Компьютерные инструменты в образовании, 2025
№ 2: 5–23
УДК: УДК 519.8
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2025-2-5-23

алгоритмическая математика и математическое моделирование

РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ. Часть II

Кривулин Н. К.[1], доктор физ.-мат. наук, профессор, ✉ nkk@math.spbu.ru, orcid.org/0000-0003-3070-9355
Яковлев Д. М.[1], студент, denis.yakovlev03@bk.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9, 199034, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматривается ряд известных в литературе многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений. В этих задачах, исходя из заданных матриц, содержащих результаты парных сравнений критериев и альтернатив, необходимо найти абсолютный рейтинг (приоритет, вес) каждой альтернативы при принятии решений. Представлены решения задач, полученные с помощью метода анализа иерархий, метода взвешенных геометрических средних, а также метода log-чебышевской аппроксимации матриц парных сравнений. Полученные результаты показывают, что для некоторых задач решения, найденные разными методами, могут существенно отличаться друг от друга. Принятие решения о выборе наилучшей альтернативы в таких случаях может опираться на дополнительный анализ и сопоставление результатов решения задачи, которые были получены всеми применяемыми методами.

Ключевые слова: *многокритериальные задачи принятия решений, парные сравнения, метод анализа иерархий, тропическая математика.*

Цитирование: Кривулин Н. К., Яковлев Д. М. Решение многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений. Часть II // Компьютерные инструменты в образовании. 2025. № 2. С. 5–23. doi:10.32603/2071-2340-2025-2-5-23

1. ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений [1–3] образуют класс проблем в области принятия решений, которые представляют значительный теоретический интерес и имеют большое прикладное значение. В таких задачах на основе результатов парных сравнений альтернатив по нескольким неравнозначным критериям, а также парных сравнений самих критериев, требуется построить оценки предпочтения (рейтинги, приоритеты, веса) альтернатив для выбора наиболее подходящей альтернативы при принятии решений. Полученные результаты могут быть использованы для ранжирования альтернатив в соответствии с их оценками.

Для решения многокритериальных задач парных сравнений используется целый ряд методов, включая эвристический метод анализа иерархий [2, 4, 5] и формальный метод взвешенных геометрических средних [6–8]. В то же время известно, что существующие методы решения могут приводить к различным и даже противоположным результатам. Поэтому проблема разработки новых методов, которые способны дополнить и расширить имеющиеся инструменты решения, остается достаточно актуальной.

Одним из методов, которые предлагают альтернативные подходы к решению многокритериальных задач парных сравнений, является метод на основе log-чебышевской аппроксимации матриц парных сравнений, предложенный и изученный в работах [9–11]. Нахождение рейтингов альтернатив сводится к решению ряда задач оптимизации в терминах тропической алгебры, которая изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями [12–16]. Указанный подход позволяет получить решение задачи в аналитическом виде в компактной векторной форме.

В настоящей статье рассматривается ряд известных в литературе многокритериальных задач парных сравнений из работ [17–20]. Приведены решения этих задач при помощи методов анализа иерархий и взвешенных геометрических средних, а также метода log-чебышевской аппроксимации. Статья является продолжением работ [21, 22], которые представляют результаты, полученные студентами математико-механического факультета СПбГУ при выполнении индивидуальных проектов по курсу «Принятие решений».

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Пусть требуется оценить рейтинги N альтернатив $\mathscr{A}_1,\dots,\mathscr{A}_N$ на основе их парных сравнений в соответствии с K критериями. Известны результаты парных сравнений критериев, которые образуют матрицу $\boldsymbol{C}=(c_{kl})$ порядка K, где величина $c_{kl}>0$ показывает во сколько раз критерий k более значим при оценке альтернатив, чем критерий l. Имеются также результаты парных сравнений альтернатив по каждому критерию в форме матриц $\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})$ порядка N, где $a_{ij}^{(k)}>0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathscr{A}_i$ предпочтительнее альтернативы $\mathscr{A}_j$ по критерию k. Многокритериальная задача парных сравнений состоит в том, чтобы с помощью матриц парных сравнений $\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_K$ построить вектор $\boldsymbol{x}=(x_i)$ порядка N, где $x_i>0$ определяет абсолютный рейтинг альтернативы $\mathscr{A}_i$ при принятии решения о выборе наилучшей альтернативы.

Для решения задачи парных сравнений могут использоваться различные методы, включая наиболее распространенные — метод анализа иерархий и метод взвешенных геометрических средних, а также новый метод log-чебышевской аппроксимации, которые применяются в настоящей работе. С целью полноты изложения ниже приводятся краткие описания и расчетные формулы для перечисленных методов (см. также [21]).

2.1. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий [2, 4, 5] представляет собой эвристический метод решения многокритериальных задач парных сравнений, который получил наибольшее распространение на практике. Обозначим через $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_K)^T$ нормированный относительно суммы элементов главный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{C}$, а через $\boldsymbol{x}_k$ нормированный главный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}_k$ для каждого $k=1,\dots,K$. Тогда вектор рейтингов альтернатив определяется как взвешенная сумма по формуле

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{K} w_k\boldsymbol{x}_k. \tag{1}$$

2.2. Метод взвешенных геометрических средних

Метод взвешенных геометрических средних [6–8] является формальным методом решения, в котором результат получают с помощью log-евклидовой аппроксимации матриц парных сравнений. Пусть $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_K)^T$ обозначает нормированный относительно суммы координат вектор геометрических средних элементов строк матрицы $\boldsymbol{C}$.

В качестве решения задачи парных сравнений берется (обычно после нормирования) вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$ с элементами, которые находятся по формуле

$$x_i = \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{j=1}^{N} a_{ij}^{(k)} \right)^{w_k/N}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

2.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

Метод log-чебышевской аппроксимации опирается на решение задач аппроксимации матриц парных сравнений в метрике Чебышева в логарифмической шкале [9–11]. Решение задачи log-чебышевской аппроксимации обычными методами оказывается слишком сложным и на практике обычно не применяется. В то же время, аналитическое решение задачи может быть получено в терминах тропической алгебры, которая изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями [12–16]. Операция называется идемпотентной, если результат ее применения к операндам с одинаковым значением равен этому значению (например, идемпотентной является операция вычисления максимума, для которой справедливо равенство $\max(x, x) = x$).

Решение, полученное с помощью log-чебышевской аппроксимации, может быть неединственным и предлагать разные оценки альтернатив. Чтобы упростить выбор альтернатив в случае неединственного решения в работах [9, 10] используется подход на основе определения в некотором смысле «наилучшего» и «наихудшего» решений. При этом выбирается наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив, для которого отношение между максимальным и минимальным элементами максимально, и наихудший дифференцирующий вектор, для которого это отношение минимально.

2.3.1. Max-алгебра

Решение многокритериальной задачи парных сравнений на основе log-чебышевской аппроксимации записывается в терминах алгебраической системы, которая обычно называется max-алгеброй. В этой системе для всех неотрицательных вещественных чисел задана операция сложения, которая обозначается символом $\oplus$ и определяется как вычисление максимума так, что $x \oplus y = \max(x, y)$. Операция умножения обозначается и определяется как обычно, а при записи выражений знак операции умножения $\times$ опускается.

Операции над матрицами и векторами с элементами из множества неотрицательных вещественных чисел выполняется поэлементно по обычным правилам с заменой арифметического сложения $+$ на операцию $\oplus$. Нулевая и единичная матрицы, а также нулевой вектор имеют обычный вид. Единичная матрица обозначается символом $\boldsymbol{I}$.

Для квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка N след вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus a_{22} \oplus \cdots \oplus a_{NN} = \bigoplus_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ находится как сумма

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/N}(\boldsymbol{A}^N) = \bigoplus_{i=1}^{N} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$

При условии $\lambda \leq 1$ для матрицы $\boldsymbol{A}$ определена матрица Клини в виде

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{N-1} = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{A}^i.$$

Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определен сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$ если $x_i \neq 0$, и $x_i^- = 0$ в противном случае.

Норма вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$ порядка N вычисляется по формуле

$$\|\boldsymbol{x}\| = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_N = \bigoplus_{i=1}^{N} x_i.$$

2.3.2. Решение многокритериальной задачи парных сравнений

В этом разделе описывается вычислительная процедура решения задачи парных сравнений на основе log-чебышевской аппроксимации с применением тропической алгебры [9–11]. Процедура включает следующие шаги, где все выражения записаны и должны вычисляться в терминах max-алгебры с операцией сложения $\oplus$, которая выполняется как вычисление максимума.

1. Определение для матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев наилучшего и наихудшего дифференцирующих векторов весов.

   1.1. Построение генерирующей матрицы $\boldsymbol{D}$ для векторов весов критериев:

   $$\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \bigoplus_{k=0}^{K-1} (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^k, \qquad \lambda = \bigoplus_{k=1}^{K} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{C}^k). \tag{3}$$

   1.2. Вычисление по матрице $\boldsymbol{D}$ со столбцами $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_K$ наилучшего вектора весов как наименьшего (при покомпонентном сравнении) на множестве векторов:

   $$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}_l \|\boldsymbol{d}_l\|^{-1}, \qquad l = \arg\max_{1 \leq k \leq K} \|\boldsymbol{d}_k\| \|\boldsymbol{d}_k^-\|. \tag{4}$$

   Если наименьший вектор не единственный, то в качестве наилучших берутся все векторы, которые не доминируют над каким-либо другим вектором.

   1.3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{D}$ наихудшего дифференцирующего вектора весов:

   $$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{D})^-. \tag{5}$$

2. Определение для матриц $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_K$ парных сравнений альтернатив и вектора весов $\boldsymbol{w} = (w_k)$ наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив.

   2.1. Вычисление взвешенной суммы матриц парных сравнений альтернатив:

   $$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{k=1}^{K} w_k \boldsymbol{A}_k. \tag{6}$$

   2.2. Построение генерирующей матрицы $\boldsymbol{Q}$ для векторов рейтингов альтернатив:

   $$\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^* = \bigoplus_{n=0}^{N-1} (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^n, \qquad \mu = \bigoplus_{n=1}^{N} \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{P}^n). \tag{7}$$

2.3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{Q}$ со столбцами $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$ наилучшего вектора рейтингов альтернатив как наименьшего на множестве векторов:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_m \|\boldsymbol{q}_m\|^{-1}, \qquad m = \arg\max_{1 \leq n \leq N} \|\boldsymbol{q}_n\| \|\boldsymbol{q}_n^{-}\|. \tag{8}$$

Если наименьший вектор не единственный, то в качестве наилучших берутся все векторы, которые не доминируют над каким-либо другим вектором.

3. Определение для матриц $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_K$ парных сравнений альтернатив и вектора весов $\boldsymbol{v} = (v_k)$ наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив.

3.1. Вычисление взвешенной суммы матриц парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{R} = \bigoplus_{k=1}^{K} v_k \boldsymbol{A}_k. \tag{9}$$

3.2. Построение генерирующей матрицы $\boldsymbol{S}$ для векторов рейтингов альтернатив:

$$\boldsymbol{S} = (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^{*} = \bigoplus_{n=0}^{N-1} (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^{n}, \qquad \nu = \bigoplus_{n=1}^{N} \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{R}^{n}). \tag{10}$$

3.3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{S}$ наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив:

$$\boldsymbol{y} = (\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{S})^{-}. \tag{11}$$

3. ПРИМЕРЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В этом разделе рассматриваются многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений, которые изучались в работах [17–20]. Представлены примеры решения этих задач с помощью методов анализа иерархий, взвешенных геометрических средних и log-чебышевской аппроксимации.

Сначала приведено достаточно подробное решение для задачи небольшой размерности с тремя альтернативами и четырьмя критериями. Для других задач, имеющих более высокую размерность, решения представлены в сокращенной форме.

3.1. Выбор автомобиля

Рассмотрим задачу выбора автомобиля из $N = 3$ альтернатив в соответствии с $K = 4$ критериями, описанную в [17]. Критерии сравнения автомобилей включают:

1) престижность,
2) стоимость,
3) экономичность расхода топлива,
4) уровень комфорта.

Матрица парных сравнений критериев задана в виде

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 4 & 1 & 3 & 3/2 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 2 & 2/3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравниваются автомобили следующих марок: Acura TL, Toyota Camry и Honda Civic. Результаты парных сравнений по каждому из критериев составляют матрицы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 1/8 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 \\ 4 & 1 & 1/5 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.1. Метод анализа иерархий

Решение с помощью метода анализа иерархий требует нахождения нормированных относительно суммы элементов главных собственных векторов для всех матриц парных сравнений. Для матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев имеем собственный вектор

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0987 & 0{,}4250 & 0{,}1686 & 0{,}3078 \end{pmatrix}^T.$$

Собственные векторы матриц парных сравнений $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$ записываются в виде

$$\boldsymbol{x}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}7071 \\ 0{,}0702 \\ 0{,}2227 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}0633 \\ 0{,}1939 \\ 0{,}7429 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 0{,}1818 \\ 0{,}2727 \\ 0{,}5455 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}7049 \\ 0{,}2109 \\ 0{,}0841 \end{pmatrix}.$$

После вычисления вектора рейтингов альтернатив по формуле (1), нормирования относительно максимального элемента и определения порядка альтернатив, получим

$$\boldsymbol{x} = w_1\boldsymbol{x}_1 + w_2\boldsymbol{x}_2 + w_3\boldsymbol{x}_3 + w_4\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}3443 \\ 0{,}2002 \\ 0{,}4555 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0{,}7558 \\ 0{,}4395 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2.$$

3.1.2. Метод взвешенных геометрических средних

Для применения метода взвешенных геометрических средних найдем векторы геометрических средних для элементов строк матриц парных сравнений. Матрица парных сравнений критериев $\boldsymbol{C}$ имеет нормированный относительно суммы элементов вектор геометрических средних в форме

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0964 & 0{,}4396 & 0{,}1622 & 0{,}3018 \end{pmatrix}^T.$$

Вычисляя векторы геометрических средних для $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$, получим

$$\boldsymbol{x}_1 \approx \begin{pmatrix} 3{,}1748 \\ 0{,}3150 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}3029 \\ 0{,}9283 \\ 3{,}5569 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 0{,}6057 \\ 0{,}9086 \\ 1{,}8171 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 3{,}0366 \\ 0{,}9086 \\ 0{,}3625 \end{pmatrix}.$$

Вектор рейтингов альтернатив, найденный по формуле (2), результат его нормирования по максимальному элементу и порядок альтернатив записываются в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11}^{w_1} x_{12}^{w_2} x_{13}^{w_3} x_{14}^{w_4} \\ x_{21}^{w_1} x_{22}^{w_2} x_{23}^{w_3} x_{24}^{w_4} \\ x_{31}^{w_1} x_{32}^{w_2} x_{33}^{w_3} x_{34}^{w_4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8523 \\ 0{,}8281 \\ 1{,}4167 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0{,}6016 \\ 0{,}5845 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2.$$

3.1.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

В этом разделе описывается последовательность расчетов согласно процедуре, приведенной в разделе 2.3.2, где все вычисления выполняются в терминах max-алгебры, для которой операция сложения $\oplus$ выполняется как max, а умножения — как обычно.

Для того, чтобы определить веса критериев, необходимо найти степени матрицы парных сравнений критериев $\boldsymbol{C}$. В результате последовательных вычислений получим

$$\boldsymbol{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 3/2 & 1/2 \\ 9 & 1 & 9/2 & 2 \\ 3 & 3/4 & 1 & 3/2 \\ 9 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^3 = \begin{pmatrix} 9/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 27/2 & 9/4 & 6 & 9/2 \\ 3 & 1 & 9/2 & 3/2 \\ 9 & 9/4 & 3 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^4 = \begin{pmatrix} 9/2 & 9/8 & 3/2 & 9/4 \\ 18 & 27/8 & 27/2 & 27/4 \\ 27/2 & 3/2 & 9/2 & 3/2 \\ 9 & 3 & 27/2 & 9/2 \end{pmatrix}.$$

С помощью формул (3) определим спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{C}$ в виде

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{C} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{C}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{C}^3) \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{C}^4) = 2^{-1/3}3^{2/3} \approx 1{,}6510.$$

Затем составим матрицу $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$ и найдем для нее матрицу Клини

$$\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/4\lambda & \lambda/3 & 1/2\lambda \\ 2\lambda & 1 & 3/\lambda & 1 \\ 3/\lambda & \lambda/6 & 1 & \lambda/3 \\ 2\lambda & 1/2 & 3/\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить наилучший дифференцирующий вектор весов сначала вычислим

$$\|\boldsymbol{d}_1\|\|\boldsymbol{d}_1^-\| = \|\boldsymbol{d}_3\|\|\boldsymbol{d}_3^-\| = \|\boldsymbol{d}_4\|\|\boldsymbol{d}_4^-\| = 2\lambda \approx 3.3019, \qquad \|\boldsymbol{d}_2\|\|\boldsymbol{d}_2^-\| = 4\lambda \approx 6{,}6039.$$

Учитывая, что условию в (4) удовлетворяет только второй столбец, находим наилучший вектор весов в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}_2\|\boldsymbol{d}_2\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4\lambda & 1 & \lambda/6 & 1/2 \end{pmatrix}^T.$$

Вычисление наихудшего дифференцирующего вектора весов по формуле (5) дает

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{D})^- = \begin{pmatrix} 1/2\lambda & 1 & \lambda/3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Составим взвешенную сумму (6) матриц парных сравнений альтернатив

$$\boldsymbol{P} = w_1\boldsymbol{A}_1 \oplus w_2\boldsymbol{A}_2 \oplus w_3\boldsymbol{A}_3 \oplus w_4\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7/2 \\ 4 & 1 & 3/2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (7), сначала для матрицы $\boldsymbol{P}$ найдем степени

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 63/2 & 35/2 & 7/2 \\ 27/2 & 8 & 14 \\ 20 & 18 & 63/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix} 70 & 63 & 441/4 \\ 126 & 70 & 189/4 \\ 567/2 & 315/2 & 70 \end{pmatrix},$$

а затем вычислим ее спектральный радиус

$$\mu = \operatorname{tr}\boldsymbol{P} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{P}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{P}^3) = 2^{-1/2}3 \cdot 7^{1/2} \approx 5{,}6125.$$

Составим матрицу $\mu^{-1}\boldsymbol{P}$ и построим матрицу Клини

$$\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^* = \begin{pmatrix} 1 & 5/9 & \mu/9 \\ 4/\mu & 1 & 4/9 \\ 2\mu/7 & 5/\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить наилучший дифференцирующий вектор альтернатив по формулам (8), найдем

$$\|\boldsymbol{q}_1\|\|\boldsymbol{q}_1^-\| = \|\boldsymbol{q}_3\|\|\boldsymbol{q}_3^-\| = 9/4, \qquad \|\boldsymbol{q}_2\|\|\boldsymbol{q}_2^-\| = 9/5.$$

Условию в (8) удовлетворяют первый и третий столбцы, которые приводят к одному наилучшему вектору и соответствующему ему упорядочению альтернатив в форме

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1\|\boldsymbol{q}_1\|^{-1} = \boldsymbol{q}_3\|\boldsymbol{q}_3\|^{-1} = \begin{pmatrix} \mu/9 \\ 4/9 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}6363 \\ 0{,}4444 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2.$$

Теперь рассмотрим взвешенную сумму (9), которая принимает вид

$$\boldsymbol{R} = v_1\boldsymbol{A}_1 \oplus v_2\boldsymbol{A}_2 \oplus v_3\boldsymbol{A}_3 \oplus v_4\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (10) для матрицы $\boldsymbol{R}$ найдем степени

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{pmatrix} 63 & 35 & 12 \\ 27 & 16 & 28 \\ 20 & 36 & 63 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}^3 = \begin{pmatrix} 140 & 252 & 441 \\ 252 & 140 & 189 \\ 567 & 315 & 140 \end{pmatrix}$$

и определим спектральный радиус

$$\nu = \operatorname{tr}\boldsymbol{R} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{R}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{R}^3) = 3 \cdot 7^{1/2} \approx 7{,}9373.$$

Для матрицы $\nu^{-1}\boldsymbol{R}$ найдем матрицу Клини

$$\boldsymbol{S} = (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^* = \begin{pmatrix} 1 & 5/9 & \nu/9 \\ 4/\nu & 1 & 4/9 \\ \nu/7 & 5/\nu & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате вычисления по формуле (11) наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив и определения порядка альтернатив получим:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{S})^- = \begin{pmatrix} 7/\nu \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8819 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1.$$

Заметим, что все полученные векторы рейтингов альтернатив указывают на третью альтернативу (Honda Civic) как наиболее предпочтительную. Решения с помощью методов анализа иерархий и взвешенных геометрических средних, а также наилучшее дифференцирующее решение метода log-чебышевской аппроксимации устанавливают один и тот же порядок альтернатив. Упорядочение на основе наихудшего дифференцирующего решения меняет местами первую и вторую альтернативы (Acura TL и Toyota Camry).

3.2. Выбор дома

Найдем решение для задачи из работы [18] о выборе из $N = 3$ альтернатив при покупке дома, которые сравниваются по $K = 8$ критериям. Выбраны следующие критерии:

1) размер дома (кладовая, количество комнат, площадь комнат, общая площадь дома),
2) общественный транспорт (расположение вблизи автобусных остановок),
3) городской район (небольшое автомобильное движение, безопасность, красивый вид, низкие налоги, общее состояние района),
4) возраст дома,
5) состояние двора (размеры двора, расстояние до соседей),
6) бытовая техника (посудомоечная машина, измельчитель мусора, кондиционер, сигнализация и т. п.),
7) общее состояние (стены, ковровые покрытия, шторы, электропроводка),
8) возможности финансирования (ипотека, скидки продавца, банка).

Результаты парных сравнений критериев составляют матрицу

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы парных сравнений альтернатив в соответствии с критериями имеют вид

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 1/6 & 1 & 4 \\ 1/8 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/5 \\ 1/7 & 1 & 1/8 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1/8 & 1 & 1/4 \\ 1/6 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1/8 & 1 & 1/5 \\ 1/6 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.1. Метод анализа иерархий

Чтобы найти решение задачи, вычисляется нормированный главный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{C}$ и нормированные главные собственные векторы матриц $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_8$. Затем по формуле (1) определяется вектор рейтингов альтернатив. Полученный вектор рейтингов альтернатив, нормированный вектор рейтингов и соответствующий порядок альтернатив записываются в виде

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3959 \\ 0{,}3407 \\ 0{,}2634 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8606 \\ 0{,}6652 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.2.2. Метод взвешенных геометрических средних

После вычисления нормированного вектора геометрических средних для строк матрицы $\boldsymbol{C}$ и векторов геометрических средних для матриц $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_8$ вектор рейтингов альтернатив находится по формуле (2). Определение вектора рейтингов, нормированного вектора рейтингов и порядка альтернатив дает следующий результат:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1{,}0234 \\ 1{,}0302 \\ 0{,}9485 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0{,}9933 \\ 1 \\ 0{,}9207 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.2.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

Для определения вектора весов критериев сначала по формулам (3) вычисляется спектральный радиус λ матрицы $\boldsymbol{D}$, составляется матрица $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$ и находится матрица Клини $\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$. Полученные результаты записываются в виде

$$\lambda = 3\cdot 2^{1/3} \approx 3{,}7798, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 3/\lambda & 7/3 & 5/3 & 5/3 & \lambda/3 & 1/6 \\ 1/9 & 1 & 1/3\lambda & 5/\lambda & 3/\lambda & 3/\lambda & \lambda/27 & 5\lambda/432 \\ \lambda/3 & 5\lambda/9 & 1 & 7\lambda/9 & 5\lambda/9 & 5\lambda/9 & 6/\lambda & \lambda/18 \\ 1/18 & 5/54 & 1/6\lambda & 1 & 5/54 & 5/54 & \lambda/54 & 1/8\lambda \\ 1/9 & 5/27 & 1/3\lambda & 3/\lambda & 1 & 5/27 & \lambda/27 & 1/6\lambda \\ 1/12 & 5/36 & 1/4\lambda & 4/\lambda & 2/\lambda & 1 & \lambda/36 & 1/6\lambda \\ 3/\lambda & 5/\lambda & \lambda/6 & 7/\lambda & 5/\lambda & 5/\lambda & 1 & 1/2\lambda \\ 5/3 & 25/9 & 5/\lambda & 35/9 & 25/9 & 25/9 & 5\lambda/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наилучший дифференцирующий вектор весов устанавливается по формулам (4):

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}_8\|\boldsymbol{d}_8\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5\lambda/432 & \lambda/18 & 1/8\lambda & 1/6\lambda & 1/6\lambda & 1/2\lambda & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Вычисление наихудшего дифференцирующего вектора весов по формуле (5) дает:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3/5 & 9/25 & \lambda/5 & 9/35 & 9/25 & 9/25 & 9/5\lambda & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Определение взвешенной суммы матриц парных сравнений альтернатив по формуле (6) для нахождения наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив приводит к следующему результату:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 4\lambda/9 & 4/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 2\lambda/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления по формулам (7) спектрального радиуса μ матрицы $\boldsymbol{P}$ и определения матрицы Клини $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$ получим

$$\mu = 2^{7/6}\,3^{-1/2}\,7^{1/2} \approx 3{,}4292, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/7 & 3/7 \\ 7/\mu & 1 & 3/\mu \\ 5/\mu & 5/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив с помощью формул (8). Получим вектор рейтингов и порядок альтернатив виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_3\|\boldsymbol{q}_3\|^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 3/\mu \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4286 \\ 0{,}8748 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1.$$

Для нахождения наихудшего дифференцирующего вектора в соответствии с (9) составим взвешенную сумму матриц

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 8\lambda/5 & 24/5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 4\lambda/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (10) найдем спектральный радиус ν матрицы $\boldsymbol{R}$ и построим матрицу Клини $\boldsymbol{S} = (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^{*}$. В результате получим

$$\nu = 2^{5/3}\, 3^{1/2}\, 5^{-1/2}\, 7^{1/2} \approx 6{,}5064, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & \nu/7 & \nu/7 \\ 7/\nu & 1 & 1 \\ 1 & \nu/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (11), находим наихудший дифференцирующий вектор рейтингов и соответствующий порядок альтернатив в виде

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \nu/7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}9295 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1.$$

В этой задаче применяемые методы решения задачи парных сравнений по-разному определяют наиболее предпочтительную альтернативу. Учитывая, что вторая альтернатива чаще других ставится на первое или второе место, эту альтернативу можно рекомендовать для выбора в качестве возможного решения.

3.3. Выбор компании для приобретения

Рассмотрим задачу из работы [19] о выборе компании для приобретения (поглощения) из $N = 3$ альтернатив. При оценке компаний используются $K = 7$ критериев:

1) финансовые показатели,
2) потенциал роста,
3) климат трудовых отношений,
4) конкурентоспособность,
5) организационная культура,
6) размер компании,
7) отраслевая общность.

Матрица парных сравнений критериев имеет вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 1/3 & 1 & 9 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1/7 & 1/9 & 1 & 1/7 & 1/5 & 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 7 & 1 & 1/4 & 7 & 1/3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 2 & 1/7 & 1/5 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1/3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты сравнений альтернатив по каждому критерию образуют матрицы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1/7 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1/6 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/5 \\ 9 & 1 & 4 \\ 5 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.1. Метод анализа иерархий

Применение метода анализа иерархий приводит к следующим результатам:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3946 \\ 0{,}3640 \\ 0{,}2414 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}9225 \\ 0{,}6118 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.3.2. Метод взвешенных геометрических средних

Метод взвешенных геометрических средних приводит к решению в виде

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1{,}0391 \\ 0{,}9227 \\ 1{,}0430 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0{,}9963 \\ 0{,}8847 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1.$$

3.3.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

В результате вычисления спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{C}$ получим

$$\lambda = 2^{1/5}\, 5^{-1/5}\, 7^{1/5}\, 9^{1/5} \approx 1{,}9067.$$

Построим матрицу Клини $\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$ в виде

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3/\lambda & 25\lambda^2/9 & 5/\lambda & 5\lambda/9 & 35/\lambda^2 & 5/3 \\ 5\lambda^2/42 & 1 & 5 & 5\lambda^2/14 & 1/\lambda & 5\lambda/2 & 3/\lambda^2 \\ \lambda^2/42 & \lambda/14 & 1 & \lambda^2/14 & 1/5\lambda & \lambda/2 & 3/5\lambda^2 \\ 1/3 & 1/\lambda & 14/\lambda^2 & 1 & \lambda^2/9 & 7/\lambda & \lambda/3 \\ 3/\lambda^2 & 5\lambda^2/14 & 5\lambda & 9/\lambda^2 & 1 & 5\lambda^2/2 & 3/\lambda \\ \lambda/21 & 1/7 & 2/\lambda & \lambda/7 & 2/5/\lambda^2 & 1 & \lambda^2/21 \\ 1/\lambda & 3/\lambda^2 & 5\lambda^2/3 & 3/\lambda & \lambda/3 & 21/\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве наилучшего дифференцирующего вектора весов берется

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}_1 \|\boldsymbol{d}_1\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5\lambda^2/42 & \lambda^2/42 & 1/3 & 3/\lambda^2 & \lambda/21 & 1/\lambda \end{pmatrix}^T.$$

Вычисляя наихудший дифференцирующий вектор весов, получим

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/3 & 9/25\lambda^2 & \lambda/5 & 9/5\lambda & \lambda^2/35 & 3/5 \end{pmatrix}^T.$$

С помощью вектора $\boldsymbol{w}$ составим взвешенную сумму матриц сравнений альтернатив

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 27/\lambda^2 & 1 & 12/\lambda^2 \\ 15/\lambda^2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\boldsymbol{P}$ найдем спектральный радиус и построим матрицу Клини

$$\mu = 2^{-1/5}\, 3^{21/10}\, 5^{1/5}\, 7^{-1/5} \approx 8{,}1757, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 9/\mu & 4/9 \\ \mu/9 & 1 & 4\mu/81 \\ 5/9 & 5/\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив дает

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_3 \|\boldsymbol{q}_3\|^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 4\mu/81 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4444 \\ 0{,}4037 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2.$$

Используя вектор $\boldsymbol{v}$, составим взвешенную сумму матриц сравнений альтернатив

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 81/5\lambda & 1 & 36/5\lambda \\ 9/\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате вычисления спектрального радиуса для $\boldsymbol{R}$ и матрицы Клини имеем

$$\nu = 2^{-1/10} 3^{14/5} 5^{-2/5} 7^{-1/10} \approx 8{,}7446, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 9/\nu & 4/9 \\ \nu/9 & 1 & 4\nu/81 \\ 5/9 & 5/\nu & 1 \end{pmatrix}.$$

Наихудший дифференцирующий вектор рейтингов и порядок альтернатив записываются в следующем виде:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \nu/9 \\ 9/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9716 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2.$$

Учитывая, что два метода (метод взвешенных геометрических средних и метод log-чебышевской аппроксимации) из трех приписывают наибольший рейтинг третьей альтернативе, эту альтернативу можно рекомендовать как наиболее предпочтительную. Заметим, что такое решение будет противоречить результату применения метода анализа иерархий, который присваивает наибольший рейтинг первой альтернативе.

3.4. Выбор высшего учебного заведения

В этом разделе рассматривается задача, представленная в [20], о выборе из $N = 5$ альтернатив высших учебных заведений, которые сравниваются по $K = 6$ критериям:

1) академическая среда и автономия,
2) статус и чувство принадлежности,
3) долгосрочные перспективы,
4) наставничество студентов,
5) открытость взаимодействия,
6) поддержка и сопровождение.

Результаты парных сравнений критериев составляют матрицу

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1 & 2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы парных сравнений альтернатив имеют вид

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1/2 & 4 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1/3 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 1/6 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3 \\ 1/3 & 4 & 1 & 1/3 & 5 \\ 1/2 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/3 & 2 & 8 \\ 1/7 & 1 & 1/5 & 1/4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 9 \\ 1/2 & 4 & 1/4 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/4 & 1/9 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1/3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1/2 & 1/5 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/7 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/8 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1/4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 9 & 9 \\ 1/2 & 1/5 & 1/9 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1/5 & 1 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.1. Метод анализа иерархий

Вычисления в соответствии с методом анализа иерархий дают следующий результат:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0{,}2235 \\ 0{,}1979 \\ 0{,}2423 \\ 0{,}2914 \\ 0{,}0450 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} \Big/ \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0{,}7670 \\ 0{,}6790 \\ 0{,}8315 \\ 1 \\ 0{,}1546 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

3.4.2. Метод взвешенных геометрических средних

Решение по методу взвешенных геометрических средних имеет вид

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1{,}2266 \\ 1{,}0857 \\ 1{,}4519 \\ 1{,}6949 \\ 0{,}3051 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} \Big/ \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0{,}7238 \\ 0{,}6406 \\ 0{,}8566 \\ 1 \\ 0{,}1800 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

3.4.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

В результате вычисления спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{C}$ и построения матрицы Клини получим

$$\lambda = 2^{2/5}\,3^{1/5} \approx 1{,}6438, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2/\lambda & 6/\lambda^2 & 2\lambda^2 & 6\lambda & 3\lambda^2/2 \\ \lambda/2 & 1 & 3/\lambda & 12/\lambda^2 & 3\lambda^2 & 9/\lambda^2 \\ \lambda^2/6 & \lambda/3 & 1 & 4/\lambda & 12/\lambda^2 & 3/\lambda \\ 1/3\lambda^2 & \lambda^2/18 & \lambda/6 & 1 & 2/\lambda & 1/2 \\ 1/6\lambda & 1/3\lambda^2 & \lambda^2/12 & \lambda/3 & 1 & \lambda/4 \\ 2/3\lambda^2 & \lambda^2/9 & \lambda/3 & 4/3 & 4\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение наилучшего вектора весов критериев дает следующий вектор:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}_1 \|\boldsymbol{d}_1\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 & \lambda^2/6 & 1/3\lambda^2 & 1/6\lambda & 2/3\lambda^2 \end{pmatrix}^T.$$

Наихудший дифференцирующий вектор весов критериев записывается в виде

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 & \lambda^2/6 & 1/2\lambda^2 & 1/6\lambda & 2/3\lambda^2 \end{pmatrix}^T.$$

После составления на основе вектора весов $\boldsymbol{w}$ взвешенной суммы матриц парных сравнений альтернатив получим

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda & 3\lambda/2 & \lambda & 7\lambda/2 \\ 3 & 1 & 2 & 4/\lambda^2 & 4 \\ 2 & 2\lambda & 1 & 2\lambda^2/3 & 5\lambda/2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & \lambda/6 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{P}$ и матрицу Клини $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$, получим

$$\mu = 2^{1/5}\, 3^{11/10} \approx 3{,}8463, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/3 & 2/3 & 108/\mu^4 & 7\mu/18 \\ 3/\mu & 1 & 2/\mu & 324/\mu^5 & 7/6 \\ 4\mu^2/81 & 4\mu^3/243 & 1 & 2\mu^3/243 & 14\mu^3/729 \\ 6/\mu & 2 & 4/\mu & 1 & 7/3 \\ 1/2\mu & 1/6 & 1/3\mu & 54/\mu^5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив приводит к следующему результату:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_4 \|\boldsymbol{q}_4\|^{-1} = \begin{pmatrix} 108/\mu^4 \\ 324/\mu^5 \\ 2\mu^3/243 \\ 1 \\ 54/\mu^5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4935 \\ 0{,}3849 \\ 0{,}4683 \\ 1 \\ 0{,}0642 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

Вычисление взвешенной суммы на основе вектора $\boldsymbol{v}$ показывает, что выполняется равенство матриц $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}$. Учитывая, что тогда $\nu = \mu$ и $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$, наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив находится на основе матрицы $\boldsymbol{Q}$ в виде

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mu/6 \\ 1/2 \\ \mu/4 \\ 1 \\ 3/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}6410 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}9616 \\ 1 \\ 0{,}4286 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

Для рассматриваемой задачи все решения одинаково определяют наилучшую и наихудшую альтернативы и являются в этом смысле вполне согласованными.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для ряда известных в литературе многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений приведены решения, полученные с помощью метода анализа иерархий, метода взвешенных геометрических средних, а также метода, использующего log-чебышевскую аппроксимацию матриц парных сравнений.

Показано, что упорядочение альтернатив на основе рейтингов, полученных разными методами, может различаться. Для решения проблемы выбора наилучшей альтернативы в этом случае представляется целесообразным провести анализ и сопоставление результатов применения нескольких методов. Тогда в качестве наилучшей естественно выбирать такую альтернативу, которая в результате применения этих методов получает наивысший рейтинг чаще других альтернатив.

Список литературы

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
2. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.
3. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.
4. *Saaty T. L.* A scaling method for priorities in hierarchical structures // J. Math. Psych. 1977. Vol. 15, № 3. P. 234–281. doi:10.1016/0022-2496(77)90033-5
5. *Saaty T. L.* On the measurement of intangibles: A principal eigenvector approach to relative measurement derived from paired comparisons // Notices Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 60, № 2. P. 192–208. doi:10.1090/noti944
6. *Narasimhan R.* A geometric averaging procedure for constructing supertransitive approximation to binary comparison matrices // Fuzzy Sets and Systems. 1982. Vol. 8, № 1. P. 53–61. doi:10.1016/0165-0114(82)90029-X
7. *Crawford G., Williams C.* A note on the analysis of subjective judgment matrices // J. Math. Psych. 1985. Vol. 29, № 4. P. 387–405. doi:10.1016/0022-2496(85)90002-1
8. *Barzilai J., Cook W. D., Golany B.* Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives // Oper. Res. Lett. 1987. Vol. 6, № 3. P. 131–134. doi:10.1016/0167-6377(87)90026-5
9. *Krivulin N., Sergeev S.* Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31–51. doi:10.1016/j.fss.2018.10.013.
10. *Кривулин Н. К., Агеев В. А.* Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. 2019. Т. 15, вып. 4. С. 472–488. doi:10.21638/11702/spbu10.2019.405
11. *Krivulin N.* Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation // Int. J. Approx. Reason. 2024. Vol. 169. P. 109168. doi:10.1016/j.ijar.2024.109168.
12. *Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.
13. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
14. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations over Them. New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. 256 p. doi:10.1007/978-94-017-0383-3
15. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.
16. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 255 с.
17. *Saaty T. L.* The modern science of multicriteria decision making and its practical applications: The AHP / ANP approach // Oper. Res. 2013. Vol. 61, № 5. P. 1101–1118. doi:10.2307/24540487

18. *Saaty T. L.* How to make a decision: The analytic hierarchy process // European J. Oper. Res. 1990. Vol. 48, № 1. P. 9–26. doi:10.1016/0377-2217(90)90057-I
19. *Bagchi P., Rao R. P.* Decision making in mergers: An application of the analytic hierarchy process // Manag. Decis. Econ. 1992. Vol. 13, № 2. P. 91–99. doi:10.1002/mde.4090130202
20. *Goshal D. S. K., Naskar S. K., Bose D. D.* AHP in assessing performance of diploma institutes — A case study // Journal of Technical Education and Training. 2012. Vol. 3. P. 67–81.
21. *Кривулин Н. К., Абильдаев Т., Горшечникова В. Д., Капаца Д., Магдич Е. А., Мандрикова А. А.* О решении многокритериальных задач принятия решений на основе парных сравнений // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. P. 27–58. doi:10.32603/2071-2340-2020-2-27-58
22. *Кривулин Н. К., Булгакова Д. С., Григорьев Д. А., Нагуманова К. И., Приньков А. С., Салова Я. А., Филатова А. А.* Решение многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 2. С. 5–29. doi:10.32603/2071-2340-2024-2-5-29

Поступила в редакцию 01.07.2025, окончательный вариант — 30.07.2025.

Кривулин Николай Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры статистического моделирования, СПбГУ, ✉ nkk@math.spbu.ru

Яковлев Денис Михайлович, студент, СПбГУ, denis.yakovlev03@bk.ru

Computer tools in education, 2025

№ 2: 5–23

http://cte.eltech.ru

doi:10.32603/2071-2340-2025-2-5-23

Solving Multicriteria Problems of Rating Alternatives Based on Pairwise Comparisons. Part II

Krivulin N. K.[1], Doctor sc., Professor, ✉ nkk@math.spbu.ru, orcid.org/0000-0003-3070-9355
Yakovlev D. M.[1], Student, denis.yakovlev03@bk.ru

[1]Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya emb., 199034, Saint Petersburg, Russia

Abstract

A number of well-known multicriteria problems of evaluating alternatives based on pairwise comparisons are considered. In these problems, given matrices containing results of paired comparisons of criteria and alternatives, one needs to find an absolute rating (priority, weight) of each alternative for decision making. Solutions to the problems are presented obtained using the method of analytical hierarchy process, the method of weighted geometric means, and the method of log-Chebyshev approximation of pairwise comparison matrices. The results obtained show that for some problems, solutions found by different methods may significantly differ from each other. In such cases, the decision to choose the best alternative may be based on additional analysis and comparison of the results of the problem solution obtained by all the methods used.

Keywords: *multicriteria decision making problems, pairwise comparisons, analytical hierarchy process, tropical mathematics.*

Citation: N. K. Krivulin and D. M. Yakovlev, “Solving Multicriteria Problems of Rating Alternatives Based on Pairwise Comparisons. Part II,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 5–23, 2025 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2025-2-5-23

References

1. V. V. Podinovskii and V. D. Nogin, *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions to multicriteria problems], Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
2. T. Saati, *Prinyatie reshenij. Metod analiza ierarkhij* [Decision making. Hierarchy analysis method], Moscow: Radio i svyaz', 1993 (in Russian).
3. V. D. Nogin, *Prinyatie reshenii v mnogokriterial'noi srede: kolichestvennyi podkhod* [Decision making in a multicriteria environment: a quantitative approach], Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
4. T. L. Saaty, “A scaling method for priorities in hierarchical structures,” *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 15, no. 3, pp. 234–281, 1977; doi:10.1016/0022-2496(77)90033-5
5. T. L. Saaty, “On the measurement of intangibles: A principal eigenvector approach to relative measurement derived from paired comparisons,” Notices of the American Mathematical Society, vol. 60, no. 2, pp. 192–208, 2013; doi:10.1090/noti944
6. R. Narasimhan, “A geometric averaging procedure for constructing supertransitive approximation to binary comparison matrices,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 53–61, 1982; doi:10.1016/0165-0114(82)90029-X
7. G. Crawford and C. Williams, “A note on the analysis of subjective judgment matrices,” *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 29, no. 4, pp. 387–405, 1985; doi:10.1016/0022-2496(85)90002-1
8. J. Barzilai, W. D. Cook, and B. Golany, “Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives,” *Operations Research Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 131–134, 1987; doi:10.1016/0167-6377(87)90026-5
9. N. Krivulin and S. Sergeev, “Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 377, pp. 31–51, 2019; doi:10.1016/j.fss.2018.10.013
10. N. K. Krivulin and V. A. Ageev, “Methods of tropical optimization in multicriteria problems of rating alternatives from pairwise comparisons,” *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 15, no. 4, pp. 472–488, 2019 (in Russian); doi:10.21638/11702/spbu10.2019.405
11. N. Krivulin, “Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation,” *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 169, p. 109168, 2024; doi:10.1016/j.ijar.2024.109168
12. F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat, *Synchronization and linearity*, Wiley Series in Probability and Statistics, Chichester, UK: Wiley, 1993.
13. V. P. Maslov and V. N. Kolokol'tsov, “Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii” [Idempotent analysis and its application in optimal control], Moscow: Fizmatlit, 1994 (in Russian).
14. J. S. Golan, *Semirings and affine equations over them*, Mathematics and Its Applications, vol. 556, New York: Springer, 2003; doi:10.1007/978-94-017-0383-3
15. B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. van der Woude, *Max Plus at Work*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2006.
16. N. K. Krivulin, *Metody idempotentnoi algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* [Idempotent algebra methods in modeling and analysis of complex systems], St. Petersburg: Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2009.
17. T. L. Saaty, “The modern science of multicriteria decision making and its practical applications: The AHP/ANP approach,” *Operations Research*, vol. 61, no. 5, pp. 1101–1118, 2019 (in Russian); doi:10.2307/24540487
18. T. L. Saaty, “How to make a decision: The analytic hierarchy process,” *European Journal of Operational Research*, vol. 48, no. 1, pp. 9–26, 1990; 10.1016/0377-2217(90)90057-I
19. P. Bagchi and R. P. Rao, “Decision making in mergers: An application of the analytic hierarchy process,” Managerial and Decision Economics, vol. 13, no. 2, pp. 91–99, 1992; doi:10.1002/mde.4090130202

20. D. S. K. Goshal, S. K. Naskar, and D. D. Bose, "AHP in assessing performance of diploma institutes — A case study," *Journal of Technical Education and Training*, vol. 3, pp. 67–81, 2012.
21. N. K. Krivulin, T. Abildaev, V. D. Gorshechnikova, D. Kapatsa, E. A. Magdich, and A. A. Mandrikova, "On solving multicriteria decision making problems based on pairwise comparisons," *Computer Tools in Education*, no. 2, pp. 27–58, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-2-27-58
22. N. K. Krivulin, D. S. Bulgakova, D. A. Grigoriev, K. I. Nagumanova, A. S. Prinkov, Y. A. Salova, and A. A. Filatova, "Solving multicriteria problems of rating alternatives based on pairwise comparisons," *Computer Tools in Education*, no. 2, pp. 5–29, 2024 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-2-5-29

Received 01-07-2025, the final version — 30-07-2025.

Nikolai Krivulin, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, Department of Statistical Modeling, St. Petersburg State University, ✉ **nkk@math.spbu.ru**

Denis Yakovlev, Student, Saint Petersburg State University, denis.yakovlev03@bk.ru