

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА НА ПРОСТРАНСТВЕ С ГРУППОЙ ЛИ $SU(2)$ И КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ

Крым В. Р.^{1,2}, ✉ vrkrym@etu.ru, orcid.org/0000-0001-6473-778X

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

²Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,

Российская Федерация, 197022, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Аннотация

В настоящей статье в качестве пространства-времени мы рассматриваем прямое произведение $M^4 \times SU(2)$ пространства Фридмана — Леметра — Робертсона — Уолкера M^4 и группы Ли $SU(2)$ (3-сфера) с биинвариантной метрикой. В этом пространстве риманова кривизна группы Ли $SU(2)$ дает ненулевой вклад в скалярную кривизну многообразия $M^4 \times SU(2)$, причем этот вклад в точности соответствует космологической постоянной Λ . Обобщенные уравнения Фридмана для этого пространства в настоящей работе приведены к виду, пригодному для численного интегрирования. Для решения этих дифференциальных уравнений была использована система компьютерной алгебры Mathematica. Рассматриваются варианты поведения этих решений в зависимости от космологических параметров, таких как плотность вещества, плотность темной энергии (космологической постоянной) и кривизна. Произведена оценка космологических параметров на основе данных о Сверхновых типа Ia (нелинейная регрессионная задача). Получены ограничения на параметры модели (область оптимальных параметров), причем эти параметры совместимы со стандартным набором параметров современной космологии. Но для объяснения феномена «ранних галактик» необходима ненулевая кривизна пространства.

Ключевые слова: Космология Калуцы — Клейна, сверхновые Ia, Mathematica.

Цитирование: Крым В. Р. Обобщенные уравнения Фридмана на пространстве с группой Ли $SU(2)$ и космологическая постоянная // Компьютерные инструменты в образовании. 2026. № 2. С. 5–19. doi: 10.32603/2071-2340-2026-2-5-19.

1. ВВЕДЕНИЕ

В наше время мы уже можем обсуждать вопросы, на которые раньше не было вообще никакого ответа, например проблему происхождения Вселенной. «Стандартная модель» предполагает, что Вселенная произошла из чистой энергии, то есть из очень горячего и плотного состояния (сингулярность с бесконечной плотностью) [1]. Но частицы рождаются парами частица–античастица, это закон сохранения барионного числа и других квантовых чисел. Поэтому количество материи во Вселенной должно быть равно количеству антиматерии, а это не так: антиматерии практически нет. Физики считают, что

равновесие было нарушено, материи оказалось больше, чем антиматерии, и вот эту разность мы сейчас и наблюдаем как материю. Проблема в том, что на такой процесс нужно совершенно невероятное количество энергии: умножьте всю массу современной Вселенной (до горизонта) на квадрат скорости света и еще представьте себе, что это только небольшой остаток от энергии Большого взрыва. Это одна из проблем современной космологии. Альтернативной моделью является *циклическая модель Вселенной* (был предыдущий цикл расширения — сжатия). Эта модель очень многое могла бы объяснить, включая происхождение материи и проблему «ранних галактик». Астрономы наблюдают галактики, которые сформировались за настолько короткое время от Большого взрыва, за которое они просто не могли сформироваться [2–4]. Возраст современной Вселенной, согласно стандартной космологии, составляет 14,4 млрд лет.

Еще одна проблема космологии — темная материя и темная энергия. Гравитация только замедляет расширение Вселенной. Вселенная в настоящий момент расширяется ускоренно, а это невозможно объяснить без темной энергии. Но, с другой стороны, *темная энергия* (космологическая постоянная Λ) — это просто подгоночный параметр модели. А вот *темная материя* совершенно реальна, астрономы ее видят через гравитационное линзирование и кривые вращения галактик [5, 6].

Современная космология использует классические уравнения Эйнштейна с метрикой Фридмана (обычно пишут FRW или FLRW). Метрика Фридмана содержит масштабный множитель перед пространственной частью метрики, обычно $a(t)$, где $ct = x^0$ — временная координата. Мы считаем, что в настоящее время $a(t_0) = a_0 = 1$, это выбор масштаба. Чтобы найти эту функцию, надо решать дифференциальное уравнение Фридмана. В 60-е годы прошлого века космологи давали такой ответ: если масса Вселенной (плотность материи) меньше критической, то расширение Вселенной будет продолжаться вечно (Большое заморозание), а если масса Вселенной больше критической, то расширение сменится сжатием (Большой хлопок). Это уже (почти) циклическая модель, потому что если Большой хлопок экстраполировать еще дальше в будущее, то это будет новый Большой взрыв. Но нулевых годах нашего столетия в космологию вернулась космологическая постоянная, и ответ стал совершенно другой. При современных значениях космологических параметров расширение Вселенной будет продолжаться вечно.

Уравнения Фридмана для масштабного множителя $a(t)$ следуют из задачи минимизации некоторого функционала действия, который зависит только от римановой кривизны пространства и от метрики. Введение в этот функционал космологической постоянной Эйнштейн когда-то назвал своей самой большой ошибкой. Поэтому появляются альтернативные космологические теории, которые пытаются объяснить ускоренное расширение Вселенной из некоторых других физических принципов. Одна из таких теорий — это космология Калуцы — Клейна [7–11].

Метрика Калуцы — Клейна допускает использование произвольного масштабного множителя перед «калибровочной» частью метрики. Эволюция Вселенной в этой теории начинается с многомерного $4+d$ состояния, но затем этот масштабный множитель быстро стремится к нулю, что означает переход к обычному 4-мерному состоянию Вселенной [12]. Работы по космологии Калуцы — Клейна обычно используют дополнительные предположения о «калибровочном» масштабном множителе. Например, в статье [13] предполагается, что $b(t) = 1/a(t)^n$. Решения обобщенных уравнений Фридмана обычно параметризованы таким образом, что их невозможно сравнить со стандартной космологической моделью [14].

В момент Большого взрыва все измерения были равноправны и симметричны. Однако симметрия нарушилась: три измерения начали стремительно расширяться (инфля-

ция), а остальные — «застыли» или начали сокращаться. Это явление называется *динамической компактификацией*. В многомерных теориях «плоское» состояние пространства нестабильно. Система стремится к минимуму энергии, и в результате часть измерений остается огромной (наша Вселенная), а часть — спонтанно сворачивается в компактные многообразия планковских размеров, определяя, тем самым, фундаментальные константы и физические законы нашего четырехмерного мира [15].

В настоящей статье в качестве пространства-времени мы рассматриваем прямое произведение $M^4 \times SU(2)$ пространства Фридмана — Леметра — Робертсона — Уолкера M^4 и группы Ли $SU(2)$ (3-сфера) с биинвариантной метрикой. Ранее [16] мы доказали, что риманова кривизна группы Ли $SU(2)$ дает ненулевой вклад в скалярную кривизну многообразия $M^4 \times SU(2)$, причем этот вклад в точности соответствует космологической постоянной Λ . Обобщенные уравнения Фридмана в этом пространстве также были получены в статье [16]. В настоящей работе эти уравнения приведены к виду, пригодному для численного интегрирования. Для решения этих дифференциальных уравнений была использована система компьютерной алгебры Mathematica. Рассматриваются варианты поведения этих решений в зависимости от космологических параметров. Сформулирована задача об оценке космологических параметров на основе данных о Сверхновых типа Ia. Эта нелинейная регрессионная задача также была решена с помощью Mathematica.

2. ОБОБЩЕННАЯ МЕТРИКА

Метрика Фридмана — Леметра — Робертсона — Уолкера имеет вид

$$ds_{\text{FRW}}^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right).$$

Как в стандартной космологии, это метрика на псевдоримановом многообразии M^4 с координатами (t, r, θ, φ) , где t — космическое время. Пространственная часть метрики соответствует пространству постоянной кривизны. Будем считать, что биинвариантная метрика на группе пропорциональна некоторому масштабному множителю, зависящему от времени [16]:

$$ds_G^2 = b(t)^2 (d\xi^2 + \sin^2 \xi d\psi^2 + \sin^2 \xi \sin^2 \psi d\zeta^2).$$

Определим теперь метрику на $M^4 \times SU(2)$ как

$$ds^2 = ds_{\text{FRW}}^2 + ds_G^2. \quad (1)$$

Координаты на группе оказываются времениподобными, это необходимо, чтобы получить правильный знак перед Λ в первом уравнении Фридмана (8). Возможно, что дополнительные координаты ξ, ψ, ζ ненаблюдаемы именно потому, что они времениподобны. Физическое время может быть интегральной координатой некоторого времениподобного лево- или правоинвариантного векторного поля на $U(1) \times SU(2)$, при этом сами координаты $x^0 = ct, \xi, \psi, \zeta$ могут иметь период планковского масштаба [10].

Тензор Риччи $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ и скалярная R кривизна для метрики (1) получены в работе [16]. Уравнения Эйнштейна являются решением задачи минимизации функционала действия $-\frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{|\det(g_{\hat{\mu}\hat{\nu}})|} d^7 x + S_m$, где S_m — действие для материи, на некотором множестве метрик. Они имеют классический вид

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} R g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \kappa T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad \hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, \dots, 6,$$

где $\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^2} = 1,86639 \cdot 10^{-26} \frac{\text{м}}{\text{кг}}$ — гравитационная постоянная Эйнштейна, $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ — тензор напряжений. Левая часть этого уравнения — это тензор Эйнштейна. Будем считать, что тензор напряжений имеет вид

$$T_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} = \text{Diag}(\rho, -P, -P, -P, \sigma, \sigma, \sigma), \quad (2)$$

где плотность массы ρ , давление P и новая неизвестная плотность σ зависят от космического времени t . Так как это элементы одного тензора, они имеют одну и ту же размерность, будем считать, что они выражены в единицах плотности массы. Из уравнений Эйнштейна следуют три независимых уравнения. Это *обобщенные уравнения Фридмана* [16]:

$$\frac{3\kappa}{a^2} + \frac{3a'^2}{c^2 a^2} + \frac{9a'b'}{c^2 ab} + \frac{3b'^2}{c^2 b^2} - \frac{3}{b^2} = \kappa \rho(a, b), \quad (3)$$

$$\frac{\kappa}{a^2} + \frac{a'^2}{c^2 a^2} + \frac{2a''}{c^2 a} + \frac{6a'b'}{c^2 ab} + \frac{3b''}{c^2 b} + \frac{3b'^2}{c^2 b^2} - \frac{3}{b^2} = -\kappa P(a, b), \quad (4)$$

$$\frac{3\kappa}{a^2} + \frac{3a'^2}{c^2 a^2} + \frac{3a''}{c^2 a} + \frac{6a'b'}{c^2 ab} + \frac{2b''}{c^2 b} + \frac{b'^2}{c^2 b^2} - \frac{1}{b^2} = \kappa \sigma(a, b). \quad (5)$$

Сделаем небольшое отступление. В классической космологии уравнение Фридмана без космологической постоянной может быть интерпретировано как закон сохранения энергии [17]. Это уравнение может быть приведено к виду

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G_N}{3} \rho a^2 = -\kappa c^2,$$

где $\dot{a}^2$ — аналог *кинетической энергии* расширения, $-\frac{8\pi G_N}{3} \rho a^2$ — аналог *потенциальной энергии*¹ гравитационного взаимодействия, $-\kappa c^2$ — аналог *удвоенной полной энергии* системы. Знак этого члена определяется параметром кривизны κ . Если $\kappa = 0$, то полная энергия равна нулю (*плоская* Вселенная). Если $\kappa = +1$, то полная энергия отрицательна ($-c^2$) (*замкнутая* Вселенная, расширение сменится сжатием). Если $\kappa = -1$, то полная энергия положительна ($+c^2$) (*открытая* Вселенная, вечное расширение). Но такая интерпретация невозможна с космологической постоянной, ненулевая космологическая постоянная соответствует возникновению энергии из ничего.

Уравнения Фридмана обычно решают в следующей параметризации. Критическая плотность — это плотность, при которой Вселенная является плоской ($\kappa = 0$):

$$\rho_{\text{крит}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}.$$

Безразмерные параметры плотности показывают вклад различных компонентов в полную плотность энергии Вселенной относительно критической плотности [18]:

• **Параметр плотности вещества (материи):**

$$\Omega_m = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{крит}}} = \frac{8\pi G_N \rho_0}{3H_0^2}.$$

Включает как обычное (барионное) вещество, так и темную материю.

¹ Так как $\rho \propto a^{-3}$, то это слагаемое имеет вид ρ_0/a , что соответствует энергии тела в гравитационном поле.

- **Параметр плотности темной энергии (космологической постоянной):**

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{крит}}} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}.$$

- **Параметр кривизны:**

$$\Omega_\kappa = -\frac{\kappa c^2}{a_0^2 H_0^2}.$$

Из классического уравнения Фридмана следует уравнение баланса:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1.$$

Это означает, что сумма относительных вкладов вещества, темной энергии и кривизны всегда равна единице. В определении Ω_κ присутствует явный знак минус: $\Omega_\kappa = -\frac{\kappa c^2}{a_0^2 H_0^2}$. Это часто приводит к путанице при интерпретации. Связь между знаком кривизны κ и знаком Ω_κ следующая:

κ	Тип геометрии	Ω_κ	Условие баланса
$\kappa = +1$	Замкнутая (сферическая)	$\Omega_\kappa < 0$	$\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$
$\kappa = 0$	Плоская (евклидова)	$\Omega_\kappa = 0$	$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$
$\kappa = -1$	Открытая (гиперболическая)	$\Omega_\kappa > 0$	$\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$

Вернемся теперь к модели, предлагаемой в настоящей работе. Первое из обобщенных уравнений Фридмана (3) допускает интерпретацию как закон сохранения энергии. Квадратичная форма от первых производных масштабных множителей — это кинетическая энергия. Остальные слагаемые — это потенциальная энергия, в том числе потенциальная энергия «дополнительных координат». Однако эта квадратичная форма не является положительно определенной. Наличие в этом пространстве направлений, вдоль которых кинетическая энергия входит с минусом, как раз и означает неизбежность *спонтанной компактификации*.

3. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА

В силу тождества Бианки, ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю. Поэтому ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса (напряжений) $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ (2) также равна нулю. Получаем уравнение, которое является *условием совместности* системы обобщенных уравнений Фридмана:

$$\rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + P) + 3\frac{b'}{b}(\rho - \sigma) = 0.$$

Будем считать, что давление пропорционально плотности: $P = (\gamma - 1)\rho$, где $1 \leq \gamma \leq \frac{4}{3}$ и $\sigma = (1 - \gamma_1)\rho$. Тогда

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma} \left(\frac{b}{b_0}\right)^{-3\gamma_1}.$$

В дальнейшем $\gamma = 1$, то есть мы будем рассматривать только пылевидную материю. Если условие совместности выполнено, то одно из уравнений системы (3), (4), (5) избыточно. Достаточно найти решение первых двух уравнений системы, третье уравнение будет выполнено автоматически.

Уравнение (4) содержит вторую производную от a . Ее можно исключить, продифференцировав первое уравнение и решив полученную систему. Решение относительно производных a'' , b'' довольно громоздко и содержит b' в знаменателе (правая часть не является гладкой функцией переменных a, b, b'). У такой системы дифференциальных уравнений могут существовать *особые решения*, где $b' \equiv 0$, то есть $b \equiv \text{const}$. Уравнения (3) и (4) определяют дифференциально-алгебраическую систему уравнений со старшими производными a' и b'' . Из (3) следует, что

$$\frac{a'}{a} = \sqrt{\frac{\kappa \rho c^2}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{5b'^2}{4b^2}} - \frac{3}{2} \frac{b'}{b}. \quad (6)$$

Эти уравнения должны зависеть от стандартных космологических параметров Ω_m , Ω_κ и H_0 . Будем считать, что $a_0 = 1$. Тогда для параметра кривизны $\Omega_\kappa H_0^2 = -\kappa c^2$. Так как критическая плотность материи $\rho_c = \frac{3H_0^2}{\kappa c^2} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}$, то плотность материи

$$\kappa \rho c^2 = \kappa \rho_c c^2 \Omega_m a^{-3} (b/b_0)^{-3\gamma_1} = 3H_0^2 \Omega_m a^{-3} (b/b_0)^{-3\gamma_1}.$$

Старшая производная второго масштабного множителя принимает вид

$$b'' = \frac{1}{5} \left(-\frac{2H_0^2 \Omega_\kappa b^2 a'}{a^3 b'} + \frac{3b(6a'^2 - 7H_0^2 \Omega_\kappa)}{a^2} + \frac{3b(2\gamma_1 - 7)H_0^2 \Omega_m}{a^3} \left(\frac{b}{b_0} \right)^{-3\gamma_1} - \frac{8(c^2 - b'^2)}{b} + \frac{39a'b'}{a} \right). \quad (7)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений (6), (7), которую можно решать численно. Для численного решения мы использовали параметры $H_0^{[t]} = 1/14,4$ млрд лет⁻¹, $c = 1$. При таком выборе время измеряется в млрд лет. Начальные условия — эпоха рекомбинации, $t_{\text{start}} = 380000/10^9 = 0,00038$, $z = 1089$ и $a_{\text{start}} = 1/(1+z) = 0,000917$. Это система дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Она жесткая, но, тем не менее, Mathematica решает эту систему. Есть еще пакеты для численного решения дифференциальных уравнений на языке Julia, но эти пакеты эту систему решить не могут.

Правая часть уравнения (7) не является непрерывной функцией зависимых переменных и содержит b'^{-1} . Поэтому решения вида $b \equiv b_0 = \text{const}$ могут быть *особыми решениями* обобщенных уравнений Фридмана. Уравнение (3) принимает вид

$$\frac{a'^2}{c^2 a^2} = \frac{\kappa}{3} \rho + \frac{1}{b_0^2} - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (8)$$

Сравним это с известным уравнением стандартной космологической модели Λ CDM: $\frac{a'^2}{c^2 a^2} = \frac{\kappa}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2}$. Поэтому $\frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{b_0^2}$, то есть космологическая постоянная Λ естественным образом определяется масштабным множителем: $b_0 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ и $\Lambda = \frac{3}{b_0^2}$. Так как

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^{[t]2}} = \frac{c^2}{H_0^{[t]2} b_0^2}, \text{ то}$$

$$b_0 = \frac{c}{H_0^{[t]} \sqrt{\Omega_\Lambda}} = \frac{c}{H_0^{[t]} \sqrt{1 - \Omega_m - \Omega_\kappa}}. \quad (9)$$

Итак, в предлагаемой модели темной энергии соответствует не просто некоторый параметр Ω_Λ , а функция $b(t)$, причем в современную эпоху ($t = t_0$) должно быть $b(t_0) = b_0$. Это

позволяет найти начальное значение $b_{\text{start}} = b(t_{\text{start}})$. Начальное значение b_{start} необходимо подбирать так, чтобы значение параметра b в настоящую эпоху b_0 совпало с уравнением (9) (уравнение баланса). Например, если $\Omega_\Lambda = 0,685$, то $b_0 = 17,4$ млрд лет.

Так как система обобщенных уравнений Фридмана второго порядка по b , решение будет зависеть также от начального значения производной $b'(0)$. Оказывается, что если $b'(0) > 0$, то b' быстро убывает и достигает нуля за время порядка 10^{-6} . С точки зрения космологии такое решение не интересно. Если же начальное значение производной $b'(0) < 0$, то сначала за время порядка 10^{-3} эта производная достигает значений ≈ -4000 , а затем плавно возрастает и достигает нуля за время порядка 8 млрд лет. Рассмотрим это решение подробно. Есть три случая.

1. Положительная кривизна. При $\Omega_\kappa > 0$ функция $b(t)$ монотонно убывает. Особое решение $b \equiv b_0$ является асимптотой этого семейства решений. Когда производная b' достигает нуля, вычисления останавливаются, потому что вторая производная становится бесконечной. Но мы можем склеить два решения этой системы: регулярное на первом промежутке $0 < t \leq t_1$ и особое решение на втором промежутке (ускоренное расширение). Предельное значение $b(t_1)$ можно найти из формулы (9), потому что на втором промежутке решение системы обобщенных уравнений Фридмана совпадает с классическим решением Λ CDM. Расширение в настоящую эпоху ускоренное. Графики функций b, b' с этими начальными данными приведены на рисунке 1.

2. Плоская Вселенная. При $\Omega_\kappa = 0$ функция $b(t)$ сначала убывает, затем возрастает. Производная меняет знак, но это не вызывает вычислительных проблем, склейка не нужна. Но функция $a(t)$ оказывается выпуклой, ее производная монотонно убывает, ускоренного расширения нет. Такое решение не интересно с точки зрения космологии.

3. Отрицательная кривизна. При $\Omega_\kappa < 0$ функция $b(t)$ монотонно убывает. Особое решение $b \equiv b_0$ является асимптотой этого семейства решений. Вычислительных трудностей не возникает, склейка не требуется. В настоящую эпоху расширение ускоренное. Графики функций b, b' с этими начальными данными приведены на рисунке 2.

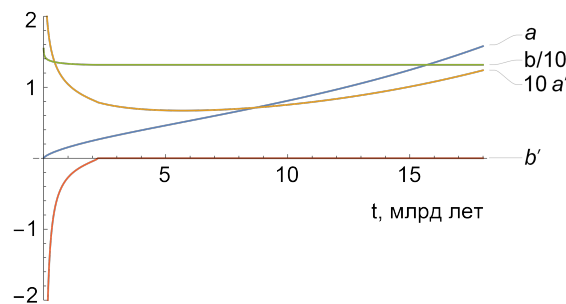


Рис. 1. Масштабные множители a, b и их производные при $\Omega_\kappa = 0,001$

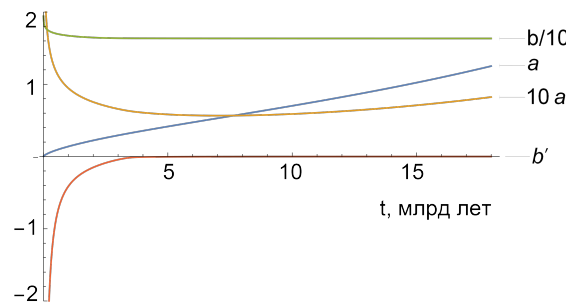


Рис. 2. Масштабные множители a, b и их производные при $\Omega_\kappa = -0,001$

4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ СВЕРХНОВЫХ ТИПА Ia

Оценка расстояний с помощью сверхновых Ia основана на том, что их светимость практически постоянна, а остаточные вариации можно оценить с помощью двух параметров. Один из них описывает *растянутость* световой кривой во времени (X_1), а второй — *цвет* сверхновой при ее максимальной яркости (C). На длине волны λ через время p после взрыва плотность потока определяется уравнением [19]

$$S_{SN}(p, \lambda) = m_B^* (\mathcal{M}^0(p, \lambda) + X_1 \mathcal{M}^1(p, \lambda)) \exp(C \times \mathcal{C}_L(\lambda)).$$

Модуль расстояния

$$\mu = m_B^* + (-M_B + \alpha X_1 - \beta C),$$

где m_B^* — наблюдаемая светимость, M_B — параметр нормализации с поправкой на массу галактики:

$$M_B = \begin{cases} M_B^1, & \text{если } M_{\text{host}} < 10^{10} M_{\odot}, \\ M_B^1 + \Delta_M, & \text{если } M_{\text{host}} \geq 10^{10} M_{\odot}. \end{cases}$$

Таблица 1. Обозначения ковариаций параметров сверхновых Ia

	светимость	растянутость	цвет
светимость	$C_{\mu\mu}$	$C_{\mu s}$	$C_{\mu c}$
растянутость	$C_{\mu s}$	C_{ss}	C_{sc}
цвет	$C_{\mu c}$	C_{sc}	C_{cc}

В работе [19] была вычислена матрица ковариаций всех этих параметров для выборки из 740 сверхновых Ia (таблица). Полную матрицу ковариаций можно найти как

$$\mathcal{C} = C_{\text{Diag}} + C_{\mu\mu} + \alpha^2 C_{ss} + \beta^2 C_{cc} + 2\alpha C_{\mu s} - 2\beta C_{\mu c} - 2\alpha\beta C_{sc}, \quad (10)$$

где диагональная часть учитывает пекулярные скорости сверхновых, гравитационное линзирование и погрешность красного смещения [19, 20]:

$$C_{\text{Diag}, ii} = \sigma_{\mu, i}^2 + \alpha^2 \sigma_{s, i}^2 + \beta^2 \sigma_{c, i}^2 + 2\alpha \sigma_{\mu s, i}^2 - 2\beta \sigma_{\mu c, i}^2 - 2\alpha\beta \sigma_{sc, i}^2.$$

Параметры α , β , M_B^1 , Δ_M — внутренние параметры регрессионной задачи (13).

Найдем теперь конформное время и физическое расстояние как функции красного смещения. Так как параметр Хаббла $H = a'/a$, то $d\eta = dt/a = da/(a^2 H(t(a))) = -dz/(H_0 E(z))$, где $E(z) = \frac{H}{H_0}$ — безразмерный параметр Хаббла. В силу (6),

$$E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 \left(\frac{b}{b_0}\right)^{-3\gamma_1} + \Omega_\kappa(1+z)^2 + \frac{c^2}{H_0^{[t]^2} b^2} + \frac{5b'^2}{4H_0^{[t]^2} b^2} - \frac{3}{2} \frac{b'}{H_0^{[t]} b}}. \quad (11)$$

Известно, что *фотометрическое расстояние* можно найти как

$$d_L = (1+z) \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_\kappa|}} \sin_\kappa \left(\sqrt{|\Omega_\kappa|} \int_0^z \frac{dz_1}{E(z_1)} \right). \quad (12)$$

Если $\kappa = 0$, то $\sqrt{|\Omega_\kappa|}$ сокращается в силу определения функции $\sin_\kappa \chi$,

$$\sin_\kappa \chi = \begin{cases} \sin \chi, & \kappa = 1, \\ \chi, & \kappa = 0, \\ \sinh \chi, & \kappa = -1. \end{cases}$$

Обычно используют модуль расстояния $\mu = 5 \log_{10}(d_L/10\text{pc})$, в этой формуле d_L в парсеках. Решение системы дифференциальных уравнений (6), (7) дает функции $a(t)$, $b(t)$, $b'(t)$. Так как функция $a(t)$ монотонна, мы можем найти обратную функцию $t(a)$ и выразить ее через красное смещение: $t(a) = t(1/(1+z))$. В уравнении (11) необходимо использовать функции b и b' , выраженные через красное смещение: $b(t(1/(1+z)))$ и $b'(t(1/(1+z)))$.

Конечно, чтобы проверить модель и оценить правильность решения, надо сначала посмотреть на график. Это диаграмма Хаббла (рис. 3). Но на таком графике непонятно, насколько сильно точки отклоняются от теоретической кривой. Поэтому строят также разностную диаграмму Хаббла (рис. 4). Эта диаграмма была получена с помощью кода Mathematica (рис. 5).

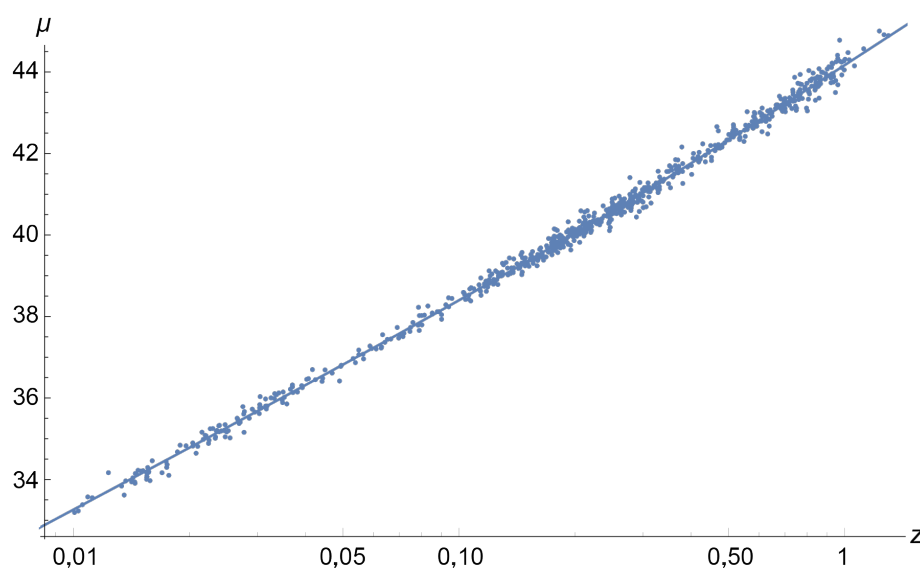


Рис. 3. Диаграмма Хаббла, ListLogLinearPlot и LogLinearPlot

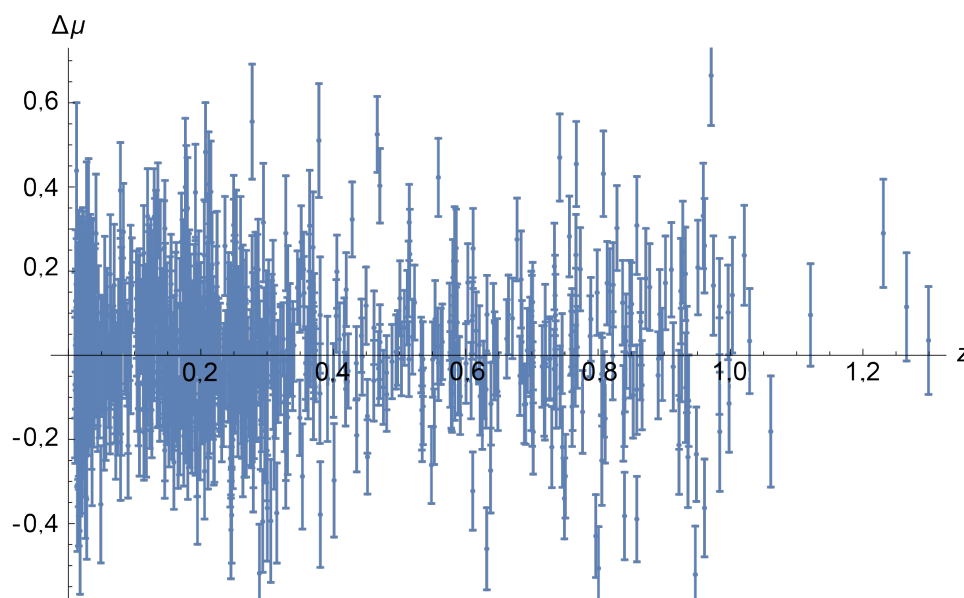


Рис. 4. Разностная диаграмма Хаббла с погрешностями

```

HubDeltaErr =
ErrorListPlot[
Table[{zs[[i]],  $\mu_1[[i]] - dm[dL[zs[[i]], 0.315, 0.685, 67.3]]$ }, ErrorBar[errmu0[[i]]]],


|                  |  |  |  |  |  |
|------------------|--|--|--|--|--|
| таблица значений |  |  |  |  |  |
|------------------|--|--|--|--|--|


{i, 1, Nstars}], AxesLabel -> {z, " $\Delta\mu$ "}, AxesStyle -> Directive[Black, Style, 17],


|                     |            |           |              |
|---------------------|------------|-----------|--------------|
| обозначения на осях | стиль осей | директива | чёрный стиль |
|---------------------|------------|-----------|--------------|


ImageSize -> {600, 570}, PlotRange -> All]


|                    |              |     |
|--------------------|--------------|-----|
| размер изображения | отображае... | всё |
|--------------------|--------------|-----|


Export["HubDeltaErr_new.eps", HubDeltaErr]
экспортировать

```

Рис. 5. Код Mathematica для рис. 4

5. РЕГРЕССИОННАЯ ЗАДАЧА

Формула для фотометрического расстояния (12) ведет к регрессионной задаче для определения параметров модели. Для оценки погрешности параметров модели необходимо использовать χ^2 статистику:

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \Delta\mu_i (\mathcal{C}^{-1})_{ij} \Delta\mu_j, \quad (13)$$

где $\Delta\mu_i = \mu_i - \mu(d_L^{\text{theor}}(z_i, H_0, \Omega_m, \Omega_k, \gamma_1))$ и $\mathcal{C}^{-1}$ — матрица, обратная к матрице ковариаций (10)². Данные наблюдений Сверхновых типа Ia и матрицы ковариаций были взяты из работы [19]³. Внутренние параметры регрессии $M_B^1 = -19,144 \pm 0,046$, $\alpha = 0,126 \pm 0,018$, $\beta = 2,64 \pm 0,22$, $\Delta_M = -0,052 \pm 0,061$.

Минимум, конечно, тоже приходится искать численно. Для этого составляется таблица: каждый параметр изменяется в некотором диапазоне с некоторым шагом. Это занимает много времени, поэтому есть смысл использовать распараллеливание. Mathematica сама может распределить вычисления на несколько процессоров (после вызова таких процедур, как ParallelDo), но каждое ядро будет работать независимо. Например, будет создано 4 независимых копии вашего адресного пространства. Чтобы все результаты записывались в единый общий массив, надо использовать SetSharedVariable. Затем вызывается процедура интерполяции. Для процедуры Interpolation данные должны быть равноотстоящими (с постоянным шагом). Порядок интерполяции можно выбрать, обычно это полиномиальная интерполяция (нескольких переменных) порядка 3 или 4. Если данные не такие или область не прямоугольная, то можно сначала построить триангуляцию сетки по Делоне с помощью ToElementMesh, а затем использовать ElementMeshInterpolation.

Затем к полученной функции применяется одна из процедур минимизации. Например, FindMinimum ищет ближайший локальный минимум, а NMinimize ищет глобальный минимум в заданной области. Наилучшие значения представляют собой полосу, то есть при различных γ_1 наилучшие значения очень близки между собой по показателю χ^2 . При $\gamma_1 = 0,1$, $\Omega_m = 0,20$ и $\Omega_\Lambda = 0,52$ целевая функция $\chi_{\min}^2 = 634,6$. При $\gamma_1 = 0,3$, $\Omega_m = 0,24$ и $\Omega_\Lambda = 0,55$ целевая функция $\chi_{\min}^2 = 634,8$. Это соответствует $\Omega_k = 0,21$. Контурные с указанием доверительных интервалов приведены на рисунке 6 слева. Для оценки погрешности необходимо использовать основное свойство распределения χ^2 . Обозначим $\theta = (\Omega_m, \Omega_k, \gamma_1)$ — параметры модели и разложим χ^2 в ряд Тейлора [21, стр. 88]:

² Эта формула является обобщением классической формулы $\chi^2 = \sum_i \frac{|\Delta\mu_i|^2}{\sigma_i^2}$, где σ_i — дисперсии.

³ <http://cdsarc.u-strasbg.fr/ftp/J/A+A/568/A22/>

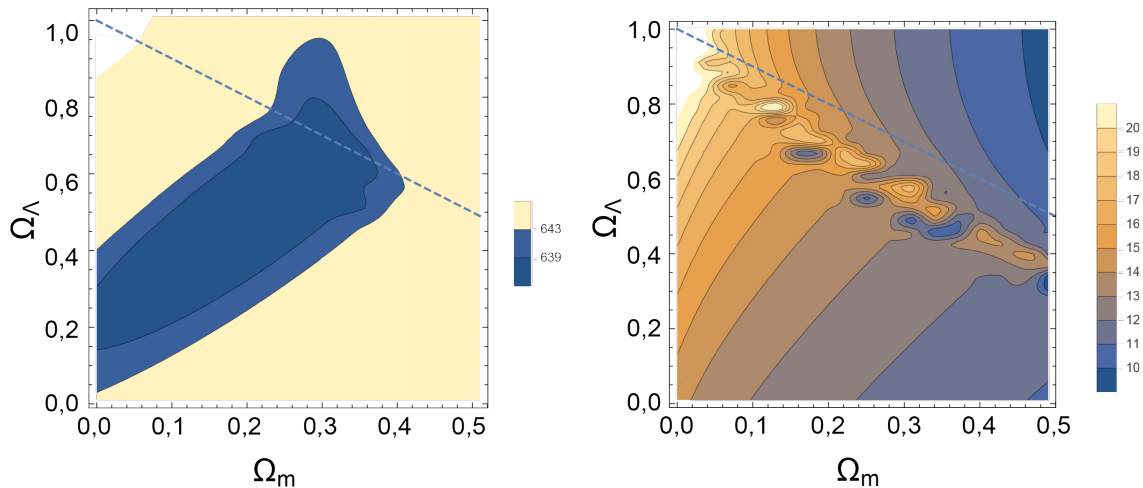


Рис. 6. Контуры для доверительной вероятности 68 % и 95 % в пространстве параметров $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ при $\gamma_1 = 0,4$, где $\Omega_\Lambda = \frac{c^2}{H_0^{[t]^2} b_0^2}$. Справа приведены изолинии возраста Вселенной (значения t_0) при $\gamma_1 = 0,25$. Пунктир соответствует плоской Вселенной. Если кривизна $\Omega_k = 0,15$, то возраст Вселенной может лежать в интервале $14 \leq t_0 \leq 17$ млрд лет

$\chi^2 = \chi^2|_{\theta=\hat{\theta}} + (\hat{\theta} - \theta)^T W^{-1} (\hat{\theta} - \theta)$. В правой части распределение $\chi^2|_{\theta=\hat{\theta}}$ имеет $N_{\text{SN}} - 3$ степеней свободы, где $N_{\text{SN}} = 740$ — число Сверхновых, а квадратичная форма $\Delta\chi^2 = (\hat{\theta} - \theta)^T W^{-1} (\hat{\theta} - \theta)$ имеет χ^2 -распределение с тремя степенями свободы [21, 22]. Поэтому при построении доверительных контуров следует использовать квантили для доверительных вероятностей с тремя степенями свободы: 3,43 (67 %) и 7,81 (95 %).

На рисунке 6 справа приведены изолинии возраста Вселенной (значения t_0) при $\gamma_1 = 0,25$. Пунктир соответствует плоской Вселенной. Если кривизна $\Omega_k = 0,15$, то возраст Вселенной может лежать в интервале $14 \leq t_0 \leq 17$ млрд лет. Итак, если кривизна Вселенной положительна, то предлагаемая модель может объяснить и ускоренное расширение Вселенной и проблему «ранних галактик». Возраст Вселенной оказывается больше, чем в стандартной космологической модели, на 3 млрд лет.

Современные данные по реликтовому излучению показывают, что Вселенная плоская, $|\Omega_k| < 0,01$, поэтому рассмотрим этот случай отдельно. Контуры для доверительной вероятности 68 % и 95 % в пространстве параметров (Ω_m, γ_1) для *почти плоской* Вселенной ($|\Omega_k| < 0,01$, но $\Omega_k \neq 0$, так как при нулевой кривизне решения системы (6), (7) ведут себя совершенно по другому) приведены на рисунке 7. В этом случае возраст Вселенной такой же, как и в стандартной космологии, то есть в этом случае предлагаемая теория не улучшает стандартную модель.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Космология Калуцы — Клейна допускает модель размерности $4 + 3$, которая позволяет объяснить наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной без использования космологической постоянной. Темная энергия оказывается проявлением кривизны группы Ли с естественной римановой метрикой. Плотность темной энергии Ω_Λ — параметр, определяемый предельным значением второго масштабного множителя b (9). Однако это значение имеет астрономический порядок величины, а не планковский. Объяснение этому

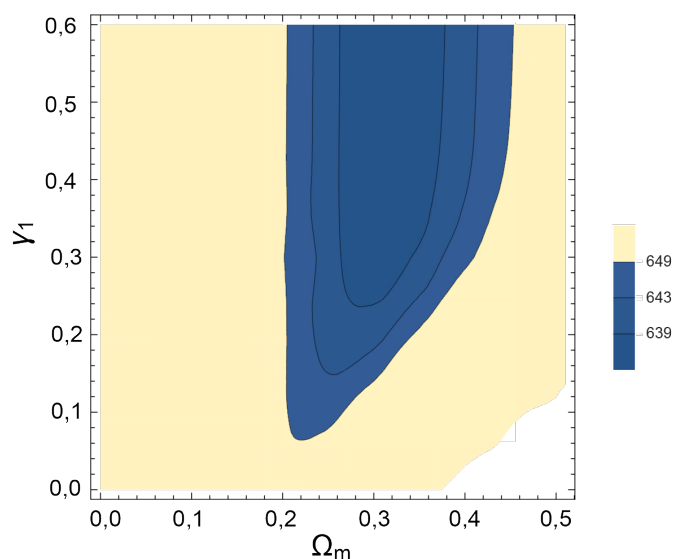


Рис. 7. Контуры для доверительной вероятности 68 %, 95 % и 99 % в пространстве параметров (Ω_m, γ_1) в случае плоской Вселенной, ContourPlot

может лежать в квантовой теории гравитации [23]. Метрический тензор может состоять из усредненных термодинамических функций пространства-времени, то есть дополнительные размерности имеют планковский период, но проявляются через усредненные термодинамические функции, которые имеют порядок $b_0 = 17,4$ млрд лет.

Получены ограничения на параметры модели (область оптимальных параметров), причем эти параметры совместимы со стандартным набором параметров современной космологии (рис. 8). Но для объяснения феномена «ранних галактик» необходима ненулевая кривизна пространства $\Omega_k \approx 0,15$.

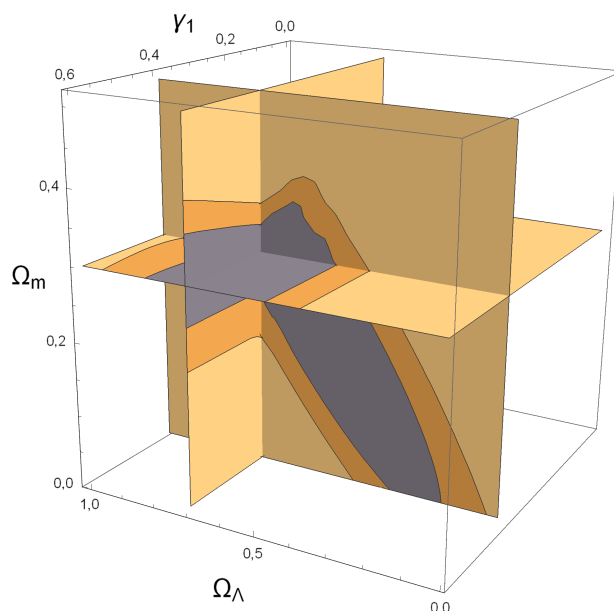


Рис. 8. Контуры для доверительной вероятности 68 %, 95 % и 99 % в пространстве параметров $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \gamma_1)$ с помощью SliceContourPlot3D

Список литературы

1. Хокинг С. Краткая история времени. От Большого взрыва до черных дыр. М: АСТ, 2019.
2. Рубаков В. А. Актуальные вопросы космологии. М.: Издательский дом МЭИ, 2015.
3. Рубаков В. А. Большие и бесконечные дополнительные измерения // Успехи физических наук. 2001. № 171(9). С. 913–938. doi: 10.1093/mnras/171.9.913.
4. Parashari P., Laha R. Primordial power spectrum in light of JWST observations of high redshift galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. August 2023. Vol. 526(1). P. L63–L69.
5. Libanov M., Mironov S., Rubakov V. Generalized galileons: instabilities of bouncing and genesis cosmologies and modified genesis // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. Vol. 2016, № 8. P. 037.
6. Davis T. M., Lineweaver C. H. Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe // Publications of the Astronomical Society of Australia. 2004. Vol. 21, № 1. P. 97–109.
7. Kerner R. Generalization of the Kaluza–Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1968. Vol. 9, № 2. P. 143–152.
8. Kerner R. Geometrical background for the unified field theories: the Einstein–Cartan theory over a principal fibre bundle // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1981. Vol. 34, № 4. P. 437–463.
9. Кернер Р. Обобщенные модели Калуцы–Клейна с лагранжианами Гаусса–Бонне // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2023. № 3-4. С. 166–187.
10. Крым В. Р. Топологическое квантование электрического заряда в теории Калуцы–Клейна // Записки Научн. Сем. ПОМИ РАН. 2025. № 543. С. 143–154.
11. Krym V. R. Comparison of basic equations of the Kaluza–Klein theory with the nonholonomic model of space-time of the sub-Lorentzian geometry // International Journal of Modern Physics A. 2023. Vol. 38, № 9–10. P. 2350049. doi: 10.1142/s0217751x23500495.
12. Sahdev D. Perfect-fluid higher-dimensional cosmologies // Phys. Rev. D. 1984. Vol. 30. P. 2495–2507.
13. Mohammedi N. Dynamical compactification, standard cosmology, and the accelerating universe // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 65. P. 104018.
14. Darabi F. An expanding 4D universe in a 5D Kaluza–Klein cosmology with higher dimensional matter. Modern Physics Letters A. 2010. Vol. 25, № 19. P. 1635–1646.
15. Brandenberger R. H., Vafa C. Cosmology with network of strings // Nuclear Physics B. 1989. Vol. 316, № 2. P. 391–410.
16. Крым В. Р. Космология с биинвариантной метрикой на главном расслоении с неабелевой группой Ли $SU(2)$ // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70), № 4. С. 823–833.
17. Нагирнер Д. И. Космологические модели [Электронный ресурс]. СПб., 2022. URL: <http://www.astro.spbu.ru/?q=node/1127> (дата обращения: 10.12.2025).
18. Крым В. Р. Космология: оценки возраста Вселенной // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2011. № 1. С. 155–165.
19. Betoule M., Kessler R., Guy J., Mosher J., Hardin D., Biswas R., Astier P., El-Hage P., König M., Kuhlmann S., et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples // Astronomy & Astrophysics. 2014. Vol. 568. P. A22.
20. Conley A., Guy J., Sullivan M., Regnault N., et al. Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2010. Vol. 192, № 1. P. 1.
21. Lupton R. Statistics in theory and practice. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.
22. Малов С. В. Регрессионный анализ: теоретические основы и практические рекомендации. СПб.: Изд. СПбГУ, 2013.
23. Фильченков М. Л., Лаптев Ю. П. Квантовая гравитация: от микромира к мегамиру. М.: ЛЕНАНД, 2016.

Поступила в редакцию 25.08.2025, окончательный вариант — 10.12.2025.

Крым Виктор Револьтович, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры высшей геометрии, СПбГУ; доцент кафедры алгоритмической математики, СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
✉ vrkrym@etu.ru

Generalized Friedman Equations on the Space with the Lie Group $SU(2)$ and the Cosmological Constant

Krym V. R.^{1,2}, ✉ vrkrym@etu.ru, orcid.org/0000-0001-6473-778X

¹ Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Saint Petersburg State Electrotechnical University “LETI”,
Professora Popova ul. 5, St. Petersburg, 197022, Russian Federation

Abstract

In this paper, we consider the spacetime to be a direct product $M^4 \times SU(2)$ of the Friedmann — Lemaître — Robertson — Walker space M^4 and the Lie group $SU(2)$ (3-sphere) equipped with a bi-invariant metric. In this spacetime, the Riemannian curvature of the Lie group $SU(2)$ gives a nonzero contribution to the scalar curvature of the manifold $M^4 \times SU(2)$ and this contribution exactly corresponds to the cosmological constant Λ . The generalized Friedmann equations for this spacetime are reduced in the present work to a form suitable for numerical integration. The computer algebra system Mathematica was used to solve these differential equations. The behavior of these solutions is examined depending on cosmological parameters such as matter density, dark energy density (cosmological constant), and curvature. Cosmological parameters were estimated by means of a nonlinear regression problem based on type Ia Supernova data. The derived constraints on the model parameters are compatible with the standard cosmological model. Nevertheless, non-zero spatial curvature is necessary to account for the “early galaxies” phenomenon.

Keywords: *Kaluza — Klein cosmology, Supernova Ia, Mathematica.*

Citation: V. R. Krym, “Generalized Friedman Equations on the Space with the Lie Group $SU(2)$ and the Cosmological Constant,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 5–19, 2026; doi: 10.32603/2071-2340-2026-2-5-19.

References

1. S. Hawking, *A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes*, Moscow: AST, 2019 (in Russian).
2. V. A. Rubakov, *Top Issues in Cosmology*, Moscow: MEI Publishing House, 2015 (in Russian).
3. V. A. Rubakov, “Large and infinite extra dimensions,” *Physics-Uspekhi*, vol. 44, no. 9, pp. 871–893, 2001, doi: 10.1070/pt2001v044n09abeh001000
4. P. Parashari and R. Laha, “Primordial power spectrum in light of JWST observations of high redshift galaxies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 526, no. 1, pp. L63–L69, Aug. 2023, doi: 10.1093/mnrasl/slad107.
5. M. Libanov, S. Mironov, and V. Rubakov, “Generalized galileons: instabilities of bouncing and genesis cosmologies and modified genesis,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 8, p. 037, 2016, doi: 10.1088/1475-7516/2016/08/037.
6. T. M. Davis and C. H. Lineweaver, “Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe,” *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 21, no. 1, pp. 97–109, 2004.

7. R. Kerner, "Generalization of the Kaluza–Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group," *Ann. Inst. H. Poincaré A*, vol. 9, no. 2, pp. 143–152, 1968.
8. R. Kerner, "Geometrical background for the unified field theories: the Einstein–Cartan theory over a principal fibre bundle," *Ann. Inst. H. Poincaré A*, vol. 34, no. 4, pp. 437–463, 1981.
9. R. Kerner, "Generalized Kaluza–Klein models with Gauss–Bonnet Lagrangians," *Space, Time and Fundamental Interactions*, no. 3–4, pp. 166–187, 2023, doi: 10.17238/issn2226-8812.2023.3-4.166-187 (in Russian).
10. V. R. Krym, "Topological quantization of the electric charge in Kaluza–Klein theory," *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, vol. 543, pp. 143–154, 2025 (in Russian).
11. V. R. Krym, "Comparison of basic equations of the Kaluza–Klein theory with the nonholonomic model of space-time of the sub-Lorentzian geometry," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 38, no. 9–10, p. 2350049, 2023, doi: 10.1142/s0217751x23500495.
12. D. Sahdev, "Perfect-fluid higher-dimensional cosmologies," *Phys. Rev. D*, vol. 30, pp. 2495–2507, 1984.
13. N. Mohammadi, "Dynamical compactification, standard cosmology, and the accelerating universe," *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 104018, 2002.
14. F. Darabi, "An expanding 4D universe in a 5D Kaluza–Klein cosmology with higher dimensional matter," *Modern Physics Letters A*, vol. 25, no. 19, pp. 1635–1646, 2010.
15. R. H. Brandenberger and C. Vafa, "Cosmology with network of strings," *Nuclear Physics B*, vol. 316, no. 2, pp. 391–410, 1989.
16. V. R. Krym, "Cosmology on a principal bundle with the non-abelian Lie group $SU(2)$ with the bi-invariant metric," *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, vol. 12 (70), no. 4, pp. 823–833, 2025 (in Russian).
17. D. I. Nagirner, *Cosmological Models*, St. Petersburg, Russia: St. Petersburg University, 2022 [Online] (in Russian). Available: <http://www.astro.spbu.ru/?q=node/1127>
18. V. R. Krym, "Cosmology: estimates of the age of the Universe," *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, no. 1, pp. 155–165, 2011 (in Russian).
19. M. Betoule, R. Kessler, J. Guy, et al, "Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 568, p. A22, 2014.
20. A. Conley, J. Guy, M. Sullivan, et al, "Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 192, no. 1, p. 1, 2010.
21. R. Lupton, *Statistics in Theory and Practice*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.
22. S. V. Malov, *Regression Analysis: Theoretical Foundations and Practical Recommendations*, St. Petersburg: St. Petersburg State University Press, 2013 (in Russian).
23. M. L. Filchenkov and Yu. P. Laptev, *Quantum Gravity: From the Microcosm to the Megacosm*, Moscow: LENAND, 2016.

Received 25-08-2025, the final version — 10-12-2025.

Victor Krym, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer at the Department of Higher Geometry, St. Petersburg State University; Associate Professor at the Department of Algorithmic Mathematics, ETU "LETI", ✉ vrkrym@etu.ru