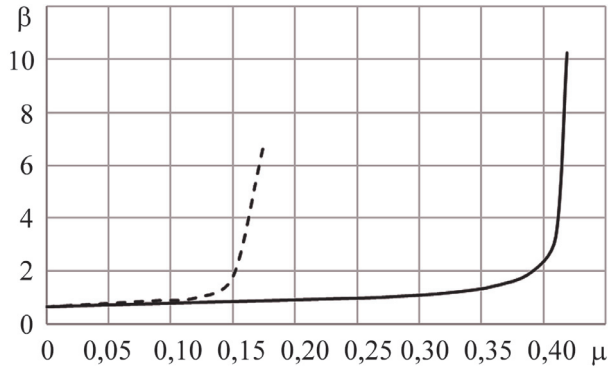

Рисунок 3 — Зависимость финальных значений величины β от параметра μ для диска при равномерном распределении давления. Сплошная линия соответствует закону трения (11), пунктирная — закону (7)

Figure 3 — Dependence of the final values of β on the parameter μ for a disk under uniform pressure distribution. Solid line corresponds to friction law (11), dashed line to law (7)

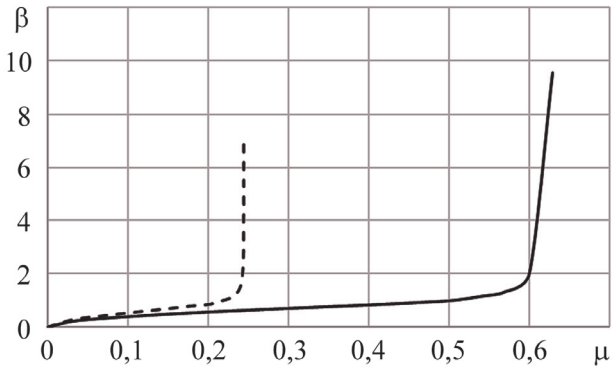

Рисунок 5 — Зависимость финальных значений величины β от параметра μ для диска при распределении давления по закону Герца. Сплошная линия соответствует закону трения (11), пунктирная — закону (7)

Figure 5 — Dependence of the final values of β on the parameter μ for a disk under Hertzian pressure distribution. Solid line corresponds to friction law (11), dashed line to law (7)

положение параллельно оси с наименьшим значением коэффициента трения.

Сопоставление результатов расчётов, представленных в работе, позволяет сделать вывод, что при асоциированном законе ортотропного трения (7) финальное значение параметра β для тел, опирающихся на тонкое кольцо или на круговую площадку при осесимметричном распределении давления, будет иметь место при меньших значениях параметра $\mu = f_y - f_x$ по сравнению со случаем, когда сила трения задаётся законом линейного трения (11).

Выводы

В статье выполнено моделирование процесса скольжения твёрдого тела по плоскости в условиях ассоциированного ортотропного трения при осесимметричном распределении контактного давления. Результаты моделирования сопоставлены с расчётными данными, полученными ранее в работах [13—15] для линейного закона ортотропного трения (предполагается, что главные оси скольжения в рассмотренных видах движения совпадают).

Если фрикционное взаимодействие при скольжении таково, что необходимо учитывать силу трения, соответствующую как линейному, так и ассоциированному закону ортотропного трения, и при этом главные оси этих составляющих совпадают, движение твёрдого тела при равномерном распределении давления будет характеризоваться стремлением вектора скорости центра масс принять положение, параллельное оси с наименьшим коэффициентом трения.

Случай, когда обе поверхности пары трения характеризуются линейным ортотропным трением, изучался в [10]. Так как пара трения представляет собой контакт двух поверхностей, можно условно предположить, что одна поверхность будет «отвечать» за линейное трение, а вторая — за трение, описываемое ассоциированным законом. Тогда взаимная ориентация главных осей трения для каждой из поверхностей будет дополнительным параметром, влияющим на результирующую силу трения, действующую на элементарную площадку области контакта. Одновременный учёт этих законов трения, рассматриваемых в настоящей работе, в литературе не отражён и исследования в данном направлении будут продолжены.

Представляет также интерес анализ движения тела по плоскости при ортотропии трения, когда сила трения скольжения пропорциональна площади контакта [16].

С целью экспериментального обоснования результатов моделирования процесса скольжения для рассмотренных и обозначенных в статье источников ортотропного трения, авторами планируется проведение соответствующих трибоиспытаний.

Финансирование

Исследования проведены в рамках задания 6.1.08 ГПНИ 6 «Механика, металлургия, контроль в интеллектуальных системах».

Обозначения

f_x, f_y — коэффициенты трения вдоль ортогональных осей Ox и Oy, принадлежащих плоскости скольжения; $\mathbf{T}$ — вектор силы трения; $\mathbf{v}$ — вектор скорости центра масс системы; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты неподвижной системы координат; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — орты подвижной системы координат; ϑ — угол между осью Ox и вектором скорости центра масс тела; p — давление в точке контакта; m — масса тела; J — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости скольжения; ω — величина угловой скорости диска; φ — угол между осью Ox и $O\xi$; g — ускорение свободного падения; T_τ, T_n — проекции силы трения на тангенциальную ось и нормаль, соответственно; $\beta = v/\omega$, $\delta = \omega/v$ — безразмерные параметры; t — время.

Nomenclature

f_x, f_y — friction coefficients along the orthogonal axes Ox and Oy lying in the sliding plane; $\mathbf{T}$ — friction force vector; $\mathbf{v}$ — velocity vector of the system's center of mass; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — unit vectors of the fixed coordinate system; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — unit vectors of the moving coordinate system; ϑ — angle between the Ox axis and the velocity vector of the body's center of mass; p — pressure at the contact point; m — mass of the body; J — moment of inertia of the body about an axis passing through its center of mass perpendicular to the sliding plane; ω — magnitude of the angular velocity of the disk; φ — angle between the Ox axis and $O\xi$; g — acceleration due to gravity; T_τ, T_n — projections of the friction force onto the tangential axis and the normal, respectively; $\beta = v/\omega$, $\delta = \omega/v$ — dimensionless parameters; t — time.

Список использованных источников

1. **Rabinowicz E.** Direction of the Friction Force // Nature. — 1957 (**179**), no. 4569, 1073
2. **Walker S.V. and Leine R.I.** Set-Valued Anisotropic Dry Friction Laws: Formulation, Experimental Verification and Instability Phenomenon // Nonlinear Dynam. — 2019 (**96**), no. 2, 885—920
3. **Konyukhov A., Vielsack P., and Schweizerhof K.** On Coupled Models of Anisotropic Contact Surfaces and Their Experimental Validation // Wear. — 2008, no. 264, 579—588
4. **Konyukhov A. and Schweizerhof K.** Covariant Description of Contact Interfaces Considering Anisotropy for Adhesion and Friction: Part 1. Formulation and Analysis of the Computational Model // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2006 (**196**), no. 1—3, 103—117
5. **Wijata A., Stańczyk B., and Awrejcewicz J.** Empirical Mathematical Model for Describing Anisotropic Dry Friction Forces // Tribol. Intern. — 2024 (**192**), 4569:109324
6. **Wijata A., Awrejcewicz J., and Witkowski K.** Anisotropic vs. Isotropic Friction: New Theoretical Results Verified Experimentally Exhibited by a Horizontal Pendulum on the Rotating Disk // Mechanism and Machine Theory — 2025 (**209**) 106004
7. **Shil'ko S.V., Chernous D., Ryabchenko T.V., and Hat'ko V.V.** Estimation of the Friction Coefficient of a Nanostructured Composite Coating // Mechanics of Composite Materials. — 2017 (**53**), no. 5, 579—588
8. **Mroz Z. and Stupkiewicz S.** An Anisotropic Friction and Wear Model // Int. J. Solids Structures. — 1994 (**31**), no. 8, 1113—1131
9. **Mróz Z., Kucharski S., and Páczelt I.** Anisotropic Friction and Wear Rules with Account for Contact State Evolution // Wear. — 2018 (**396—397**), 1—11
10. **Zmitrowicz A.** A Theoretical Model of Anisotropic Dry Friction // Wear. — 1981, no. 73, 9—39
11. **Александрович А.И., Векшин В.С., Потапов И.Н.** Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей // Трение и износ. — 1985 (**6**), № 6, 996—1004
12. **Дмитриев Н.Н., Товстик П.Е.** К условиям равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 1998, № 6, 22—28
13. **Дмитриев Н.Н.** Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть I. Равномерное распределение нагрузки // Трение и износ. — 2009 (**30**), № 4, 317—326
14. **Дмитриев Н.Н.** Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть II. Распределение давления по закону Буссинеска // Трение и износ. — 2009 (**30**), № 5, 429—439
15. **Дмитриев Н.Н.** Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть III. Распределение давления по закону Герца // Трение и износ. — 2010 (**31**), № 4, 342—352
16. **Ляшенко Я.А., Попов В.Л.** Влияние адгезии на трение качения и скольжения: эксперимент // Журнал технической физики. — 2022 (**92**), № 1, 161—173

Funding

The research was carried out within the framework of task 6.1.08 of the State Program of Scientific Research 6 "Mechanics, Metallurgy, Control in Intelligent Systems".

References

1. **Rabinowicz E.** Direction of the Friction Force // Nature. — 1957 (**179**), no. 4569, 1073
2. **Walker S.V. and Leine R.I.** Set-Valued Anisotropic Dry Friction Laws: Formulation, Experimental Verification and Instability Phenomenon // Nonlinear Dynam. — 2019 (**96**), no. 2, 885—920
3. **Konyukhov A., Vielsack P., and Schweizerhof K.** On Coupled Models of Anisotropic Contact Surfaces and Their Experimental Validation // Wear. — 2008, no. 264, 579—588
4. **Konyukhov A. and Schweizerhof K.** Covariant Description of Contact Interfaces Considering Anisotropy for Adhesion and Friction: Part 1. Formulation and Analysis of the Computational Model // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2006 (**196**), no. 1—3, 103—117
5. **Wijata A., Stańczyk B., and Awrejcewicz J.** Empirical Mathematical Model for Describing Anisotropic Dry Friction Forces // Tribol. Intern. — 2024 (**192**), 4569:109324
6. **Wijata A., Awrejcewicz J., and Witkowski K.** Anisotropic vs. Isotropic Friction: New Theoretical Results Verified Experimentally Exhibited by a Horizontal Pendulum on the Rotating Disk // Mechanism and Machine Theory — 2025 (**209**) 106004
7. **Shil'ko S.V., Chernous D., Ryabchenko T.V., and Hat'ko V.V.** Estimation of the Friction Coefficient of a Nanostructured Composite Coating // Mechanics of Composite Materials. — 2017 (**53**), no. 5, 579—588
8. **Mroz Z. and Stupkiewicz S.** An Anisotropic Friction and Wear Model // Int. J. Solids Structures. — 1994 (**31**), no. 8, 1113—1131
9. **Mróz Z., Kucharski S., and Páczelt I.** Anisotropic Friction and Wear Rules with Account for Contact State Evolution // Wear. — 2018 (**396—397**), 1—11
10. **Zmitrowicz A.** A Theoretical Model of Anisotropic Dry Friction // Wear. — 1981, no. 73, 9—39
11. **Aleksandrovich A.I., Vekshin V.S., Potapov I.N.** Tenzor koeffitsientov treniya anizotropnykh poverkhnostey // Trenie i iznos. — 1985 (**6**), No. 6, 996—1004 (in Russian)

12. **Dmitriev N.N., Tovstik P.E.** K usloviyam ravnovesiya tela na sherokhovatoy ploskosti // Izv. RAN. Mekh. tverd. tela. — 1998, no. 6, 22—28 (in Russian)
13. **Dmitriev N.N.** Sliding of a Solid Body Supported by a Round Platform on a Horizontal Plane with Orthotropic Friction. Part 1. Regular Load Distribution // J. Frict. Wear. — 2009 (30), no. 4, 227—234. https://doi.org/10.3103/S1068366609040011
14. **Dmitriev N.N.** Sliding of a Solid Body Borne on a Circular Area over a Horizontal Plane with Orthotropic Friction. Part 2. Pressure Distribution According to the Bussinesque Law // J. Frict. Wear. — 2009 (30), no. 5, 309—316. https://doi.org/10.3103/S106836660905002X
15. **Dmitriev N.N.** Sliding of a solid body supported by a circular area on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 3. Pressure distribution following the Hertzian law. — 2010. J. Frict. Wear 31, 253–260. https://doi.org/10.3103/S1068366610040021
16. **Lyashenko Ya.A., Popov V.L.** Vliyanie adgezii na trenie kacheniya i skol'zheniya: eksperiment // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. — 2022 (**92**), no. 1, 161—173 (in Russian)