Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.1, с. 3–46

УДК 519.83
ББК 22.18

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ КОНЕЧНЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АВТОМАТЫ В БЕСКОНЕЧНО ПОВТОРЯЮЩЕЙСЯ «ДИЛЕММЕ ЗАКЛЮЧЁННОГО»*

Ксения В. Русакова
Елена М. Парилина
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: st097257@student.spbu.ru, e.parilina@spbu.ru

В работе изучаются стратегии, представленные в виде конечных и вероятностных автоматов, в бесконечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного». Проведен сравнительный анализ стратегий, включая сравнение выигрышей игроков, получаемых при игре против конкретного автомата и против случайно выбранного автомата. Введены понятия частоты кооперации, полукооперации и некооперации, которые вычисляются для каждой пары рассматриваемых стратегий. Получены условия абсолютного равновесия для некоторых пар стратегий, ранее не изученных в литературе. Все полученные теоретические результаты проиллюстрированы на численных примерах.

Ключевые слова: повторяющиеся игры, дилемма заключенного, конечный автомат, частота кооперации, частота полукооперации.

Поступила в редакцию: 21.02.2026 *После доработки*: 08.03.2026 *Принята к публикации*: 23.03.2026

©2026 К.В. Русакова, Е.М. Парилина

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00581, https://rscf.ru/project/25-21-00581/

1. Введение

Игра «Дилемма заключенного» моделирует ситуацию конфликта между двумя игроками, когда каждый может либо сотрудничать с другим игроком, либо воспользоваться его доверием, чтобы, предав, получить больший выигрыш. Такие ситуации часто возникают в экономической среде и в общении людей. Выбор поведения игрока основывается на его готовности или неготовности довериться другому. При первой встрече только интуиция или впечатление об оппоненте могут повлиять на выбор того или иного поведения, но если общение между ними уже происходило ранее, то на выбор может повлиять история их взаимодействия, т.е. исходы предыдущего общения. Поэтому рассмотрим бесконечно повторяющуюся «Дилемму заключенного» в качестве модели социального поведения. При этом будем считать, что выигрыши участников конфликта со временем дисконтируются, т.е. уменьшаются, например, под влиянием инфляции [5, 6].

Известно, что при однократном взаимодействии игроков в рамках игры «Дилемма заключенного» равновесной является ситуация, когда оба игрока выбирают не сотрудничать (некооперативное поведение), и эта стратегия строго доминирует стратегию сотрудничать [6, 18]. Но если взаимодействие игроков будет повторяться, то между игроками может возникнуть доверие, приводящее к взаимовыгодному сотрудничеству. Это позволит увеличить выигрыши игроков по сравнению с ситуацией отсутствия сотрудничества при большом количестве повторений [17]. Главной задачей работы является изучение условий возникновения доверия между игроками, как на первых шагах игры, так и в долгосрочной перспективе.

Кооперативное поведение игроков в динамике, когда оно продолжается на протяжении конечного или бесконечного времени, требует выполнения дополнительных условий, чтобы сотрудничество не распалось со временем. Для этого можно вводить специальные схемы платежей, позволяющие поддержать кооперацию во времени, т.е. предотвратить отклонения игроков [3, 4, 21]. Кооперативное поведение игроков может быть стратегически поддержано, если оно реализуется в результате разыгрывания игроками ситуации абсолютного равновесия по Нэшу [3, 7, 14].

В статье рассматриваются стратегии в повторяющейся игре, представимые конечными автоматами и их расширением, вероятностными автоматами, как и в работах [15, 23]. Стратегии такого вида используют конечное количество информации, которое необходимо хранить для их реализации, они просты в описании и графическом представлении. Подробно изучается несколько стратегий и показывается важность выбора кооперации (стратегии сотрудничать) для долгосрочного сотрудничества при маленьких и больших значениях дисконтирующего фактора, а также влияние первых и нескольких последующих шагов на выигрыш и возникновение кооперации. Рассматриваются как ранее известные стратегии [6, 8, 13, 23], так и три новые стратегии, представленные в данной работе, являющиеся модификациями уже известных, для инициирования успешного сотрудничества с другими.

В 1980 году Роберт Аксельрод провел турнир по конечно повторяющейся «Дилемме заключенного», в котором каждая предложенная стратегия встречалась со всеми остальными. Победителем по общему числу очков стала стратегия *Tit-for-Tat* (*TFT*). О результатах турнира Аксельрод написал книгу [8]. Впоследствии многими авторами были предложены новые стратегии, одной из которых является стратегия *Pavlov*, впервые описанная в статье [20]. В работе [16] игроки меняются партнерами по игре, как это было в турнире Аксельрода, но у игроков есть информация о противниках, содержащаяся в маркерах (отметках), расставляемых честным механизмом. Авторы обобщили народную теорему на рассматриваемую модель игры. Часто научным интересом многих авторов в сфере повторяющихся игр была эволюционная устойчивость стратегий, основным фактором которой является выживаемость стратегии в популяции при естественном отборе продолжительностью в несколько поколений. Один из авторов стратегии *Pavlov* в [23] пришел к выводу, что эта и еще несколько стратегий (в том числе *TFT*) не обладают свойством эволюционной устойчивости, и сделал вывод, что большую роль во взаимодействии стратегий играют возможные ошибки при выполнении хода и неверном толковании действий противника. В работе [13] рассматриваются мутации стратегий в популяции и теория косвенных вторжений в популяцию тех стратегий, которых изначально в популяции не было. Стратегии с ограниченной рациональностью были представлены конечными автоматами в статье [15], и с помощью генетического алгоритма Холланда были смоделированы мутации стратегий преобразованием одних конечных автоматов в другие. В работе [1] предложены стратегии для «игры монахов», которые состоят в двойственном поведении игроков, а именно рациональное поведение, основанное на долгосрочной выгоде, и импульсивное. Представленные в этой статье стратегии образуют такое абсолютное равновесие, что рациональная часть навязывает самоконтроль на импульсивную таким образом, что монахам будет выгодно кооперативное поведение.

Сначала в нашей работе вычисляются выигрыши игроков при попарном взаимодействии всех рассматриваемых автоматов. Главной закономерностью, которую можно заметить из формул выигрышей игроков, является такая, что стратегии, которые предлагают сотрудничать и не предают первыми, будут сотрудничать друг с другом на каждом шаге игры, что дает более высокий выигрыш во всей игре, чем выигрыш в ситуации абсолютного равновесия по Нэшу, которое образуют две стратегии, всегда выбирающие предательство.

Приведены два примера, различающиеся только значением дисконтирующего фактора. Ожидаемо, при более низком значении фактора больший вес имеют несколько первых шагов, но при приближении его к единице большее значение будет иметь сотрудничество на более длительном промежутке взаимодействия.

Для новых стратегий, представленных в работе, найдены условия на параметры игры для того, чтобы пара таких стратегий образовывала абсолютное равновесие по Нэшу — ситуацию, при которой ни одному игроку не выгодно индивидуально отклоняться ни на каком шаге игры. Не любое равновесие по Нэшу является абсолютным равновесием, поэтому это является весомым критерием для реализации такой стратегии поведения в бесконечно повторяющихся играх. Доказательство схоже с доказательствами народных теорем [17, 25].

В статье введено понятие частоты кооперации. Это относительное количество шагов, в которых реализовалась пара кооперативных стратегий, т.е. когда оба игрока на данном шаге выбирают сотрудничать среди всех реализаций в игре. Особый интерес представляют стратегии, частота кооперации при которых равна единице, что означает, что через конечное количество шагов игроки перешли к взаимному сотрудничеству на каждом шаге. Посчитана частота кооперации для каждой пары стратегий, рассмотренных в работе. Заметим, что существуют стратегии, которые имеют частоту кооперации больше нуля, но меньше единицы, а значит стратегии поведения входят в цикл повторения последовательности ситуаций в одношаговых играх.

Еще одним аспектом выбора «лучшей» стратегии стал вопрос нахождения стратегии, которая дает выигрыш больший, чем получает соперник, выбирающий какую-то другую стратегию. В бесконечно разыгрываемой «Дилемме заключенного» такой принцип отличается от максимизации своего выигрыша и может служить критерием выбора стратегии.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 определяется повторяющаяся игра. Описание рассматриваемых стратегий поведения в повторяющейся игре приводится в разделе 3. Сравнительный анализ памяти для реализации стратегии и выигрышей игроков, а также два численных примера представлены в разделе 4. Условия абсолютного равновесия для некоторых ситуаций демонстрируются в разделе 5. Далее, в разделе 6, проводится сравнение выигрышей игроков в сложившихся ситуациях при разных значениях дисконтирующего фактора. В разделе 7 вводятся понятия частоты кооперации, полукооперации и некооперации, их значения вычисляются для каждой пары стратегий. В разделе 8 дается заключение к статье. В приложении приводятся дополнительные вычисления, формулы выигрышей игроков, значения частот полукооперации и некооперации, а также дополнительные сведения о двух предложенных в разделе 4 примерах.

2. Постановка задачи

Рассмотрим биматричную игру «Дилемма заключенного», которая задается матрицей выигрышей [5]:

	C	D
C	(a, a)	(c, b)
D	(b, c)	(d, d)

В этой игре оба игрока имеют две стратегии: C — сотрудничать, D — предать. Обозначим множество стратегий любого игрока через $X = \{C, D\}$. При этом, параметры игры $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенствам: $c < d < a < b$.

Определение 2.1. *Равновесием по Нэшу в игре двух лиц с множеством стратегий X у каждого игрока и функциями выигрыша первого и второго игроков K_1 и K_2, соответственно, называется ситуация (x^*, y^*), $x^* \in X$, $y^* \in X$, такая, что*

$$K_1(x^*, y^*) \geq K_1(x, y^*) \text{ и } K_2(x^*, y^*) \geq K_2(x^*, y) \quad \forall x, y \in X,$$

где $K_j(x, y)$ — выигрыш игрока j в ситуации (x, y).

В игре «Дилемма заключенного» существует единственное равновесие по Нэшу — ситуация (D, D).

Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру «Дилемма заключенного», для которой одношаговая игра будет называться базовой.

Определение 2.2. [6] *Бесконечно повторяющейся игрой G_1 базовой игры называется игра, в которой базовая игра разыгрывается бесконечное количество раз, начиная с шага 1, и перед началом каждого розыгрыша игрокам известны исходы всех предыдущих розыгрышей, т.е. известны стратегии, выбранные игроками, и полученные ими выигрыши на предыдущих шагах.*

Выигрыш игрока j в бесконечно повторяющейся игре определяется как дисконтированная сумма выигрышей, полученных игроками в базовой игре, разыгрываемой на каждом шаге:

$$E_j(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} K_j(x_t, y_t), \tag{2.1}$$

где $0 < \delta < 1$ — коэффициент дисконтирования, одинаковый для обоих игроков, $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ — стратегии поведения игроков 1 и 2 соответственно в бесконечно повторяющейся игре. Стратегии поведения $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ определяют поведение игрока на текущем шаге t, т.е. стратегии x_t, y_t соответственно, в зависимости от истории данного шага.

Определение 2.3. [10] *Историей $h(t)$ шага t называется упорядоченное множество ситуаций или наборов стратегий обоих игроков,* *разыгрываемых на шагах от 1 до $t-1$ в игре G_1, т.е.*

$$h(t) = \{(1, x_1, y_1), \ldots, (t-1, x_{t-1}, y_{t-1})\},$$

где $x_\tau, y_\tau \in X$, $\tau = 1, \ldots, t-1$, и x_τ, y_τ — стратегии первого и второго игрока на шаге τ соответственно. Тогда стратегией поведения называется функция $\eta : \{t\} \times \cup_{t=1}^{\infty} H(t) \to X$, где $H(t) = \{h(t)\}$ — множество всех возможных историй шага t.

Ниже будут представлены различные стратегии поведения в повторяющейся игре G_1, которые мы будем сравнивать, в том числе, по «объему памяти», необходимой для её реализации. *Памятью* назовем количество k бинарных переменных, необходимых для реализации стратегии поведения при условии, что номер шага является всеобщим знанием и не требует дополнительной памяти. Иными словами, для конкретной стратегии поведения требуется k ячеек, в которые можно на каждом шаге записывать либо 0, либо 1. Для многих стратегий поведения память представляет собой необходимое количество шагов из истории $h(t)$ текущего шага t, т.е. стратегия η на шаге t зависит только от набора стратегий $\{(t_1, x_{t_1}, y_{t_1}), \ldots, (t_k, x_{t_k}, y_{t_k})\}$, где $t_\tau, \tau = \overline{1, k}$ – номера шагов, информация о которых требуется для определения стратегии.

Определение 2.4. *Подыгра G_t повторяющейся игры G_1 — бесконечно повторяющаяся игра базовой игры, начинающаяся с шага t.*

Определение 2.5. [5] *Равновесие по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре G_1 называется абсолютным равновесием по Нэшу (оно же равновесие, совершенное по подыграм; совершенное подыгровое равновесие* [6], *subgame perfect Nash equilibrium* [17]*), если в любой её подыгре усечение соответствующих стратегий игроков образуют равновесие по Нэшу.*

Определение 2.6. [17] *Одношаговым отклонением (one-shot deviation) для игрока j от стратегии η называется такая стратегия $\hat{\eta} \neq \eta$, что существует только одна история $\hat{h}(t) \in H(t)$ такая, что для любой другой истории $h(\tau) \neq \hat{h}(t)$ выполнено: $\hat{\eta}(\tau, h(\tau)) = \eta(\tau, h(\tau))$.*

Следующее утверждение известно как принцип одношагового отклонения.

Утверждение 2.1. [17] *Пара стратегий поведения образует абсолютное равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда у игроков не существует выгодных одношаговых отклонений от этих стратегий.*

Заметим, что в теории повторяющихся игр часто вместо дисконтированной суммы (2.1) выигрыши игроков вычисляются по формуле нормализованной дисконтированной суммы [6, 17]:

$$\overline{E}_j(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} K_j(x_t, y_t),$$

которая показывает средний за шаг выигрыш, что позволяет сравнивать эти выигрыши с выигрышами в базовой игре.

Приведем известный результат об условиях существования абсолютного равновесия в бесконечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного», известный как народная теорема (см. теорему 2.1). Сначала приведем несколько вспомогательных определений.

Определение 2.7. *Набор выигрышей (u_1, u_2) называется достижимым в игре, если он является выпуклой комбинацией выигрышей игроков в ситуациях в чистых стратегиях.*

Определение 2.8. *Минимаксный выигрыш игрока 1 и 2 равен*

$$\underline{u}_1 = \min_{y \in X} \max_{x \in X} K_1(x, y), \quad \underline{u}_2 = \min_{x \in X} \max_{y \in X} K_2(x, y),$$

соответственно.

Теорема 2.1. [17] *Пусть (u_1, u_2) — достижимый вектор выигрышей. Если $u_1 > \underline{u}_1$ и $u_2 > \underline{u}_2$, то существует коэффициент дисконтирования $\overline{\delta} < 1$, такой, что для всех $\delta \in [\overline{\delta}, 1)$ в бесконечно повторяющейся игре G_1 существует абсолютное равновесие по Нэшу, в котором нормализованные дисконтированные выигрыши игроков равны (u_1, u_2).*

3. Стратегии в бесконечно повторяющейся игре, представленные в виде автоматов

В данном разделе мы опишем стратегии поведения, которые являются конечными или вероятностными автоматами. Напомним определение автомата (конечного и вероятностного).

Определение 3.1. [15] *Конечным автоматом (finite automata или finite-state machine) называется система* $\{W, w_0, \lambda, \tau\}$, *где* W *— конечное множество состояний,* w_0 *— начальное состояние,* $\lambda : W \to X$ *— функция выходов (сопоставляет текущему состоянию действие игрока в текущем розыгрыше),* $\tau : W \times X \to W$ *— функция переходов (паре, состоящей из состояния и действия противника на предыдущем шаге, ставит в соответствие следующее состояние).*

Определение 3.2. [24] *Вероятностный автомат (probability automaton) — обобщение конечного автомата, где вместо начального состояния задается вектор* $(p_1, \ldots p_{|W|})$ *вероятностей реализации каждого состояния как начального,* $\sum\limits_{i=1}^{|W|} p_i = 1$, *и переход из одного состояния в другое происходит в соответствии с заданным вероятностным распределением.*

В дальнейшем будем использовать сокращенное название КА для конечного автомата и ВА для вероятностного автомата.

Ранее формулой (2.1) были определены выигрыши игроков в бесконечно повторяющейся игре. Выигрыши первого и второго игрока при встрече стратегии, представимой ВА, с любой другой стратегией представляют собой дисконтированную сумму математических ожиданий выигрышей в базовой игре:

$$E_j(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} EK_j(\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}), \tag{3.1}$$

где $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$ — случайные величины, реализация которых представляет собой действие игроков 1 и 2 на шаге t, где $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$ определяются стратегиями поведения $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ соответственно; $EK_j(\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})$ — математическое ожидание выигрыша игрока j в базовой игре.

Рассмотрим двенадцать стратегий $S_1, \ldots, S_{12}$ поведения в бесконечно повторяющейся игре с базовой игрой «Дилемма заключенного», заданных в виде конечных или вероятностных автоматов. Ниже для каждой стратегии мы приведем название, описание, графическое представление соответствующего автомата и информацию о требуемой памяти при ее реализации. Стратегию поведения будем описывать для первого игрока, и соответственно, второго игрока будем называть противником. Стратегию поведения для второго игрока можно получить заменой x_i на y_i и y_i на x_i в описании функции η. При описании стратегии будем приводить значение памяти k для определения значения стратегии на каждом шаге бесконечно повторяющейся игры.

1. S_1 — *AllC* [13] (рис. 1): стратегия предписывает всегда сотрудничать:

$$\eta_1(t, h(t)) \equiv C,$$

при этом $k = 0$, т.е. она не требует информации о предыдущих шагах.

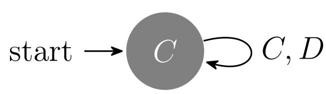

Рисунок 1. КА стратегии S_1

2. S_2 — *AllD* [13] (рис. 2): стратегия предписывает всегда предавать:

$$\eta_2(t, h(t)) \equiv D,$$

при этом $k = 0$, т.е. не требуется информации о предыдущих шагах.

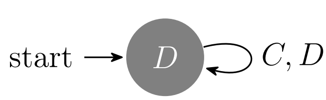

Рисунок 2. КА стратегии S_2

3. S_3 — *Grim trigger, GRIM* [6] (рис. 3): стратегия предполагает сотрудничать, пока тебя не предали, и, как только предали, со следующего шага всегда предавать:

$$\eta_3(t,h(t)) = \begin{cases} C, & \text{если } h(t) = \{(x_i,y_i)_{i=1}^{t-1} \,|\, y_i = C, \forall i = \overline{1,t-1}\} \\ & \text{или } t = 1, \\ D, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этом, $k = 1$, т.к. требует знания, сотрудничал ли противник на всех предыдущих шагах или нет. Если предательства не было, то в ячейке будет храниться «0» и КА будет выбирать C, как только произойдет предательство, в ячейку записывается «1» и с этого момента КА будет выбирать D.

Стратегия предполагает немедленное наказание за отказ противника от сотрудничества, при этом не предполагает «прощения», т.е. наказание длится бесконечно после наблюдаемого отклонения.

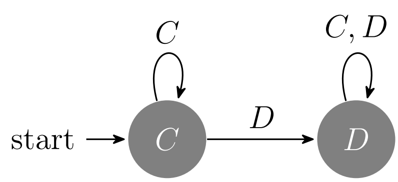

Рисунок 3. КА стратегии S_3

4. S_4 — *TFT, Tit-for-Tat или «око-за-око»* [23] (рис. 4): стратегия предписывает на первом шаге сотрудничать и на остальных шагах повторять действие противника на предыдущем шаге, т.е.

$$\eta_4(t,h(t)) = \begin{cases} C, & t = 1 \text{ и } \left\{t \geq 2 : h(t) = \{(x_i,y_i)_{i=1}^{t-1} | y_{t-1} = C\}\right\}, \\ D, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Память равна $k = 1$, т.к. требует только знание о действии соперника на предыдущем шаге, присваиваем действие C, если сохраненное в памяти значение равно «0» и D, если оно равно «1». На каждом шаге информация, хранящаяся в единственной ячейке, обновляется.

Замечание 3.1. Аналогичное обозначение для действий C и D будет использоваться в других стратегиях поведения для всех бинарных переменных, которые хранят информацию о конкретном шаге из истории.

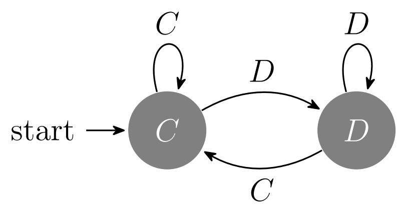

Рисунок 4. КА стратегии S_4

Стратегия *TFT* предполагает немедленное наказание за отказ противника от сотрудничества, при этом за одно предательство наказывает только один раз и, если противник возвращается к сотрудничеству, *TFT* тоже сотрудничает.

5. S_5 — *Tit-for-Two-Tats* (*TF2T*) [8] (рис. 5): на первых двух шагах предписывает сотрудничать, а на остальных — предавать, только если противник предал два раза подряд:

$$\eta_5(t, h(t)) = \begin{cases} C, & t \in \{1,2\} \cup (t \geq 3 \cap h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | \\ & y_{t-2} = C \text{ или } y_{t-1} = C\}) \\ D, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Память равна $k = 2$, т.к. требуется информация о действиях противника на двух предыдущих шагах.

Стратегия *TF2T* предполагает прощение предательства противника в первый раз (тем самым стратегия предполагает, что предательство было совершено по ошибке).

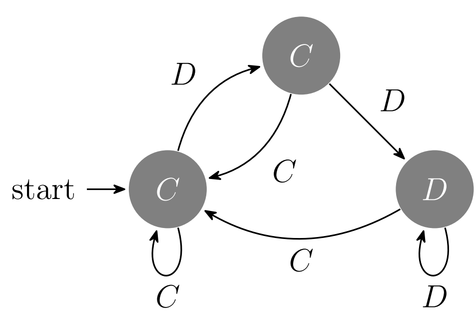

Рисунок 5. КА стратегии S_5

6. S_6 — *Pavlov* [20, 23] (рис. 6): на первом шаге стратегия предписывает сотрудничать и, если противник предал на предыдущем

шаге, то меняет свое предыдущее действие на противоположное:

$$\eta_6(t, h(t)) = \begin{cases} C, & t = 1 \text{ и } \Big\{t \geq 2 : (h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | x_{t-1} = C, \\ & y_{t-1} = C\} \text{ или } h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | x_{t-1} = D, \\ & y_{t-1} = D\})\Big\} \\ D, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Память равна $k = 2$, т.к. требуется информация о последнем шаге, но, в отличие от остальных стратегий, требуется знание не только стратегии противника, но и своей собственной стратегии.

Стратегия поведения основывается на идее не изменять свою стратегию, если она принесла при последнем разыгрывании большой выигрыш, т.е. a или b, и менять ее при маленьком выигрыше c или d.

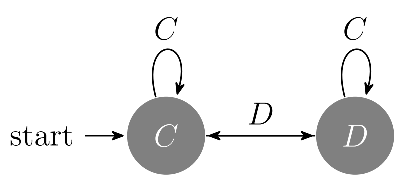

Рисунок 6. КА стратегии S_6

7. S_7 — *Детектив 1.0* (на базе стратегии из [8]) (рис. 7): первые четыре действия заданы: C, D, C, C, и если противник хоть раз предал за первые четыре шага, то стратегия предписывает действовать в соответствии с TFT (эта стратегия применяется в соответствии с описанием в п. 4 за исключением шага 1, на котором TFT предписывает сотрудничать). Если за первые четыре шага противник ни разу не предал, то далее S_7 предписывает действовать в соответствии с $AllD$:

$$\eta_7(t, h(t)) = \begin{cases} C, & t \in \{1, 3, 4\} \text{ и } (t \geq 5 : h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | \\ & (\exists i \in [1, 4] : y_i = D) \text{ и } y_{t-1} = C\}) \\ D, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Память равна $k = 2$, т.к. первая ячейка хранит информацию о наличии предательства со стороны противника на первых четырех шагах аналогично п. 3 и не изменяется после четвертого шага, а вторая хранит информацию о последнем шаге аналогично п. 4. Причем, если первая бинарная переменная равна «0» на шагах $t \geq 5$, то стратегия поведения действует как *AllD* и знание информации на последнем шаге не требуется, и поэтому вторая переменная не хранит никакой полезной информации.

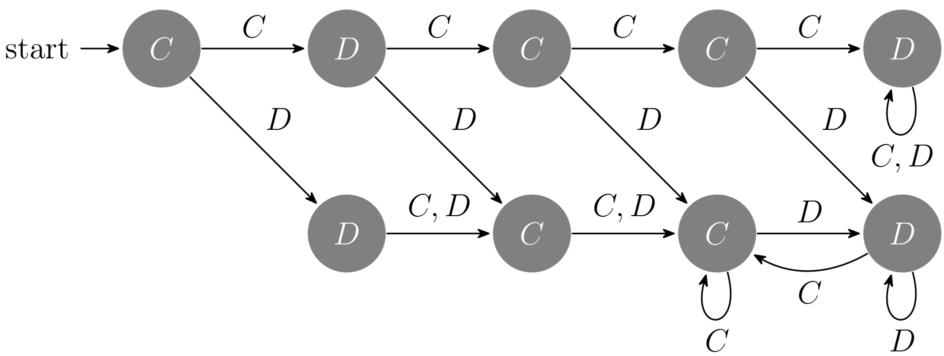

Рисунок 7. КА стратегии S_7

Если противник ни разу не предал *Детектива 1.0* за время проведения эксперимента на первых четырех шагах и не наказал за предательство на втором шаге, то *Детектив 1.0* «делает вывод», что на следующих шагах игрок сможет безнаказанно предавать и получать b, т.к. противник будет его прощать.

8. S_8 — *Детектив 1.1* (рис. 8): модификация стратегии S_7 с учетом перехода к *TFT* сразу после предательства противника (причем, если противник предал на втором или на третьем шаге, то следующим действием *Детектива 1.1* будет сотрудничество, чтобы избежать бесконечного повторения предательства при игре против детективов и цикла из $(D, C) - (C, D) - (D, C) \ldots$ при игре против *TFT*), т.е.

$$\eta_8(t,h(t))=\begin{cases} C, & t=1 \text{ или } (t=3:(h(t)=\{(x_i,y_i)_{i=1}^2|y_1=C\} \\ & \text{ или } h(t)=\{(x_i,y_i)_{i=1}^2|y_1=D,y_2=C\})) \text{ или} \\ & (t=4:(h(t)=\{(x_i,y_i)_{i=1}^3|y_1=C,y_2=C\} \text{ или} \\ & h(t)=\{(x_i,y_i)_{i=1}^3|y_1=C,y_2=D,y_3=C\} \text{ или} \\ & h(t)=\{(x_i,y_i)_{i=1}^3|y_1=D,y_3=C\})) \text{ или} \\ & (t\geq 5:h(t)=\{(x_i,y_i)_{i=1}^{t-1}|\exists i\in\{1,\dots,4\}: \\ & y_i=D \text{ и } y_{t-1}=C\}) \\ D, & \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Память равна $k=2$, аналогично п. 7.

Приведем описание конечного автомата (КА) стратегии S_8: множество состояний $W=\{C_1,C_2,C_3,C_4,D_1,D_2,D_3\}$, $|W|=7$; начальное состояние $w_0=C_1$; функция выходов:

$$\lambda(w)=\begin{cases} C, & w=C_i, i=\overline{1,4}; \\ D, & w=D_j, j=\overline{1,3}; \end{cases}$$

функция переходов:

$$\tau(w,x)=\begin{cases} C_2, & (w,x)=(D_1,C) \\ C_3, & (w,x)=(C_2,C) \\ C_4, & (w,x)=\{(C_2,D),(D_1,D),(C_4,C),(D_3,C)\} \\ D_1, & (w,x)=(C_1,C) \\ D_2, & (w,x)=\{(C_3,C),(D_2,C),(D_2,D)\} \\ D_3, & (w,x)=\{(C_1,D),(C_3,D),(C_4,D),(D_3,D)\}. \end{cases}$$

Замечание 3.2. КА для других стратегий описываются аналогично, поэтому мы опустим это описание для каждой стратегии для экономии места. В графах, изображающих автоматы для других стратегий, элементы множества состояний заменены соответствующими им элементами множества $X=\{C,D\}$, т.е. действиями игрока в текущем розыгрыше.

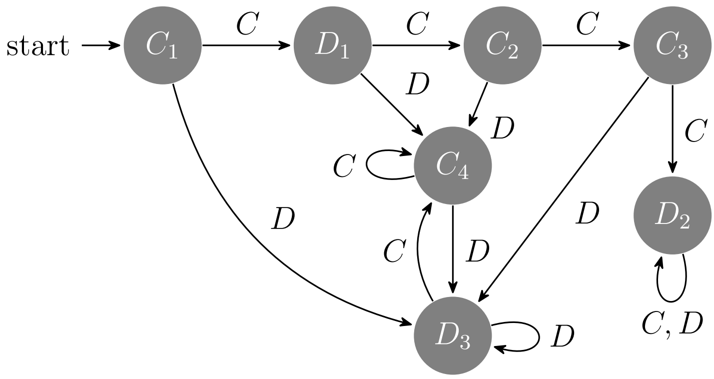

Рисунок 8. КА стратегии S_8

9. S_9 — *Детектив 2.0* (рис. 9): первые пять действий заданы: C, D, D, C, C. Если противник хоть раз предал на первых пяти шагах, то стратегия предписывает действовать как при *TF2T* (исключая первые два шага из этой стратегии). Если противник ни разу не предал на первых пяти шагах, то стратегия предписывает действовать в соответствии с *AllD*, т.е.

$$\eta_9(t, h(t)) = \begin{cases} C, & t \in \{1,4,5\} \text{ и } (t \geq 6 : h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | \\ & \exists i \in \{1,5\} : y_i = D \text{ и } (y_{t-1} = C \text{ или} \\ & y_{t-2} = C)\}), \\ D, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

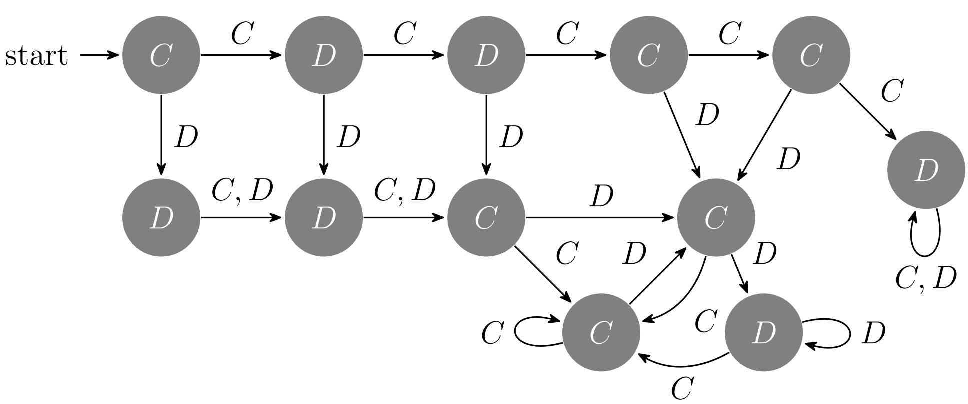

Рисунок 9. КА стратегии S_9

Память равна $k = 3$, т.к. требуется информация о наличии предательства со стороны противника на первых пяти и двух предшествующих шагах.

Стратегия *Детектив 2.0* смоделирована таким образом, что она учитывает, что может играть с *TF2T*, и предает два раза подряд, чтобы избежать бесконечного повторения предательства с этим противником.

10. S_{10} — *50/50* или *Random* [8] (рис. 10): стратегия предписывает сотрудничать и предавать с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо от истории шага, т.е.

$$\eta_{10}(t, h(t)) = \begin{cases} C, & \text{если } \xi = 1, \\ D, & \text{если } \xi = 0, \end{cases}$$

где ξ — дискретная случайная величина, подчиняющаяся распределению Бернулли, т.е. принимающая значения 1 или 0 с вероятностями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно. Для этой стратегии память равна $k = 0$, т.к. не требуется знания о действиях противника на предыдущих шагах.

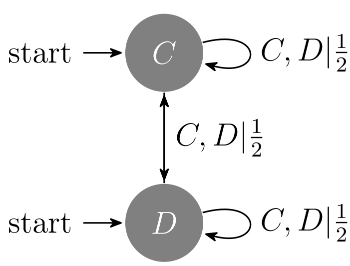

Рисунок 10. КА стратегии S_{10}

Автомат, описывающий эту стратегию, является вероятностным. Начальное состояние представляет собой вероятностное распределение на состояниях C и D с вероятностями $\frac{1}{2}$. Вероятности перейти из состояния C или D в состояния C или D равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно.

11. S_{11} — *Suspicious Tit-for-Tat* (*STFT*) или «*стратегия превентивного удара*» [13] (рис. 11): на первом шаге предписывает

предавать, на последующих шагах — повторять действие противника, т.е.

$$\eta_{11}(t, h(t)) = \begin{cases} D, & t = 1 \text{ или } (t \geq 2 : h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | y_{t-1} = D\}), \\ C, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при этом память равна $k = 1$, т.к. требуется информация о действии противника на предыдущем шаге.

Эта стратегия является модификацией стратегии TFT, за исключением первого шага, на котором данная стратегия предает, как бы предупреждая соперника о последствиях предательства.

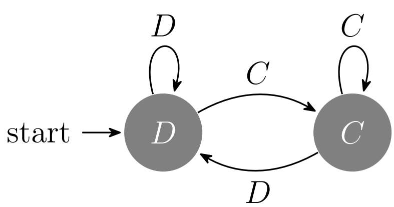

Рисунок 11. КА стратегии S_{11}

12. S_{12} — *Скользкий*[1] (рис. 12): на первом шаге предписывает сотрудничать, на последующих — выбирать действие, противоположное действию противника:

$$\eta_{12}(t, h(t)) = \begin{cases} C, & t = 1 \text{ и } (t \geq 2 : h(t) = \{(x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | y_{t-1} = D\}), \\ D, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и память равна $k = 1$, т.к. требуется информация о действии соперника на предыдущем шаге.

Когда игрок, использующий эту стратегию, видит, что на предыдущем шаге противник сотрудничает, то, предполагая, что противник на данном шаге поступит также, хочет воспользоваться шансом и предать его. При этом, стратегия предписывает сотрудничество, если противник предал на предыдущем шаге.

[1]В статье [11] упоминается данная стратегия под названием anti-tit-for-tat, где она изучается в контексте игры против стратегии tit-for-tat для поддержания устойчивой кооперации.

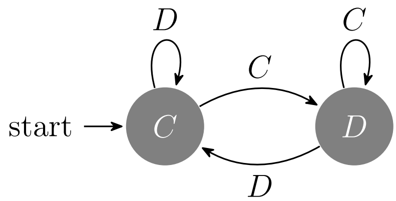

Рисунок 12. КА стратегии S_{12}

Замечание 3.3. В данной работе впервые предложены стратегии S_8, S_9 и S_{12}. Стратегии S_8 и S_9 интересны тем, что, как и S_7, позволяют изучить поведение своего соперника, но при этом являются модифицированными по структуре по сравнению с S_7 для более эффективного взаимодействия с другими стратегиями. Стратегия S_{12} интересна тем, что принципы, по которым игрок выбирает свое действие в зависимости от предыдущего действия противника, противоположны принципам стратегии *TFT*.

4. Сравнительный анализ стратегий в бесконечно повторяющейся игре

4.1. Память

В табл. 2 представлена память, необходимая автомату, определяющему ту или иную стратегию, для ее реализации. Как видно из табл. 2, стратегия S_9 требует большую память по сравнению с другими стратегиями, она равна 3 для этой стратегии. В следующем разделе мы исследуем, насколько эта стратегия, среди прочих других, является предпочтительнее для игрока с точки зрения выигрыша. Наименьшую память требуют стратегии S_1, S_2 и S_{10}, для них она равна нулю. Но, как покажет наше исследование ниже, эти стратегии не являются наиболее выигрышными при встрече со случайной стратегией из предложенных двенадцати.

Таблица 2. Память k для стратегий $S_1, \ldots, S_{12}$

S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
k	0	0	1	1	2	2	2	2	3	0	1	1

4.2. Выигрыши игроков

Смоделируем ситуации, в которых попарно встречаются игроки, использующие стратегии, определенные автоматами $S_1, \dots, S_{12}$. Покажем на примере следующей леммы вычисление математических ожиданий выигрышей игроков в наиболее интересных (с нашей точки зрения) случаях.

Лемма 4.1. *Выигрыши игроков в ситуациях, когда игроками разыгрываются пары стратегий S_{10} и S_3, S_{10} и S_8, вычисляются по формулам:*

$$E(S_{10}, S_3) = \Big(\frac{a+b}{2-\delta} + \frac{(c+d)\delta}{2(1-\delta)(2-\delta)}, \frac{a+c}{2-\delta} + \frac{(b+d)\delta}{2(1-\delta)(2-\delta)}\Big),$$

$$E(S_{10}, S_8) = (a+b, a+c)\Big(\frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^3}{16}\Big) + \Big(c+d, b+d\Big)\frac{\delta}{4}$$
$$+ E_{TFT_C}\Big(\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{8}\Big) + E_{TFT_D}\Big(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^4}{16}\Big) + E_{AllD}\frac{\delta^4}{16},$$

где $E_{TFT_C} = E(S_{10}, S_4), E_{AllD} = E(S_{10}, S_2), E_{TFT_D} = E(S_{10}, S_{11}),$

это формулы (8.22) *и* (8.26) *соответственно, и $E(S_{10}, S_4)$, $E(S_{10}, S_2)$, $E(S_{10}, S_{11})$ вычисляются по формулам* (8.23), (8.21), (8.35) *соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим пару стратегий S_{10} и S_3. На первом шаге с вероятностью 0.5 автомат S_{10} выберет C и с вероятностью 0.5 — D, поэтому на втором шаге вероятность того, что S_3 будет играть D в ответ на предательство также будет 0.5. Вероятность того, что S_3 будет играть C на шаге t будет равна $(0.5)^t$, а играть D — $(1-(0.5)^t)$. С учетом дисконтирующего фактора δ выигрыш автоматов будет следующим:

$$E(S_{10}, S_3) = \bigg(\frac{(a,a)}{2} + \frac{(b,c)}{2}\bigg) + \delta\bigg(\frac{(a,a)}{4} + \frac{(b,c)}{4} + \frac{(c,b)}{4} + \frac{(d,d)}{4}\bigg)$$
$$+ \delta^2\bigg(\frac{(a,a)}{8} + \frac{(b,c)}{8} + \frac{3(c,b)}{8} + \frac{3(d,d)}{8}\bigg)$$
$$+ \delta^3\bigg(\frac{(a,a)}{16} + \frac{(b,c)}{16} + \frac{7(c,b)}{16} + \frac{7(d,d)}{16}\bigg) + \dots$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty}\left((a+b,a+c)\frac{\delta^{t-1}}{2^{t-1}} + (c+d,b+d)\frac{\delta^{t-1}(2^{t-1}-1)}{2^{t-1}}\right)\\
&= \frac{(a+b,a+c)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{2^n} + \frac{(c+d,b+d)}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n 2^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{2^n}\right)\\
&= \frac{(a+b,a+c)}{2(1-\frac{\delta}{2})} + \frac{(c+d,b+d)}{2}\left(\frac{1}{1-\delta} - \frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}\right)\\
&= \frac{(a+b,a+c)}{2-\delta} + \frac{(c+d,b+d)\delta}{2(1-\delta)(2-\delta)}.
\end{aligned}
$$

При нахождении выигрыша был использован известный из курса математического анализа факт, что если ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i$ и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} v_i$ сходятся, то и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ сходится [2].

Рассмотрим пару стратегий S_{10} и S_8. На первом шаге с вероятностью 0.5 автомат S_{10} выберет D, поэтому с этой же вероятностью, начиная со второго шага, S_8 будет играть, как и TFT, первым шагом которого будет D, такую стратегию поведения представляет собой S_{11}. Обозначим через $E_{TFT_D} = E(S_{10}, S_{11})$, буква D в нижнем индексе при TFT обозначает последнее действие противника для первого действия TFT, аналогичные обозначения используются в формуле (8.27). Вероятность того, что на первом шаге S_{10} выбрал C, а на втором — D, равна 0.25, и с этой же вероятностью, начиная с третьего шага автомат S_8 будет играть, как S_4. Рассуждая аналогичным образом, находим формулу выигрышей при реализации пары стратегий S_{10} и S_8:

$$
\begin{aligned}
E(S_{10}, S_8) = &\left(\frac{(a,a)}{2} + \frac{(b,c)}{2}\right) + \delta\left(\frac{(a,a)}{4} + \frac{(b,c)}{4} + \frac{E_{TFT_D}}{2}\right)\\
&+ \delta^2\left(\frac{(a,a)}{8} + \frac{(b,c)}{8} + \frac{E_{TFT_C}}{4}\right)\\
&+ \delta^3\left(\frac{(a,a)}{16} + \frac{(b,c)}{16} + \frac{E_{TFT_C}}{8}\right) + \delta^4\left(\frac{E_{AllD}}{16} + \frac{E_{TFT_D}}{16}\right). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Следующая теорема подытоживает вычисления выигрышей игроков для всех возможных комбинаций стратегий игроков, описанных выше.

Теорема 4.1. *Выигрыши игроков для каждой пары стратегий* (S_i, S_j), $i, j = 1, \ldots, 12$, *представлены в табл. 3. Темно-серым цветом обозначены ситуации, в которых после конечного количества шагов игроки разыгрывают ситуацию двустороннего сотрудничества до бесконечности, светло-серым — после конечного числа шагов игроки разыгрывают ситуацию двустороннего предательства до бесконечности, средне-серым цветом обозначены ситуации, в которых один из игроков постоянно сотрудничает, а другой предает. Для любого* $\delta \in (0, 1)$ *в бесконечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного» ситуация* (S_2, S_2) *является абсолютным равновесием по Нэшу, при которой на каждом шаге разыгрывается равновесие по Нэшу в базовой игре.*

Доказательство. Выигрыши игроков, использующих в качестве стратегий заданные автоматы, вычисляются по формуле (2.1). Покажем на примере одной ситуации как вычисляются выигрыши игроков. Рассмотрим ситуацию, при которой разыгрывается пара стратегий S_1 и S_2. На каждом шаге S_1 выбирает стратегию C в базовой игре, а S_2 — D, поэтому на каждом шаге игрок, играющий S_1, получает $K_1(C, D) = c$, а S_2 — $K_2(C, D) = b$, тогда выигрыши игроков в бесконечно повторяющейся игре находятся по формуле:

$$E_1(S_1, S_2) = c + c\delta + c\delta^2 + \cdots = c\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} = \frac{c}{1-\delta},$$

$$E_2(S_1, S_2) = \frac{b}{1-\delta}.$$

Согласно теореме 2.1 ситуация (S_2, S_2) является абсолютным равновесием по Нэшу в повторяющейся игре в классе стратегий поведения. Формулы, определяющие выигрыши игроков и записанные в ячейках табл. 3, приведены в приложении 1. □

Замечание 4.1. Отметим, что стратегии поведения S_1, S_3, S_4, S_5 и S_6 при игре против самих себя и в любой комбинации предписывают игрокам разыгрывать кооперативную пару стратегий (C, C) и доставляют пару выигрышей (a, a) на каждом шаге. В работе [8] такие стратегии называют «милыми» (“nice”), потому что они не предполагают предательства первыми.

Таблица 3. Выигрыши игроков. Верхнедиагональные выигрыши получаются путем перестановки выигрышей из соответствующей ячейки в нижней части таблицы, т.е. $(K_1, K_2)' = (K_2, K_1)$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$											
S_2	$\frac{(b,c)}{1-\delta}$	$\frac{(d,d)}{1-\delta}$										
S_3	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	(8.1)	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$									
S_4	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	(8.1)	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$								
S_5	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	(8.2)	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$							
S_6	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	(8.3)	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$	$\frac{(a,a)}{1-\delta}$						
S_7	(8.4)	(8.5)	(8.6)	(8.7)	(8.8)	(8.9)	(8.10)					
S_8	(8.4)	(8.1)	(8.6)	(8.7)	(8.8)	(8.9)	(8.10)	(8.10)				
S_9	(8.11)	(8.12)	(8.13)	(8.14)	(8.15)	(8.16)	(8.17)	(8.18)	(8.19)			
S_{10}	(8.20)	(8.21)	(8.22)	(8.23)	(8.24)	(8.23)	(8.25)	(8.26)	(8.27)	(8.28)		
S_{11}	(8.29)	$\frac{(d,d)}{1-\delta}$	(8.30)	(8.31)	(8.29)	(8.32)	(8.33)	(8.31)	(8.34)	(8.35)	$\frac{(d,d)}{1-\delta}$	
S_{12}	(8.36)	$\frac{(c,b)}{1-\delta}$	(8.37)	(8.38)	(8.39)	(8.40)	(8.41)	(8.41)	(8.42)	(8.23)′	(8.43)	(8.44)

4.3. Примеры

В табл. 4 и 5 представлены матрица выигрышей при параметрах $a = 0.5, b = 1, c = 0, d = 0.1, \delta = 0.5$ и $\delta = 0.9$ соответственно. Ситуации, в которых оба игрока получают выигрыш не меньше $a/(1-\delta) = 1$ и $a/(1-\delta) = 5$ для $\delta = 0.5$ и $\delta = 0.9$ соответственно (т.е. выигрыша игрока, если ситуация (C, C) разыгрывалась на каждом шаге игры, начиная с первого) отмечены светло-серым цветом.

Замечание 4.2. Рассматривая табл. 4 и 5 как биматричные игры, в которых множеством стратегий является множество автоматов, можно сделать вывод, что при данных значениях параметров, помимо ситуации (S_2, S_2), которая отмечена темно-серым цветом в обоих таблицах, существует еще четыре равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в биматричной игре: (S_4, S_{11}), (S_{11}, S_4), (S_8, S_{11}) и (S_{11}, S_8), все они отмечены средне-серым цветом.

Из табл. 4 и 5 видно, что ситуации, когда оба игрока одновременно получали выигрыш, не меньший чем $a/(1-\delta)$, возникали только тогда, когда оба игрока выбирали C, начиная с первого шага бесконечношаговой игры. Это наблюдение может служить аргументом в пользу того, что чтобы получить наиболее высокие выигрыши в игре, необходимо инициировать кооперацию, т.е. начинать повторяющуюся игру с выбора стратегии «кооперироваться».

Таблица 4. Матрица выигрышей при
$a = 0.5, b = 1, c = 0, d = 0.1, \delta = 0.5.$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	1, 1	0, 2	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	0.69, 1.31	0.69, 1.31	0.59, 1.41	0.5, 1.5	0.5, 1.5	0.5, 1.5
S_2	2, 0	0.2, 0.2	1.1, 0.1	1.1, 0.1	1.55, 0.05	1.4, 0.07	1.44, 0.06	1.1, 0.1	1.27, 0.08	1.1, 0.1	0.2, 0.2	2, 0
S_3	1, 1	0.1, 1.1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	0.89, 1.01	0.89, 1.01	0.72, 1.03	0.7, 1.03	0.55, 1.05	0.78, 1.03
S_4	1, 1	0.1, 1.1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	0.88, 1.13	0.88, 1.13	0.71, 1.09	0.65, 1.15	0.67, 1.33	0.69, 1.09
S_5	1, 1	0.05, 1.55	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	0.69, 1.28	0.69, 1.28	0.69, 1.31	0.54, 1.41	0.5, 1.5	0.58, 1.31
S_6	1, 1	0.07, 1.4	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	0.9, 1.04	0.9, 1.04	0.65, 1.15	0.65, 1.15	0.6, 1.17	0.6, 1.17
S_7	1.31, 0.69	0.06, 1.44	1.01, 0.89	1.13, 0.88	1.28, 0.69	1.04, 0.9	0.8, 0.8	0.8, 0.8	0.68, 0.93	0.67, 1.10	0.63, 1.38	0.72, 0.82
S_8	1.31, 0.69	0.1, 1.1	1.01, 0.89	1.13, 0.88	1.28, 0.69	1.04, 0.9	0.8, 0.8	0.8, 0.8	0.74, 0.86	0.70, 1.03	0.67, 1.33	0.72, 0.82
S_9	1.41, 0.59	0.08, 1.27	1.03, 0.72	1.09, 0.71	1.31, 0.69	1.15, 0.65	0.93, 0.68	0.86, 0.74	0.7, 0.7	0.73, 0.96	0.59, 1.21	0.87, 0.71
S_{10}	1.5, 0.5	0.1, 1.1	1.03, 0.7	1.15, 0.65	1.41, 0.54	1.15, 0.65	1.10, 0.67	1.03, 0.70	0.96, 0.73	0.8, 0.8	0.45, 0.95	1.15, 0.65
S_{11}	1.5, 0.5	0.2, 0.2	1.05, 0.55	1.33, 0.67	1.5, 0.5	1.17, 0.6	1.38, 0.63	1.33, 0.67	1.21, 0.59	0.95, 0.45	0.2, 0.2	1.35, 0.55
S_{12}	1.5, 0.5	0, 2	1.03, 0.78	1.09, 0.69	1.31, 0.58	1.17, 0.6	0.82, 0.72	0.82, 0.72	0.71, 0.87	0.65, 1.15	0.55, 1.35	0.73, 0.73

Таблица 5. Матрица выигрышей при
$a = 0.5, b = 1, c = 0, d = 0.1, \delta = 0.9.$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	5, 5	0, 10	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	1.27, 8.73	1.27, 8.73	1.19, 8.81	2.5, 7.5	4.5, 5.5	0.5, 9.5
S_2	10, 0	1, 1	1.9, 0.9	1.9, 0.9	2.71, 0.81	5.74, 0.47	3.29, 0.75	1.9, 0.9	3.15, 0.76	5.5, 0.5	1, 1	10, 0
S_3	5, 5	0.9, 1.9	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	2.70, 2.06	2.70, 2.06	2.56, 2.07	4.95, 1.77	1.71, 1.81	7.87, 1.48
S_4	5, 5	0.9, 1.9	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	4.96, 5.05	4.96, 5.05	4.59, 4.76	3.85, 4.35	4.74, 5.26	3.81, 4.31
S_5	5, 5	0.81, 2.71	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	1.80, 3.95	1.80, 3.95	4.51, 5.49	3.11, 6.08	4.5, 5.5	2.62, 5.68
S_6	5, 5	0.47, 5.74	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	4.24, 3.82	4.24, 3.82	4.23, 5.13	3.85, 4.35	3.62, 3.99	2.14, 5.46
S_7	8.73, 1.27	0.75, 3.29	2.06, 2.70	5.05, 4.96	3.95, 1.80	3.82, 4.24	4.64, 4.64	4.64, 4.64	4.24, 5.05	3.82, 4.43	4.55, 5.46	3.68, 4.08
S_8	8.73, 1.27	0.9, 1.9	2.06, 2.70	5.05, 4.96	3.95, 1.80	3.82, 4.24	4.64, 4.64	4.64, 4.64	4.60, 4.68	3.96, 4.08	4.74, 5.26	3.68, 4.08
S_9	8.81, 1.19	0.76, 3.15	2.07, 2.56	4.76, 4.59	5.49, 4.51	5.13, 4.23	5.05, 4.24	4.68, 4.60	4.32, 4.32	3.50, 5.17	4.26, 5.09	3.59, 4.65
S_{10}	7.5, 2.5	0.5, 5.5	1.77, 4.95	4.35, 3.85	6.08, 3.11	4.35, 3.85	4.43, 3.82	4.08, 3.96	5.17, 3.50	4, 4	3.65, 4.15	4.35, 3.85
S_{11}	5.5, 4.5	1, 1	1.81, 1.71	5.26, 4.74	5.5, 4.5	3.99, 3.62	5.46, 4.55	5.26, 4.74	5.09, 4.26	4.15, 3.65	1, 1	4.43, 3.88
S_{12}	9.5, 0.5	0, 10	1.48, 7.87	4.31, 3.81	5.68, 2.62	5.46, 2.14	4.08, 3.68	4.08, 3.68	4.65, 3.59	3.85, 4.35	3.88, 4.43	3.11, 3.11

Матрицы нормализованных выигрышей для этих примеров представлены в приложении 2 в табл. 8 и 9. Проанализируем влияние дисконтирующего шага на нормализованную дисконтированную сумму выигрышей игрока (см. табл. 8, 9). Можно сделать следующие выводы:

1. Стратегия поведения S_2 приносит большой выигрыш при игре со стратегиями поведения $S_3, \ldots, S_9$ за счет предательства на первых шагах, тогда как противник сотрудничал. После конечного числа шагов эти стратегии начинают наказывать S_2

выбором D на дальнейших шагах. Поэтому средний выигрыш за один шаг S_2 уменьшается с увеличением значения δ.

2. Стратегия поведения S_4 не уменьшает свой выигрыш с увеличением δ, т.к. уменьшается влияние шага, на котором противник выбирает D, в то время как стратегия S_4 выбирает C, и при этом увеличивается значение следующего шага, на котором TFT наказывает противника за предательство.

5. Некоторые абсолютные равновесия по Нэшу

В этом разделе мы изучим предложенные в работе стратегии S_8 и S_{12}, а именно, проверим, будут ли пары стратегий (S_8, S_8) и (S_{12}, S_{12}) являться ситуациями абсолютного равновесия по Нэшу.

Лемма 5.1. *Ситуация (S_{12}, S_{12}) не является абсолютным равновесием по Нэшу ни при каких значениях параметров игры.*

Доказательство. Рассмотрим стратегию S_{12}. Без отклонений от ситуации (S_{12}, S_{12}) история некоторого шага t в ситуации такова: $h(t) = \{(1, C, C), (2, D, D), (3, C, C), (4, D, D), (5, C, C), \ldots\}$. Рассмотрим одношаговое отклонение на первом шаге. Пусть первый игрок на первом шаге, вместо выбора C, предписываемого стратегией S_{12}, выберет D, тогда новой историей будет: $h^{(1)}(t) = \{(1, D, C), (2, D, C), (3, D, C), \ldots\}$.

Сравним выигрыши игрока:

$$\frac{a + d\delta}{1 - \delta^2} - \frac{b}{1 - \delta} = \frac{a + d\delta - b - b\delta}{(1 - \delta)(1 + \delta)} < 0,$$

что получается с учетом неравенства: $c < d < a < b$. Таким образом, получили, что отклонение всегда будет выгодно, значит, по утверждению 2.1 пара стратегий (S_{12}, S_{12}) не является абсолютным равновесием ни при каких значениях параметров. □

Теорема 5.1. *Ситуация (S_8, S_8) не является абсолютным равновесием по Нэшу ни при каких значениях параметров игры.*

Доказательство. Рассмотрим стратегию S_8 и подыгру, начинающуюся с третьего шага с историей $\tilde{h}(3) = \{(1, C, C), (2, C, C)\}$.

В соответствии с определением стратегии S_8 в подыгре при заданной истории шага 3 возникнет последовательность ситуаций $(3, C, C)$, $(4, C, C), (5, D, D), (6, D, D), \dots$, и выигрышем игрока в подыгре будет $a\delta^2 + a\delta^3 + d\delta^4/(1-\delta)$, если он не отклонится от ситуации (S_8, S_8).

Рассмотрим отклонение первого игрока на шаге 3. Возникнет история $\tilde{h}_1^{(3)}(t) = \{(1, C, C), (2, C, C), (3, D, C), (4, C, C), (5, D, C)$, $(6, D, D), \dots\}$.

Найдем прибыль в подыгре от отклонения игрока на шаге 3:

$$\begin{aligned} & a\delta^2 + a\delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta} - \left(b\delta^2 + a\delta^3 + b\delta^4 + \frac{d\delta^5}{1-\delta}\right) \\ & = -(b-a)\delta^2 - (b-d)\delta^4 < 0, \end{aligned}$$

что получается с учетом ограничений на параметры. Так как существует выгодное одношаговое отклонение, ситуация (S_8, S_8) не является абсолютным равновесием по Нэшу. $\square$

Как было отмечено ранее в статье, ситуация (S_{11}, S_4) является равновесием по Нэшу в биматричной игре с матрицами выигрышей игроков, заданными в табл. 4 и 5. Следующая лемма накладывает условия на дисконтирующий фактор δ и другие параметры игры, чтобы эта пара стратегий являлась абсолютным равновесием по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре.

Лемма 5.2. *Ситуация (S_{11}, S_4) является абсолютным равновесием по Нэшу, если $b + c = a + d$ и $\delta = \frac{b-a}{a-c}$.*

Доказательство. Без отклонений от ситуации (S_{11}, S_4) история имеет вид:

$$h(t) = \{(1, D, C), (2, C, D), (3, D, C), \dots\}.$$

Выигрыши игроков представлены формулой (8.31).

Отклонение игрока от стратегии S_{11} на первом шаге приводит к формированию истории $h_{11}^{(1)}(t) = \{(1, C, C), (2, C, C), \dots\}$. Посчитаем разницу выигрышей отклонившегося игрока:

$$\frac{b + c\delta}{1-\delta^2} - \frac{a}{1-\delta} = \frac{-\delta(a-c) + b - a}{1-\delta^2}.$$

Последнее выражение неотрицательно, если $\delta \leq (b-a)/(a-c)$.

Если отклонение от стратегии S_{11} произошло на втором шаге, то формируется история $h_{11}^{(2)}(t) = \{(1, D, C), (2, D, D), (3, D, D), \dots\}$. Разница выигрышей отклонившегося игрока равна

$$\frac{b + c\delta}{1 - \delta^2} - \left(b + \frac{d\delta}{1 - \delta}\right) = \frac{\delta(\delta(b - d) - (d - c))}{1 - \delta^2}.$$

Последнее выражение неотрицательно, если $\delta \geq (d - c)/(b - d)$.

Отклонение от стратегии S_4 на первом шаге невыгодно игроку, если $\delta \geq (d - c)/(b - d)$, на втором шаге — если $\delta \leq (b - a)/(a - c)$.

Так как обе стратегии используют информацию только последнего шага, достаточно будет рассмотреть все возможные значения этого шага, а более ранние шаги опустить.

Пусть история теперь имеет вид $\tilde{h}(t) = \{(i, x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | x_{t-1} = C, y_{t-1} = C\}$. В соответствии со стратегиями на каждом шаге, начиная с t будет формироваться ситуация (C, C), и игроки получат выигрыши в подыгре, равные $a/(1 - \delta)$. При отклонении S_4 или S_{11} отклонившаяся стратегия получит выигрыш $(b + c\delta)/(1 - \delta^2)$, разница выигрышей будет давать условие на дисконтирующий фактор $\delta \geq (b - a)/(a - c)$.

Пусть история имеет вид $\tilde{h}(t) = \{(i, x_i, y_i)_{i=1}^{t-1} | x_{t-1} = D, y_{t-1} = D\}$. Аналогично, для данной истории получим условие $\delta \leq (d - c)/(b - d)$.

Получили условия на δ для того, чтобы пара стратегий (S_{11}, S_4) была абсолютным равновесием по Нэшу:

$$\delta = \frac{b - a}{a - c} = \frac{d - c}{b - d}.$$

Рассмотрим второе равенство:

$$\begin{aligned}
&b^2 + ad - ab - bd = ad + c^2 - ac - cd \\
&(b - c)(b + c) - a(b - c) - d(b - c) = 0 \\
&b + c = a + d
\end{aligned}$$

□

Замечание 5.1. Значение $\delta = \frac{b-a}{a-c}$ принадлежит промежутку $(0, 1)$ в условиях Леммы 5.2. Покажем это. Так как матрица выигрышей удовлетворяет неравенству: $c < a < b$, то $\frac{b-a}{a-c} > 0$. Теперь покажем справедливость следующего неравенства (верхняя граница):

$$\frac{b - a}{a - c} < 1$$

$$
\begin{aligned}
& b - a < a - c \\
& b - a + d < (a + d) - c = (b + c) - c \\
& -(a - d) < 0.
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство выполняется всегда для «Дилеммы заключенного».

Значит ситуация (S_{11}, S_4) является абсолютным равновесием, если выполняются условия на матрицу выигрышей $c < d < a < b$ и $a + d = b + c$, и дисконтирующий фактор определен однозначно и равен $\delta = \frac{b-a}{a-c}$.

Замечание 5.2. Вернемся к примерам из раздела 4.3. Для двух примеров, рассмотренных в этом разделе, параметры таковы: $a = 0.5$, $b = 1, c = 0, d = 0.1$, что не удовлетворяет условию $b + c = a + d$, поэтому для обоих примеров ситуация (S_{11}, S_4) не является абсолютным равновесием по Нэшу. Условия леммы выполняются, например, для параметров $a = 0.8, b = 1, c = 0, d = 0.2$ и $\delta = 0.25$.

6. Матрица победителей

В этом разделе мы предположим, что любой игрок имеет множество стратегий $\{S_1, \ldots, S_{12}\}$, и определим для каждой пары стратегий, какая из двух стратегий в паре приносит больший выигрыш и как часто стратегия является выигрышной, если противник использует какую-либо стратегию $S_1, \ldots, S_{12}$ с равной вероятностью, т.е. какова вероятность получения большего выигрыша по сравнению со случайным противником.

Чтобы упростить вычисления, часто фиксируют два параметра в игре $[12, 16, 19]$. Следуя данному подходу, для упрощения представления результатов в данном разделе положим $b = 1, c = 0$, то есть имеем: $0 < d < a < 1$.

В табл. 6 представлен анализ каждой пары стратегий. Знаком «$+$» обозначена ситуация, в которой выигрыш первого игрока больше выигрыша второго игрока, «$=$» в случае равенства выигрышей, «$-$» в случае, если выигрыш первого игрока меньше выигрыша второго игрока; а знаком «?» обозначена ситуация, в которой знак «$+$», «$=$» и «$-$» зависит от параметра δ, а эти условия представлены под таблицей. В последние два столбца записаны следующие вероятности: $P(+)$ — вероятность получения первым игроком большего выигрыша, чем второй игрок, и $P(+,=)$ — вероятность получения первым игроком не меньшего выигрыша, чем второй игрок, если противник использует любую стратегию из множества $\{S_1, \ldots, S_{12}\}$ с равной вероятностью. Цвета имеют то же значение, что и в разделе 4.

Таблица 6. Сравнение выигрышей игроков при $b = 1, c = 0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	$P(+)$	$P(+,=)$
S_1	=	-	=	=	=	=	-	-	-	-	-	-	0	$\frac{5}{12}$
S_2	+	=	+	+	+	+	+	+	+	+	=	+	$\frac{5}{6}$	1
S_3	=	-	=	=	=	=	?	?	?	?	-	?	$[0, \frac{5}{12}]$	$[\frac{5}{12}, \frac{5}{6}]$
S_4	=	-	=	=	=	=	-	-	-	-	-	-	0	$\frac{5}{12}$
S_5	=	-	=	=	=	=	-	-	-	-	-	-	0	$\frac{5}{12}$
S_6	=	-	=	=	=	=	?	?	-	-	-	-	$[0, \frac{1}{6}]$	$[\frac{5}{12}, \frac{7}{12}]$
S_7	+	-	?	+	+	?	=	=	-	?	-	-	$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$	$[\frac{5}{12}, \frac{2}{3}]$
S_8	+	-	?	+	+	?	=	=	-	?	-	-	$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$	$[\frac{5}{12}, \frac{2}{3}]$
S_9	+	-	?	+	+	+	+	+	=	-	-	?	$[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$	$[\frac{7}{12}, \frac{3}{4}]$
S_{10}	+	-	?	+	+	?	?	+	+	=	-	+	$[\frac{7}{12}, \frac{3}{4}]$	$[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$
S_{11}	+	=	+	+	+	+	+	+	+	+	=	+	$\frac{5}{6}$	1
S_{12}	+	-	?	+	+	+	+	+	?	-	-	=	$[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$	$[\frac{7}{12}, \frac{3}{4}]$

Условия появления знаков «+», «=» и «−» в ячейках табл. 6, где стоит знак «?», в зависимости от параметра δ:

- (S_7, S_3), (S_8, S_3), (S_{12}, S_3): '+' при $\delta < \delta_1$, '=' при $\delta = \delta_1$, '−' при $\delta > \delta_1$, где $\delta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$

- (S_7, S_6), (S_8, S_6): '+' при $\delta < \delta_2$, '=' при $\delta = \delta_2$, '−' при $\delta > \delta_2$, где $\delta_2 = \frac{(53-6\sqrt{78})^{\frac{1}{3}}+(53+6\sqrt{78})^{\frac{1}{3}}-1}{6} \approx 0.65730$

- (S_9, S_3), (S_{12}, S_9): '+' при $\delta < \delta_3$, '=' при $\delta = \delta_3$, '−' при $\delta > \delta_3$, где $\delta_3 = \frac{(\frac{1}{2}(25-3\sqrt{69}))^{\frac{1}{3}}+(\frac{1}{2}(25-3\sqrt{69}))^{\frac{1}{3}}-1}{3} \approx 0.75488$

- (S_{10}, S_3): '+' при $\delta < \delta_4$, '=' при $\delta = \delta_4$, '−' при $\delta > \delta_4$, где $\delta_4 = \frac{2}{3} \approx 0.66667$

- (S_{10}, S_7): '+' при $\delta < \delta_5$, '=' при $\delta = \delta_5$, '−' при $\delta > \delta_5$, где $\delta_5 \approx 0.97059$
- (S_{10}, S_8): '+' при $\delta < \delta_6$, '=' при $\delta = \delta_6$, '−' при $\delta > \delta_6$, где $\delta_6 \approx 0.929063$.

Замечание 6.1. Заметим, что значения $\delta_1, \dots, \delta_6$ не зависят от параметров a и d. Покажем это на примере ситуации (S_7, S_3). Рассмотрим ситуацию, в которой встречаются стратегии S_7 и S_3. При $c = 0, b = 1$ выигрыши игроков равны:

$$E(S_7, S_3) = \left(a + \delta + \frac{d\delta^4}{1-\delta}, a + \delta^2 + \delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta}\right).$$

Сравним выигрыши этих стратегий, вычислив разность между ними:

$$a + \delta + \frac{d\delta^4}{1-\delta} - \left(a + \delta^2 + \delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta}\right) = \delta - \delta^2 - \delta^3 = -\delta(\delta^2 + \delta - 1).$$

Запишем уравнение: $-\delta(\delta^2 + \delta - 1) = 0$, оно не зависит от a и d, получаем решения: $\delta = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$ и $\delta = 0$. Промежутку $(0, 1)$ принадлежит только одно решение: $\delta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Из табл. 6 сделаем следующие выводы:

1. Использование стратегий S_2 и S_{11} приносит больший выигрыш по сравнению с остальными стратегиями при встрече со случайным противником.

2. Стратегии S_1, S_4 и S_5 при любых значениях $\delta \in (0, 1)$, S_3 при $\delta < \delta_1 \approx 0,61803$ и S_6 при $\delta < \delta_2 \approx 0,65730$ приносят меньший выигрыш, чем все остальные стратегии.

3. Стратегия S_8 приносит больший выигрыш по сравнению с выигрышем соперника меньше, чем в половине ситуаций. А стратегии S_9 и S_{12} приносят не меньший выигрыш как минимум в $\frac{7}{12}$ ситуациях.

7. Частота кооперации

В этом разделе вводится новая мера кооперации или числовой показатель того, как часто игроки кооперируются в повторяющейся игре.

Рассмотрим первые $T \in \mathbb{N}$ шагов в повторяющейся игре, начиная с первого шага, и определим количество шагов $T_C(S_i, S_j)$ среди первых T шагов, на которых реализуется кооперативная пара стратегий (C, C), когда первый (второй) игрок разыгрывает стратегию S_i (S_j).

Определение 7.1. *Частотой кооперации в бесконечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного» назовем число:*

$$\mu_C(S_i, S_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{T_C(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.1}$$

когда этот предел существует.

Определение 7.2. *Частота кооперации для пары стратегий, представимых ВА, определяется по формуле:*

$$\mu_C(S_i, S_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{ET_C(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.2}$$

когда предел существует. Здесь $ET_C(S_i, S_j)$ — математическое ожидание количества шагов, на которых реализовалась ситуация (C, C) в базовой игре.

Замечание 7.1. Частота кооперации зависит только от разыгрываемых игроками стратегий, явно от параметров не зависит, присутствует зависимость только через выбор этих стратегий.

Замечание 7.2. При подсчете частоты кооперации учитываются все шаги игры, включая первые, на которых может происходить «переходный» процесс до появления цикла повторения последовательности ситуаций. Но реализованные на конечном множестве первых шагов ситуации до появления цикла не влияют на значение частоты кооперации, т.к. в формуле (7.1) (формуле (7.2)) вычисляется предел, при котором общее количество шагов стремится к бесконечности.

Вычислим частоту кооперации для каждой пары стратегий (S_i, S_j), $i, j = 1, \ldots, 12$. Покажем на двух примерах как производится вычисление частоты кооперации:

1. Рассмотрим ситуацию, в которой встречаются автоматы S_{12} и S_7. На первом шаге они оба разыгрывают C. На втором шаге игрок, разыгрывающий S_7, являясь «детективом», хочет узнать

действие противника в ответ на предательство, поэтому он выбирает D, а S_{12} выбирает противоположное действие действию C своего противника на первом шаге и так далее. Рассмотрим историю некоторого шага t в ситуации (S_{12}, S_7):

$$h(t) = \{(1, C, C), (2, D, D), (3, C, C), (4, D, C), (5, D, D), (6, C, D), \\ (7, C, C), (8, D, C), \ldots\}.$$

Начиная с третьего шага, циклически повторяется последовательность ситуаций $(C, C), (D, C), (D, D), (C, D)$. В цикле всего одна ситуация кооперации, она происходит один раз в 4 шага: на третьем, седьмом, одиннадцатом и т.д. шагах. При $T \to \infty$ отношение $\frac{T_C(S_{12}, S_7)}{T} \longrightarrow 1/4$, таким образом частота кооперации равна $\mu_C(S_{12}, S_7) = 1/4$.

2. Рассмотрим пару стратегий (S_{10}, S_9). Частота кооперации для этой пары стратегий равна

$$\mu_C(S_{10}, S_9) = 93/256.$$

Докажем это. В формуле (8.27) первые два слагаемых представляют собой выигрыш игроков на первых пяти шагах, на частоту кооперации они не влияют. С вероятностью 1/32 выбором *Детектива 2.0* после пятого шага будет постоянный выбор D (см. E_{AllD} в формуле (8.27)), и с вероятностью 31/32 *Детектив 2.0* будет действовать как $gTFT$ с третьего шага, т.е. предавать, только если два предыдущих шага другого игрока были предательствами, а именно: с вероятностью 15/32 последними двумя шагами из первых пяти были CC или DC (см. $E_{gTFT_{CC|DC}}$); с вероятностями 1/4 и 1/4 – CD и DD соответственно (см. $E_{gTFT_{DD}}, E_{gTFT_{CD}}$). Так как $\mu_C(S_{10}, S_2) = 0$ и $\mu_C(S_{10}, S_5) = 3/8$, то

$$\mu_C(S_{10}, S_9) = \frac{1}{32} \cdot 0 + \left(\frac{15}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{8} = \frac{93}{256}.$$

Результаты вычисления частоты кооперации для всех пар стратегий представлены в табл. 7. Темно-серым цветом обозначены ситуации, в которых частота кооперации равна единице, серым — меньше единицы, но больше нуля.

Таблица 7. Частота кооперации μ_C

μ_C	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0
S_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_3	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
S_4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
S_5	1	0	1	1	1	1	0	0	1	$\frac{3}{8}$	1	0
S_6	1	0	1	1	1	1	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{3}$
S_7	0	0	0	1	0	0	1	1	1	$\frac{15}{64}$	1	$\frac{1}{4}$
S_8	0	0	0	1	0	0	1	1	1	$\frac{15}{64}$	0	$\frac{1}{4}$
S_9	0	0	0	1	1	1	1	1	1	$\frac{93}{256}$	1	$\frac{1}{5}$
S_{10}	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{93}{256}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
S_{11}	1	0	0	0	1	0	1	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
S_{12}	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Стоит заметить, что пределы (7.1) и (7.2) существуют для всех рассматриваемых ситуаций, т.е. для всех рассматриваемых пар автоматов.

Аналогично частоте кооперации можно рассмотреть *частоту полукооперации* μ_{CD} (μ_{DC}), т.е. частоту таких ситуаций, в которых первый (второй) игрок выбирает C, а второй (первый) — D:

Определение 7.3. *Частотой полукооперации в бесконечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного» назовем число:*

$$\mu_{SC}(S_i, S_j) = \mu_{CD}(S_i, S_j) + \mu_{DC}(S_i, S_j),$$

где

$$\mu_{CD}(S_i, S_j) = \lim_{T \to \infty} \frac{T_{CD}(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.3}$$

$$\mu_{DC}(S_i, S_j) = \lim_{T \to \infty} \frac{T_{DC}(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.4}$$

в случае конечных автоматов, определяемых стратегиями игроков, и когда эти пределы существуют. Здесь $T_{CD}(S_i, S_j)$ ($T_{DC}(S_i, S_j)$) —

количество шагов среди первых T шагов, на которых реализуется пара стратегий (C, D) (пара стратегий (D, C)), когда первый и второй игроки разыгрывают стратегии S_i и S_j соответственно.

Частота полукооперации для пары стратегий, представимых ВА, определяется по формуле:

$$\mu_{SC}(S_i, S_j) = \mu_{CD}(S_i, S_j) + \mu_{DC}(S_i, S_j),$$

где

$$\mu_{CD}(S_i, S_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{ET_{CD}(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.5}$$

$$\mu_{DC}(S_i, S_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{ET_{DC}(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.6}$$

когда пределы существуют. Здесь $ET_{CD}(S_i, S_j)$ $(ET_{DC}(S_i, S_j))$ — математическое ожидание количества шагов среди первых T шагов, на которых реализуется пара стратегий (C, D) (пара стратегий (D, C)), когда первый и второй игроки разыгрывают стратегии S_i и S_j соответственно.

Также определим *частоту некооперации* μ_D, т.е. частоту появления такой ситуации, в которой оба игрока выбирают D:

Определение 7.4. *Частотой некооперации в бесконечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного» назовем число:*

$$\mu_D(S_i, S_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{T_D(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.7}$$

в случае конечных автоматов, определяемых стратегиями игроков, и

$$\mu_D(S_i, S_j) = \lim_{T\to\infty} \frac{ET_D(S_i, S_j)}{T}, \tag{7.8}$$

в случае вероятностных автоматов, определяемых стратегиями игроков, если эти пределы существуют. Здесь $T_D(S_i, S_j)$ $(ET_D(S_i, S_j))$ — количество шагов (математическое ожидание количества шагов) среди первых T шагов, на которых реализуется пара стратегий (D, D), когда первый и второй игроки разыгрывают стратегии S_i и S_j соответственно.

Очевидно, что сумма частот кооперации, полукооперации и некооперации равна единице для любой пары стратегий (S_i, S_j), т.е.

$$\mu_C(S_i, S_j) + \mu_{SC}(S_i, S_j) + \mu_D(S_i, S_j) = 1.$$

Таблица частот кооперации, полукооперации и некооперации для всех возможных пар рассматриваемых стратегий представлена в приложении 3.

8. Заключение

В статье рассматривается бесконечно повторяющаяся игра «Дилемма заключенного». В явном виде найдены выигрыши игроков для каждой пары рассматриваемых стратегий, в том числе, для впервые представленных. Для некоторых пар стратегий получены условия того, что эта пара является абсолютным равновесием, или доказано, что при любых значениях параметров пара стратегий не является абсолютным равновесием. Проведено сравнение выигрышей одних стратегий против других. Введено понятие частоты кооперации, являющееся показателем возникновения кооперативных ситуаций при встрече двух стратегий. В будущих исследованиях планируется изучить влияние штрафа на хранение информации для реализации стратегий на выигрыши игроков, использующих эти стратегии, а также исследование взаимодействия автоматов и человека, который может изучать и менять свою стратегию при обучении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванг В., Зенг Д. *Бесконечно повторяющиеся игры с самоконтролем: двойственная интерпретация Игры Монахов* // Математическая теория игр и её приложения. 2014. Т. 6. В. 4. С. 97–115.

2. Никольский С. М. *Курс математического анализа: том 1.* М: Наука, 1973.

3. Парилина Е.М. *Стратегическая устойчивость одноточечных принципов оптимальности в кооперативных стохастических играх* // Математическая теория игр и её приложения. 2014. Т. 6. В. 1. С. 56–72.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и её приложения. 2009. Т. 1. В. 1. С. 106–123.

5. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург, 2012.

6. Печерский С.Л., Беляева А.А. *Теория игр для экономистов. Вводный курс.* СПб.: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001.

7. Писарева А.М., Парилина Е.М. *Приближенное равновесие в конечно повторяющейся игре «Дилемма заключенного»* // Математическая теория игр и её приложения. 2024. Т. 16. В. 2. С. 45–65.

8. Axelrod R. *The Evolution of Cooperation.* NY: Basic Books, 1984.

9. Crandall J.W., et al. *Cooperating with machines* // Nature communications. 2018. V. 9. N. 1. P. 233.

10. D'Arcangelo C., Andreozzi L., Faillo M. *Human players manage to extort more than the mutual cooperation payoff in repeated social dilemmas* // Scientific Reports. 2021. V. 11. N. 1. no. 16820.

11. Do Yi S., Baek S. K., Choi J. K. *Combination with anti-tit-for-tat remedies problems of tit-for-tat* // Journal of Theoretical Biology. 2017. V. 412. P. 1–7.

12. Ellison G. *Cooperation in the prisoner's dilemma with anonymous random matching* // The Review of Economic Studies. 1994. V. 61. N. 3. P. 567–588.

13. García J., Van Veelen M. *No strategy can win in the repeated prisoner's dilemma: linking game theory and computer simulations* // Frontiers in Robotics and AI. 2018. V. 5, P. 102.

14. Grauer L.V., Petrosyan L.A. *Multistage games* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2004. V. 68. N. 4. P. 597–605.

15. Ho T. *Finite automata play repeated prisoner's dilemma with information processing costs* // Journal of economic dynamics and control. 1996. V. 20. N. 1-3. P. 173–207.

16. Kandori M. *Social norms and community enforcement* // The Review of Economic Studies. 1992. V. 59. N. 1. P. 63–80.

17. Mailath G.J., Samuelson L. *Repeated games and reputations: long-run relationships.* NY: Oxford university press, 2006.

18. Maschler M., Zamir S., Solan E. *Game theory.* Cambridge University Press, 2020.

19. Murphy R.O., Ackermann K.A. *Social preferences, positive expectations, and trust based cooperation* // Journal of Mathematical Psychology. 2015. V. 67. P. 45–50.

20. Nowak M., Sigmund K. *A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the Prisoner's Dilemma game* // Nature. 1993. V. 364. N. 6432. P. 56–58.

21. Parilina E.M., Zaccour G. *Payment Schemes for Sustaining Cooperation in Dynamic Games* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2022. V. 139. Art. no. 104440.

22. Pei H. *Reputation Effects under Short Memories* // Proceedings of the 24th ACM Conference on Economics and Computation. 2023. P. 1046–1046.

23. Sigmund K. *Automata for Repeated Games* // Evolution and Progress in Democracies: Towards New Foundations of a Knowledge Society. 2001. P. 335–347.

24. Stoelinga M. *An Introduction to Probabilistic Automata* // Bulletin of the EATCS. 2004. V. 78.

25. Vasin A. *The Folk theorem for dominance solutions* // International Journal of Game Theory. 1999. V. 28. N. 1. P. 15–24.

DETERMINISTIC FINITE AND PROBABILISTIC AUTOMATA IN INFINITELY REPEATED "PRISONER'S DILEMMA"

Kseniya V. Rusakova, Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, student (st097257@student.spbu.ru),
Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Dr.Sc., professor (e.parilina@spbu.ru).

Abstract: The paper studies strategies represented as finite and probabilistic automata in infinitely repeated Prisoner's Dilemma. A comparative analysis of the strategies is provided. It includes a comparison of players' payoffs obtained when playing against a particular automaton or against a randomly chosen automaton. The terms of frequency of cooperation, semi-cooperation, and non-cooperation are also introduced and calculated for each pair of strategies under consideration. A subgame perfect equilibrium conditions for some strategy profiles, not previously studied in the literature, are obtained. All theoretical results are illustrated by numerical examples.

Keywords: repeated games, prisoner's dilemma, finite automaton, cooperation frequency, semicooperation frequency.

Приложения

Приложение 1

В этом приложении представлены формулы выигрышей игроков из табл. 3.

$$E(S_3, S_2) = \left(c + \frac{d\delta}{1-\delta}, b + \frac{d\delta}{1-\delta}\right) \tag{8.1}$$

$$E(S_5, S_2) = \left(c + c\delta + \frac{d\delta^2}{1-\delta}, b + b\delta + \frac{d\delta^2}{1-\delta}\right) \tag{8.2}$$

$$E(S_6, S_2) = \left(\frac{c + d\delta}{1-\delta^2}, \frac{b + d\delta}{1-\delta^2}\right) \tag{8.3}$$

$$E(S_7, S_1) = \Big(a + b\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \frac{b\delta^4}{1-\delta}, a + c\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \frac{c\delta^4}{1-\delta}\Big) \tag{8.4}$$

$$E(S_7, S_2) = \Big(c + d\delta + c\delta^2 + c\delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta}, b + d\delta + b\delta^2 + b\delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta}\Big) \tag{8.5}$$

$$E(S_7, S_3) = \Big(a + b\delta + c\delta^2 + c\delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta}, a + c\delta + b\delta^2 + b\delta^3 + \frac{d\delta^4}{1-\delta}\Big) \tag{8.6}$$

$$E(S_7, S_4) = \left(a + b\delta + c\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}, a + c\delta + b\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}\right) \tag{8.7}$$

$$E(S_7, S_5) = \Big(a + b\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + b\delta^4 + b\delta^5 + \frac{d\delta^6}{1-\delta}, a + c\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + c\delta^4 + c\delta^5 + \frac{d\delta^6}{1-\delta}\Big) \tag{8.8}$$

$$E(S_7, S_6) = \Big(a + b\delta + c\delta^2 + \frac{(c + d\delta + b\delta^2)\delta^3}{1-\delta^3}, a + c\delta + b\delta^2 + \frac{(b + d\delta + c\delta^2)\delta^3}{1-\delta^3}\Big) \tag{8.9}$$

$$E(S_7, S_7) = \left(a + d\delta + \frac{a\delta^2}{1-\delta}, a + d\delta + \frac{a\delta^2}{1-\delta}\right) \tag{8.10}$$

$$E(S_9, S_1) = \Big(a + b\delta + b\delta^2 + a\delta^3 + a\delta^4 + \frac{b\delta^5}{1-\delta}, a + c\delta + c\delta^2 + a\delta^3 + a\delta^4 + \frac{c\delta^5}{1-\delta}\Big) \tag{8.11}$$

$$E(S_9, S_2) = \Big(c + d\delta + d\delta^2 + c\delta^3 + c\delta^4 + \frac{d\delta^5}{1-\delta}, b + d\delta + d\delta^2 + b\delta^3 + b\delta^4 + \frac{d\delta^5}{1-\delta}\Big) \tag{8.12}$$

$$E(S_9, S_3) = \Big(a + b\delta + d\delta^2 + c\delta^3 + c\delta^4 + \frac{d\delta^5}{1-\delta}, a + c\delta + d\delta^2 + b\delta^3 + b\delta^4 + \frac{d\delta^5}{1-\delta}\Big) \tag{8.13}$$

$$E(S_9, S_4) = \Big(a + b\delta + d\delta^2 + c\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}, a + c\delta + d\delta^2 + b\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}\Big) \tag{8.14}$$

$$E(S_9, S_5) = \Big(a + b\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}, a + c\delta + c\delta^2 + b\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}\Big) \tag{8.15}$$

$$E(S_9, S_6) = \Big(a + b\delta + d\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}, a + c\delta + d\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}\Big) \tag{8.16}$$

$$E(S_9, S_7) = \Big(a + d\delta + b\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}, a + d\delta + c\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}\Big) \tag{8.17}$$

$$E(S_9, S_8) = \Big(a + d\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}, a + d\delta + c\delta^2 + b\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}\Big) \tag{8.18}$$

$$E(S_9, S_9) = \Big(a + d\delta + d\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}, a + d\delta + d\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}\Big) \tag{8.19}$$

$$E(S_{10}, S_1) = \Big(\frac{a+b}{2(1-\delta)}, \frac{a+c}{2(1-\delta)}\Big) \tag{8.20}$$

$$E(S_{10}, S_2) = \Big(\frac{c+d}{2(1-\delta)}, \frac{b+d}{2(1-\delta)}\Big) \tag{8.21}$$

$$E(S_{10}, S_3) = \Big(\frac{a+b}{2-\delta} + \frac{(c+d)\delta}{2(1-\delta)(2-\delta)}, \frac{a+c}{2-\delta} \tag{8.22}$$

$$+ \frac{(b+d)\delta}{2(1-\delta)(2-\delta)}\Big)$$

$$E(S_{10}, S_4) = \Big(\frac{a+b}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4(1-\delta)}, \frac{a+c}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4(1-\delta)}\Big) \tag{8.23}$$

$$E(S_{10}, S_5) = \Big(\frac{(1+\delta)(a+b)}{2} + \frac{\delta^2(3a+3b+c+d)}{8(1-\delta)}, \frac{(1+\delta)(a+c)}{2} + \frac{\delta^2(3a+b+3c+d)}{8(1-\delta)}\Big) \tag{8.24}$$

$$E(S_{10}, S_7) = \Big(\frac{(1+\delta^2+\delta^3)(a+b)+\delta(c+d)}{2} + \frac{\delta^4(15a+15b+17c+17d)}{64(1-\delta)}, \frac{(1+\delta^2+\delta^3)(a+c)+\delta(b+d)}{2} + \frac{\delta^4(15a+17b+15c+17d)}{64(1-\delta)}\Big) \tag{8.25}$$

$$E(S_{10}, S_8) = (a+b, a+c)\Big(\frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^3}{16}\Big) + \Big(c+d, b+d\Big)\frac{\delta}{4} + E_{TFT_C}\Big(\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{8}\Big) + E_{TFT_D}\Big(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^4}{16}\Big) + E_{AllD}\frac{\delta^4}{16}, \tag{8.26}$$

где $E_{TFT_C} = E(S_{10}, S_4), E_{AllD} = E(S_{10}, S_2), E_{TFT_D} = E(S_{10}, S_{11})$.

$$E(S_{10}, S_9) = (a+b, a+c)\frac{(1+\delta^3+\delta^4)}{2} + (c+d, b+d)\frac{(\delta+\delta^2)}{2} + E_{AllD}\frac{\delta^5}{32} + E_{gTFT_{CC|DC}}\frac{15\delta^5}{32} + E_{gTFT_{CD}}\frac{\delta^5}{4} + E_{gTFT_{DD}}\frac{\delta^5}{4}, \tag{8.27}$$

где $E_{gTFT_{CC|DC}} = E(S_{10}, S_5)$,

$$E_{gTFT_{DD}} = \Big(\frac{c+d}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4} + \frac{\delta^2(3a+3b+c+d)}{8(1-\delta)}, \frac{b+d}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4} + \frac{\delta^2(3a+b+3c+d)}{8(1-\delta)}\Big)$$

$$E_{gTFT_{CD}} = \Big(\frac{a+b}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4} + \frac{\delta^2(3a+3b+c+d)}{8(1-\delta)}, \frac{a+c}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4} + \frac{\delta^2(3a+b+3c+d)}{8(1-\delta)}\Big),$$

$$E(S_{10}, S_{10}) = \Big(\frac{a+b+c+d}{4(1-\delta)}, \frac{a+b+c+d}{4(1-\delta)}\Big) \tag{8.28}$$

$$E(S_{11}, S_1) = \Big(b + \frac{a\delta}{1-\delta}, c + \frac{a\delta}{1-\delta}\Big) \tag{8.29}$$

$$E(S_{11}, S_3) = \Big(b + c\delta + \frac{d\delta^2}{1-\delta}, c + b\delta + \frac{d\delta^2}{1-\delta}\Big) \tag{8.30}$$

$$E(S_{11}, S_4) = \Big(\frac{b+c\delta}{1-\delta^2}, \frac{c+b\delta}{1-\delta^2}\Big) \tag{8.31}$$

$$E(S_{11}, S_6) = \Big(\frac{b+c\delta+d\delta^2}{1-\delta^3}, \frac{c+b\delta+d\delta^2}{1-\delta^3}\Big) \tag{8.32}$$

$$E(S_{11}, S_7) = \Big(b + c\delta + b\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}, c + b\delta + c\delta^2 + \frac{a\delta^3}{1-\delta}\Big) \tag{8.33}$$

$$E(S_{11}, S_9) = \Big(b + c\delta + d\delta^2 + b\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}, \tag{8.34}$$
$$c + b\delta + d\delta^2 + c\delta^3 + \frac{a\delta^4}{1-\delta}\Big)$$

$$E(S_{11}, S_{10}) = \Big(\frac{b+d}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4(1-\delta)}, \tag{8.35}$$
$$\frac{c+d}{2} + \frac{\delta(a+b+c+d)}{4(1-\delta)}\Big)$$

$$E(S_{12}, S_1) = \Big(a + \frac{b\delta}{1-\delta}, a + \frac{c\delta}{1-\delta}\Big) \tag{8.36}$$

$$E(S_{12}, S_3) = \Big(a + b\delta + d\delta^2 + \frac{c\delta^3}{1-\delta}, a + c\delta + d\delta^2 + \frac{b\delta^3}{1-\delta}\Big) \tag{8.37}$$

$$E(S_{12}, S_4) = \Big(\frac{a+b\delta+d\delta^2+c\delta^3}{1-\delta^4}, \frac{a+c\delta+d\delta^2+b\delta^3}{1-\delta^4}\Big) \tag{8.38}$$

$$E(S_{12}, S_5) = \Big(a + \frac{(b+b\delta+d\delta^2+c\delta^3)\delta}{1-\delta^4}, \tag{8.39}$$
$$a + \frac{(c+c\delta+d\delta^2+b\delta^3)\delta}{1-\delta^4}\Big)$$

$$E(S_{12}, S_6) = \Big(\frac{a+b\delta+d\delta^2}{1-\delta^3}, \frac{a+c\delta+d\delta^2}{1-\delta^3}\Big) \tag{8.40}$$

$$E(S_{12}, S_7) = \Big(a + d\delta + \frac{(a+b\delta+d\delta^2+c\delta^3)\delta^2}{1-\delta^4}, \tag{8.41}$$
$$a + d\delta + \frac{(a+c\delta+d\delta^2+b\delta^3)\delta^2}{1-\delta^4}\Big)$$

$$E(S_{12}, S_9) = \Big(a + \frac{(d + c\delta + a\delta^2 + b\delta^3 + b\delta^4)\delta}{1 - \delta^5}, \quad a + \frac{(d + b\delta + a\delta^2 + c\delta^3 + c\delta^4)\delta}{1 - \delta^5}\Big) \tag{8.42}$$

$$E(S_{12}, S_{11}) = \Big(\frac{c + a\delta + b\delta^2 + d\delta^3}{1 - \delta^4}, \frac{b + a\delta + c\delta^2 + d\delta^3}{1 - \delta^4}\Big) \tag{8.43}$$

$$E(S_{12}, S_{12}) = \Big(\frac{a + d\delta}{1 - \delta^2}, \frac{a + d\delta}{1 - \delta^2}\Big) \tag{8.44}$$

Приложение 2

Таблица 8. Матрица нормализованных выигрышей игроков при $a = 0.5, b = 1, c = 0, d = 0.1, \delta = 0.5.$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	0.5, 0.5	0, 1	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.34, 0.66	0.34, 0.66	0.30, 0.70	0.25, 0.75	0.25, 0.75	0.25, 0.75
S_2	1, 0	0.1, 0.1	0.55, 0.05	0.55, 0.05	0.78, 0.03	0.7, 0.03	0.72, 0.03	0.55, 0.05	0.63, 0.04	0.55, 0.05	0.1, 0.1	1, 0
S_3	0.5, 0.5	0.05, 0.55	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.44, 0.51	0.44, 0.51	0.36, 0.52	0.35, 0.52	0.28, 0.53	0.39, 0.51
S_4	0.5, 0.5	0.05, 0.55	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.44, 0.56	0.44, 0.56	0.36, 0.54	0.33, 0.58	0.33, 0.67	0.35, 0.55
S_5	0.5, 0.5	0.03, 0.78	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.35, 0.64	0.35, 0.64	0.34, 0.66	0.27, 0.71	0.25, 0.75	0.29, 0.66
S_6	0.5, 0.5	0.03, 0.7	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.45, 0.52	0.45, 0.52	0.33, 0.58	0.33, 0.58	0.3, 0.59	0.3, 0.59
S_7	0.66, 0.34	0.03, 0.72	0.51, 0.44	0.56, 0.44	0.64, 0.35	0.52, 0.45	0.4, 0.4	0.4, 0.4	0.34, 0.46	0.33, 0.55	0.31, 0.69	0.36, 0.41
S_8	0.66, 0.34	0.05, 0.55	0.51, 0.44	0.56, 0.44	0.64, 0.35	0.52, 0.45	0.4, 0.4	0.4, 0.4	0.37, 0.43	0.35, 0.51	0.33, 0.67	0.36, 0.41
S_9	0.70, 0.30	0.04, 0.63	0.52, 0.36	0.54, 0.36	0.66, 0.34	0.58, 0.33	0.46, 0.34	0.43, 0.37	0.35, 0.35	0.37, 0.48	0.29, 0.61	0.44, 0.36
S_{10}	0.75, 0.25	0.05, 0.55	0.52, 0.35	0.58, 0.33	0.71, 0.27	0.58, 0.33	0.55, 0.33	0.51, 0.35	0.48, 0.37	0.4, 0.4	0.23, 0.48	0.58, 0.33
S_{11}	0.75, 0.25	0.1, 0.1	0.53, 0.28	0.67, 0.33	0.75, 0.25	0.59, 0.3	0.69, 0.31	0.67, 0.33	0.61, 0.29	0.48, 0.23	0.1, 0.1	0.67, 0.27
S_{12}	0.75, 0.25	0, 1	0.51, 0.39	0.55, 0.35	0.66, 0.29	0.59, 0.3	0.41, 0.36	0.41, 0.36	0.36, 0.44	0.33, 0.58	0.27, 0.67	0.37, 0.37

Таблица 9. Матрица нормализованных выигрышей игроков при $a = 0.5, b = 1, c = 0, d = 0.1, \delta = 0.9.$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	0.5, 0.5	0, 1	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.13, 0.87	0.13, 0.87	0.12, 0.88	0.25, 0.75	0.45, 0.55	0.05, 0.95
S_2	1, 0	0.1, 0.1	0.19, 0.09	0.19, 0.09	0.27, 0.08	0.57, 0.05	0.33, 0.07	0.19, 0.09	0.31, 0.08	0.55, 0.05	0.1, 0.1	1, 0
S_3	0.5, 0.5	0.09, 0.19	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.27, 0.21	0.27, 0.21	0.26, 0.21	0.50, 0.18	0.17, 0.18	0.79, 0.15
S_4	0.5, 0.5	0.09, 0.19	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.50, 0.50	0.50, 0.50	0.46, 0.48	0.39, 0.44	0.47, 0.53	0.38, 0.43
S_5	0.5, 0.5	0.08, 0.27	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.18, 0.39	0.18, 0.39	0.45, 0.55	0.31, 0.61	0.45, 0.55	0.26, 0.57
S_6	0.5, 0.5	0.05, 0.57	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.5, 0.5	0.42, 0.38	0.42, 0.38	0.42, 0.51	0.39, 0.44	0.36, 0.40	(0.21, 0.55
S_7	0.87, 0.13	0.07, 0.33	0.21, 0.27	0.50, 0.50	0.39, 0.18	0.38, 0.42	0.46, 0.46	0.46, 0.46	0.42, 0.50	0.38, 0.44	0.45, 0.55	0.37, 0.41
S_8	0.87, 0.13	0.09, 0.19	0.21, 0.27	0.50, 0.50	0.39, 0.18	0.38, 0.42	0.46, 0.46	0.46, 0.46	0.46, 0.47	0.40, 0.41	0.47, 0.53	0.37, 0.41
S_9	0.88, 0.12	0.08, 0.31	0.21, 0.26	0.48, 0.46	0.55, 0.45	0.51, 0.42	0.50, 0.42	0.47, 0.46	0.43, 0.43	0.35, 0.52	0.43, 0.51	0.36, 0.47
S_{10}	0.75, 0.25	0.05, 0.55	0.18, 0.50	0.44, 0.39	0.61, 0.31	0.44, 0.39	0.44, 0.38	0.41, 0.40	0.52, 0.35	0.4, 0.4	0.37, 0.42	0.44, 0.39
S_{11}	0.55, 0.45	0.1, 0.1	0.18, 0.17	0.53, 0.47	0.55, 0.45	0.40, 0.36	0.55, 0.45	0.53, 0.47	0.51, 0.43	0.42, 0.37	0.1, 0.1	0.44, 0.39
S_{12}	0.95, 0.05	0, 1	0.15, 0.79	0.43, 0.38	0.57, 0.26	0.55, 0.21	0.41, 0.37	0.41, 0.37	0.47, 0.36	0.39, 0.44	0.39, 0.44	0.31, 0.31

Табл. 8 и 9 представляют собой матрицы нормализованных выигрышей для примеров раздела 4.3. Светло-серым (темно-серым) цветом обозначены ситуации, в которых выигрыш первого игрока уменьшается (увеличивается) при увеличении δ.

Приложение 3

В этом приложении представлена табл. 10, в которой для каждой пары стратегий определена матрица размерностью 2×2, элементом которой с индексом $(1,1)$ является частота кооперации μ_C, элементы с индексами $(1,2)$ и $(2,1)$ представляют собой частоты μ_{CD} и μ_{DC} соответственно, элемент с индексом $(2,2)$ является частотой некооперации μ_D:

$$\begin{bmatrix} \mu_C & \mu_{CD} \\ \mu_{DC} & \mu_D \end{bmatrix}.$$

Таблица 10. Частота кооперации μ_C, частоты μ_{CD}, μ_{DC} (сумма $\mu_{CD} + \mu_{DC}$ равна частоте полукоперации) и частота некооперации μ_D.

μ	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_1	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$
S_2	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$
S_3	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$
S_4	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$
S_5	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{3}{8}&\frac{3}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$
S_6	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$
S_7	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{15}{64}&\frac{17}{64}\\\frac{15}{64}&\frac{17}{64}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$
S_8	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{15}{64}&\frac{15}{64}\\\frac{15}{64}&\frac{19}{64}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$
S_9	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{93}{256}&\frac{93}{256}\\\frac{31}{256}&\frac{39}{256}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{smallmatrix}$
S_{10}	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{15}{64}&\frac{15}{64}\\\frac{17}{64}&\frac{17}{64}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{15}{64}&\frac{15}{64}\\\frac{15}{64}&\frac{19}{64}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{93}{256}&\frac{31}{256}\\\frac{93}{256}&\frac{39}{256}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$
S_{11}	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$
S_{12}	$\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{smallmatrix}$