ХОЛОЭКСПО
наука и практика

Орбитальный угловой момент квантовых векторных оптических вихрей

Вашукевич Е.А , В. А. Леонов, Е. В. Малютина, Д. Д. Решетников, Т. Ю. Голубева

СПбГУ

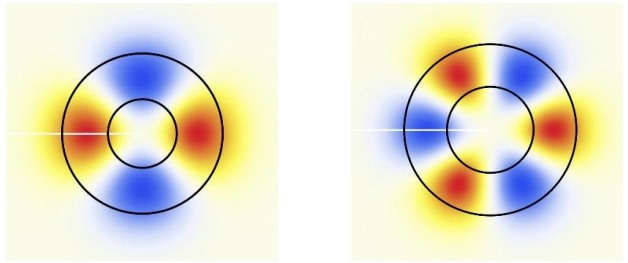
QUANTUM
OPTICS
LABORATORY

Мотивация и актуальность

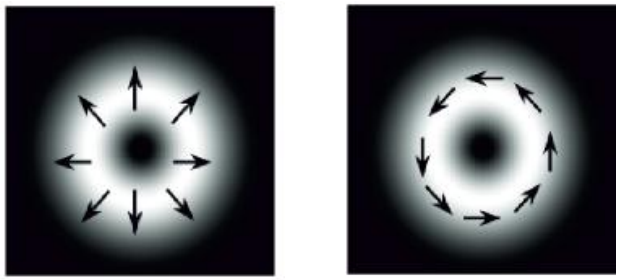
Квантовые технологии на основе многомодового света с орбитальным угловым моментом

- Высокоразмерное гильбертово пространство ОУМ-состояний позволяет реализовать более сложные квантовые алгоритмы с меньшим числом физических кубитов
- Состояния с ОУМ можно эффективно генерировать, преобразовывать и детектировать в классической оптике
- Преимущества в коммуникации с использованием с ОУМ — увеличение информационной ёмкости канала и криптостойкости

Скалярные и векторные вихри



Пространственно-**однородная** поляризация. Топологический заряд определяет только фазовую структуру пучка.



Пространственно-**неоднородная** поляризация. Направление вектора поляризации меняется в поперечной плоскости; наличие поляризационных сингулярностей.

Как рассчитывать орбитальный момент векторных полей? Как квантовать такие поля?

Barnett S. M., Allen L., Babiker M., Cameron R. P., Gilson C. R., Padgett M. J., Speirits F. C., Yao A. M. On the natures of the spin and orbital parts of optical angular momentum. Journal of Optics, 18(6), 064004, 2016

Как определить орбитальный и спиновый моменты?

Калибровочная неинвариантность

Полный момент калибровочно-инвариантен:

$$J_i^{inv} = \int \left(r_j \overline{E}_i B_j - r_j \overline{E}_j B_i \right) \, d\mathbf{r}$$

При разделении на орбитальную и спиновую часть появляется явная зависимость от векторного потенциала:

$$\mathcal{L}_i = \varepsilon_{ijk} r_j \overline{E_n} \partial_k A_n,$$
$$\mathcal{S}_i = \varepsilon_{ijk} \overline{E}_j A_k.$$

Нестандартные коммутационные соотношения

Канонические	Для электромагнитного поля
$[\hat{L}_k, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{kjn}\hat{L}_n$	$[\hat{L}_k, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{kjn}(\hat{L}_n + \hat{S}_n)$
$[\hat{S}_k, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{kjn}\hat{S}_n$	$[\hat{S}_k, \hat{S}_j] = 0$

Можно ли определить калибровочно-инвариантные моменты? Да!

K. Y. Bliokh, F. Nori. Transverse and longitudinal angular momenta of light. Physics Reports, 592, 1–38, 2015. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003

Разложение Гельмгольца и калибровочная инвариантность

Разложим векторный потенциал на бездивергентную (продольную) и безроторную (поперечную) части:

$$A_i = \mathcal{A}_i + \partial_i \psi$$

$$\partial_i \mathcal{A}_i = 0$$

Калибровочные преобразования влияют только на эту часть

Тогда через бездивергентную часть можно определить калибровочно-инвариантные моменты:

$$\mathcal{L}_i^{inv} \equiv \mathcal{L}_i\left[\mathcal{A}, \mathcal{A}\right] = -\varepsilon_{ijk} r_j \overline{(\partial_0 \mathcal{A}_n)} (\partial_k \mathcal{A}_n),$$

$$\mathcal{S}_i^{inv} \equiv \mathcal{S}_i\left[\mathcal{A}, \mathcal{A}\right] = -\varepsilon_{ijk} \mathcal{A}_k \overline{(\partial_0 \mathcal{A}_j)}.$$

Как найти продольную часть?

Уравнение Пуассона и формальное решение:

$$\partial_i A_i = \partial_j (\partial_j \psi)$$

$$\partial_s \psi = \partial_s \left(\{\partial_j \partial_j\}^{-1} (\partial_i A_i) \right)$$

В Фурье-пространстве:

$$\mathcal{F}[\partial_s \psi] = k_s \left(\frac{k_j \mathcal{F}[A_j]}{k^2} \right)$$

$$\mathcal{F}[A_j] = \int A_j e^{-ik_s r_s} d\mathbf{r}$$

Разложение Гельмгольца и калибровочная инвариантность

Рассмотрим потенциал вблизи перетяжки:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, z) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_\perp)e^{ik_0 z} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{k}) = \mathbf{A_0}(\mathbf{k}_\perp)\delta(k_0 - k_z)$$

Разложим в ряд по малой поперечной компоненте волнового вектора:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k_0^2 + k_\perp^2} = \frac{1}{k_0^2}\left(1 - \frac{k_\perp^2}{k_0^2} + \frac{k_\perp^4}{k_0^4} - \cdots\right)$$

Обратное преобразование Фурье

$$\{\partial_i \partial_i\}^{-1} = -\frac{1}{k_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\{\partial_j \partial_j\}^\perp}{k_0^2}\right)^n$$

Калибровочно-инвариатная часть векторного потенциала:

$$\mathcal{A}_s = A_s + \frac{1}{k_0^2}\partial_s \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\{\partial_j \partial_j\}^\perp}{k_0^2}\right)^n \partial_i A_i$$

Калибровочно-инвариантный орбитальный момент

$$\mathcal{L}_i^{inv} = \mathcal{L}_i\left[A, A\right] + \mathcal{L}_i\left[A, \partial_j \psi\right] + \mathcal{L}_i\left[\partial_s \psi, \partial_j \psi\right]$$

Но!

В полном моменте **отсутствуют** слагаемые, связанные только с скалярным потенциалом:

$$\mathcal{L}_i^{inv} = \mathcal{L}_i\left[A, A\right] + \mathcal{L}_i\left[A, \partial_j\psi\right] + \underline{\mathcal{L}_i\left[\partial_s\psi, \partial_j\psi\right]} \qquad \mathcal{J}_i^{inv} = \mathcal{J}_i\left[A, A\right] + \mathcal{J}_i\left[A, \partial_j\psi\right]$$

Введём поправку:

$$J_i^{inv} = \int \left(r_j \overline{E}_i B_j - r_j \overline{E}_j B_i\right) d\mathbf{r} = L_i + S_i - \oint_{\partial V} \varepsilon_{ijk}\, r_j\, E_l\, A_k\, n_l\, dS \neq 0$$

Калибровочно-инвариантый потенциал нелокален!

$$\mathcal{G}_i^{inv} \equiv \mathcal{G}_i\left[\mathcal{A}, \mathcal{A}\right] \equiv \varepsilon_{ijk}\overline{(\partial_0 \mathcal{A}_n)}(\partial_n(r_j \mathcal{A}_k))$$

$$\boxed{\mathcal{J}_i^{inv} = \mathcal{L}_i^{inv} + \mathcal{S}_i^{inv} - \mathcal{G}_i^{inv}}$$

Bliokh, K. Y., Dressel, J., and Nori, F. (2014). Conservation of the spin and orbital angular momenta in electromagnetism. New Journal of Physics, 16(9), 093037.

$$U_l(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho_0^2 l!}} e^{-\rho^2/\rho_0^2} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\rho_0}\right)^l$$

Расчёт для скалярных вихрей

Векторный потенциал скалярного вихревого поля:

$$\mathbf{A}^{sc}(\rho,\phi,z) = (\alpha_R \mathbf{e}_R + \alpha_L \mathbf{e}_L)\, U_l(\rho) e^{il\phi} e^{ik_0 z}$$

$$\left(\frac{\{\partial_j \partial_j\}^{\perp}}{k_0^2}\right)^n \partial_i A_i^{sc}(\rho,\phi,z) = \frac{(-4)^n\sqrt{2}}{k_0^{2n}} \left(-\frac{n!\; e^{2i\phi}\, \rho\, L_n^{(l+1)}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \alpha_R}{\rho_0^{2(n+1)}} + \frac{(n+1)!\; L_{n+1}^{(l-1)}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \alpha_L}{\rho\, \rho_0^{2n}} \right) U_l(\rho) e^{il\phi} e^{ik_0 z}$$

Параметр непараксиальности:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{k_0^2 \rho_0^2}$$

Тогда спиновый, орбитальный и полный моменты:

Знакопеременные слагаемые не совпадают!

$$S_z^{inv} \propto \sigma + \sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+|l|+n)!\xi^{n+1}}{|l|!}$$

$$L_z^{inv} \propto l + l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+|l|+n)!\xi^{n+1}}{|l|!} + (l+\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+|l|+2n)!(1+(2+|l|+2n)\xi)\xi^{2n+1}}{2|l|!}$$

Знакопостоянное слагаемое расходится!

$$J_z^{inv} \propto \frac{l+\sigma}{2} + \frac{l+\sigma}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(|l|+n)!\xi^n}{|l|!} + \frac{\sigma}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(|l|+n)!((1+n)(1+|l|+n)\xi+n)\xi^n}{|l|!}$$

Учёт поправки, восстанавливающей нормировку

Плотность поправки для скалярных вихрей:

$$G_z^{inv} \propto \frac{l+\sigma}{2} + \frac{l+\sigma}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(|l|+n)!(1+2(1+n+|l|)\xi)\xi^n}{|l|!} + \frac{\sigma}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(|l|+n)!((1+n)(1+|l|+n)\xi+n)\xi^n}{|l|!}$$

$$+\frac{l+\sigma}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+|l|+2n)!(1+(2+2n+|l|)\xi)\xi^{2n+1}}{|l|!}$$

Исправленные плотности моментов:

$$\tilde{L}_z^{inv} = \frac{l}{2}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(|l|+n)!\xi^n}{|l|!}\right)$$

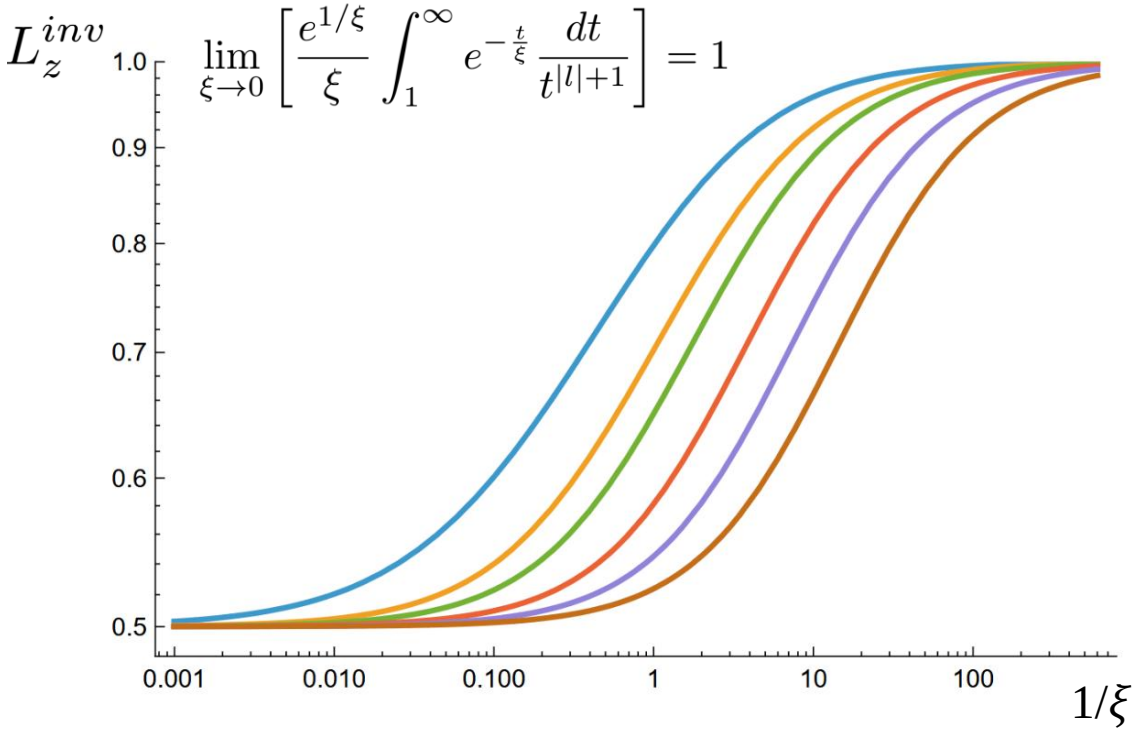
$$\tilde{S}_z^{inv} = \frac{\sigma}{2}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(|l|+n)!\xi^n}{|l|!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(|l|+n)!((1+n)(1+|l|+n)\xi+n)\xi^n}{|l|!}\right)$$

$$J_z^{inv} = \tilde{L}_z^{inv} + \tilde{S}_z^{inv}$$

Что делать с асимптотически сходящимися рядами?

Регуляризация асимптотических рядов

Применим Борелевскую регуляризацию. Надём такую функцию, к которой сходится сумма ряда при рассмотрении «оптимального» числа членов ряда, то есть при выборе любого конечно-малого значения ξ мы можем заметить, что ряд будет сходится к полученной функции вплоть до оптимального номера N , а после начинает расходится. И напротив, для произвольного конечного числа просуммированных членов ряда мы можем подобрать такое ξ, что сумма сойдётся к найденной функции:



Зависимость калибровочно инвариантного орбитального углового момента от обратного параметра непараксиальности для различных значений топологического заряда l

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(|l|+n)!\xi^n}{|l|!}\equiv\frac{e^{1/\xi}}{\xi}\int_1^\infty e^{-\frac{t}{\xi}}\frac{dt}{t^{|l|+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(|l|+n)!((1+n)(1+|l|+n)\xi+n)\xi^n}{|l|!}\equiv 0$$

Характерный поперечный размер моды увеличивается с ростом топологического заряда, и даже малые учитываемые поправки выводят нас из параксиального режима.

$$\lim_{\xi\to 0}\left[L_z^{inv}\right]=l$$
$$\lim_{\xi\to 0}\left[S_z^{inv}\right]=\sigma$$

Расчёт для векторных вихрей

Векторный потенциал скалярного вихревого поля:

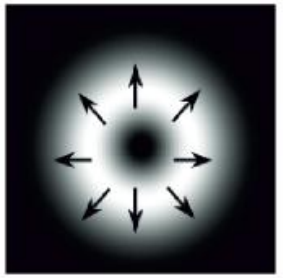
$$\mathbf{A}(\rho,\phi,z) = U_w(\rho)e^{ikz}\left(\alpha_w \mathbf{e}^w_{RP}(\phi) + \beta_w \mathbf{e}^w_{AP}(\phi)\right)$$

w– спиральный топологический заряд

Параксиальные поправки и их борелевские образы в случае рассмотренного векторного вихря идентичны таковым для скалярного.

Значения моментов в параксиальном пределе:

$$\lim_{\xi\to 0}\left[L_z^{inv}\right] = w\sigma$$
$$\lim_{\xi\to 0}\left[S_z^{inv}\right] = \sigma.$$





$$\mathbf{e}^w_{RP}(\phi) = \begin{pmatrix}\cos(w\phi)\\ \sin(w\phi)\\ 0\end{pmatrix} \quad \mathbf{e}^w_{AP}(\phi) = \begin{pmatrix}-\sin(w\phi)\\ \cos(w\phi)\\ 0\end{pmatrix}$$

- Орбитальный угловой момент пропорционален произведению спиральности σ на спиральный топологический заряд w. Эта связь является причиной выбора термина «спиральный» для w: он определяет вклад закрученности поляризации в орбитальный угловой момент.
- Орбитальный момент появляется исключительно из вращения базиса, тогда как дифференцирование по углу φ даёт нулевое значение углового момента. Таким образом, орбитальный момент таких полей порождается **связностью метрики**.

Расчёт для векторных вихрей

Двумодовое поле

$$\mathbf{A}(\rho,\phi,z) = \left(\mathbf{e}_R \alpha_R^{l_1} e^{il_1\phi} U_{l_1}(\rho) + \mathbf{e}_L \alpha_L^{l_2} e^{il_2\phi} U_{l_2}(\rho)\right)$$

$$\frac{l_1+l_2}{2} \equiv l \qquad \frac{l_1-l_2}{2} = w$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_z^{inv} &= l + w\sigma \\ S_z^{inv} &= \sigma. \end{aligned}}$$

- Орбитальный угловой момент векторного вихря распадается на две качественно различные части: **спин-зависимую** и **спин-независимую**.
- Вклад в момент дают не напрямую топологические заряды в ортогональных поляризацях, и **орбитальный момент не является средним** между моментами двух мод.
- Два топологических заряда l и w оказываются естественным образом связаны с двумя физически различными вкладами в орбитальный угловой момент.

Многомодовое поле

$$\mathbf{A} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_R^s \mathbf{e}_R U_s(\rho) e^{is\phi} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_L^l \mathbf{e}_R U_l(\rho) e^{il\phi}$$

$$\langle l_k \rangle = \frac{\sum_i l_i |\alpha_k^i|^2}{\sum_j |\alpha_k^j|^2}, k \in \{R, L\}$$

$$\sigma = \sum_i (|\alpha_R^i|^2 - |\alpha_L^i|^2)$$

$$l = \langle l_R \rangle + \langle l_L \rangle$$

$$w = \langle l_R \rangle - \langle l_L \rangle$$

Квантовое поле

При квантовании электромагнитного поля необходимо выделить набор ортогональных мод. Для выделения такого набора, разложим поле по скалярным вихревым полям в двух ортогональных поляризациях – это позволяет описать произвольную поляризационную и фазовую структуру векторного вихревого поля:

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_R^s \mathbf{e}_R U_s(\rho) e^{is\phi} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_L^l \mathbf{e}_R U_l(\rho) e^{il\phi}$$

Изменим порядок и для каждой моды с некоторым индексом l в левой поляризации подберем соответствующее слагаемое с индексом $-l$ в правой:

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\hat{a}_R^{-l} U_{-l}(\rho) e^{-il\phi} \mathbf{e}_R + \hat{a}_L^l U_l(\rho) e^{il\phi} \mathbf{e}_L \right)$$

С учетом $\mathbf{e}_{RP}^w(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(w\phi) \\ \sin(w\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_{AP}^w(\phi) = \begin{pmatrix} -\sin(w\phi) \\ \cos(w\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$, можно ввести переобозначение:

$$\left[\hat{a}_{\lambda'}^{w'}, \hat{a}_{\lambda}^{w\,\dagger}\right] = \delta_{\lambda',\lambda}\delta_{w',w}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \left[\hat{a}_{RP}^w \mathbf{e}_{RP}^w(\phi) + \hat{a}_{AP}^w(\phi) \mathbf{e}_{AP}^w \right] U_w$$

Операторы рождения и уничтожения в модах векторных оптических вихрей с аксиально-симметричным распределением поляризации:

$$\hat{a}_{RP}^w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_R^{-w} + \hat{a}_L^w \right)$$
$$\hat{a}_{AP}^w = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_R^{-w} - \hat{a}_L^w \right)$$

Заключение и выводы

- При помощи разложения Гельмгольца оказывается возможным построить калибровочно-инвариантные орбитальный и спиновый моменты
- Векторный потенциал оказывается нелокальным и расчёты требуют учета поправочного члена
- Метод позволяет проводить вычисления в любом порядке непараксиальности через регуляризацию рядов
- Для произвольного векторного поля две величины дают вклад в орбитальный момент: топологический заряд *l*, отвечающий за порядок фазовой сингулярности, и спиральный топологический заряд *w*, отвечающий за поляризационную сингулярность
- Квантование возможно по любому одному из топологических зарядов и по поляризации



$$L_z^{inv} = l + w\sigma$$
$$S_z^{inv} = \sigma.$$

QUANTUM OPTICS LABORATORY

https://www.quant-opt.ru/

Thanks for your attention!