МЕТРИКА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕТЕОРНЫХ ПОТОКОВ

М. Д. Губина

Санкт-Петербургский государственный университет

В данной работе предлагается новая метрика, основанная на фундаментальных физических инвариантах орбитального движения. В отличие от существующих подходов, в предлагаемой метрике непосредственно используются интегралы движения. Такой подход обеспечивает естественную физическую интерпретацию и устойчивость к вырожденным случаям, а именно круговым и экваториальным орбитам. Доказано, что предложенная функция удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Проведен сравнительный анализ с классическими критериями Саутворта — Хокинса, Драммонда, Йопека и метрикой Холшевникова. Необходимость введения новой метрики возникла при рассмотрении задачи идентификации метеорных потоков. Данная статья посвящена доказательству метрических свойств предложенной метрики; рассмотрение её приложений для решения практических задач планируется в будущем.

METRIC FOR METEOR SHOWER IDENTIFICATION

M. D. Gubina

Saint Petersburg State University

This paper proposes a new metric based on the fundamental physical invariants of orbital motion. Unlike existing approaches, the proposed metric directly employs integrals of motion. This method provides a natural physical interpretation and robustness to degenerate cases, namely circular and equatorial orbits. It is proven that the proposed function satisfies all axioms of a metric space. A comparative analysis with the classical Southworth–Hawkins, Drummond, and Jopek criteria, as well as the Kholshevnikov metric, is conducted. The need to introduce a new metric arose from considering the problem of meteor shower identification. This article is devoted to proving the metric properties of the proposed metric; consideration of its applications for solving practical problems is planned for the future.

Введение

Задача идентификации метеорных потоков остается одной из наиболее актуальных проблем астрономии. Классические подходы, основанные на сравнении орбитальных элементов, сталкиваются с принципиальными трудностями при работе с вырожденными случаями — почти круговыми и почти экваториальными орбитами, где традиционные метрики теряют свою применимость.

Первый критерий был предложен Саутвортом и Хокинсом (1963) [1] D_{SH} для сравнения орбит, основанный на различии эксцентриситетов, перигелийных расстояний и взаимного наклона. Однако данный критерий обладает существенным недостатком — неопределенностью аргумента Π при $e \to 0$, поскольку долгота перицентра становится неопределенной для круговых орбит, что делает критерий неприменимым в таких случаях.

Драммонд (1981) [2] предложил улучшенную версию критерия D_D, учитывающую относительные различия орбитальных элементов. Несмотря на прогресс, данный подход сохраняет сингулярности при $e \to 0$, $i \to 0$, что ограничивает его применимость, а также не удовлетворяет аксиоме треугольника [3]. Кроме того, функция D_D слабо различает орбиты с сильно различающимися перицентрическими расстояниями.

© Губина М. Д., 2026

Значительный прогресс был достигнут в работах Холшевникова (2004 — 2016) [3–5], впервые построившего настоящие метрики в пространствах кеплеровых орбит, и Йопека (1993) [6], предложившего усовершенствованный критерий D_J. Однако вычислительная сложность этих подходов ограничивает их практическое применение.

Предлагаемый подход

В данной работе предлагается новая метрика, основанная на фундаментальных физических инвариантах орбитального движения. В отличие от существующих подходов, используются непосредственно интегралы движения, что обеспечивает естественную физическую интерпретацию и устойчивость к вырожденным случаям.

Рассматривается пятимерное пространство $\mathbb{H}$ непрямолинейных кеплеровых орбит с метрикой следующего вида:

$$D^2 = \left(\frac{|E_1 - E_2|}{E_{\text{scale}}}\right)^2 + \left(\frac{|L_1 - L_2|}{L_{\text{scale}}}\right)^2 + d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2)^2 \tag{1}$$

где:

- $E = -\frac{\mu}{2a}$ — полная энергия
- $|\mathbf{L}| = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ — модуль момента импульса
- $d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ — расстояние между ориентациями орбит, задаваемыми единичными кватернионами $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$
- E_{scale} и L_{scale} — масштабные коэффициенты, обеспечивающие безразмерность и сопоставимость вкладов от разности энергий и моментов импульса в метрике

Для параметризации ориентации орбитальной плоскости в пространстве используется **единичный кватернион** $\vec{q} \in \mathbb{S}^3$, который строится по орбитальным элементам следующим образом:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega+\omega}{2} \\ \sin\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega-\omega}{2} \\ \sin\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega-\omega}{2} \\ \cos\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega+\omega}{2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Учитывая, что кватернионы $\vec{q} \equiv -\vec{q}$ задают идентичную ориентацию орбиты, расстояние определяется на полуокружности $\mathbb{S}^3$, где эти пары отождествлены:

$$d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \min\left(\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|, \|\vec{q}_1 + \vec{q}_2\|\right). \tag{3}$$

Доказательство метрических свойств

Теорема 1. *Функция D, заданная формулой (1), является метрикой в пространстве кеплеровых орбит.*

Доказательство. 1. **Неотрицательность и тождество неразличимых:**

- $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq 0$, так как все слагаемые в (1) неотрицательны

- $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$ тогда и только тогда, когда:

$$|E_1 - E_2| = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$$
$$|L_1 - L_2| = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$
$$d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0 \Rightarrow \vec{q}_1 = \vec{q}_2$$

Совместное выполнение этих условий означает $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$

2. **Симметричность:**

$$D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = D(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$$

Симметричность очевидна из определения.

3. **Неравенство треугольника:**

Для доказательства достаточно показать, что каждая компонента метрики удовлетворяет неравенству треугольника. Предварительно докажем вспомогательную лемму:

Лемма 1. *Функция* $d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \min(\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|, \|\vec{q}_1 + \vec{q}_2\|)$ *задаёт метрику на полуокружности* $\mathbb{S}^3$.

Доказательство. Для $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in \mathbb{S}^3$ определим:

$$d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \min_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}} \|\varepsilon_1 \vec{q}_1 - \varepsilon_2 \vec{q}_2\|$$

Рассмотрим три единичных кватерниона $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \in \mathbb{S}^3$.
Существуют $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23} \in \{\pm 1\}$ такие, что:

$$d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \min(\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|, \|\vec{q}_1 + \vec{q}_2\|) = \|\vec{q}_1 - \varepsilon_{12}\vec{q}_2\|$$
$$d_q(\vec{q}_2, \vec{q}_3) = \min(\|\vec{q}_2 - \vec{q}_3\|, \|\vec{q}_2 + \vec{q}_3\|) = \|\vec{q}_2 - \varepsilon_{23}\vec{q}_3\|$$

Положим $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}$. Тогда:

$$\begin{aligned} d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_3) &\le \|\vec{q}_1 - \varepsilon_{13}\vec{q}_3\| \\ &\le \|\vec{q}_1 - \varepsilon_{12}\vec{q}_2\| + \|\varepsilon_{12}\vec{q}_2 - \varepsilon_{13}\vec{q}_3\| \\ &= \|\vec{q}_1 - \varepsilon_{12}\vec{q}_2\| + \|\vec{q}_2 - \varepsilon_{23}\vec{q}_3\| \\ &= d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) + d_q(\vec{q}_2, \vec{q}_3) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

- $|E_1 - E_3| \le |E_1 - E_2| + |E_2 - E_3|$ (свойство модуля)
- $|L_1 - L_3| \le |L_1 - L_2| + |L_2 - L_3|$ (свойство модуля)
- $d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_3) \le d_q(\vec{q}_1, \vec{q}_2) + d_q(\vec{q}_2, \vec{q}_3)$ (см. лемму выше)

Поскольку все три компоненты удовлетворяют неравенству треугольника, а функция (1) представляет собой взвешенную евклидову норму, то D также удовлетворяет неравенству треугольника.

Таким образом, функция D удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. □

Заключение

Разработанная метрика представляет собой эффективный инструмент для решения широкого круга задач небесной механики, включая идентификацию метеорных потоков, классификацию орбит и поиск объектов общего происхождения. В отличие от критериев [1, 2], она лишена сингулярностей и применима ко всем типам орбит, включая круговые и экваториальные. По сравнению с метриками, предлагаемый подход обладает более простой вычислительной реализацией. Величины, входящие в её определение — энергия E, модуль момента импульса $|\mathbf{L}|$ и параметры ориентации — просто выражаются через стандартные кеплеровы элементы, что позволяет избежать сложных тригонометрических преобразований и вычислительных процедур, необходимых при использовании метрик [3, 6]. Таким образом, предложенная метрика является перспективным инструментом для исследований.

Список литературы

[1] *Southworth R. B., Hawkins G. S.* Statistics of meteor streams // Smithsonian Contributions to Astrophysics. — 1963. — Vol. 7. — P. 261–285.

[2] *Drummond J. D.* A test of comet and meteor shower associations // Icarus. — 1981. — Vol. 45. — P. 545–553.

[3] *Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 462, № 2. — P. 2275–2283.

[4] *Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N.* Natural metrics in the spaces of elliptic orbits // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2004. — Vol. 89, № 2. — P. 119–125.

[5] *Kholshevnikov K. V.* Metric Spaces of Keplerian Orbits // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2008. — Vol. 100, № 3. — P. 169–179.

[6] *Jopek T. J.* Remarks on the meteor orbital similarity D-criterion // Icarus. — 1993. — Vol. 106, № 2. — P. 603–607.