



V Конференция  
математических центров России  
11 – 16 августа

# Материалы докладов



Красноярск — 2025



Красноярский  
математический центр



СИБИРСКИЙ  
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

SIBERIAN  
FEDERAL  
UNIVERSITY



# V Конференция математических центров России

11-16 августа 2025 г.

Материалы докладов

Красноярск – 2025

УДК  
ББК

Материалы докладов V Конференции математических центров России. – Электронные данные. – Красноярск: СФУ, 2025. – 12 Мб; 376 с. – Режим доступа: <https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-6054684-0-0

Содержит статьи по материалам докладов, представленных на V Конференции математических центров России, г. Красноярск, 11-16 августа 2025 г.

УДК 538.9+53.09+53.04+539+532  
ББК 22.25

*Издаётся по решению учёного совета ИВМ СО РАН.*

*Ответственные за выпуск: В. Б. Бекежанова, И. В. Степанова.*

ISBN 978-5-6054684-0-0

© Институт  
вычислительного  
моделирования СО РАН, 2025

## **Программный комитет:**

### **Председатель**

В. В. Козлов – академик РАН, д.ф.-м.н., ОМН РАН

### **Зам. председателя**

Н. Ю. Лукоянов – академик РАН, д.ф.-м.н., ИММ УрО РАН

Д. О. Орлов – академик РАН, д.ф.-м.н., МИАН

В. М. Садовский – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН

### **Секретарь**

В. Бекежанова – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН

## **Члены программного комитета:**

А. И. Аптекарев – академик РАН, д.ф.-м.н., ИПМ РАН

Д. И. Борисов – д.ф.-м.н., ИМ с ВЦ УФИЦ РАН

А. В. Гасников – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., МФТИ

С. О. Горчинский – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., МИАН

М. А. Гузев – академик РАН, д.ф.-м.н., ИПМ ДВО РАН

А. А. Давыдов – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., МИСиС, МГУ

Д. Н. Запорожец – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ПОМИ РАН

И. Ш. Калимуллин – д.ф.-м.н., КФУ

С. В. Кисляков – академик РАН, д.ф.-м.н., ПОМИ РАН

М. А. Королев – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., МИАН

Н. В. Маслова – д.ф.-м.н., ИММ УрО РАН

А. Е. Миронов – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИМ СО РАН

А. С. Скрипченко – к.ф.-м.н., ВШЭ

А. П. Солодов – д.ф.-м.н., МГУ

Ю. Л. Трахинин – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИМ СО РАН

Е. Е. Тыртышников – академик РАН, д.ф.-м.н., ИВМ РАН

Н. А. Тюрин – д.ф.-м.н., ОИЯИ

А. И. Шафаревич – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., МГУ

## **Организационный комитет:**

### **Председатель**

А. К. Цих – д.ф.-м.н., СФУ

### **Заместитель председателя**

В. М. Садовский – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН

### **Секретарь оргкомитета**

Н. А. Бушуева, СФУ

## **Члены оргкомитета:**

С. И. Башмаков – к.ф.-м.н., СФУ

В. М. Леонтьев – к.г.-м.н., СФУ

А. П. Ляпин – к.ф.-м.н., СФУ

Е. П. Магденко – к.ф.-м.н., ИВМ СО РАН

А. Д. Мкртчян – PhD, СФУ

Д. Ю. Почекутов – к.т.н., СФУ

Р. В. Сорокин – к.ф.-м.н., СФУ

И. В. Степанова – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН

О. Н. Черепанова – к.ф.-м.н., СФУ

V Конференция математических центров России – площадка для обмена последними достижениями в различных областях математики, обсуждения актуальных проблем и укрепления научных связей между ведущими математическими центрами страны.

Конференция призвана собрать широкий круг увлеченных математикой исследователей от студентов до ученых с мировым именем. К участию в конференции приглашаются представители российской и мировой математической общественности: аспиранты, студенты, сотрудники региональных математических центров и математических центров мирового уровня, научные и педагогические работники.

В ходе работы мероприятия будут представлены оригинальные сообщения по следующим научным направлениям:

- Алгебра и алгебраическая комбинаторика
- Алгебраическая геометрия
- Алгебраическая геометрия
- Вещественный и функциональный анализ
- Геометрия и топология
- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- История математики и математическое образование
- Комплексный анализ
- Математическая логика и теоретическая информатика
- Прикладная математика и математическое моделирование
- Спектральная теория и математическая физика
- Теория вероятностей
- Теория чисел и дискретная математика
- Уравнения с частными производными
- Пленарные доклады
- Постерная секция.

Мероприятие проводится при поддержке Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашения № 075-02-2025-1790, 075-02-2025-1606).

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ</b>	<b>11</b>
ПРОКУДИН Д. А. <i>Математические вопросы гидродинамики многокомпонентных сред</i> . . . . .	11
<b>АЛГЕБРА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОМБИНАТОРИКА</b>	<b>16</b>
ГВОЗДЕВ Р. И. <i>Порождающие множества сопряженных инволюций групп <math>G_2(2^n)</math> и <math>{}^3D_4(2^{3n})</math></i> . . . . .	16
ГОЛУБЯТНИКОВ М. П. <i>О графах Деза с сильно регулярными детьми</i> . . . . .	18
ГУБАРЕВ В. Ю. <i>Операторы Роты – Бакстера на алгебре матриц 3-го порядка</i> . .	21
КАЗАКОВ А. А. <i>Кластерные алгебры миноров матриц отклика электрических сетей</i> . . . . .	23
КОНДРАТЬЕВА А. В. <i>Неалльтерирующие гамильтоновы алгебры Ли</i> . . . . .	26
КОНДРАТЬЕВ А. С., МИНИГУЛОВ Н. А., НИРОВА М. С. <i>О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга – Кегеля которых изоморфны графу “балалайка”</i> . . . . .	29
МАРКОВСКАЯ И. А. <i>О порождающих тройках инволюций матричных групп над колцом целых чисел и над конечными полями</i> . . . . .	31
МУРАШКО В. И. <i>Обобщения гиперцентра и графы конечных групп</i> . . . . .	33
НУЖИН Я. Н. <i>Регулярные политопы и струнные С-группы</i> . . . . .	38
СЕЛИВАНОВ К. В. <i>Минимальные решетки, не близкие к дистрибутивным</i> . .	42
СОКОЛОВ Е. В., ТУМАНОВА Е. А. <i>Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп с нормальными реберными подгруппами</i> . . . . .	44
ТРОЯНСКАЯ Е. Н. <i>О связях ковровой подгруппы и коврового колца Ли</i> . . . . .	50
<b>АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ</b>	<b>54</b>
ЖАКУПОВ О. Б. <i>Трехмерные гладкие многообразия Фано с нулевой корегулярностью</i> . . . . .	54
МАГИН М. И. <i>Разбивающие морфизмы плоских вещественных кривых степени 5</i> . .	56
МАСЛОВА Н. В. <i>Арифметические характеристикации конечных групп</i> . . . . .	60
МОНЧЕНКО Н. М. <i>Полуортогональные разложения производных категорий точных структур на категориях представлений алгебр Накаямы</i> . . . . .	62
ПЕТРОВ В. А., ШУЛЬГА Г. С. <i>Теорема Пухликова – Хованского для ориентированных теорий когомологий</i> . . . . .	67
ТИМОФЕЕВА Н. В. <i>О пространстве модулей пар «допустимая схема – векторное расслоение» для произвольной размерности</i> . . . . .	68
<b>ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ</b>	<b>74</b>
БАХВАЛОВ А. Н. <i>Точная на классе пространств оценка коэффициентов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации</i> . . . . .	74
ВИЛКОВ П. Ю. <i>Об аппроксимационных теоремах типа Рунге для решений сильно равномерно параболических операторов</i> . . . . .	76

---

ДАНЕЛЯН Е. Д., КАРАПЕТЯНЦ А. Н. <i>Одномерные операторы Хаусдорфа в некоторых инвариантных пространствах</i> . . . . .	78
КАРАПЕТЯНЦ А. Н., СМИРНОВА И. Ю. <i>Весовые пространства функций со смешанной нормой, задаваемые в терминах преобразования Фурье</i> . . . . .	79
МУРЯСОВ Р. Р. <i>О субгармоничности функций с разделенными переменными в многомерном случае</i> . . . . .	80
РОКИНА А. Э. <i>Неравенство Маркова – Никольского между <math>L^q</math> и <math>L^0</math> средними для алгебраических многочленов с нулями вне круга</i> . . . . .	82
СЕВОСТЬЯНОВА В. В. <i>Проективно-перестановочно унитарное отношение эквивалентности на множестве конечных фреймов</i> . . . . .	85
<b>ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ</b>	<b>89</b>
БАРИНОВ Р. В. <i>О конечности числа отражений билльярдов Минковского в многогранном угле</i> . . . . .	89
ВЫОНГ Б. <i>Условие Фокса – Милнора для конкордантных узлов в гомологических 3-сферах</i> . . . . .	90
КИБКАЛО В. А., ЯКИМОВА (АГУРЕЕВА) Е. С. <i>Топологический анализ слоений Лиувилля псевдоевклидовых аналогов классических интегрируемых систем</i> . . . . .	92
КОЗЛОВСКАЯ Т. А. <i>Мультивиртуальные косы и зацепления</i> . . . . .	95
НАГИБИН Я. В. <i>Почти тетраэдральные многообразия</i> . . . . .	99
НИКУЛИН М. А. <i>Интегрируемая биллиардная система в однородных средах, разделенных софокусными квадриками</i> . . . . .	103
ПУСТОВОЙТОВ С. Е. <i>Слоение Лиувилля топологических биллиардов в магнитном поле</i> . . . . .	106
СОЛОВЬЕВ Д. В. <i>Рациональные интегралы натуральных систем в магнитном поле</i> . . . . .	109
ШИРОКОВ И. М. <i>Hopf type theorems for convex surfaces</i> . . . . .	111
<b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ</b>	<b>116</b>
БИЗЯЕВ И. А. <i>Качественный анализ геодезических метрики Керра</i> . . . . .	116
ВОЛКОВ А. М. <i>Неустойчивость положения равновесия нелокального уравнения неразрывности</i> . . . . .	119
ГРЕШНОВ А. В. <i>К вопросу о соединимости горизонтальными ломаными на группах Карно</i> . . . . .	121
КАЩЕНКО С. А., СМИРНОВ М. Ю., ТОЛБЕЙ А. О. <i>Асимптотика релаксационных колебаний в моделях на базе логистического уравнения с запаздыванием</i> . . . . .	125
ПАВЛЕНКО В. А. <i>Построение решений аналогов временных уравнений Шредингера</i> . . . . .	129
РОГАЛЕВ А. Н. <i>Динамика множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений под влиянием возмущений</i> . . . . .	135
СТАШ А. Х., ЛОВОДА Н. А. <i>Об исследовании спектров показателей колеблемости и блуждаемости двумерной дифференциальной системы по первому приближению</i> . . . . .	140

СУРКОВ П. Г. <i>О задаче динамического отслеживания траектории системы дробного порядка с возмущением и при дефиците информации</i> . . . . .	144
<b>ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ 147</b>	
Абдыкеров Ж. С., Замятин О. М. <i>Технология проектирования интегриро- ванных и межпредметных уроков</i> . . . . .	147
Андреева И. А. <i>Линейные системы уравнений алгебраических и дифференци- альных. Фундаментальные параллели в курсовом изложении разделов</i> . . . . .	152
Богатов Е. М., Боровских А. В. <i>Математические мыслительные средства и отношения в анализе развитии математики</i> . . . . .	156
Збродько Д. А., Фролова А. В., Сирина Т. М., Долматова М. А. <i>Гейми- фикационная система курса школьной математики «Спасти океан» и ее апробация</i> . . . . .	161
Карпенко А. В. <i>О запуске пилотных образовательных программ на ММФ НГУ</i> . . . . .	165
Кропачева Н. Ю., Павилайнен Г. В., Федорова М. Ю. <i>Графовое моделиро- вание процесса дифференцирования</i> . . . . .	166
Кутеева Г. А., Шаталова О. И., Синильщикова Г. А. <i>Кабинет практиче- ской механики: от прошлого до настоящего</i> . . . . .	170
Подуфалов Н. Д. <i>О повышении качества математического и естественно- научного образования и оптимизация содержания общего образования</i> . . . . .	173
Скафа Е. И., Евсеева Е. Г., Гребенкина А. С. <i>Подготовка будущих препода- вателей математики в высшей школе к обучению моделированию опасных факторов пожара</i> . . . . .	177
Трачева Н. В. <i>От игральных кубиков к марковским цепям: опыт преподавания теории вероятностей, математической статистики и методов Монте- Карло в школе</i> . . . . .	182
Черепанова О. Н. <i>Напряженное состояние композиционного упруго- пластичного стержня</i> . . . . .	183
<b>КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ 186</b>	
Бахтин К. Е. <i>Об обобщенных гипергеометрических функциях типа IPD</i> . . . . .	186
Мкртчян А. Д. <i>Аналитическое продолжение одномерных степенных рядов по- средством интерполяции коэффициентов</i> . . . . .	189
<b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА 190</b>	
Александров К. И. <i>Сложность линейно аппроксимируемых расширений ба- зисной пропозициональной логики Виссера</i> . . . . .	190
Goncharov S. S., Petrenko A. M., KRAVTSOV V. K., Khlestova E. I. <i>Strong constructibility of recursive ordinals</i> . . . . .	194
Долгоруков В. В., Попова Е. Л. <i>Темпоральная эпистемическая логика для агентов с задержкой в осведомленности</i> . . . . .	195
Ефремов Е. Л. <i>Об аксиоматизируемости класса конгруэнц-перестановоч- ных полигонов</i> . . . . .	198

---

Михайлов Л. М., Селиванов В. Л. <i>Определимость в структуре слов без повторений с отношением вложимости</i> . . . . .	201
Нечесов А. В. <i>Задачный подход как основа достижения сильного ИИ, гибридная методология с LLM, логико-вероятностными системами и мультиблокчейном</i> . . . . .	202
Ореховский В. Н., Селиванов В. Л. <i>О логических и топологических классификациях регулярных языков на бесконечных ординальных словах</i> . . . . .	205
Проценко Н. А., Рыбаков В. В. <i>Мультиагентная интервальная логика с динамическими операциями и динамическим обновлением оценки на основе RAFT</i> . . . . .	208
Римацкий В. В., Рыбаков В. В. <i>Разрешимость глобальной допустимости правил вывода в логике Grz (GL)</i> . . . . .	211
Рыбаков В. В., Кияткин В. Р. <i>О разрешимости одной интранзитивной временной мультиагентной логики</i> . . . . .	215
Рыбаков М. Н., Шкатор Д. П. <i>Модальные предикатные логики дедекиндовых порядков: невозможность аксиоматизации при условии постоянства предметных областей</i> . . . . .	219
Симаков В. К. <i>О замкнутых монодиальных структурах на категориях пространств Чу</i> . . . . .	222
Стрепетова В. В., Стукачев А. И. <i>Дистрибутивная интерпретация семантики Монтею</i> . . . . .	224
Шехтман В. Б. <i>Проблема полноты в модальных логиках предикатов</i> . . . . .	225
<b>ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ</b>	<b>226</b>
Голубев Р. А., Шайдуров В. В., Гилева Л. В. <i>Подходы к повышению порядка точности приближенных решений уравнения теплопроводности</i> . . . . .	226
Гурина Е. И., Тренбач И. В. <i>Имитационное моделирование теплообмена в термошкафе с использованием цифрового двойника</i> . . . . .	229
Гусев А. О., Мажорова О. С. <i>Математическое моделирование процессов переноса при выращивании кристаллов методом Чохральского с жидкостной герметизацией расплава</i> . . . . .	232
Ефимова М. В. <i>Точные решения уравнений Обербека – Буссинеска для описания термодиффузионных течений в двухслойной системе жидкостей</i> . . . . .	236
Зверева М. Б., Бурлуцкая М. Ш. <i>Моделирование деформаций упругих систем с локализованными особенностями</i> . . . . .	238
Казаков А. Л., Лемперт А. А., Нгuyen D. M. <i>О покрытии эллипсоида равными геодезическими кругами</i> . . . . .	244
Ломов А. А. <i>Параметрическая идентифицируемость при последовательном соединении динамических систем</i> . . . . .	246
Пекарская Т. А., Сибин А. Н. <i>Математическая модель фильтрации в проникающем снеге и грунте</i> . . . . .	252
ТАРАСОВ С. К. <i>Внутренние волны и перемешивание в стратифицированных гидротехнических течениях</i> . . . . .	254

ТРАЧЕВА Н. В., УХИНОВ С. А. <i>Проекционные оценки метода Монте-Карло в задачах переноса излучения: теория и практика</i> . . . . .	255
ЧЕЛНОКОВА А. С. <i>Молекулярно-динамическое моделирование термодинамики фуллеренов в газовой смеси</i> . . . . .	261
ЮДИН Г. А. <i>Оценки ёмкостей подмножеств деревьев</i> . . . . .	264
<b>СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА</b>	<b>265</b>
АФАНАСЬЕВ Д. Е., КАТАНАЕВ М. О. <i>Решение Лиувилля в общей теории относительности и проблема темной энергии</i> . . . . .	265
БОРИСОВ Д. И., ПОЛЯКОВ Д. М. <i>О равномерной спектральной асимптотике для оператора Шредингера с периодическими краевыми условиями и сдвигом в свободном члене</i> . . . . .	271
ЗАКОРА Д. А. <i>Асимптотика решений вольтерровых операторных интегродифференциальных уравнений</i> . . . . .	273
ЛОБЗИН Ф. И. <i>Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности четыре, случай нетривидальных полуправильных сумм</i> . . . . .	276
ЛЮЛЬКО Н. А. <i>Критерий сверхустойчивости линейных неавтономных гиперболических систем первого порядка</i> . . . . .	280
МАРЧУК М. Е., СЕНАШОВ С. И. <i>Собственные частоты параболического рефлектора</i> . . . . .	286
НОВИКОВ А. А., NIKOLAEVA I. A., ABED S. A. <i>Properties of Non-commutative Michelson Contrast and Its Relation to Holevo Bound</i> . . . . .	288
ОНЫФРИЕНКО М. В. <i>Особенности коранга 1 интегрируемых систем с 3 степенями свободы: структурная устойчивость и классификация</i> . . . . .	297
<b>ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</b>	<b>301</b>
АВИЛЬДАЕВ Т. Е. <i>Генератор симметричного процесса Леви с дельта-потенциалом и связанные с ним предельные теоремы</i> . . . . .	301
БУЗИН А. П. <i>Модифицированный критерий Хеллер–Хеллера–Горфин для проверки однородности</i> . . . . .	307
БУФЕТОВ А. И. <i>Скорость сходимости по метрике Колмогорова–Смирнова в центральной предельной теореме Сошникова для синус-процесса</i> . . . . .	310
КОЛЕСНИКОВ Д. В. <i>Круговой закон для случайных матриц в пространстве со смешанной нормой</i> . . . . .	315
МАЛОВ С. В., БАРОН М. И. <i>Некоторые свойства экспоненциальных моментов процесса ожидания Линдли и последовательных максимумов случайного блуждания</i> . . . . .	316
ПЛАТОНОВА М. В. <i>О ветвящихся случайных блужданиях</i> . . . . .	322
ХАМЗИН В. О. <i>Энтропийный анализ негауссовских мер</i> . . . . .	325
ШКЛЯЕВ А. В. <i>Нормальные уклонения для марковских рекуррентных последовательностей в случайной среде</i> . . . . .	330
<b>ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА</b>	<b>335</b>
ДЕЗА Е. И. <i>Избранные вопросы теории конечных обобщенных метрик</i> . . . . .	335

---

ДОЛГОВ Д. А. <i>Об аналоге теоремы Хейльбронна: новые результаты</i> . . . . .	337
RADOMSKII A. O. <i>Ramanoff's theorem and sums of two squares</i> . . . . .	340
RADOMSKII A. O. <i>Long strings of composite values of polynomials and a basis of order 2</i> . . . . .	342
РЕБРОВА И. Ю. <i>О представлении натуральных чисел ternарной квадратичной формой <math>x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1</math></i> . . . . .	344
ТЕРЕХОВ Н. А. <i>Модификация линейно-алгебраического метода в задаче о слабом насыщении</i> . . . . .	347
ШУТОВ А. В. <i>О спектрах Гельфонда для разложений Островского</i> . . . . .	350
<b>УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ</b>	<b>353</b>
ГИЛЕВ П. В., ПАПИН А. А. <i>Обоснование одного приближенного метода решения задач двухфазной фильтрации в пороупругом тонком слое</i> . . . . .	353
КАЗАКОВ А. Л. <i>Аналитические решения нелинейных эволюционных параболиче- ских уравнений с нулевыми фронтами</i> . . . . .	356
КАЗАКОВ А. Л., СПЕВАК Л. Ф. <i>Решение с двумя расходящимися фронтами для квазилинейной параболической системы</i> . . . . .	358
ЛИТВИНОВ В. Л., ЛИТВИНОВА К. В. <i>Об одном решении задачи о колебаниях механических систем с подвижными границами</i> . . . . .	362
ШЕЙКИН А. А. <i>Разделение переменных в задаче об изометрическом вложении</i> .	365
Авторские данные . . . . .	369

## ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

*Д. А. Прокудин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

Теория разрешимости уравнений гидродинамики играет важную роль в математической физике и является фундаментальным разделом теории дифференциальных уравнений с частными производными. Эти уравнения описывают поведение жидкостей и газов, а их анализ требует решения специальных задач, которые называются краевыми задачами. Они с одной стороны представляют существенный интерес с математических позиций, а с другой – позволяют находить различные подходы к прикладным задачам.

Доклад посвящен исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при моделировании течений многокомпонентных сред. В настоящее время существует довольно много различных моделей для описания движений вязких сжимаемых многокомпонентных сред, все они являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных задач. По этим причинам ни одна из них не стала общепринятой.

Одним из вариантов моделей динамики многокомпонентных ( $N$ -компонентных,  $N \geq 2$ ) сред является модель, которая описывается следующими уравнениями с частными производными [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E}_i \mathbf{u}_i) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_i - \mathbb{S}_i \mathbf{u}_i + p_i \mathbf{u}_i) = \Gamma_i + \mathcal{Q}_i + \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{u}_i + \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) представляют собой соответственно математические формулировки законов сохранения массы, импульса и полной энергии для каждой компоненты среды. Здесь  $\rho_i$  – плотность  $i$ -й компоненты;  $\mathbf{u}_i$  – скорость  $i$ -й компоненты;  $p_i = p_i(\rho_i, \theta_i)$  – давление в  $i$ -й компоненте, где  $\theta_i > 0$  – температура  $i$ -й составляющей;

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^N [\lambda_{ij} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\mathbf{u}_j)] -$$

вязкая часть тензора напряжений в  $i$ -й компоненте, где  $\mathbb{I}$  – единичный тензор,  $\mathbb{D}(\mathbf{w}) = [(\nabla \otimes \mathbf{w}) + (\nabla \otimes \mathbf{w})^*] / 2$  – тензор скоростей деформаций векторного поля  $\mathbf{w}$  (верхний индекс \* означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей  $\lambda_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  образуют соответственно матрицы  $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^N$  и  $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ; далее,

$$\mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) -$$

приток импульса в  $i$ -ю компоненту из остальных компонент, где  $a_{ij} = a_{ji} = \text{const}$ ;  $\mathbf{f}_i$  – плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на  $i$ -ю компоненту;  $\mathcal{E}_i = \rho_i |\mathbf{u}_i|^2/2 + \rho_i e_i$  – полная энергия  $i$ -й компоненты, где  $e_i = e_i(\rho_i, \theta_i)$  – внутренняя удельная энергия  $i$ -й компоненты;  $\mathbf{q}_i = -k_i(\theta_i) \nabla \theta_i$  – тепловой поток внутри  $i$ -й компоненты, где  $k_i$  – внутренняя теплопроводность  $i$ -й компоненты;

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^N b_{ij}(\theta_j - \theta_i) + \Gamma -$$

приток тепловой энергии в  $i$ -ю компоненту из остальных компонент, где  $b_{ij} = b_{ji} = \text{const}$ ,

$$\Gamma = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|^2;$$

наконец,  $\mathcal{Q}_i$  отвечают за приток энергии в  $i$ -ую компоненту из других компонент извне, т. е. из внешней среды и из прочих компонент (сверх того, что уже учтено в  $\Gamma_i$ ).

Система уравнений (1)–(3) не является замкнутой, поэтому необходимо привлекать дополнительные соотношения, из которых в первую очередь следует указать соотношения Гиббса

$$\theta_i ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где  $s_i = s_i(\rho_i, \theta_i)$  – энтропия  $i$ -й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

а также условия термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta_i} > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Рассмотрим еще одну модель динамики многокомпонентных сред, включающую в себя следующие уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E} \mathbf{v}) + \left( \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i \mathbf{u}_i + p \mathbf{v} \right) = \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i + \rho g. \quad (9)$$

Здесь  $\rho_i$  – плотность  $i$ -й компоненты;  $\mathbf{u}_i$  – скорость  $i$ -й компоненты;  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{u}_i$  – средневзвешенная скорость среды, где  $\alpha_i = \text{const} \in (0, 1)$ ,  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ ;  $p = \sum_{i=1}^N p_i$  – суммарное давление;

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^N \left[ \lambda_{ij} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\mathbf{u}_j) \right] -$$

вязкая часть тензора напряжений в  $i$ -й компоненте;  $\mathbf{f}_i$  – плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на  $i$ -ю компоненту;  $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i$  – суммарная полная энергия, где  $\mathcal{E}_i = \rho_i |\mathbf{u}_i|^2/2 + \rho_i e_i$  – полная энергия  $i$ -й компоненты, а  $e_i$  – внутренняя удельная энергия  $i$ -й компоненты;  $\mathbf{q} = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i$  – суммарный тепловой поток, где  $\mathbf{q}_i = -k_i(\theta) \nabla \theta$  – тепловой поток внутри  $i$ -й компоненты,  $k_i$  – внутренняя теплопроводность  $i$ -й компоненты, а  $\theta$  – температура среды;  $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$  – суммарная плотность;  $g$  – плотность тепловых источников внешней среды.

Модель, описываемая уравнениями (7)–(9) является так называемой подмоделью модели (1)–(3) при следующих предположениях: скорости  $\mathbf{u}_i$  близки друг к другу (т. е. к средневзвешенной скорости  $\mathbf{v}$  всей среды) [3, 4]; давления  $p_i$  близки к  $\alpha_i p$  [1, 5–7]; температуры  $\theta_i$  одинаковы, т. е.  $\theta_i = \theta$ ,  $i = 1, \dots, N$  [5, 8–13]. В рамках приведенных предположений движение многокомпонентной среды в значительной степени характеризуется усредненными и/или суммарными характеристиками (скоростью  $\mathbf{v}$ , плотностью  $\rho$ , давлением  $p$ , температурой  $\theta$ ), однако нас интересуют также и отдельные плотности  $\rho_i$  и скорости  $\mathbf{u}_i$  компонент.

Из (7) и (8) вытекает уравнение баланса кинетической энергии для каждой компоненты

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_i |\mathbf{u}_i|^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{\rho_i |\mathbf{u}_i|^2}{2} \mathbf{v} \right) + \alpha_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla p = \mathbf{u}_i \cdot \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

С учетом этого факта уравнение (9) (для полной энергии) можно записать в следующей эквивалентной форме (для внутренней энергии):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^N \rho_i e_i \right) + \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^N \rho_i e_i \mathbf{v} \right) + p \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + \rho g. \quad (11)$$

Если привлечь соотношение Гиббса для каждой компоненты (4), то уравнение (9) и эквивалентное ему (11) можно записать в следующей форме (для энтропии):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^N \rho_i s_i \right) + \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^N \rho_i s_i \mathbf{v} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} + \frac{\rho g}{\theta}. \quad (12)$$

Из (12) и условий  $\mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$  ( $\partial\Omega$  – граница области течения  $\Omega$ ), получаем для общей энтропии системы

$$S = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \rho_i s_i d\mathbf{x},$$

что

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{k(\theta) |\nabla \theta|^2}{\theta^2} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\rho g}{\theta} d\mathbf{x}, \quad (13)$$

где  $k(\theta) = \sum_{i=1}^N k_i(\theta)$ , откуда следует, что общая энтропия системы  $S$  не убывает со временем, если  $\theta > 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $g \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \geq 0$ . Последнее неравенство выполняется ввиду следующих условий на матрицы вязкостей:  $\mathbf{M} > 0$ ,  $3\Lambda + 2\mathbf{M} \geq 0$ .

В баротропном случае приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

$$\frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

В одномерном баротропном случае:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad v = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i, \quad (16)$$

$$\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \rho_i f_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

В некоторых случаях, с позиций математического анализа, удобнее вместо  $N$  уравнений (7) рассматривать одно уравнение вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (18)$$

если, например, дополнительно предположить, что  $\rho_i = \alpha_i \rho$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда в многомерном стационарном теплопроводном случае приходим к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (19)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (20)$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{E} \mathbf{v}) + \left( \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i \mathbf{u}_i + p \mathbf{v} \right) = \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i + \rho g. \quad (21)$$

В многомерном стационарном баротропном случае:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (22)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Основное внимание в докладе будет сосредоточено на проблеме слабой разрешимости краевых задач для приведенных выше многомерных уравнений динамики многокомпонентных сред в стационарном и нестационарном, теплопроводном и нетеплопроводном случаях [14, 15]. Следует отметить, что и логически, и технически многомерность по числу компонент среды никак не связана с многомерностью по числу пространственных переменных. Поэтому даже для одномерных уравнений задача является новой и представляет интерес, и в докладе будут представлены соответствующие результаты [16, 17].

*Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, Соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред. Ч. 1.* М.: Наука, 1987.
2. Rajagopal K. L., Tao L. *Mechanics of mixtures.* Singapore: World Scientific Publishing, 1995.
3. Gomez-Constante J.P., Pagilla P.R., Rajagopal K.R. *A thermomechanical and photochemical description of the phase change process in roll-to-roll nanoimprinting lithography.* International Journal of Engineering Science. 2021. V. 169. Article 103564.
4. Kolotilov V. A., Fomin V. M. *Two methods of mathematical formulation of heterogeneous media in problems of shock wave loading.* AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2027. Article 030144.
5. Папин А. А. *Краевые задачи двухфазной фильтрации.* Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2009.
6. Рахматулин Х. А. *Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред.* Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
7. Surana K.S., Powell M., Reddy J. N. *A simple mixture theory for  $\nu$  Newtonian and generalized Newtonian constituents.* Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2012. V. 26. № 1. P. 33–65.
8. Воинов О. В., Пухначев В. В. *Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси.* Прикладная механика и техническая физика. 1980. Т. 21. № 5. С. 38–45.
9. Жумагулов Б. Т., Зубов Н. В., Монахов В. Н., Смагулов Ш. С. *Новые компьютерные технологии в нефтедобыче.* Алматы: Гылым, 1996.
10. Жумагулов Б. Т., Монахов В. Н. *Гидродинамика нефтедобычи.* Алматы: КазгосИНТИ, 2001.
11. Atkin R. J., Craine R. E. *Continuum Theories of Mixtures: Applications.* IMA Journal of Applied Mathematics. 1976. V. 17. № 2. P. 153–207.
12. Muller I. *A thermodynamic theory of mixtures of fluids.* Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. V. 28. № 1. P. 1–39.
13. Pukhnachov V. V., Voinov O. V., Petrova A. G., Zhuravleva E. N., Gudz O. A. *Dynamics, stability and solidification of emulsion under the action of thermocapillary forces and microacceleration.* Berlin: Springer, 2003.
14. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. *Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей.* Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 1. С. 151–197.
15. Прокудин Д. А. *Существование слабых решений задачи о трехмерных стационарных теплопроводных движениях вязких сжимаемых многокомпонентных смесей.* Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 5. С. 1109–1123.
16. Prokudin D. A. *On the stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics.* Mathematics. 2023. V. 11. № 14. Article 3065.
17. Прокудин Д. А. *О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред.* Сиб. электрон. матем. изв. 2021. Т. 18. № 2. С. 1278–1285.

# АЛГЕБРА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОМБИНАТОРИКА

## ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА СОПРЯЖЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЙ ГРУПП $G_2(2^n)$ И ${}^3D_4(2^{3n})$

*P. I. Гвоздев*

*Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск*

Известно, что любая конечная простая неабелева группа, за исключением трехмерной унитарной группы над полем из девяти элементов  $U_3(3)$ , порождается тремя инволюциями. Окончательная точка в доказательстве этого результата была поставлена в работе [1]. Там же были сформулированы две следующие задачи, которые позднее Я. Н. Нужин записал в Коуровскую тетрадь (см. [2, вопрос 14.69]).

*Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа:*

- а) порождающих сопряженных инволюций;
- б) порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице.

На текущий момент задача а) полностью решена, в работе обсуждается задача б). Пусть далее  $G$  — конечная простая неабелева группа. Через  $n_c(G)$  обозначим минимальное количество порождающих сопряженных инволюций группы  $G$ , произведение которых равно единице. Следующие два утверждения важны для нахождения числа  $n_c(G)$ .

**Лемма 1** [3, Лемма 4]. Пусть  $G$  — конечная простая неабелева группа. Тогда  $n_c(G) \geq 5$ .

**Лемма 2** [3, Лемма 6]. Пусть  $G$  — произвольная группа. Группа  $G$  тогда и только тогда порождается пятью сопряженными инволюциями, произведение которых равно единице, и две из которых совпадают, когда она порождается тремя инволюциями  $\alpha, \beta, \gamma$ , такими, что  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$  сопряжены.

Ниже приведен список групп, для которых задача б) решена.

В 2009 г. Дж. М. Уорд рассмотрел случаи спорадических, знакопеременных групп и групп  $PSL_n(q)$ ,  $q$  нечетно [4]. В случае групп  $PSL_n(q)$  метод доказательства из [4] существенно использует следующую лемму.

**Лемма 3.** Пусть  $t$  — собственный элемент конечного поля порядка  $q = p^n$ ,  $p > 2$ ,  $q \neq 9$ . Тогда  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = SL_2(q)$ .

Лемму 3 впервые сформулировал Д. Горенстейн [5], и её доказательство основано на подгрупповом описании групп  $SL_2(q)$ , полученном в [6]. Поэтому данную лемму часто называют леммой Диксона. Поскольку в лемме Диксона случай  $q = 9$  является исключительным, Уорду также пришлось исключить этот случай из рассмотрения при  $n \geq 4$ . Позднее случай групп  $PSL_n(9)$  был разобран в [7, 8]. Более того, в [4] исключается случай групп  $PSL_6(q)$ ,  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , и этот случай до сих пор не исследован.

Другой набор полученных результатов касается анализа групп малых рангов. Обычно группы малых рангов рассматриваются отдельно в задачах, связанных с существованием порождающих множеств с определенными свойствами. На сегодняшний день задача б) решена для групп с одним классом сопряженных инволюций (в частности, для групп

лиева типа ранга 1) [9], а также для некоторых групп лиева типа малых рангов, превышающих 1 [10, 11].

Естественно выделить следующие два направления, в которых можно продолжить работу по вопросу б):

- 1) Завершение решения вопроса для серии групп  $PSL_n(q)$ .
- 2) Завершение решения вопроса для групп лиева типа ранга 2.

В контексте решения пункта 2) в настоящее время остается рассмотреть следующие группы:  $G_2(2^n)$ ,  ${}^3D_4(2^{3n})$ ,  ${}^2F_4(q^2)$ ,  $PSU_4(q^2)$  при  $q \equiv 1 \pmod{4}$  и  $PSU_5(q^2)$  при нечётном  $q$ . Основным результатом является

**Теорема.** *Группы  $G_2(2^n)$  и  ${}^3D_4(2^{3n})$  обладают такими порождающими тройками инволюций  $\alpha, \beta, \gamma$ , что  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$  сопряжены. В частности, число  $n_c$  для этих групп равно 5.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российской научного фонда (грант № 25-21-20059).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Malle G., Saxl J., Weigel T., *Generation of classical groups*. Geom. Dedicata. 1994. V. 49. № 2. P. 85–116.
2. Mazurov V. D., Khukhro E. I. *The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory*. Sobolev Institute of Mathematics. Novosibirsk. 2022. № 20.
3. Нужин Я. Н. *О порождающих множествах инволюций простых конечных групп*. Алгебра и логика. 2019. Т. 58. № 3. С. 426–434.
4. Ward J. M. *Generation of simple groups by conjugate involutions*. Queen Mary college, University of London. Thesis of Doctor of Philosophy. 2009.
5. Gorenstein D. *Finite groups*. New York, Harper and Row. 1968.
6. Dickson L. E. *Linear groups with an exposition of the Galois fields theory*. Teubner. Leipzig, 1901.
7. Ефимов И. Ю., Нужин Я. Н. *Порождающие множества сопряженных инволюций групп  $SL_n(q)$  при  $n = 4, 5, 7, 8$  и нечетном  $q$* . Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 62–69.
8. Гвоздев Р. И. *Порождающие множества сопряженных инволюций групп  $PSL_n(9)$* . Алгебра и Логика. 2023. Т. 62. № 4. С. 479–503.
9. Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н. *Минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1, групп  $PSL_3(2^m)$  и  $PSU_3(q^2)$* . Сибирский мат. журнал. 2023. Т. 64. № 6. С. 1160–1171.
10. Нужин Я. Н. *О порождающих тройках инволюций групп лиева типа ранга 2 над конечными полями*. Алгебра и логика. 2019. Т. 58. № 1. С. 84–107.
11. Vsemirnov M. A., Gvozdev R. I., Nuzhin Ya. N. *The minimal number of generating involutions, the product of which is equal to 1, of finite simple non-Abelian groups*. International Conf. “Mal’tsev Meeting”. November 13–17, 2023. Abstracts. Novosibirsk. Institute of Mathematics. S. L. Sobolev RAS and NNIGU. P. 148.

# О ГРАФАХ ДЕЗА С СИЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫМИ ДЕТЬМИ

*Голубятников М. П.*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

<sup>2</sup>Уральский математический центр, Екатеринбург

Пусть  $\Gamma = (V, E)$  — обычновенный граф с конечным числом вершин. Для любой вершины  $v$  через  $\Gamma(v)$  будем обозначать окрестность вершины  $v$  в графе  $\Gamma$ , т. е. подграфа графа  $\Gamma$ , индуцированный множеством вершин, смежных с  $v$ . Граф  $\Gamma$  называется *сильно регулярным* с параметрами  $(n, k, \lambda, \mu)$ , если он имеет ровно  $n$  вершин, степень каждой вершины в  $\Gamma$  равна  $k$ , и для любых двух смежных (соответственно, несмежных) вершин  $u$  и  $v$  выполняется равенство  $|\Gamma(v) \cap \Gamma(u)| = \lambda$  (соответственно,  $|\Gamma(v) \cap \Gamma(u)| = \mu$ ).

Пусть  $n, k, b, a$  — целые числа такие, что  $0 \leq a \leq b \leq k < n$ . Граф  $\Gamma$  называется *графом Деза* с параметрами  $(n, k, b, a)$ , если он имеет ровно  $n$  вершин, степень каждой вершины в  $\Gamma$  равна  $k$ , и для любой пары различных вершин  $u$  и  $v$  выполняется включение  $|\Gamma(v) \cap \Gamma(u)| \in \{a, b\}$ . Класс графов Деза широко обобщает класс сильно регулярных графов.

Пусть  $\Gamma$  — граф Деза и  $A$  — его матрица смежности. Тогда существуют такие симметричные матрицы  $B_1$  и  $B_2$  из нулей и единиц с нулевым следом, что

$$A^2 = kI + aB_1 + bB_2,$$

где  $I$  — единичная матрица. Матрицы  $B_1$  и  $B_2$  являются матрицами смежности некоторых графов  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответственно, которые называются *детьми* графа  $\Gamma$  (см. [2]).

Если для графа Деза  $\Gamma$  графы  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  являются сильно регулярными, то граф  $\Gamma$  называется *сильным графом Деза*. В [2] и [3] были описаны методы получения сильных графов Деза из сильно регулярных графов, основанные на наличии автоморфизма специального вида в сильно регулярном графе.

Пусть  $X$  — непустое конечное множество, а  $R_0, R_1, \dots, R_d$  — непустые подмножества декартова произведения  $X \times X$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1)  $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\};$
- 2)  $R_0 \sqcup R_1 \sqcup \dots \sqcup R_d = X \times X;$
- 3)  $R_i^T = R_i$  для  $0 \leq i \leq d$ , где  $R_i^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_i\};$
- 4) существуют целые числа  $p_{i,j}^h$  ( $0 \leq h, i, j \leq d$ ) такие, что для  $(x, y) \in R_h$ ,

$$p_{i,j}^h = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|.$$

Тогда множество  $X$  вместе с набором отношений  $R_0, R_1, \dots, R_d$  называется *симметричной схемой отношений* и обозначается через  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ . Через  $A_i$  обозначим матрицу смежности отношения  $R_i$ . Целые числа  $p_{i,j}^h$  называются *числами пересечений* схемы  $\mathcal{X}$  (см [1]).

**Теорема** ([2, Теорема 4.2]). Пусть  $(X, \{R_i\}_{i=0}^d)$  — симметрическая схема отношений и  $F \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$ . Обозначим через  $\Delta$  граф с матрицей смежности  $\sum_{f \in F} A_f$ . Тогда  $\Delta$  является графом Деза, если и только если для каждого  $k \in \{1, \dots, d\}$  сумма  $\sum_{f,g \in F} p_{f,g}^k$  принимает не более двух значений.

Зафиксируем  $q$  — степень нечетного простого числа. Пусть  $\mathbb{F}_q = GF(q)$  — конечное поле порядка  $q$ ,  $V = \mathbb{F}^n$  и  $Q$  — невырожденная квадратичная форма на  $V$ . Пусть

$$\varepsilon = \begin{cases} \mu((-1)^{(n-1)/2} \det Q), & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \mu((-1)^{n/2} \det Q), & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

где  $\mu$  — квадратичный характер поля  $\mathbb{F}_q$ .

Пусть  $S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n \mid Q(\mathbf{v}) = 1\}$ . Обозначим

$$S^+ = \{\{\mathbf{v}, -\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in S\} \text{ и } \widetilde{\mathbb{F}} = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{F}\}.$$

Для  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n$  и  $a \in \mathbb{F}_q$  через  $\bar{\mathbf{v}}$  и  $\bar{a}$  будем обозначать множества  $\{\mathbf{v}, -\mathbf{v}\}$  и  $\{a, -a\}$  соответственно.

Пусть  $n > 3$ , рассмотрим следующие отношения на  $S^+$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Delta &= \{(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) \mid \bar{\mathbf{v}} \in S^+\}, \\ \mathcal{R}_{\bar{a}} &= \{(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}) \mid \mathbf{v} \neq \mathbf{u}, B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \{a, -a\}\} \text{ для } \bar{a} \in \mathbb{F}_q^+ \end{aligned}$$

**Теорема 1.**  $\mathcal{A} = (S^+, \{\mathcal{R}_\Delta\} \cup \{\mathcal{R}_{\bar{a}} \mid \bar{a} \in \widetilde{\mathbb{F}}\})$  — схема отношений с  $(q+1)/2$  классами.

Особо интересный случай возникнет при  $q = 5$  и нечетном  $n > 3$ . Пусть  $h = 5^{(n-3)/2}$ , тогда числа пересечений схемы  $\mathcal{A}$  будут иметь следующий вид:

$$\begin{array}{lll} p_{11}^1 = \frac{1}{2}\varepsilon h + \frac{1}{2}h^2 & p_{11}^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon h + \frac{1}{2}h^2 & p_{11}^3 = -\frac{1}{2}\varepsilon h + \frac{1}{2}h^2 \\ p_{12}^1 = h^2 - 1 & p_{12}^2 = h^2 & p_{12}^3 = \varepsilon h + h^2 \\ p_{13}^1 = -\varepsilon h + h^2 & p_{13}^2 = h^2 & p_{13}^3 = -\varepsilon h + h^2 \\ p_{21}^1 = h^2 - 1 & p_{21}^2 = h^2 & p_{21}^3 = \varepsilon h + h^2 \\ p_{22}^1 = 2\varepsilon h + 2h^2 & p_{22}^2 = 4\varepsilon h + 2h^2 - 2 & p_{22}^3 = 2\varepsilon h + 2h^2 \\ p_{23}^1 = 2\varepsilon h + 2h^2 & p_{23}^2 = 2h^2 & p_{23}^3 = \varepsilon h + 2h^2 - 1 \\ p_{31}^1 = -\varepsilon h + h^2 & p_{31}^2 = h^2 & p_{31}^3 = -\varepsilon h + h^2 \\ p_{32}^1 = 2\varepsilon h + 2h^2 & p_{32}^2 = 2h^2 & p_{32}^3 = \varepsilon h + 2h^2 - 1 \\ p_{33}^1 = -2\varepsilon h + 2h^2 & p_{33}^2 = -\varepsilon h + 2h^2 & p_{33}^3 = -\varepsilon h + 2h^2 \end{array}$$

Заметим, что графы с матрицами смежности  $A_1$  и  $A_2$  будут сильно регулярными с такими же параметрами, как у графов  $NO_n^{\varepsilon\perp}(5)$  и  $NO_n^\varepsilon(5)$ , параметры этих графов можно найти в [4, § 3.1.4].

Более того, граф с матрицей смежности  $A_3$  является графом Деза с параметрами

$$\left( \frac{21h^2 + \varepsilon \cdot 5h}{2}, 5h^2 - \varepsilon \cdot h, 2h^2 - \varepsilon \cdot 2h, 2h^2 - \varepsilon \cdot h \right),$$

причем его дети — это графы с матрицами смежности  $A_1$  и  $A_2 + A_3$ .

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть  $n > 3$  — нечетное и  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Тогда существует реберно-регулярный граф Деза с параметрами

$$\left( \frac{5^{n-1} + \varepsilon \cdot 5^{(n-1)/2}}{2}, 5^{n-2} - \varepsilon \cdot 5^{(n-3)/2}, 2 \cdot (5^{n-3} - \varepsilon \cdot 5^{(n-3)/2}), 2 \cdot 5^{n-3} - \varepsilon \cdot 5^{(n-3)/2} \right)$$

и сильно регулярными детьми  $\Delta_1$  и  $\Delta_2 = \overline{\Delta_1}$  с параметрами, соответствующими параметрам графа  $NO_n^{\varepsilon\perp}(5)$  и его дополнениям  $\overline{NO_n^{\varepsilon\perp}(5)}$ .

Отметим, что ввиду [4, § 3.1.4] граф  $NO_n^{\varepsilon\perp}(5)$  имеет параметры

$$\left( \frac{5^{n-1} + \varepsilon \cdot 5^{(n-1)/2}}{2}, \frac{5^{n-2} - \varepsilon \cdot 5^{(n-3)/2}}{2}, \frac{5^{n-3} + \varepsilon \cdot 5^{(n-3)/2}}{2}, \frac{5^{n-3} - \varepsilon \cdot 5^{(n-3)/2}}{2} \right).$$

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1549).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs*. Springer-Verlag, 1989.
2. Erickson M., Fernando S., Haemers W. H., Hardy D., Hemmeter J. *Deza graphs: A generalization of strongly regular graph*. Journal of Combinatorial Designs. 1999. V. 7. № 6. P. 395–405.
3. Kabanov V. V., Konstantinova E. V., Shalaginov L. *Generalised dual Seidel switching and Deza graphs with strongly regular children*. Discrete Mathematics. 2020. V. 344. № 3. DOI:10.1016/j.disc.2020.112238
4. Brouwer A. E., H. Van Maldeghem. *Strongly regular graphs*. Cambridge University Press. 2022.

# ОПЕРАТОРЫ РОТЫ–БАКСТЕРА НА АЛГЕБРЕ МАТРИЦ 3-ГО ПОРЯДКА

*B. Ю. Губарев*

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

Линейный оператор  $R$ , определенный на ассоциативной алгебре  $A$  над полем  $F$ , называется оператором Роты–Бакстера веса  $\lambda \in F$ , если

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab)$$

для любых  $a, b \in A$ . Здесь  $\lambda \in F$  — фиксированный скаляр, называемый весом  $R$ . Оператор Роты–Бакстера веса 0 служит алгебраическим аналогом интегрального оператора. Подробнее ознакомиться с операторами Роты–Бакстера можно в монографии Л. Гуо [1].

Изучение операторов Роты–Бакстера нулевого веса на алгебре матриц  $M_n(F)$  имеет как самостоятельный интерес, так и важно с точки зрения приложений: построения решений ассоциативного уравнения Янга–Бакстера и задания конечномерных двойных алгебр Ли. Именно для построения двойных алгебр Ли В. В. Соколов в 2013 г. описал [2] кососимметрические операторы Роты–Бакстера нулевого веса на  $M_3(\mathbb{C})$  (получено 8 ненулевых операторов).

В 2000 г. М. Агуиар [3] описал операторы Роты–Бакстера нулевого веса на алгебре  $M_2(\mathbb{C})$ , а в работе [4] были классифицированы операторы Роты–Бакстера ненулевого веса на  $M_2(\mathbb{C})$ .

Типичным примером оператора Роты–Бакстера ненулевого веса служит оператор проектирования  $P(x_1 + x_2) = x_1$  при заданном прямом разложении  $A = A_1 \oplus A_2$  всей алгебры  $A$  в прямую сумму двух своих подалгебр  $A_1, A_2$ . Операторы, соответствующие подобным разложениям, называются расщепляемыми. Назовем разложение  $A = A_1 \oplus A_2$  унитальным, если одна из подалгебр  $A_1, A_2$  содержит единицу алгебры  $A$ , и неунитальным, иначе.

В серии из трех работ [5–7] были описаны все операторы Роты–Бакстера ненулевого веса на алгебре  $M_3(\mathbb{C})$ . В работе [5] — все нерасщепляемые операторы Роты–Бакстера ненулевого веса на  $M_3(\mathbb{C})$ ; с точностью до сопряжения автоморфизмом и транспонирования, а также тильда-преобразования получилось 36 операторов, причем не зависящих ни от каких параметров. В работах [6, 7] — все расщепляемые операторы Роты–Бакстера; точнее, были приведены все разложения алгебры  $M_3(\mathbb{C})$  в прямую сумму двух подалгебр: в работе [6] — все унитальные разложения (71 разложение, которое зависит от 0 до 2 параметров), а в [7] — неунитальные (12 разложений, без параметров).

В случае нулевого веса оказалось также важным разделить случаи действия оператора на единичную матрицу. В работе [8] были описаны операторы Роты–Бакстера  $R$  нулевого веса на  $M_3(\mathbb{C})$ , удовлетворяющие условию  $R(1) \neq 0$ . Получилось 24 оператора, зависящих не более чем от одного параметра из  $\mathbb{C}$ . Подчеркнем, что 7 из 8 операторов из классификации В. В. Соколова [2] оказались в числе этих 24 операторов.

Наконец, в совместной работе В. Ю. Губарева и Ли Мэнъяо были классифицированы операторы Роты–Бакстера нулевого веса на  $M_3(\mathbb{C})$ , содержащие единичную матрицу в ядре. В этом случае возникает 33 оператора, зависящих не более чем от одного параметра из  $\mathbb{C}$ .

Тем самым задача об описании операторов Роты–Бакстера произвольного веса на алгебре  $M_3(\mathbb{C})$  полностью решена.

Отметим, что важную роль в полученных результатах играло как применение системы компьютерной алгебры *Singular* [9], так и задействование автоморфизмов алгебры  $M_3(\mathbb{C})$ , относительно которых данная подалгебра являлась инвариантной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Guo L. *An Introduction to Rota–Baxter Algebra*. Somerville: Intern. Press, 2012.
2. Соколов В. В. *Классификация постоянных решений ассоциативного уравнения Янга–Бакстера на алгебре  $\text{Mat}_3$* . ТМФ. 2013. Т. 176. № 3. С. 385–392.
3. Aguiar M. *Infinitesimal Hopf algebras*. Contemp. Math. 2000. V. 267. P. 1–30.
4. Benito P., Gubarev V., Pozhidaev A. *Rota–Baxter operators on quadratic algebras*. Mediterr. J. Math. 2018. V. 15. № 189.
5. Goncharov M., Gubarev V. *Rota-Baxter operators of nonzero weight on the matrix algebra of order three*. Linear Multilinear A. 2022. V. 70. Iss. 6. P. 1055–1080.
6. Gubarev V. *Unital decompositions of the matrix algebra of order three*. Commun. Algebra. 2021. V. 49. Iss. 11. P. 4980–5005.
7. Gubarev V. *Nonunital decompositions of the matrix algebra of order three*. Hiroshima Math. J. 2024. V. 54. Iss. 3. P. 291–299.
8. Gubarev V. *Rota–Baxter operators of weight zero on the matrix algebra of order three without unit in kernel*. arXiv: 2412.00825, 21 p.
9. Decker W., Greuel G.-M., Pfister G., Schönemann H. *Singular 4-4-0 – A computer algebra system for polynomial computations*. 2024. <https://www.singular.uni-kl.de>.

# КЛАСТЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ МИНОРОВ МАТРИЦ ОТКЛИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

*A. A. Казаков*

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова

Будем называть невырожденную матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  полностью положительной, если все ее миноры положительны. Теория таких матриц, изначально мотивированная задачами физики и систематически начатая в работах Гантмахера и Крейна [1], в настоящее время занимает важное место в алгебре и геометрии, что во многом связано с математическими структурами, обнаруженными при решении задачи описания всех тестов положительности — минимальных наборов миноров, чья положительность гарантирует положительность всех остальных. Оказалось, что такие тесты можно строить с помощью следующего приема, который схематически описывается ниже:

- Сначала необходимо вложить полностью положительную матрицу  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}$  в положительную часть Грассмана  $\text{Gr}_{>0}(n, 2n) := \{X \in \text{Gr}(n, 2n) : \Delta_I(X) > 0\}$  заданную матрицей:

$$X(A) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

легко проверить, что для каждого минора матрицы  $A$  существует единственная ей равная координата Плюккера точки  $X(A)$ .

- Затем нужно построить специальную модель модель Лама [2], задающую точку  $X(A)$ , и пометить грани этой модели ее координатами Плюккера, используя правило Скота [3, 4];
- Полученный набор координат Плюккера и будет отвечать тесту положительности миноров матрицы  $A$ . Более того, этот же набор будет образовывать зерно кластерной алгебры для миноров матрицы [3, 4]. Это кластерная алгебра является частным случаем кластерной алгебры для положительных Грассманов [4].

Помимо классических полностью положительных матриц, в приложениях важную роль играют циркулярно-положительные матрицы.

**Определение.** Рассмотрим окружность с отмеченным на ней множеством точек  $S$ , занумерованными против часовой стрелки от 1 до  $n$ . Пара  $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset S$ ,  $Q = \{q_1, \dots, q_k\} \subset S$  называется циркулярной, если все точки  $\{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$  лежат на двух непересекающихся дугах и  $p_1 < p_2 < \dots < p_k < q_k < \dots < q_2 < q_1$  в смысле линейного циклического порядка, отсчитываемого против часовой стрелки от точки  $p_1$ .

**Определение.** Матрица  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  называется циркулярно-положительной, если для любой циркулярной пары  $(P; Q)$ ,  $|P| = |Q| = k$  верно, что

$$(-1)^k \det M[P; Q] > 0.$$

Например, циркулярно-положительными матрицами являются матрицы отклика достаточно связных электрических сетей:

**Определение.** Электрическая сеть  $e(G, \omega)$  — это планарный, вложенный в диск граф  $G(V, E)$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- все узлы (вершины)  $G$  разделены на множество внутренних узлов  $V_I$  и множество граничных узлов  $V_B$ ;
- граничные узлы лежат на граничной окружности и занумерованы по часовой стрелке от 1 до  $|V_B| := n$ ;
- каждое ребро  $v_i v_j$  графа  $G$  снабжено положительным весом  $\omega(v_i v_j) := \omega_{ij}$ , который обозначает проводимость этого ребра.

Рассмотрим электрическую сеть  $e(G, \omega)$  и приложим напряжения  $\mathbf{U} : V_B \rightarrow \mathbb{R}$  к ее граничным узлам  $V_B$ . Эти напряжения индуцируют напряжения на всех остальных вершинах  $U : V \rightarrow \mathbb{R}$ , которые могут быть вычислены с помощью законов Кирхгофа и Ома:

$$\sum_{j \in V} \omega_{ij} (U(j) - U(i)) = 0, \quad i \in V_I.$$

С каждым набором граничных напряжений  $\mathbf{U} = \{U(1), \dots, U(n)\}$  можно связать граничные токи  $\mathbf{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$ , протекающие через граничные узлы:

$$I_k := \sum_{j \in V} \omega_{ij} (U(k) - U(j)), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Основополагающий результат в теории электрических сетей состоит в том, что граничные напряжения и токи связаны друг с другом линейно [5].

**Теорема.** Для каждой электрической сети  $e(G, \omega)$  существует матрица  $M_R(e) = (x_{ij}) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$  такая, что:

$$M_R(e) \mathbf{U} = \mathbf{I}.$$

Эта матрица называется матрицей отклика сети  $e(\Gamma, \omega)$  и удовлетворяет следующим условиям [5]:

- Матрица  $M_R(e)$  симметрична.
- Сумма элементов каждой строки (столбца) равна 0.
- $M_R(e)$  — циркулярно-неотрицательна, то есть для любой циркулярной пары  $(P, Q)$ ,  $|P| = |Q| = k$  верно, что

$$(-1)^k \det M[P, Q] \geq 0.$$

**Определение.** Будем называть электрическую сеть достаточно связной, если все циркулярные миноры строго циркулярно-положительны.

Оказывается, что на циркулярных минорах матриц отклика достаточно связных электрических сетей существует структура кластерной алгебры, которая, как и в случае полностью положительных матриц, является частным случаем кластерной алгебры для положительных Грассманнанов [2]:

- Сначала необходимо вложить достаточно связную электрическую сеть с  $n$  граничными вершинами и матрицей отклика  $M_R(e) = (x_{ij})$  в положительную часть Грассманиана  $\text{Gr}_{>0}(n-1, 2n) := \{X \in \text{Gr}(n-1, 2n) : \Delta_I(X) > 0\}$  с помощью матрицы, см. [6]:

$$\Omega(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \cdots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

- Затем нужно построить специальную минимальную модель Лама [2], задающую точку  $\Omega(e)$ , и пометить грани этой модели ее координатами Плюккера, используя правило Скота;
- Полученный набор координат Плюккера будет образовывать зерно кластерной алгебры для циркулярных миноров матрицы отклика  $M_R(e)$ . Этот же набор координат будет отвечать тесту циркулярной положительности для циркулярных миноров матрицы  $M_R(e)$ .

*Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1636).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1966.
2. Bychkov B., Guterman L., Kazakov A. *Electrical networks via circular minors*. 2024. arXiv:2501.01383v1.
3. Muller G., Speyer D.E. *The twist for positroid varieties*. Proceedings of the London Mathematical Society. 2017. V. 115. № 5. P. 1014–1071.
4. Scott J. S. *Grassmannians and cluster algebras*. Proceedings of the London Mathematical Society. 2006. V. 92. № 2. P. 345–380.
5. Curtis E. B., Morrow J. A. *Inverse problems for electrical networks*. World Scientific. 2000. V. 13.
6. Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. *Electrical Networks, Lagrangian Grassmannians, and Symplectic Groups*. Moscow Mathematical Journal. 2023. V. 23. № 2. P. 133–167.

# НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛИ

*A. B. Кондратьева*

*ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород*

Неальтернирующие гамильтоновы алгебры над полем характеристики 2 были впервые построены в 1993 г. Lin Lei [1] как алгебры Ли полиномов от разделенных степеней с симметричной скобкой Пуассона  $\{f, g\} = \sum_i \partial_i f \partial_i g$ . В случае когда высоты переменных равны 1, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли изоморфны первой серии простых алгебр Ли, построенных И. Капланским [2].

Пусть  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  – векторное пространство размерности  $n$  над совершенным полем  $K$  характеристики 2,  $\mathcal{F}: E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_r \supseteq E_{r+1} = \{0\}$  – флаг пространства  $E$ ,  $O(\mathcal{F}) = O(n, \bar{m})$  – алгебра разделенных степеней,  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$  (см. [3]).

Положим  $(dx_i)^{(2)} = dx_i^{(2)}$ . Симметрическая дифференциальная 2-форма  $\omega$  имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_{ii} dx_i^{(2)} + \sum_{i < j} \omega_{ij} dx_i dx_j.$$

Назовем замкнутую невырожденную форму  $\omega$  ортогональной или неальтернирующей гамильтоновой, если существует элемент  $D \in W(\mathcal{F})$  такой, что  $\omega(D, D) \neq 0$ .

В докладе представлен канонический вид дифференциальной формы с постоянными коэффициентами, рассматриваемой как билинейная форма на пространстве  $E^*$ .

**Теорема 1.** *Существует согласованный с флагом базис пространства  $E^*$ , в котором матрица билинейной формы  $\omega(0)$  имеет вид*

$$diag(M_0, \dots, M_0, M_1, \dots, M_1, 1_s),$$

где

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и  $1_s$  – единичная матрица размерности  $s$ . Количество матриц  $M_0$ ,  $M_1$  и размерность матрицы  $1_s$  определяется инвариантами.

Пусть  $E^0$  – подпространство всех изотропных векторов  $E$  относительно двойственной формы  $\omega(0)$ . Если  $E_1 \subset E^0$ , то канонический вид один и зависит от четности числа переменных:

$$dx_1 dx_2 + \dots + dx_{n-2} dx_{n-1} + dx_n^{(2)}, \quad \text{если } n = 2t + 1,$$

$$dx_1 dx_2 + \dots + dx_{n-1} dx_n + dx_n^{(2)}, \quad \text{если } n = 2t.$$

Формы  $\omega$  и  $\omega'$  над  $O(\mathcal{F})$  и  $O(\mathcal{F}')$ , соответственно, называются эквивалентными если существует допустимый изоморфизм  $\sigma$  такой, что  $\sigma\omega = \omega'$ . Изоморфизм  $\sigma$  называется допустимым, если для  $r \geq 0$ ,  $f \in \mathfrak{m}$  выполняется  $f^{(r)} \in O(\mathcal{F})$  тогда и только тогда, когда  $(\sigma f)^{(r)} \in O(\mathcal{F}')$ , и если это условие выполнено, то  $(\sigma f)^{(r)} = \sigma(f^{(r)})$ . Здесь  $\mathfrak{m}$  – максимальный идеал алгебры  $O(\mathcal{F})$ .

Далее представлен канонический вид ортогональной формы с функциональными коэффициентами. При этом доказано, что все коэффициенты являются многочленами в разделенных степенях.

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  – ортогональная форма и  $\overline{x_s} = x_s^{(2^{m_s}-1)}$ .

- (1) Если  $E_1 \not\subset E^0$ , то  $\omega$  эквивалентна форме  $\omega(0)$ .
- (2) Если  $E_1 \subset E^0$ , то  $\omega$  эквивалентна форме  $\omega(0)$  либо одной из следующих форм:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega(0) + \overline{x_1 x_n} dx_1 dx_n, \quad \text{при } n = 2t + 1, \\ \omega_1 &= \omega(0) + \overline{x_1 x_{n-1}} dx_1 dx_{n-1}, \quad \text{при } n = 2t, \\ \alpha \omega_n &= \alpha(\omega(0) + \overline{x_{n-1} x_n} dx_{n-1} dx_n) \quad (\alpha \in K), \quad \text{при } n = 2t.\end{aligned}$$

При этом  $\omega_1, \omega_n, \omega(0)$  попарно не эквивалентны.

Алгебра Ли гамильтоновых векторных полей, соответствующая ортогональной форме  $\omega$ , обозначается  $\tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$ ,

$$\tilde{P}(\mathcal{F}, \omega) = \{D \in W(\mathcal{F}) \mid D\omega = 0\} \cong \tilde{O}(\mathcal{F})/K,$$

где  $\tilde{O}(\mathcal{F}) = O(\mathcal{F}) + \langle x_i^{(2^{m_i})}, i = 1, \dots, n \rangle$ , и умножение осуществляется с помощью скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \overline{\omega}_{ij} \partial_i f \partial_j g.$$

Здесь  $(\overline{\omega}_{ij})$  – обратная матрица формы  $\omega$ .

Пусть  $P(\mathcal{F}, \omega) = \{D_f \mid f \in O(\mathcal{F})/K\}$ . Алгебру Ли  $\mathcal{L}$ , такую что

$$P(\mathcal{F}, \omega)^{(1)} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega),$$

будем называть неальтернирующей гамильтоновой алгеброй Ли.

Следующая теорема представляет собой результат исследования фильтрованных деформаций неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли.

**Теорема 3.** Пусть  $\omega_0$  – ортогональная форма с постоянными коэффициентами,  $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \dots$  – градуированная алгебра Ли,  $P(\mathcal{F}, \omega_0)^{(1)} \subseteq L \subseteq \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega_0)$ ,  $\mathcal{L}$  – фильтрованная деформация  $L$ . Предположим, что  $n > 4$ , или  $n = 4$  и  $E_1 \not\subset E^0$ , или  $n = 2, 3$  и  $E = E_1$ . Тогда справедливы утверждения:

- (1)  $\mathcal{F}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0) = \mathcal{F}(L, L_{(0)})$ .
- (2)  $\text{Der } \mathcal{L} \cong N_{\overline{W(\mathcal{F})}}(\mathcal{L})$ , где  $\overline{W(\mathcal{F})}$  –  $p$ -замыкание алгебры Ли  $W(\mathcal{F})$  в  $\text{Der } O(\mathcal{F})$ .
- (3) Существует единственная с точностью до множителя из  $K^*$  ортогональная форма  $\omega$  с коэффициентами из  $O(\mathcal{F})$ , такая что  $P(\mathcal{F}, \omega)^{(1)} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$  и  $\omega(0) = \omega_0$ .
- (4) Группа автоморфизмов алгебры Ли  $\mathcal{L}$  изоморфна группе допустимых автоморфизмов  $\varphi$  алгебры  $O(\mathcal{F})$ , таких что  $\varphi(\omega) = \alpha\omega$ ,  $\alpha \in K^*$ .

Наконец, представлена теорема, описывающая простые неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли.

**Теорема 4.** Пусть  $O(\mathcal{F}) = O(n, \overline{m})$ ,  $m = m_1 + \dots + m_n$ ,  $\mathcal{L} = P(\mathcal{F}, \omega)$ .

- (1) Если  $E_1 \not\subset E^0$ , то  $\mathcal{L}$  – простая алгебра Ли размерности  $2^m - 1$ .

- (2) Если  $E_1 \subset E^0$  и  $\omega = \omega_k$ , то  $\mathcal{L}$  – простая алгебра Ли размерности  $2^m - 1$ . Здесь  $k = 1$  или  $k = n$  (см. теорему 2).
- (3) Если  $E_1 \subset E^0$  и  $\omega = \omega(0)$ , то при  $n > 3$  или при  $n = 3$ ,  $\bar{m} \neq \bar{1}$ , коммутант  $\mathcal{L}^{(1)}$  – простая алгебра Ли размерности  $2^m - 2$ .

Результаты автора анонсированы в работах [4–6].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект FSWR-2023-0034, и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lin Lei. *Non-alternating hamiltonian algebra  $P(n, m)$  of characteristic two*. Communications in Algebra. 1993. V. 21. № 2. P. 399–411.
2. Kaplansky I. *Some simple Lie algebras of characteristic 2*. Lecture Notes in Math. 1982. V. 933. P. 127–129.
3. Костриkin А. И., Шафаревич И. Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 2. С. 251–322.
4. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. *Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2*. Russian Math. (Изв. вузов. Матем.) 2023. V. 6. P. 95–100; English translation: Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2023. T. 67. № 6. С. 82–87.
5. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. *Фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли*. Russian Math. (Изв. вузов. Матем.) 2024. V. 9. P. 100–105; English translation: Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2024. T. 68. № 9. С. 86–90.
6. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. *К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли*. Журнал Средневолжского мат. общества. 2024. Т. 26. № 4. С. 392–403.

# О КОНЕЧНЫХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, ГРАФЫ ГРЮНБЕРГА–КЕГЕЛЯ КОТОРЫХ ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ “БАЛАЛАЙКА”

*A. С. Кондратьев<sup>1,2</sup>, Н. А. Минигулов<sup>1,2,3</sup>, М. С. Нирова<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,*

<sup>2</sup>*Уральский математический центр, Екатеринбург*

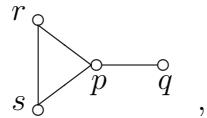
<sup>3</sup>*Уральский федеральный университет, Екатеринбург*

<sup>4</sup>*Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова,  
Нальчик*

Графом Грюнберга–Кегеля (или *графом простых чисел*)  $\Gamma(G)$  конечной группы  $G$  называется граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы  $G$  и две различные вершины  $r$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда в группе  $G$  существует элемент порядка  $pq$ . Графом “балалайка” (paw) называют граф, который имеет ровно четыре вершины со степенями 1, 2, 2 и 3.

А. С. Кондратьев описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп  $Aut(J_2)$  [1] и  $A_{10}$  [2]. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”.

В работе [3] была поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”. В дальнейшем будем считать, что  $G$  — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморчен графу “балалайка”, т. е. граф  $\Gamma(G)$  имеет следующий вид:



где  $r, s, p$  и  $q$  — некоторые попарно различные простые числа.

В [3] доказано, что если группа  $G$  неразрешима, то фактор-группа  $\overline{G} = G/S(G)$  (где  $S(G)$  — разрешимый радикал группы  $G$ ) почти проста, и классифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы подграфу графа “балалайка”. В [4] описаны конечные разрешимые группы  $G$  с этим свойством. Также в [5] классифицированы конечные неразрешимые группы  $G$  в следующих двух случаях: (1) группа  $G$  не содержит элементов порядка 6; (2) группа  $G$  содержит элемент порядка 6, и вершина  $q$  графа  $\Gamma(G)$  делит  $|S(G)|$ .

Изучение проблемы продолжается. В докладе предполагается обсудить полученные результаты.

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1549).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kondrat'ev A. S. *Finite groups with prime graph as in the group  $Aut(J_2)$* . Proc. Steklov Inst. Math. 2013. V. 283. Suppl. 1. P. 78–85.

2. Kondrat'ev A. S. *Finite groups that have the same prime graph as the group  $A_{10}$* . Proc. Steklov Inst. Math. 2014. V. 285. Suppl. 1 P. 99–107.
3. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group  $A_{10}$* . Siberian Electr. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 1378–1382.
4. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. *Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*. Tp. ИММ УпО РАН. 2022. Т. 28. № 2. С. 269–273.
5. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*. Commun. Math. Stat. 2022. V. 10. № 4. P. 653–667.

# О ПОРОЖДАЮЩИХ ТРОЙКАХ ИНВОЛЮЦИЙ МАТРИЧНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ И НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

*И. А. Марковская*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Группу, порожденную тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной. Класс таких групп замкнут относительно гомоморфных образов, если по определению единичную группу считаем таковой и не исключаем совпадения двух или всех трех инволюций. В частности, в нашем определении любая диэдральная группа является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной.

Вопрос о  $(2 \times 2, 2)$ -порождаемости конечных простых групп был поставлен В. Д. Мазуровым в Коуровской тетради в 1980 году [1]. Ответ на этот вопрос известен, и он положителен, исключая три знакопеременные группы, некоторые группы лиева типа ранга не больше трех и четыре спорадические группы. Полный список конечных простых групп, не являющихся  $(2 \times 2, 2)$ -порожденными, представлен в работе Я. Н. Нужина [2].

Вместе с тем для групп  $GL_n(\mathbb{Z})$  и  $PGL_n(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел в [3] были получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Общая линейная группа  $GL_n(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда  $n \geq 5$ .

**Теорема 2.** Проективная общая линейная группа  $PGL_n(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда  $n = 2$  и  $n \geq 5$ .

В [4] были получены результаты о  $(2 \times 2, 2)$ -порождаемости групп  $GL_n(q)$  и  $PGL_n(q)$  над конечными полями.

**Теорема 3.** Группа  $GL_n(q)$  тогда и только тогда является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной, когда либо а)  $q = 2$  и  $n = 2$  или  $n \geq 5$ , либо б)  $q = 3$  и  $n \geq 5$ .

**Теорема 4.** Группа  $PGL_n(q)$  тогда и только тогда является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной, когда либо а)  $n = 2$  и  $q$  любое, либо б)  $n \geq 4$  и  $(n, q - 1) = 2$ , либо в)  $n \geq 5$  и  $(n, q - 1) = 1$ .

Подгруппу матриц общей линейной группы  $GL_n(q)$  над конечным полем из  $q$  элементов с определителем, равным  $\pm 1$ , обозначим  $GL_n^{\pm 1}(q)$ . Очевидно, справедливо следующее равенство:

$$GL_n^{\pm 1}(q) = SL_n(q)\lambda \langle diag(-1, 1, \dots, 1) \rangle.$$

По теореме 3 группа  $GL_n(q)$  не является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной при  $q > 3$ . Вместе с тем  $GL_n^{\pm 1}(q)$  может являться  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной при различных  $q$ .

Очевидно  $GL_n^{\pm 1}(2^k) = SL_n(2^k)$ . Ответ о  $(2 \times 2, 2)$ -порожденности  $SL_n(2^k)$  получен в [5]. Для  $GL_n^{\pm 1}(q)$  при нечетном  $q$  был получен следующий результат.

**Теорема 5.** При нечетном  $q$  группа  $GL_n^{\pm 1}(q)$  тогда и только тогда является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной, когда  $n \geq 5$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25-21-20059).*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *The Kourouka notebook: Unsolved Problems in Group Theory*. Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro. Sobolev Institute of Mathematics. Novosibirsk. 2022. № 20.
2. Нужин Я. Н. *О порождающих множествах инволюций простых конечных групп*. Алгебра и логика. 2019. Т. 58. № 3. С 426–434.
3. Markovskaya I. A., Nuzhin Ya. N. *On generation of the groups  $GL_n(Z)$  and  $PGL_n(Z)$  by three involutions, two of which commute*. Журн. СФУ. Сер. матем. и физ. 2023. Т. 16. № 4. С. 413–419.
4. Марковская И. А., Нужин Я. Н. *О порождаемости групп  $GL_n(q)$  и  $PGL_n(q)$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны*. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. (doi: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-fon-03)
5. Нужин Я. Н. *Порождающие тройки инволюций групп Шеева над конечным полем характеристики 2*. Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 192–206.

# ОБОБЩЕНИЯ ГИПЕРЦЕНТРА И ГРАФЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

*B. I. Мурашко*

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**Введение.** Рассматриваются только конечные группы. Важную роль в теории групп играет понятие гиперцентра — финального члена верхнего центрального ряда. В рамках теории классов групп имеется несколько подходов к определению аналога гиперцентра для данного класса групп.

Первый из них связан с понятием  $\mathfrak{F}$ -центрального главного фактора для класса групп  $\mathfrak{F}$ , которое появилось в своей финальной форме в монографии Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [1]. Напомним, что для класса групп  $\mathfrak{F}$  главный фактор  $H/K$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -центальным, если полуправильное произведение  $H/K$  и  $G/C_G(H/K)$ , действующее сопряжением на  $H/K$ , принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Наибольшая нормальная подгруппа  $Z_{\mathfrak{F}}(G)$  группы  $G$ , все главные факторы  $G$  ниже которой  $\mathfrak{F}$ -центральны, называется  $\mathfrak{F}$ -гиперцентром группы  $G$ .

Второй из них был предложен Р. Бэром в 1966 году [2]. Пусть  $\epsilon$  — теоретико-групповое свойство. Тогда  $\epsilon$ -гиперцентром  $\mathfrak{h}_{\epsilon}G$  группы  $G$  называется множество элементов  $g$  группы  $G$  таких, что  $\langle g, E \rangle$  является подгруппой некоторой  $\epsilon$ -подгруппы в  $G$  для любой  $\epsilon$ -подгруппы  $E$  группы  $G$ . На языке современной теории классов групп предложенное им обобщение гиперцентра, когда  $\epsilon$  — принадлежность классу групп  $\mathfrak{F}$ , есть  $\text{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$  — пересечение  $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп группы  $G$ . Напомним, что подгруппа  $U \in \mathfrak{F}$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -максимальной в  $G$ , если из  $U \leq V \leq G$  и  $V \in \mathfrak{F}$  следует, что  $U = V$ .

Третий подход связан с семействами  $\mathfrak{F}$ -графов и не- $\mathfrak{F}$ -графов групп, т. е. графов, вершинами которых являются элементы группы, в которых  $x$  и  $y$  соединены ребром, если  $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{F}$  и  $\langle x, y \rangle \notin \mathfrak{F}$  соответственно. Примерами таких графов являются графы коммутативности и некоммутативности, нильпотентности и ненильпотентности, разрешимости и неразрешимости, и др. При изучении таких графов [3] возникает множество  $\mathcal{I}_{\mathfrak{F}}(G) = \{x \mid \langle x, y \rangle \in \mathfrak{F} \text{ для любого } y \in G\}$ .

Отметим, что  $Z_{\mathfrak{N}}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{N}}(G) = \mathcal{I}_{\mathfrak{N}}(G)$  — гиперцентр группы  $G$  для класса нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ . В работе будут обсуждаться связи между указанными обобщениями гиперцентра.

**1.  $Z$ -насыщенные формации.** Формация  $\mathfrak{F}$  называется центрально насыщенной (кратко  $Z$ -насыщенной) [4], если  $\mathfrak{F} = (G \mid G = Z_{\mathfrak{F}}(G))$ . Примерами таких формаций являются локальные (насыщенные) и композиционные (Бэр-локальные, разрешимо насыщенные) формации.

**Задача 1** (Л. А. Шеметков, 1997 [5]). Описать семейство  $Z$ -насыщенных формаций.

Решение этой задачи начато в работах [4, 6]. В частности, в работе [6] было доказано, что  $Z$ -насыщенная формация  $\mathfrak{F}$  разрешимых групп является насыщенной тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$  обладает условием тензорных произведений, и поставлена следующая задача.

**Задача 2** (А. Баллестером-Болиншес, М. Д. Перец-Рамос, 1999 [6]). Распространить результат о насыщенности  $Z$ -насыщенной формации на произвольные группы.

Напомним, что примитивной группой второго типа называется группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу, и эта подгруппа неабелева. Гашюц [7, ап-пендикс  $\beta$ ] доказал, что для любой группы  $G$  и  $p \in \pi(G)$  найдется группа  $E = E_p(G)$  такая, что (a) в  $E$  имеется нормальная элементарная абелева  $p$ -подгруппа  $A \leq \Phi(E)$ ,

(b)  $E/A \simeq G$  и (c) любое расширение группы  $G$ , удовлетворяющее (a) и (b), является эпиморфным образом группы  $E$ .

Будем говорить [4], что формация  $\mathfrak{F}$  обладает:

- условием тензорных произведений в классе всех групп, если для любых двух  $G$ -модулей  $V$  и  $W$  над полем  $GF(p)$  верно:

$$V \rtimes G \in \mathfrak{F} \text{ и } W \rtimes G \in \mathfrak{F} \Rightarrow (V \otimes W) \rtimes G \in \mathfrak{F};$$

- условием фраттиневых расширений примитивных групп, если  $E_p(G) \in \mathfrak{F}$  для любых примитивной  $\mathfrak{F}$ -группы второго типа  $G$  и  $p \in \pi(\text{Soc}(G))$ .

Согласно [6], формация разрешимых групп называется обладающей условием тензорных произведений, если она обладает условием тензорных произведений в классе всех разрешимых групп. Ответ на предыдущую задачу дает:

**Теорема 1** [4]. *Верны следующие утверждения:*

(1)  *$Z$ -насыщенная формация  $\mathfrak{F}$  является разрешимо насыщенной тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$  обладает условием тензорных произведений в классе всех групп.*

(2) *Разрешимо насыщенная формация  $\mathfrak{F}$  является насыщенной тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$  обладает условием фраттиневых расширений примитивных групп.*

(3)  *$Z$ -насыщенная формация  $\mathfrak{F}$  является насыщенной тогда и только тогда, когда она обладает условиями тензорных произведений в классе всех групп и фраттиневых расширений примитивных групп.*

**2. Формации Бэра – Шеметкова.** В 1995 году Л. А. Шеметков на Гомельском алгебраическом семинаре поставил задачу описания формаций, для которых  $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$  в любой группе. Формации, для которых решение данной задачи положительно, будем называть формациями Бэра – Шеметкова [8]. На языке локальных экранов все наследственные насыщенные формации Бэра – Шеметкова были описаны в работе [9]. Описанию формаций Бэра – Шеметкова квази- $\mathfrak{F}$ -групп посвящена работа [10], в частности, формация всех квазинильпотентных групп является формацией Бэра – Шеметкова. Отметим, что работа [10] не дает новых примеров формаций Бэра – Шеметкова разрешимых групп по сравнению с [9].

Для дальнейшего изучения формаций Бэра – Шеметкова нам потребуется понятие  $N$ -критического графа класса групп. Напомним, что  $(p, q)$ -группой Шмидта называется  $\{p, q\}$ -группа Шмидта с нормальной силовской  $p$ -подгруппой.  $N$ -критическим графом  $\Gamma_{Nc}(G)$  группы  $G$  [11] называется ориентированный граф, множеством вершин которого является множество  $\pi(G)$  всех простых делителей  $|G|$  и  $(p, q)$  является ребром  $\Gamma_{Nc}(G)$  тогда и только тогда, когда в  $G$  имеется  $(p, q)$ -подгруппа Шмидта.  $N$ -критическим графом  $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X})$  класса групп  $\mathfrak{X}$  [11] называется ориентированный граф на множестве вершин  $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$  такой, что

$$\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma_{Nc}(G).$$

Основным результатом раздела является следующая теорема, доказательство которой существенно использует  $N$ -критический граф групп, в частности, дисперсивность группы,  $N$ -критический граф которой не имеет циклов.

**Теорема 2** [8]. *Если  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация Бэра – Шеметкова, то всякая компонента связности  $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})$  – полный ориентированный граф. Если  $\mathfrak{F}$  состоит из метанильпотентных групп и  $Z$ -насыщена, то верно и обратное утверждение.*

Пусть  $\mathfrak{F}$  — гомоморф. Напомним (см., например, [12] и [13]), что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$ , если существует цепочка подгрупп  $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$  с  $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$  или  $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Классы  $v^*\mathfrak{F}$  и  $\bar{w}\mathfrak{F}$  всех групп, все циклические примарные и силовские (включая 1) подгрупп которых  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальны соответственно, изучались в работах [14] и [15].

Пусть  $\sigma$  — разбиение множества всех простых чисел. Напомним [16], что группа называется  $\sigma$ -нильпотентной, если она имеет нормальную холлову  $\sigma_i$ -подгруппу для любого  $\sigma_i \in \sigma$ . При доказательстве следующего результата также применялись методы  $N$ -критических графов и  $Z$ -насыщенных формаций.

**Теорема 3** [17]. *Пусть  $\mathfrak{F}$  — наследственная формация и  $v^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$  или  $\bar{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ . Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является формацией Бэра — Шеметкова, когда найдется разбиение  $\sigma$  множества всех простых чисел такое, что  $\mathfrak{F}$  совпадает с классом всех  $\sigma$ -нильпотентных групп.*

**3. Регулярные формации.** В работе [3] было введено понятие регулярной формации — наследственной формации, для которой  $\text{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathcal{I}_{\mathfrak{F}}(G)$  в любой группе  $G$ , и получена характеристика таких насыщенных формаций разрешимых групп в терминах минимальных не  $\mathfrak{F}$ -групп. В работе обсуждается конструктивное описание таких формаций. Способ построения таких формаций дает следующий результат.

**Теорема 4** [18]. *Если  $\mathfrak{H}$  — наследственный гомоморф разрешимых групп, то  $v^*\mathfrak{H}$  — наименьшая по включению насыщенная регулярная формация разрешимых групп, содержащая  $\mathfrak{H}$ . В частности, наследственная насыщенная формация  $\mathfrak{F}$  разрешимых групп регулярна тогда и только тогда, когда  $v^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ .*

Напомним [19] (см. также [12, 13]), что формаия  $\mathfrak{F}$  называется формацией с условием Шеметкова в  $\mathfrak{S}$ , если каждая разрешимая минимальная не  $\mathfrak{F}$ -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Примерами формаций с условием Шеметкова в  $\mathfrak{S}$  являются классы всех нильпотентных,  $p$ -нильпотентных и  $\varphi$ -дисперсивных групп.

**Следствие 4.1** [18]. *Пусть  $\mathfrak{F}$  — наследственная формаия с условием Шеметкова в  $\mathfrak{S}$  разрешимых групп и  $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ . Тогда  $\mathfrak{F}$  регулярна.*

Пусть  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  — насыщенные регулярные формации разрешимых групп. Обозначим через  $\mathfrak{F}_1 \vee_{reg} \mathfrak{F}_2$  и  $\mathfrak{F}_1 \wedge_{reg} \mathfrak{F}_2$  наименьшую по включению насыщенную регулярную формуацию, содержащую  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$ , и наибольшую по включению насыщенную регулярную формуацию, содержащуюся в  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$ , соответственно.

**Следствие 4.2** [18]. *Пусть  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  — насыщенные регулярные формации разрешимых групп. Тогда  $\mathfrak{F}_1 \wedge_{reg} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$  и  $\mathfrak{F}_1 \vee_{reg} \mathfrak{F}_2 = v^*(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ .*

Доказательство теоремы 4 основано на том, что значения операции замыкания  $v^*$  на наследственных гомоморфах являются разрешимо насыщенными формациями, что, в свою очередь, существенно опирается на п. (1) теоремы 1.

**Теорема 5** [18]. *Пусть  $\mathfrak{H}$  — наследственный гомоморф. Тогда  $v^*\mathfrak{H}$  — разрешимо насыщенная формаия. В частности, если  $\mathfrak{H}$  состоит из разрешимых групп, то  $v^*\mathfrak{H}$  — насыщенная формаия.*

Напомним, что сверхнатуральное число — это следующее формальное произведение  $\omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(\omega)}$ , где  $v_p(\omega)$  может быть равно нулю, натуральному числу или бесконечности. Для обозначения множества всех сверхнатуральных чисел используем  $\mathbb{SN}$ . Если среди  $v_p(\omega)$  нет бесконечностей и только конечное число  $v_p(\omega)$  не равно нулю, то  $\omega$  — натуральное число. Напомним, что  $\omega_1$  делит  $\omega_2$ , если  $v_p(\omega_1) \leq v_p(\omega_2)$  для всех  $p \in \mathbb{P}$ . Для класса всех разрешимых групп  $\mathfrak{S}$  и сверхнатурального числа  $\omega$  используем  $\mathfrak{S}(\omega)$  для обозначения

класса всех разрешимых групп, экспоненты которых делят  $\omega$ .

**Теорема 6** [18]. *Верны следующие утверждения:*

(1) *Пусть  $f : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{SN}$  — функция такая, что  $v_p(f(p)) = \infty$  для всех  $p \in \mathbb{P}$ . Тогда*

$$\bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}(f(p))$$

*является наследственной насыщенной регулярной формацией разрешимых групп.*

(2) *Если  $\mathfrak{F}$  — наследственная насыщенная регулярная формация разрешимых групп, то существует функция  $f : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{SN}$  такая, что  $v_p(f(p)) = \infty$  для всех  $p \in \mathbb{P}$ , и*

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}(f(p)).$$

Для сверхнатуральных чисел  $\omega_1$  и  $\omega_2$  напомним, что

$$lcm(\omega_1, \omega_2) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{v_p(\omega_1), v_p(\omega_2)\}} \text{ и } gcd(\omega_1, \omega_2) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{v_p(\omega_1), v_p(\omega_2)\}}.$$

Множество  $\mathbb{SN}$  с операциями  $lcm$  и  $gcd$  представляет собой полную дистрибутивную решетку, называемую решеткой Стейница [20]. Обозначим через  $\text{Reg}$  множество всех разрешимых насыщенных регулярных формаций.

**Теорема 7** [18]. *Решетка  $(\text{Reg}, \vee_{reg}, \wedge_{reg})$  является решеткой, изоморфной решетке Стейница. В частности, это полная дистрибутивная решетка.*

Согласно [20] сверхнатуральное число  $\omega$  называется полным, если  $v_p(\omega) \in \{0, \infty\}$  для всех  $p \in \mathbb{P}$ . Обозначим через  $\text{Shem}$  множество всех наследственных формаций разрешимых групп с условием Шеметкова в  $\mathfrak{S}$ , содержащих  $\mathfrak{N}$ .

**Следствие 7.1** [18]. *Решетка  $(\text{Shem}, \vee_{reg}, \wedge_{reg})$  является решеткой, изоморфной подрешетке всех полных сверхнаследственных чисел решетки Стейница. В частности, это полная дистрибутивная и дополняемая решетка.*

Из этого результата следуют основные результаты [21].

**Следствие 7.2.** *Множество  $\text{Shem}$  с естественным частичным порядком представляет собой полную, дистрибутивную и дополняемую решетку с наименьшим и наибольшим элементами.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (Ф23РНФМ-63).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. *Формации алгебраических систем*. М.: Наука, 1989.
2. Baer R. *Group theoretical properties and functions*. Colloq. Math. 1966. V. 14 P. 285–327.
3. Lucchini A., Nemmi D. *The non- $\mathfrak{F}$  graph of a finite group*. Math. Nachr. 2021. V. 294. № 10. P. 1912–1921.
4. Мурашко В. И. *К вопросам Шеметкова, Баллестера-Болиншеса и Перес-Рамос теории конечных групп* Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 6. С. 839–849.
5. Shemetkov L. A. *Frattini extensions of finite groups and formations* Comm. Algebra. 1997. V. 23. № 3. P. 955–964.
6. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. *On a question of L. A. Shemetkov*. Comm. Algebra. 1999. V. 27. № 11. P. 5615–5618.

7. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992.
8. Мурашко В. И. *К вопросу Шеметкова об  $\mathfrak{F}$ -гиперцентре*. Матем. заметки. 2024. Т. 115. № 5. С. 759–771.
9. Skiba A. N. *On the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter and the intersection of all  $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group* J. Pure Appl. Algebra. 2012. № 216. P. 789–799.
10. Murashka V. I. *On the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter and the intersection of  $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group* J. Group Theory. 2018. V. 21. № 3. P. 463–473.
11. Васильев А. Ф., Мурашко В. И. *Арифметические графы и классы конечных групп* Сиб. матем. журн. 2019. Т 60. № 1. С. 55–73.
12. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Springer, 2006.
13. Каморников С. Ф., Селькин М. В. *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*. Минск : Белорусская наука, 2003.
14. Мурашко В. И. *Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами*. Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55. № 6. С. 1353–1367.
15. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. *Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп*. Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 259–275.
16. Skiba A. N. *On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups*. J. Algebra 2015. № 436. P. 1–16.
17. Murashka V. I., Vasil'ev A. F. *On the  $\sigma$ -nilpotent hypercenter of finite groups*. J. Group Theory. 2022. V. 25. № 6. P. 1083–1098.
18. Murashka V. I. *Regular saturated formations of finite soluble groups*. J. Group Theory. 2025. DOI 10.1515/jgth-2024-0143.
19. Семенчук В. Н., Васильев А. Ф. *Характеризация локальных формаций  $F$  по заданным свойствам минимальных не  $F$ -групп*. Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: труды Гомельского семинара. Минск : Наука и техника, 1984. С. 175–181.
20. Bezushchak O., Oliynyk B., Sushchansky V. *Representation of Steinitz's lattice in lattices of substructures of relational structures*. Algebra Discrete Math. 2016. V. 21. № 2. P. 184–201.
21. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Yi X. *The lattice of formations with the Shemetkov property*. J. Algebra Appl. 2024. DOI 10.1142/S0219498825503086.

# РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛИТОПЫ И СТРУННЫЕ С-ГРУППЫ

*Я. Н. Нужин*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

*Абстрактный  $n$ -политоп  $\mathbf{P}$*  — это частично упорядоченное множество со строго монотонной ранговой функцией, имеющей диапазон значений  $\{-1, 0, 1, \dots, n\}$ , для которого выполняются аксиомы (P1)–(P4). Элемент  $F \in \mathbf{P}$  ранга  $j$  называется  $j$ -гранью и обозначается  $F_j$ . Любые две  $j$ -грани  $F_j$  и  $G_j$  не сравнимы. Итак, частично упорядоченное множество  $\mathbf{P}$  называется абстрактным политопом или просто политопом, если оно удовлетворяет следующим четырем аксиомам.

(P1) В  $\mathbf{P}$  существуют наименьший элемент  $F_{-1}$  и наибольший элемент  $F_n$ . Они называются *несобственными* гранями, а отличные от них — *собственными*.

(P2) Каждый флаг (максимальная цепь) из  $\mathbf{P}$  содержит ровно  $n + 2$  грани, в том числе  $F_{-1}$  и  $F_n$ .

(P3) Если  $F_{j-1} < G_{j+1}$ , то в  $\mathbf{P}$  существуют в точности две такие  $j$ -грани  $H$ , что  $F_{j-1} < H < G_{j+1}$  (*условие однородности или алмазное условие*).

(P4) Для любых двух флагов  $\Phi$  и  $\Psi$  из  $\mathbf{P}$  существует последовательность флагов  $\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_k = \Psi$  такая, что  $\Phi_{i-1}$  и  $\Phi_i$  — соседние флаги и  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ ,  $0 \leq i \leq k$  (*условие сильной (флаг)-связности*).

Два флага называются *соседними*, если они различаются лишь одной гранью. Так, флаги  $\Phi = \{F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \}$  и  $\Psi = \{F_{-1}, G_0, F_1, F_2, \}$  являются соседними для политопа на рис. 2. Число  $n$  — ранг политопа, в этом случае называем его  $n$ -политопом и считаем, что  $n \geq 1$ . Очевидно, с точностью до изоморфизма политоп ранга 1 единственный, см. рис. 1. Можно назвать его *алмазом* из-за его формы.

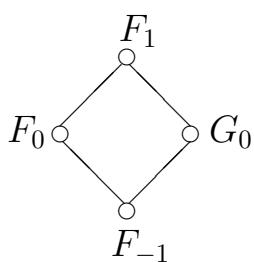


Рис. 1. Политоп ранга 1

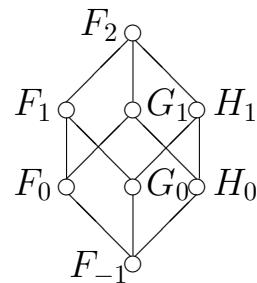


Рис. 2. Политоп ранга 2

Два политопа  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  называются *изоморфными*, если существует сохраняющая порядок биекция  $\theta : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ , и тогда группа автоморфизмов  $Aut(\mathbf{P})$  политопа  $\mathbf{P}$  естественно определяется как группа всех таких биекций  $\mathbf{P}$  в себя. Если порядок группы  $|Aut(\mathbf{P})|$  равен числу флагов политопа  $\mathbf{P}$ , то она действует транзитивно и, следовательно, регулярно на множестве флагов. В этом случае абстрактный  $n$ -политоп  $\mathbf{P}$  называется *регулярным*.

По каждому  $m$ -угольнику на плоскости и выпуклому телу с плоскими гранями можно построить 2-политоп и соответственно 3-политоп, используя только инцидентность вершин, ребер и граней. Так, треугольнику соответствует политоп на рис. 2.

Заметим, что каждому  $m$ -угольнику на плоскости будет соответствовать регулярный 2-политоп, однако для произвольного пространственного тела с плоскими гранями соответ-

ствующий ему 3-политоп уже не обязан быть регулярным. Например, с треугольной призмой и четырехугольной пирамидой ассоциируются нерегулярные 3-политопы; см. рис. 3 и рис. 4 соответственно.

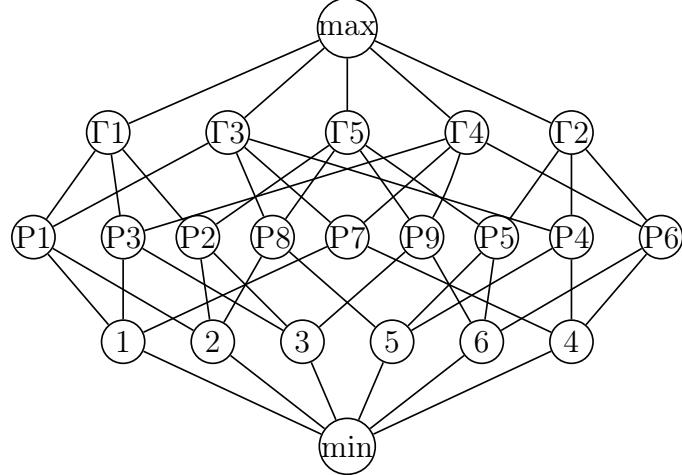


Рис. 3. Политоп, ассоциированный с треугольной призмой

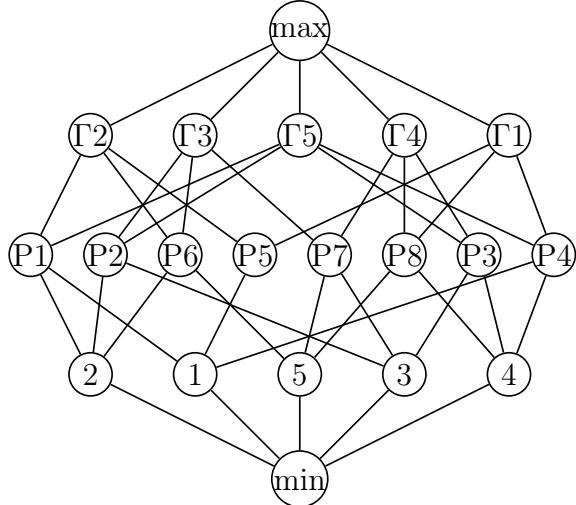


Рис. 4. Политоп, ассоциированный с четырехугольной пирамидой

Группа называется *C-группой*, если она порождается множеством инволюций  $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$  и для любых подмножеств  $J$  и  $K$  из  $I = \{0, 1, \dots, n - 1\}$  справедливо равенство

$$\langle \rho_i \mid i \in J \rangle \cap \langle \rho_i \mid i \in K \rangle = \langle \rho_i \mid i \in J \cap K \rangle. \quad (1)$$

*C-группа* называется *струнной C-группой*, кратко *n-струнной* или просто *струнной*, если

$$(\rho_i \rho_j)^2 = 1 \text{ при } |i - j| \geq 2, \quad (2)$$

другими словами, если ее граф Кокстера является струной (цепью).

Пусть  $k_i = |\rho_{i-1} p_i|$  (порядок произведения инволюций  $\rho_{i-1}$  и  $p_i$ ), тогда упорядоченный набор натуральных чисел  $[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}]$  называется *типом n-струнной группы*. Заметим, что одна и та же группа может иметь разные типы и даже разные ранги как струнная группа.

**Пример.** Булеван множества из  $n + 1$  элементов с частичным порядком включения его подмножеств является регулярным  $n$ -политопом, а его группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе  $S_{n+1}$ . В этом случае порождающие инволюции  $\rho_i$  совпадают с транспозициями  $(i + 1, i + 2)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , а тип  $S_{n+1}$  как струнной группы равен  $[3, 3, \dots, 3]$ . Политоп на рис. 2 является частным случаем этого примера при  $n = 2$ , где грани  $F_0, G_0, H_0$  соответствуют подмножествам мощности 1, а грани  $F_1, G_1, H_1$  — подмножествам мощности 2.

Для групп Кокстера условие пересечения (1) выполняется, причем независимо от их конечности [1, с. 23], поэтому они являются струнными группами, если их граф Кокстера — цепь, поскольку тогда будет выполняться и условие (2).

По любой струнной группе можно построить регулярный политоп, для которого данная струнная группа будет его группой автоморфизмов. Более того, существует взаимно однозначное соответствие между  $n$ -струнными группами и регулярными политопами ранга  $n$ ; см., например, [2, Секция 2В].

М. Кондер и Д. Оливерос установили следующий результат [3, теорема 4.1].

**Теорема 1.** Пусть конечная группа  $G$  порождается тремя инволюциями  $\alpha, \gamma, \beta$  первые две из которых перестановочны, причем порядки произведений  $\alpha\beta$  и  $\beta\gamma$  больше 2. Тогда  $G$  является группой автоморфизмов регулярного 3-политопа или содержит нетривиальную нормальную подгруппу  $N$ , лежащую в  $\langle\alpha\beta\rangle$  или в  $\langle\beta\gamma\rangle$ .

На рис. 5 представлен график Кокстера 3-струнной группы  $G$  типа  $[k_1, k_2]$  из теоремы 1, как впрочем, и из теоремы 2 ниже, где  $k_1$  и  $k_2$  — порядки произведений  $\alpha\beta$  и  $\beta\gamma$  соответственно.

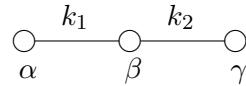


Рис. 5

Примеры показывают, что существуют группы, которые являются группами автоморфизмов регулярных 3-политопов и содержат различные нетривиальные нормальные подгруппы  $N_1$  и  $N_2$ , лежащие в  $\langle\alpha\beta\rangle$  и соответственно в  $\langle\beta\gamma\rangle$ . Таким образом, оба заключения теоремы 1 могут выполняться одновременно.

Б. Б. Бактыбеков, М. Кондер, Я. Н. Нужин и А. В. Резанцева [4] получили следующий критерий, который дополняет утверждение теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть конечная группа  $G$  порождается тремя инволюциями  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , такими, что  $\alpha$  и  $\gamma$  перестановочны, а порядки произведений  $\alpha\beta$  и  $\beta\gamma$  больше 2. Тогда порождающее множество  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  делает  $G$  группой автоморфизмов регулярного 3-политопа тогда и только тогда, когда она не содержит нетривиальных нормальных подгрупп, лежащих в пересечении  $\langle\alpha\beta\rangle \cap \langle\beta\gamma\rangle$ , и пересечение  $\langle\alpha, \beta\rangle \cap \langle\beta, \gamma\rangle$  не является элементарной абелевой подгруппой порядка 4.

Укажем некоторые следствия теорем 1 и 2. Следствия 1 и 2 вытекают из теоремы 2, а следствие 3 — из теоремы 1.

**Следствие 1.** Пусть конечная группа  $G$  порождается тремя инволюциями  $\alpha, \gamma, \beta$ , первые две из которых перестановочны, причем порядки произведений  $\alpha\beta$  и  $\beta\gamma$  больше 2, и хотя бы один из них является простым числом. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:

- a)  $G$  является группой автоморфизмов регулярного 3-политопа;

б)  $G$  — диэдральная группа, и в этом случае порядок одного из произведений  $\alpha\beta$  или  $\beta\gamma$  является четным числом ( $\alpha$  другого — простым).

**Следствие 2.** Пусть конечная группа  $G$  порождается тремя инволюциями  $\alpha, \gamma, \beta$ , первые две из которых перестановочны, причем порядки произведений  $\alpha\beta$  и  $\beta\gamma$  больше 2. Тогда если порядки обоих произведений  $\alpha\beta$  и  $\beta\gamma$  — нечетные числа, и хотя бы порядок одного из них — простое число, то  $G$  является группой автоморфизмов регулярного 3-политопа.

Группу, порожденную тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной. Группа  $M$  называется почти простой, если  $G \leq M \leq \text{Aut}(G)$ , где  $G$  — конечная простая неабелева группа.

**Следствие 3.** Пусть  $G$  — конечная  $(2 \times 2, 2)$ -порожденная группа без нетривиальных циклических нормальных подгрупп, в частности, почти простая  $(2 \times 2, 2)$ -порожденная группа. Тогда существует регулярный 3-политоп с группой автоморфизмов  $G$ .

Вопрос о  $(2 \times 2, 2)$ -порожденности конечных простых групп поставил В. Д. Мазуров еще в 1980 г., и ответ на него известен; см., например, [5]. Принимая во внимание следствие 3, этот вопрос естественно распространить на все конечные почти простые группы.

**Проблема 1.** Какие конечные почти простые группы являются  $(2 \times 2, 2)$ -порожденными?

Более общей и значительно трудной, чем проблема 1, является

**Проблема 2.** Какие конечные почти простые группы являются  $n$ -струнными группами?

В силу взаимно однозначного соответствия между  $n$ -струнными группами и регулярными политопами ранга  $n$  проблема 2 эквивалентна следующей проблеме.

**Проблема 3.** Какие конечные почти простые группы являются группами автоморфизмов регулярных  $n$ -политопов?

Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1234).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI.* М.: Мир, 1972.
2. McMullen P., Schulte E. *Abstract Regular Polytopes.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. Conder M., Oliveros D. *The intersection condition for regular polytopes.* J. Combinatorial Theory, Series A. 2013. V. 120. № 6. P. 1291–1304.
4. Baktybekov B. B., Conder M. D. E., Nuzhin Ya. N., Rezantseva A. V., *On regular polytopes of rank 3.* J. Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2025. V. 18. № 4.
5. Нужин Я. Н. *О порождающих множествах инволюций простых конечных групп.* Алгебра и логика. 2019. Т. 58. № 3. С. 426–434.

# МИНИМАЛЬНЫЕ РЕШЕТКИ, НЕ БЛИЗКИЕ К ДИСТРИБУТИВНЫМ

*K. V. Селиванов<sup>1,2,3</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Екатеринбург*

<sup>2</sup>*Уральский математический центр, Екатеринбург*

<sup>3</sup>*Уральский федеральный университет им. первого Президента России  
Б. Н. Ельцина, Екатеринбург*

Известно, что для любых элементов  $x, y$  и  $z$  произвольной решетки истинны следующие неравенства:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z) \text{ и } x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Если для левой и правой частей какого-либо из этих неравенств имеет место равенство для любых элементов  $x, y$  и  $z$ , то получившееся тождество называется тождеством дистрибутивности. Хорошо известно, что если выполняется одно из тождеств дистрибутивности, то выполняется и другое. Решетка, удовлетворяющая тождествам дистрибутивности, называется дистрибутивной. В классе недистрибутивных решеток особую роль играют две решетки, получившие название «пентагон» и «диамант» ([2], гл. II, § 1); там же теорема 1 показывает, что любая недистрибутивная решетка содержит хотя бы одну из этих двух подрешеток. Верно и обратное утверждение: если решетка не содержит пентагона и диаманта, то она дистрибутивна. Это, в частности, означает, что указанные две решетки исчерпывают множество минимальных недистрибутивных решеток.

В теории решеток рассматриваются разные варианты расширения класса дистрибутивных решеток. Один из вариантов предложен в [1]. Он состоит в том, что вместо тождеств дистрибутивности допускается «зазор» длиной не более 1 между правой и левой частями в каждом из соотношений дистрибутивности.

**Определение.** Решетка называется *близкой к дистрибутивной*, если для любых ее элементов  $x, y$  и  $z$  интервалы

$$[(x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)] \text{ и } [x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)]$$

имеют длину не больше 1.

Знание списка минимальных недистрибутивных решеток, состоящего из пентагона и диаманта, оказалось весьма эффективным средством в исследовании дистрибутивных решеток. Можно ожидать, что описание минимальных решеток в классе всех решеток, не являющихся близкими к дистрибутивным, также будет эффективным средством в исследовании решеток, близких к дистрибутивным. Решетки, минимальные в классе всех решеток, не близких к дистрибутивным, для краткости называются [3] *MNCD-решетками* (от Minimal Not to Close Distributive).

Несложно показать, что любая *MNCD-решетка* является не более, чем 4-порожденной. Более того, в работе [3] докладчиком в соавторстве с А. Г. Гейном доказано, что класс минимальных *MNCD-решеток* можно разбить на два подкласса: первый подкласс состоит из *MNCD-решеток*, порождающихся 3 элементами специального вида, а второй — из

*MNCD*-решеток, порождающихся 4 элементами специального вида. Докладчиком полностью описан второй подкласс: в этом подклассе 5 самодвойственных решеток и 12 пар двойственных решеток.

В докладе предполагается изложить методику получения результата для подкласса *MNCD*-решеток, порождающихся 4 элементами специального вида. Также будет приводиться описание некоторых *MNCD*-решеток, порождающихся 3 элементами специального вида.

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1549).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гейн А. Г. Маслинцын И. Д., Маслинцына К. Э., Селиванов К. В., *О 3-порожденных решетках, близких к дистрибутивным*. Алгебра и логика. 2023. Т. 62. № 2. С. 504–523.
2. Гретцер Г. *Общая теория решеток*. М.: Мир, 1982.
3. Гейн А. Г., Селиванов К. В. *Модулярные решетки, минимальные в классе решеток, не близких к дистрибутивным*. Алгебра и логика. Принята к печати.

# ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ГРАФОВ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ РЕБЕРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

*E. V. Соколов, E. A. Туманова*

*Ивановский государственный университет*

В соответствии с одним из равносильных определений, приведенных в [1], класс групп  $\mathcal{C}$  будем называть *корневым*, если он содержит неединичные группы, замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами  $X$  и  $Y$  включает декартово произведение  $\prod_{y \in Y} X_y$ , где  $X_y$  — изоморфная копия группы  $X$  для каждого элемента  $y \in Y$ . Легко видеть, что корневыми являются, например, классы всех конечных групп, конечных  $p$ -групп (где  $p$  — простое число), периодических  $\mathfrak{P}$ -групп конечного периода (где  $\mathfrak{P}$  — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Нетрудно показать также, что семейство корневых классов групп замкнуто относительно взятия пересечений, содержащих неединичные группы.

Использование понятия корневого класса оказалось весьма продуктивным при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций групп: свободных и древесных произведений, HNN-расширений, фундаментальных групп графов групп и др. (определения всех этих структур могут быть найдены, например, в [2]). Ясно, что указанное понятие дает возможность доказать сразу несколько утверждений вместо одного. Более важно, однако, то, что результаты об аппроксимируемости произвольными корневыми классами и методы их получения хорошо согласуются друг с другом и это позволяет легко переходить от одной свободной конструкции к другой, быстро продвигаясь в направлении усложнения рассматриваемых групп (см., например, [3–11]).

Напомним, что согласно [12] группа  $X$  называется *аппроксимируемой классом*  $\mathcal{C}$  или, более коротко,  *$\mathcal{C}$ -аппроксимируемой*, если каждый ее неединичный элемент переходит в неединичный под действием некоторого гомоморфизма группы  $X$  на группу из класса  $\mathcal{C}$  ( *$\mathcal{C}$ -группу*). Если указанный класс состоит из конечных групп, то  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемую группу называют также *финитно аппроксимируемой*.

При изучении аппроксимируемости корневым классом  $\mathcal{C}$  фундаментальной группы графа групп основным является вопрос о том, наследует ли данная конструкция свойство  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости от вершинных групп графа. Исчерпывающий ответ на этот вопрос получен лишь для (обычного) свободного произведения групп. В [13, 14] установлено, что свободное произведение произвольного семейства групп, аппроксимируемых корневым классом  $\mathcal{C}$ , в свою очередь аппроксимируется данным классом. Для более сложно устроенных фундаментальных групп свойство  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости удается исследовать лишь при тех или иных дополнительных ограничениях, накладываемых на вершинные группы и реберные подгруппы. Одним из таких ограничений является нормальность последних в содержащих их вершинных группах.

Основным методом исследования аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп служит так называемый «фильтрационный подход», первоначально предложенный в [15] для изучения финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой и, после ряда обобщений и адаптаций, распространенный в [7] на случай произвольного корневого аппроксимирую-

щего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. Данный метод включает два шага и может быть описан следующим образом.

Первый шаг состоит в отыскании условий, при которых фундаментальная группа  $\mathbb{G}$  обладает гомоморфизмом на группу из аппроксимирующего корневого класса  $\mathcal{C}$ , действующим инъективно на всех вершинных группах. Иногда (например, если граф и все вершинные группы конечны) существование гомоморфизма с указанными свойствами равносильно  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы  $\mathbb{G}$ . Однако в общем случае это не так [16, 17]. Полученные на данном шаге утверждения будем называть *результатами первого уровня*. Следует отметить, что общих подходов к их отысканию нет и каждый новый факт такого типа является весьма удачной находкой.

Второй шаг метода заключается в поиске условий, которые достаточно наложить на группу  $\mathbb{G}$  для того, чтобы она аппроксимировалась фундаментальными группами графов групп, удовлетворяющими требованиям полученных ранее результатов первого уровня. Это позволяет установить  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемость группы  $\mathbb{G}$  в случае, когда вершинные группы графа не обязательно принадлежат классу  $\mathcal{C}$ . Полученные на данном шаге условия аппроксимируемости будем называть *результатами второго уровня*. Как правило, доказать их удается лишь при ограничениях, более сильных нежели на шаге 1.

В случае когда реберные подгруппы нормальны в содержащих их вершинных группах, важную роль в описании результатов первого уровня играют группы автоморфизмов указанных подгрупп, индуцированных внутренними автоморфизмами группы  $\mathbb{G}$ . Первым на это указал Г. Хигман [18], доказавший критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами свободного произведения двух конечных групп с нормальной объединенной подгруппой. В магистерской диссертации Е. А. Тумановой, выполненной под руководством Д. И. Молдаванского, данный критерий был распространен на случай аппроксимируемости классом конечных  $\mathfrak{P}$ -групп, где  $\mathfrak{P}$  — непустое множество простых чисел [19]. Следующее обобщение, уже для произвольного корневого аппроксимирующего класса групп, замкнутого относительно взятия фактор-групп, было получено Е. А. Тумановой в [20] и содержится в теореме 1 ниже. Предваряя формулировку данного результата, заметим, что если  $X$  — некоторая группа и  $Y$  — нормальная подгруппа группы  $X$ , то множество ограничений на  $Y$  всевозможных внутренних автоморфизмов группы  $X$  образует подгруппу группы  $\text{Aut } Y$ , обозначаемую далее через  $\text{Aut}_X(Y)$ .

**Теорема 1** [20, следствие 1]. *Пусть  $\mathbb{P}$  — свободное произведение групп  $Q$  и  $R$  с объединенной подгруппой  $S$ , нормальной в свободных множителях. Если  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и  $Q, R \in \mathcal{C}$ , то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа  $\mathbb{P}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема.*

1. Существует гомоморфизм свободного произведения  $\mathbb{P}$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , действующий инъективно на подгруппах  $Q$  и  $R$ .
2.  $\text{Aut}_{\mathbb{P}}(S) \in \mathcal{C}$ .

В настоящей работе идеи, позволяющие доказать теорему 1, используются для получения результатов первого уровня применительно к конструкциям HNN-расширения (с одной проходной буквой) и древесного произведения конечного числа групп (см. теоремы 2 и 3 ниже). Сложность данной задачи состоит в том, что реберные подгруппы являются нормальными уже не во всей свободной конструкции, а только лишь в некоторой ее части.

Пусть  $\mathbb{E}$  — HNN-расширение группы  $B$  с подгруппами  $H \leqslant B$  и  $K \leqslant B$ , связанными при помощи изоморфизма  $\varphi: H \rightarrow K$ . Будем говорить, что группа  $\mathbb{E}$  *удовлетворяет условию* ( $\dagger$ ), если подгруппы  $H$  и  $K$  нормальны в группе  $B$  и подгруппа  $L = H \cap K$

$\varphi$ -инвариантна, т. е.  $\varphi|_L \in \text{Aut } L$ . В этом случае оказываются определены

- а) подгруппы  $\mathfrak{H} = \text{Aut}_B(H)$ ,  $\mathfrak{K} = \varphi \text{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$  и  $\mathfrak{U} = \text{sgp}\{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\}$  группы  $\text{Aut } H$ ;
- б) подгруппы  $\mathfrak{L} = \text{Aut}_B(L)$ ,  $\mathfrak{F} = \text{sgp}\{\varphi|_L\}$  и  $\mathfrak{V} = \text{sgp}\{\mathfrak{L}, \mathfrak{F}\}$  группы  $\text{Aut } L$ .

Будем предполагать также, что

$\Gamma$  — конечное дерево с множеством вершин  $\mathcal{V}$  и множеством ребер  $\mathcal{E}$ ;

$\mathcal{G}(\Gamma)$  — ориентированный граф групп над  $\Gamma$ , в котором каждой вершине  $v \in \mathcal{V}$  сопоставлена некоторая группа  $G_v$ , а каждому ребру  $e \in \mathcal{E}$  — направление, группа  $H_e$  и инъективные гомоморфизмы  $\varphi_{+e}: H_e \rightarrow G_{e(1)}$ ,  $\varphi_{-e}: H_e \rightarrow G_{e(-1)}$ , где  $e(1)$  и  $e(-1)$  — вершины графа  $\mathcal{G}(\Gamma)$ , являющиеся концами ребра  $e$ ;

$\mathbb{T}$  — фундаментальная группа графа групп  $\mathcal{G}(\Gamma)$ .

Будем говорить, что группа  $\mathbb{T}$  удовлетворяет условию  $(\ddagger)$ , если

- 1) для любых  $e \in \mathcal{E}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  подгруппа  $H_e \varphi_{\varepsilon e}$  нормальна в группе  $G_{e(\varepsilon)}$  и содержится в ней собственным образом;
- 2) для каждой вершины  $v \in \mathcal{V}$  подгруппа

$$H_v = \text{sgp} \{ H_e \varphi_{\varepsilon e} \mid e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1, e(\varepsilon) = v \}$$

представляет собой прямое произведение порождающих ее подгрупп.

Заметим, что при выполнении требования 1 для всякого ребра  $e \in \mathcal{E}$  определены подгруппы

$$\mathfrak{A}_{+e} = \varphi_{+e} \text{Aut}_{G_{e(1)}}(H_e \varphi_{+e}) \varphi_{+e}^{-1}, \quad \mathfrak{A}_{-e} = \varphi_{-e} \text{Aut}_{G_{e(-1)}}(H_e \varphi_{-e}) \varphi_{-e}^{-1}$$

и  $\mathfrak{A}_e = \text{sgp}\{\mathfrak{A}_{+e}, \mathfrak{A}_{-e}\}$  группы  $\text{Aut } H_e$ . Все введенные выше обозначения будем далее предполагать фиксированными.

**Теорема 2.** Пусть HNN-расширение  $\mathbb{E}$  удовлетворяет условию  $(\dagger)$  и  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если  $B \in \mathcal{C}$ , то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа  $\mathbb{E}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируется.

1. Существует гомоморфизм HNN-расширения  $\mathbb{E}$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , действующий инъективно на подгруппе  $B$ .

2.  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathcal{C}$ .

**Теорема 3.** Пусть группа  $\mathbb{T}$  удовлетворяет условию  $(\ddagger)$  и  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если  $G_v \in \mathcal{C}$  для каждой вершины  $v \in \mathcal{V}$ , то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа  $\mathbb{T}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируется.

1. Существует гомоморфизм древесного произведения  $\mathbb{T}$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , действующий инъективно на каждой подгруппе  $G_v$  ( $v \in \mathcal{V}$ ).

2.  $\mathfrak{A}_e \in \mathcal{C}$  для каждого ребра  $e \in \mathcal{E}$ .

Приводимые далее теоремы 4 и 5 служат обобщениями теорем 2, 3 и могут быть названы результатами уровня 1<sup>+</sup>. Как показывает работа [11], подобные им утверждения иногда оказываются полезны для получения новых результатов уровня 1.

**Теорема 4.** Пусть HNN-расширение  $\mathbb{E}$  удовлетворяет условию  $(\dagger)$  и  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если группа  $B$  обладает гомоморфизмом  $\sigma$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , инъективным на подгруппе  $H_K$ , то справедливы следующие утверждения.

1. Условие  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathcal{C}$  равносильно существованию гомоморфизма HNN-расширения  $\mathbb{E}$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , продолжающего гомоморфизм  $\sigma$ .

2. Если  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathcal{C}$ , то группы  $\mathbb{E}$  и  $B$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемые одновременно.

**Теорема 5.** Пусть группа  $\mathbb{T}$  удовлетворяет условию  $(\ddagger)$  и  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если каждая группа  $G_v$  ( $v \in \mathcal{V}$ ) обладает гомоморфизмом  $\sigma_v$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , действующим инъективно на подгруппе  $H_v$ , то справедливы следующие утверждения.

1. Гомоморфизм группы  $\mathbb{T}$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , продолжающий гомоморфизмы  $\sigma_v$  ( $v \in \mathcal{V}$ ), существует тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{A}_e \in \mathcal{C}$  для всякого ребра  $e \in \mathcal{E}$ .

2. Если  $\mathfrak{A}_e \in \mathcal{C}$  для каждого ребра  $e \in \mathcal{E}$ , то группа  $\mathbb{T}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируется тогда и только тогда, когда  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемыми являются все группы  $G_v$  ( $v \in \mathcal{V}$ ).

Пусть  $\mathcal{C}$  — произвольный класс групп. Будем говорить, что группа  $X$   $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по своей подгруппе  $Y$ , если для любой нормальной подгруппы  $M$  группы  $Y$  из включения  $Y/M \in \mathcal{C}$  следует существование нормальной подгруппы  $N$  группы  $X$  такой, что  $X/N \in \mathcal{C}$  и  $N \cap Y \leq M$ . Свойство  $\mathcal{C}$ -квазирегулярности тесно связано с классическим понятием  $\mathcal{C}$ -отделимой подгруппы [21] и играет важную роль при построении ядер гомоморфизмов свободных конструкций групп, отображающих их на группы из класса  $\mathcal{C}$ . Поэтому оно весьма часто встречается в формулировках достаточных условий  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости указанных конструкций. Ряд ситуаций, при которых группа оказывается  $\mathcal{C}$ -квазирегулярной по своей подгруппе, описан в [22, 23].

Следующие две теоремы, доказанные в рамках настоящей работы, представляют собой результаты второго уровня и не требуют, чтобы какая-либо из вершинных групп или реберных подгрупп принадлежала классу  $\mathcal{C}$ .

**Теорема 6.** Пусть HNN-расширение  $\mathbb{E}$  удовлетворяет условию  $(\dagger)$  и  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathcal{C}$  и выполняется хотя бы одно из следующих утверждений: а) существует гомоморфизм группы  $B$  на  $\mathcal{C}$ -группу, инъективный на подгруппе  $L = H \cap K$ ; б)  $H/L \in \mathcal{C}$ . Если фактор-группы  $B/H$  и  $B/K$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемые и группа  $B$   $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппе  $HK$ , то группы  $\mathbb{E}$  и  $B$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемые одновременно.

**Теорема 7.** Пусть группа  $\mathbb{T}$  удовлетворяет условию  $(\ddagger)$ ,  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и  $\mathfrak{A}_e \in \mathcal{C}$  для каждого ребра  $e \in \mathcal{E}$ . Если для любых  $e \in \mathcal{E}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  фактор-группа  $G_{e(\varepsilon)}/H_e \varphi_{ee}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема и для каждой вершины  $v \in \mathcal{V}$  группа  $G_v$   $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппе  $H_v$ , то группа  $\mathbb{T}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемыми являются все группы  $G_v$  ( $v \in \mathcal{V}$ ).

Если  $\mathcal{C}$  — класс групп, состоящий из периодических групп, то через  $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$  будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса  $\mathcal{C}$ . Подгруппу  $Y$  группы  $X$  назовем  $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированной в этой группе, если для любого элемента  $x \in X$  и для любого простого числа  $q \notin \mathfrak{P}(\mathcal{C})$  из включения  $x^q \in Y$  вытекает, что  $x \in Y$ .

Следуя [22], будем говорить, что

- абелева группа  $\mathcal{C}$ -ограничена, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая числу из множества  $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ , имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса  $\mathcal{C}$ ;
- нильпотентная группа  $\mathcal{C}$ -ограничена, если она обладает конечным центральным рядом с  $\mathcal{C}$ -ограниченными абелевыми факторами.

Отметим, что если  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, то каждая конечно порожденная абелева группа оказывается  $\mathcal{C}$ -ограниченной абелевой

и потому все конечно порожденные нильпотентные группы являются  $\mathcal{C}$ -ограниченными нильпотентными.

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 6. Если класс  $\mathcal{C}$  состоит из периодических групп и группа  $B$  является  $\mathcal{C}$ -ограниченной нильпотентной, то группа  $\mathbb{E}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы  $\{1\}$ ,  $H$  и  $K$   $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированы в группе  $B$ .

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия теоремы 7. Если класс  $\mathcal{C}$  состоит из периодических групп и все группы  $G_v$  ( $v \in \mathcal{V}$ ) являются  $\mathcal{C}$ -ограниченными нильпотентными, то группа  $\mathbb{T}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда для любых  $e \in \mathcal{E}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  подгруппы  $\{1\}$  и  $H_e \varphi_{ee} \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированы в группе  $G_{e(\varepsilon)}$ .

Заметим, что если  $\mathcal{C}$  — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия факторгрупп, а группы  $\mathbb{E}$  и  $\mathbb{T}$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемые и удовлетворяют условиям  $(\dagger)$  и  $(\ddagger)$  соответственно, то группы  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{V}$  и  $\mathfrak{A}_e$  ( $e \in \mathcal{E}$ ) аппроксимируются классом  $\mathcal{C}$  и потому принадлежат данному классу, когда конечны. В общем случае, однако, включения  $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$ ,  $\mathfrak{V} \in \mathcal{C}$  и  $\mathfrak{A}_e \in \mathcal{C}$  ( $e \in \mathcal{E}$ ), фигурирующие в формулировках приведенных теорем и следствий, не являются необходимыми для  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости групп  $\mathbb{E}$  и  $\mathbb{T}$ . Поэтому в настоящей работе была рассмотрена возможность ослабления данных условий путем их замены следующими утверждениями:

- ( $\alpha$ ) хотя бы одна из подгрупп  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{K}$  нормальна в группе  $\mathfrak{U}$  или  $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$ ;
- ( $\beta$ ) хотя бы одна из подгрупп  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{F}$  нормальна в группе  $\mathfrak{V}$  или  $\mathfrak{V} \in \mathcal{C}$ ;
- ( $\gamma$ ) для любого  $e \in \mathcal{E}$  хотя бы одна из подгрупп  $\mathfrak{A}_{+e}$ ,  $\mathfrak{A}_{-e}$  нормальна в группе  $\mathfrak{A}_e$  или  $\mathfrak{A}_e \in \mathcal{C}$ .

Полученные на этом пути утверждения являются достаточно громоздкими и здесь не приводятся.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-21-00307).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sokolov E. V. *A characterization of root classes of groups*. Comm. Algebra. 2015. V. 43. № 2. P. 856–860.
2. Богопольский О. В. *Введение в теорию групп*. М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумлага–Солитэра*. Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 700–709.
4. Соколов Е. В., Туманова Е. А. *Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами*. Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 4. С. 597–612.
5. Соколов Е. В., Туманова Е. А. *Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп*. Алгебра и логика. 2019. Т. 58. № 6. С. 720–740.
6. Соколов Е. В., Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными обединенными подгруппами*. Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 3. С. 692–702.
7. Соколов Е. В. *Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп*. Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 4. С. 878–893.

8. Соколов Е. В. *Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами*. Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 6. С. 1382–1400.
9. Sokolov E. V. *Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups*. J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.
10. Sokolov E. V. *Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups*. Comm. Algebra. 2022. V. 50. № 3. P. 962–987.
11. Соколов Е. В., Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений*. Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 2. С. 405–422.
12. Мальцев А. И. *Обобщенно nilпотентные алгебры и их присоединенные группы*. Матем. сб. 1949. Т. 25 (67). № 3. С. 347–366.
13. Gruenberg K. W. *Residual properties of infinite soluble groups*. Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. № 1. P. 29–62.
14. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. *Об аппроксимируемости свободного произведения групп с обобщенной подгруппой корневым классом групп*. Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.
15. Baumslag G. *On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. № 2. P. 193–209.
16. Sokolov E. V., Tumanova E. A. *To the question of the root-class residuability of free constructions of groups*. Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 2. P. 260–272.
17. Sokolov E. V. *On conditions for the approximability of the fundamental groups of graphs of groups by root classes of groups*. Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. № 12. P. 5444–5452.
18. Higman G. *Amalgams of  $p$ -groups*. J. Algebra. 1964. V. 1. № 3. P. 301–305.
19. Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости конечными  $\pi$ -группами обобщенных свободных произведений групп*. Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 4. С. 605–614.
20. Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным обобщением*. Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
21. Мальцев А. И. *О гомоморфизмах на конечные группы*. Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
22. Sokolov E. V. *On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups*. J. Group Theory. 2023. V. 26. № 4. P. 751–777.
23. Баранов Д. Р., Соколов Е. В. *Об отделимости абелевых подгрупп свободного произведения двух групп с нормальной обобщенной подгруппой*. Сиб. матем. журн. 2025. Т. 66. № 2. С. 165–179.

# О СВЯЗЯХ КОВРОВОЙ ПОДГРУППЫ И КОВРОВОГО КОЛЬЦА ЛИ

*E. N. Троянская*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Пусть  $\Phi$  — неразложимая система корней ранга  $l$ ,  $\Pi$  — множество ее фундаментальных корней.  $\Phi(K)$  — элементарная группа Шевалле типа  $\Phi$  над коммутативным кольцом  $K$  с единицей. Группа  $\Phi(K)$  порождается своими корневыми подгруппами

$$x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

Подгруппы  $x_r(K)$  абелевы и для каждого  $r \in \Phi$  и любых  $t, u \in K$  справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

Набор аддитивных подгрупп  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$  называется *ковром* типа  $\Phi$  над кольцом  $K$ , если

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js} \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi, \quad i > 0, \quad j > 0, \quad (1)$$

где  $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$ , а константы  $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Всякий ковер  $\mathfrak{A}$  определяет *ковровую подгруппу*  $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle$ , где через  $\langle M \rangle$  обозначается подгруппа, порожденная множеством  $M$  из некоторой подгруппы. Ковер  $\mathfrak{A}$  называется *замкнутым*, если

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi.$$

Произвольный ковер лиева типа  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  называется *дополняемым*, если его элементы удовлетворяют достаточным условиям вида

$$\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_{-r} \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi. \quad (2)$$

Отметим также, что всякий ковер, дополняемый до полного ковра, — замкнут.

Определим кольцо (алгебру) Ли  $L(\Phi, K)$  с базисом Шевалле  $\{e_r, r \in \Phi; h_s, s \in \Pi\}$  над  $K$ . В статье Я. Н. Нужина [1] по ковру  $\mathfrak{A}$  определяется подкольцо  $L(\Phi, \mathfrak{A})$  кольца  $L(\Phi, K)$  с операциями  $(+, *)$  как в  $L(\Phi, K)$ , называемое *ковровым подкольцом*. По определению,  $L(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle \mathfrak{A}_r e_r \mid r \in \Phi \rangle$ . Ковер  $\mathfrak{A}$  называется *L-замкнутым*, если  $L(\Phi, K) \cap K e_r = \mathfrak{A}_r e_r, r \in \Phi$ .

Элементарная группа Шевалле  $E(\Phi, K)$  действует на кольце Ли  $L(\Phi, K)$  как группа автоморфизмов. Говорят, что подкольцо (подмножество)  $M \subseteq L(\Phi, K)$  *инвариантно* относительно подгруппы  $G \subseteq E(\Phi, K)$ , если  $gm \in M$  для любых  $g \in G$  и  $m \in M$ .

В данной работе, связывая свойства замкнутости, инвариантности и *L*-замкнутости ковра аддитивных подгрупп в единую классификацию, рассматриваются импликационные связи, возникающие между этими свойствами. Для ковров любого ранга исследуются

шесть соответствующих импликаций в зависимости от характеристики основного кольца:  $\text{char}K = 0$ ,  $\text{char}K = 2$  и  $\text{char}K = p > 2$  (где  $p$  – четное или нечетное число).

Следующий результат позволяет строить примеры ковров аддитивных подгрупп линея типа, не являющихся замкнутыми.

**Лемма 1.** *Пусть  $\text{char}K = p$ ,  $\mathbb{Z}$  – кольцо целых чисел, если  $p = 0$  и  $\mathbb{Z}_p$  – кольцо вычетов по модулю  $p$ , если  $p > 0$ . Для системы корней  $\Phi$  ранга  $l \geq 2$  определим набор аддитивных подгрупп  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$  следующим образом. Над кольцом  $K$  с ненулевым идеалом  $I$  фиксируем корень  $q \in \Phi$  и полагаем*

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_q &= K, \\ \mathfrak{A}_{-q} &= \mathbb{Z} + I, \\ \mathfrak{A}_r &= I, r \neq \pm q.\end{aligned}$$

Тогда  $\mathfrak{A}$  является незамкнутым ковром, если  $\mathbb{Z} + I \neq K$ .

Ввиду важности леммы 1 для наших исследований, приведем ее доказательство.

**Доказательство.** Для подходящих  $n, m, c \in \{1, 2, 3\}$  условия ковровости (1) для различных типов групп Шевалле имеют вид  $cA^nX^m \subseteq X$ ,  $cB^nI^m \subseteq X$  или  $cI^nI^m \subseteq X$ , где  $X$  есть  $A$ ,  $B$  или  $I$ . Подобные включения выполняются только в силу того, что идеал  $I$  лежит в пересечении  $A \cap B$ . Таким образом, набор аддитивных подгрупп  $\mathfrak{A}$  является ковром. Незамкнутость ковра  $\mathfrak{A}$  следует из включения  $n_q \in E(\Phi, \mathfrak{A})$ . Лемма доказана.

Впервые такой метод задания матричного ковра аддитивных подгрупп опубликовал В. А. Койбаев в работе [4, пример 6.1], а в 2015 г. в работе [5, с. 193] этот метод перенесен на группы Шевалле для любого типа  $\Phi$ . Заданные подобным образом наборы, как доказано в [5], являются незамкнутыми коврами аддитивных подгрупп.

Далее, пусть  $L(\Phi, \mathbb{C})$  – простая алгебра Ли типа  $\Phi$  над полем комплексных чисел,  $\{e_r, r \in \Phi; h_s, s \in \Pi\}$  – ее базис Шевалле. Определим кольцо (алгебру) Ли  $L(\Phi, K)$  с базисом Шевалле над произвольным коммутативным кольцом с единицей, называемое *ковровым кольцом Ли*. В статье Я. Н. Нужина [1] по ковру  $\mathfrak{A}$  определяется подкольцо  $L(\Phi, \mathfrak{A})$  кольца  $L(\Phi, K)$  с операциями  $(+, *)$  как в  $L(\Phi, K)$ , называемое *ковровым подкольцом*. По определению,  $L(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle \mathfrak{A}_r e_r \mid r \in \Phi \rangle$ . Ковер  $\mathfrak{A}$  называется *L-замкнутым*, если  $L(\Phi, K) \cap Ke_r = \mathfrak{A}_r e_r$ ,  $r \in \Phi$ .

**Теорема 1** [1, теорема 2.1]. *Ковер  $\mathfrak{A}$  типа  $\Phi$  над кольцом  $K$  является L-замкнутым тогда и только тогда, когда*

$$2\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_{-r} \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, r \in \Phi. \quad (3)$$

Элементарная группа Шевалле  $E(\Phi, K)$  действует на кольце Ли  $L(\Phi, K)$  как группа автоморфизмов. Говорят, что подкольцо (подмножество)  $M \subseteq L(\Phi, K)$  инвариантно относительно подгруппы  $G \subseteq E(\Phi, K)$ , если  $gm \in M$  для любых  $g \in G$  и  $m \in M$ .

**Теорема 2** [1, теорема 3.1]. *Подкольцо  $L(\Phi, K)$  инвариантно относительно ковровой подгруппы  $E(\Phi, K)$  тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r, r \in \Phi. \quad (4)$$

Очевидно, условия (4) являются ослаблением включений (2). По этой причине А. К. Гутнова и В. А. Койбаев в статье [6] называют элементарный матричный ковер с условиями (4) *слабо дополняемым* и строят примеры замкнутых слабо дополняемых ковров, не дополняемых до полных ковров, над полями характеристики 0 и 2. В работе [7] эти примеры из [6] перенесены на все группы Шевалле. Легко показать, что для колец нечетной характеристики условия (2) и (4) эквивалентны.

Таблица 1 [1]. Истинность импликаций, связывающих свойства коврового подкольца

№	Свойство	Вопрос	Свойство	Ответ
(1)	замкнутость	$\implies$	$L$ -замкнутость	нет
(2)	$L$ -замкнутость	$\implies$	замкнутость	нет
(3)	замкнутость	$\implies$	инвариантность	нет
(4)	инвариантность	$\implies$	замкнутость	неизвестен
(5)	инвариантность	$\implies$	$L$ -замкнутость	да
(6)	$L$ -замкнутость	$\implies$	инвариантность	нет

Далее рассматриваем вопрос о справедливости импликаций (1)–(6) из таблицы 1. Для неприводимых ковров ранга 1 в [1] приведены контрпримеры для импликаций (1)–(3), (6). Также в этой статье приведено доказательство импликации (5) для любого ковра. Импликация (4) доказана в статье [2], исключая случай, когда  $\Phi$  типа  $C_l$ .

В данной работе строим более полную таблицу связей между свойствами ковра аддитивных подгрупп в зависимости от ранга ковра и значений характеристики кольца коэффициентов  $K$ . Сформулируем полученные на данный момент результаты в следующих предложениях.

**Предложение 1.** Пусть  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  — ковер ранга 1. Из замкнутости  $\mathfrak{A}$  не следует его  $L$ -замкнутость над кольцом нулевой характеристики и следует над кольцом характеристики 2.

**Предложение 2.** Пусть  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  — ковер ранга 1 или 2. Из  $L$ -замкнутости  $\mathfrak{A}$  не следует его замкнутость над кольцом характеристики  $p > 2$ ,  $p$  — нечетно.

**Предложение 3.** Пусть  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  — ковер ранга 1. Из замкнутости  $\mathfrak{A}$  не следует его инвариантность над кольцами нулевой характеристики и характеристики 2.

**Предложение 4.** Пусть  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  — ковер ранга 1 или 2. Из свойства инвариантности  $\mathfrak{A}$  следует его замкнутость над произвольным кольцом.

**Предложение 5.** Пусть  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  — ковер ранга 1 или 2. Из свойства инвариантности  $\mathfrak{A}$  следует его  $L$ -замкнутость над произвольным кольцом.

**Предложение 6.** Пусть  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r\}$  — ковер ранга 1. Из свойства  $L$ -замкнутость  $\mathfrak{A}$  не следует его инвариантность над кольцом нулевой характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российской научного фонда (грант № 25-21-20059), <https://rscf.ru/project/25-21-20059/>

## ЛИТЕРАТУРА

- Нужин Я. Н. *Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца*. Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 3. С. 195–200.
- Yakov N. Nuzhin *On the closedness of carpets of additive subgroups associated with a Chevalley group over a commutative ring*. Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2023. Т. 16. № 6. С. 732–737.
- Койбаев В. А. *Замкнутые элементарные сети над полем нулевой характеристики*. Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 2. С. 326–332; Siberian Math. J. 2021. V. 62. № 2. P. 262–266.
- Койбаев В. А. *Элементарные сети в линейных группах*. Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 134–141.

5. Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н. *О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами*. Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 192–196.
6. Гутнова А. К., Койбаев В. А. *О достаточных условиях замкнутости элементарной сети* Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7. № 2. С. 230–235.
7. Бадин П. С., Нужин Я. Н., Троянская Е. Н., *О слабо дополняемых коврах лиева типа над коммутативными кольцами*. Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23. № 4. С. 28–34.

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## ТРЕХМЕРНЫЕ ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ФАНО С НУЛЕВОЙ КОРЕГУЛЯРНОСТЬЮ

*O. B. Жакупов*

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный*

Проективное алгебраическое многообразие  $X$  называется *многообразием Фано*, если его антиканонический пучок обилен. Многообразия Фано играют важную роль в бирациональной классификации алгебраических многообразий. Они возникают как слои расслоений Мори, которые являются конечным результатом программы минимальных моделей для многообразия, покрытого рациональными кривыми. Я. Коллар, Дж. Мицока и Ш. Мори доказали в [1], что гладкие многообразия Фано образуют конечное число деформационных семейств в каждой размерности. Например, любая кривая Фано изоморфна проективной прямой. Гладкие поверхности Фано называются поверхностями дель Пеццо. Они образуют 10 семейств и классифицируются степенью своего антиканонического дивизора, которая принимает целые значения от одного до девяти. В. Исковских, Ш. Мори и Ш. Мукаи получили, что гладкие трехмерные многообразия Фано образуют 105 деформационных семейств (см. [2]). Поиск гладких элементов в  $|-K_X|$  сыграл фундаментальную роль в этой классификации. В целом для изучения многообразий Фано важно понимать, насколько особыми могут быть такие элементы. Понятие *корегулярности*, введенное в [3] и развитое в [4], позволяет “измерить” эту характеристику для многообразия Фано. Корегулярность определяется в терминах *Калаби – Яу пар*. По многообразию Фано  $X$  можно построить Калаби – Яу пару, взяв  $l$ -дополнение канонического класса, то есть граничный  $\mathbb{Q}$ -дивизор  $D$ , такой что  $l(K_X + D) \sim 0$ . *Двойственный комплекс* пары Калаби – Яу – это топологическое пространство, отражающее комбинаторику граничного дивизора и геометрию многообразия. Говорят, что пара Калаби – Яу имеет максимальное пересечение, если размерность ее двойственного комплекса равна  $\dim X - 1$ . В терминах корегулярности это означает, что  $\text{coreg } X = 0$ . Такие многообразия Фано далеки от исключительных, для которых  $\text{coreg } X = \dim X$ . Исключительность здесь означает, что любая логканоническая структура Калаби – Яу не является логтерминалной по Кавамате. Ожидается, что “большинство” многообразий Фано имеют нулевую корегулярность. Например,  $\text{coreg } \mathbb{P}^1 = 0$ . Любая гладкая поверхность дель Пеццо степени хотя бы 2 имеет нулевую корегулярность [4], а общая поверхность дель Пеццо степени 1 также имеет нулевую корегулярность [5]. Для гладких трехмерных многообразий Фано в [4] показано, что для 100 из 105 деформационных семейств общий элемент имеет нулевую корегулярность. Причем для 92 из этих 100 семейств любой элемент имеет нулевую корегулярность. Оставшиеся 5 семейств – это семейства 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 и 1.5 по классификации [2]. В [5] доказано, что существует гладкое трехмерное многообразие Фано из семейства 1.5 с корегулярностью ноль. Семейство 1.2 – это семейство гладких квартик. А.-С. Калогирос в [6] приводит пример гладкой квартики с нулевой корегулярностью. Основной результат формулируется следующим образом. Существуют гладкое двулистное накрытие с ветвлением в секстике, гладкое пересечение квадрики и кубики в  $\mathbb{P}^5$ , гладкое пересечение трех квадрик в  $\mathbb{P}^6$ , имеющие нулевую корегулярность.

Таким образом, в каждом деформационном семействе гладких трехмерных многообразий Фано существует элемент с нулевой корегулярностью.

*Выражаю благодарность своему научному руководителю К. Логинову за постановку задачи и за неоценимую поддержку.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25-21-00083).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kollar J., Miyaoka Y., Mori S. *Rationally connected varieties*. J. Algebraic Geom. 1992. V. 1(3). P. 429–448.
2. Iskovskikh V. A., Prokhorov Yu. G. *Algebraic Geometry V: Fano Varieties*. Encyclopaedia of Mathematical Science. 1999. Springer. Book 47.
3. Shokurov V. V. *Complements on surfaces*. J. Math. Sci. 2000. V. 102(2). P. 3876–3932.
4. Moraga J. *Coregularity of Fano Varieties arXiv preprint*. 2022. arXiv : 2206.10834
5. Avilov A., Loginov K., Przyjalkowski V. *Coregularity of smooth Fano threefolds*. Commun. Number Theory Phys. 2024. V. 18. P. 509–577.
6. Kaloghiros A.-S. *Some examples of Calabi-Yau pairs with maximal intersection and no toric model : arXiv preprint*. 2018. arXiv : 1812.11296.

# РАЗБИВАЮЩИЕ МОРФИЗМЫ ПЛОСКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 5

*M. I. Magin*

Санкт-Петербургский государственный университет

## **Введение**

*Вещественная алгебраическая кривая*  $X$  — это комплексная алгебраическую кривую, снабженная антиголоморфной инволюцией  $\text{conj}: X \rightarrow X$ . Ее *вещественный локус* — это множество неподвижных точек инволюции  $\text{conj}$ , обозначим его через  $\mathbb{R}X$ ;  $\mathbb{C}X$  — множество комплексных точек кривой  $X$ . В настоящей работе все кривые полагаются гладкими и компактными, если иного не оговорено.

Согласно Ф. Клейну [1], вещественная алгебраическая кривая  $X$  называется *разбивающей*, если множество  $\mathbb{C}X \setminus \mathbb{R}X$  несвязно.

Если существует морфизм  $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ , для которого  $f^{-1}(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{R}X$ , то кривая  $X$  обязана быть разбивающей: прообразы двух компонент  $\mathbb{CP}^1 \setminus \mathbb{RP}^1$  дают две компоненты  $\mathbb{C}X \setminus \mathbb{R}X$ . Поэтому вещественный морфизм  $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ , для которого выполнено  $f^{-1}(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{R}X$ , называют *разбивающим*.

Л. В. Альфорс [2] показал, что верно и обратное: для разбивающей вещественной алгебраической кривой рода  $g$  существует разбивающий морфизм степени  $\leq g+1$ . Позднее А. Габар [3] усилил этот результат, определив *разбивающую гональность*  $\text{sepgon}(X)$  вещественной кривой  $X$  как наименьшую степень разбивающего морфизма  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Габар показал, что

$$r \leq \text{sepgon}(X) \leq \frac{g+r+1}{2},$$

где  $g$  — род кривой  $X$ , а  $r = b_0(\mathbb{R}X)$ .

Можно показать, что разбивающий морфизм задает накрытие  $\mathbb{R}X \rightarrow \mathbb{RP}^1$ . Обозначим компоненты связности  $\mathbb{R}X$  через  $X_1, X_2, \dots, X_r$  и степень ограничения  $f$  на  $X_i$  через  $d_i(f)$ . Таким образом, каждому разбивающему морфизму можем сопоставить набор натуральных чисел  $d(f) = (d_1(f), \dots, d_r(f))$ .

М. Куммер и К. Шоу показали [4], что для кривой  $X$  множество всех таких наборов образует полугруппу относительно сложения.

**Определение** [4]. Для разбивающей вещественной кривой  $X$  множество

$$\text{Sep}(X) = \{d(f) \mid f: X \rightarrow \mathbb{CP}^1 \text{ — разбивающий морфизм}\}$$

будем называть *разбивающей полугруппой* кривой  $X$ .

Знаменитое неравенство Гарнака утверждает, что для вещественной алгебраической кривой  $X$  справедливо  $b_0(\mathbb{R}X) \leq g + 1$ , где  $g$  — род кривой  $X$ . Кривые, имеющие максимальное число компонент, называют *M-кривыми*. В работе [4] Куммер и Шоу полностью описали разбивающие полугруппы *M-кривых* произвольного рода. А именно, они показали, что для *M-кривой*  $X$  рода  $g$  справедливо  $\text{Sep}(X) = \mathbb{N}^{g+1}$ . После этого С. Ю. Оревков [5, 6] вычислил разбивающие полугруппы вещественных гиперэллиптических кривых, а также вещественных кривых рода  $\leq 4$ . С увеличением рода задача описания всех разбивающих морфизмов для «не максимальных» кривых существенно усложняется.

Настоящий доклад будет посвящен прогрессу в следующей задаче.

**Задача.** Расклассифицировать все разбивающие морфизмы из плоских кривых степени 5 (они имеют род 6).

Среди 9 изотопических типов гладких плоских вещественных кривых степени 5 есть всего три типа, реализующихся разбивающими кривыми:  $M$ -квинтика ( $M$ -кривые всегда разбивающие),  $(M - 2)$ -квинтика и гиперболическая квинтика. Соответственно, так как для  $M$ -кривых произвольного рода задача решена в [4], сосредоточимся на изучении разбивающих морфизмов для последних двух случаев.

### 1. Основные результаты и идеи доказательств

Начнем с напоминания нескольких необходимых общих определений.

Пусть  $X$  — разбивающая вещественная кривая. Тогда  $\mathbb{C}X \setminus \mathbb{R}X = X^+ \cup X^-$ , где  $X^+$  и  $X^-$  — римановы поверхности с общим краем  $\mathbb{R}X$ , переставляющиеся антиголоморфной инволюцией со сменой ориентации на противоположную. Каждая из них индуцирует на  $\mathbb{R}X$  граничную ориентацию. Любая из двух описанных, противоположных друг другу, ориентаций называется *комплексной ориентацией* на  $\mathbb{R}X$ . Комплексные ориентации были введены В. А. Рохлиным в [7] и играют важную роль в топологии вещественных кривых.

Пусть  $X$  — плоская вещественная алгебраическая кривая нечетной степени. Тогда ее вещественный локус  $\mathbb{R}X$  содержит (ровно одну) нестягиваемую компоненту, которую принято называть *псевдопрямой*. Зафиксируем комплексную ориентацию на  $\mathbb{R}X$ . Напомним, что овал плоской вещественной алгебраической кривой  $X$  называется *положительным* (соотв. *отрицательным*), если он когерентно (соотв. антикогерентно) ориентирован по отношению к ориентации псевдопрямой.

Теперь перейдем к описанию результатов для «не максимальных» плоских кривых степени 5, т. е. гиперболической кривой и  $(M - 2)$  кривой.

Напомним, что *гиперболическая квинтика* — это гладкая плоская вещественная кривая степени 5, вещественный локус которой состоит из гнезда двух овалов и псевдопрямой. Пусть  $X$  — гиперболическая квинтика, зафиксируем следующую нумерацию компонент:  $X_1$  — внутренний овал,  $X_2$  — внешний овал, а  $X_3$  — псевдопрямая.

Показано, что для гиперболической квинтики выполняется следующая дихотомия. Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  — разбивающий морфизм,  $P = f^{-1}(p_0)$  для некоторой  $p_0 \in \mathbb{RP}^1$ . Тогда либо  $P$  имеет хотя бы три точки на внешнем овале (или объединении внутреннего овала и псевдопрямой), либо он обязан сидеть на прямой  $\ell \subset \mathbb{RP}^2$ . Обобщение этой дихотомии можно сформулировать и доказать для плоской разбивающей кривой произвольной нечетной степени.

Из этой дихотомии легко выводится серия запретов на существование разбивающих морфизмов, а именно, для гиперболической квинтики  $X$  справедливо следующее:

- для всех  $n, m \in \mathbb{N}$   $(n, 1, m) \notin \text{Sep}(X)$ ;
- для всех  $n, m$  с  $n + m \geq 4$   $(n, 2, m) \notin \text{Sep}(X)$ ; более того,  $(1, 2, 2) \notin \text{Sep}(X)$ ;
- для всех  $n \geq 3$   $(1, n, 1) \notin \text{Sep}(X)$ .

Итак, построены разбивающие морфизмы, реализующие все разбиения степеней от  $(2, 3, 1)$  и  $(3, 2, 1)$  вплоть до  $(4, 4, 2)$ , но со специальным дивизором слоя. Это позволило построить несколько разбивающих морфизмов, дивизор слоя которых неспециален, и показать включение

$$((2, 5, 3) + \mathbb{N}_0^3) \cup ((3, 5, 2) + \mathbb{N}_0^3) \subset \text{Sep}(X).$$

В частности, из этих результатов следует, что разбивающая полугруппа гиперболической квинтики «связна».

**Теорема А.** Пусть  $X$  — гиперболическая квинтика. Тогда для любого натурального  $d \geq \text{sep}(X) = 4$  существует разбивающий морфизм  $f: X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  степени  $d$ .

Перейдем к описанию результатов для  $(M - 2)$ -квинтиков. Классический факт в вещественной алгебраической геометрии утверждает, что она является разбивающей тогда и только тогда, когда ее овалы находятся в «невыпуклом» положении, см. рис. 1.

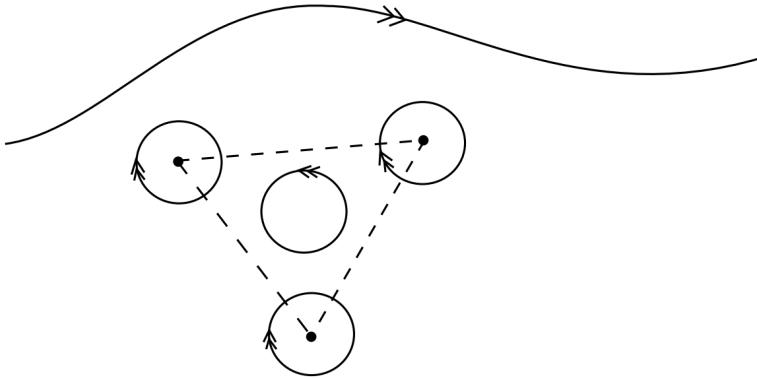


Рис. 1. Разбивающая  $(M - 2)$ -квинтика

Зафиксируем следующую нумерацию компонент: пусть  $X_1$  — псевдопрямая,  $X_2$  — положительный овал, а  $X_3, X_4, X_5$  — отрицательные овалы.

В работе [8] М. Манзаролли отмечает, что все разбивающие морфизмы степени 6 из  $(M - 2)$ -квинтиков обязаны иметь нечетную степень на трех отрицательных овалах и степень 2 — на псевдопрямой или на положительном овале. Это означает, что разбивающий морфизм степени 6 из  $(M - 2)$ -квинтиков может иметь разбиение степеней  $(2, 1, 1, 1, 1)$  (и такой можно построить) и, возможно,  $(1, 2, 1, 1, 1)$ . Показываем, что последний случай невозможен, и, более того, справедлива следующая теорема:

**Теорема В.** Пусть  $X$  — разбивающая  $(M - 2)$ -квинтика. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1, n, 1, 1, 1) \notin \text{Sep}(X), \quad (1, 1, a, b, c) \notin \text{Sep}(X) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, удалось получить классификацию разбивающих морфизмов, имеющих степень хотя бы 3 на псевдопрямой.

**Теорема С.** Пусть  $X$  — разбивающая  $(M - 2)$ -квинтика. Тогда

$$(3, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{N}_0^5 \subset \text{Sep}(X).$$

Для построения разбивающих морфизмов используем следующую идею, предложенную С. Ю. Оревковым в [6, 9]. Пусть  $X$  — разбивающая вещественная кривая. М. Куммер и К. Шоу в работе [4] показывают, что если  $P = p_1 + \dots + p_n$  и  $Q = q_1 + \dots + q_n$  ( $p_i$  и  $q_j$  — попарно различные точки из  $\mathbb{R}X$ ) — два линейно эквивалентных перемежающихся<sup>1</sup> дивизора, то мероморфная функция  $f$  с дивизором  $(f) = P - Q$  определяет разбивающий морфизм  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . То есть, чтобы построить разбивающий морфизм, достаточно построить два линейно эквивалентных перемежающихся дивизора. Дивизоры можно строить таким образом: подберем какой-нибудь дивизор  $P = p_1 + \dots + p_n$  на  $\mathbb{R}X$ , для которого  $h^0(P) \geq 2$  и линейная система  $|P|$  свободна от базовых точек. Рассмотрим его гладкую деформацию

<sup>1</sup>это означает, что любая компонента  $\mathbb{R}X \setminus P$  содержит ровно одну точку  $Q$  и наоборот

$P_t = \sum_i p_i(t) \in |P|$ . Если удается показать, что точки  $P_t$  при малых  $t$  сдвигаются в направлении комплексной ориентации, то при малых  $t$  дивизоры  $P_t$  и  $P$  будут перемежающимися. Контролировать направление, в котором сдвигаются точки, можно при помощи теоремы Абеля – Якоби, применяя ее к правильно подобранным голоморфным дифференциалам на  $X$ .

*Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2025-343).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Klein F. *Über Riemanns theorie der algebraischen funktionen und ihrer Integrale*. 1923. Berlin, Heidelberg: Springer. P. 499–573.
2. Lars L. Ahlfors. *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions*. Commentarii Mathematici Helvetici. 1950. V. 24(1). P. 100–134.
3. Gabard A. *Sur la representation conforme des surfaces de Riemann a bord et une caracterisation des courbes separantes*. Commentarii Mathematici Helvetici. 2006. V. 81(4). P. 945–964.
4. Kummer M., Shaw K. *The separating semigroup of a real curve*. Annales de la Faculte des sciences de Toulouse: Mathematiques. 2020. V. 29(1). P. 79–96. arXiv:1707.08227 [math].
5. Orevkov S. Yu. *Separating semigroup of hyperelliptic curves and of genus 3 curves*. St. Petersburg Mathematical Journal. 2019. V. 31(1). P. 81–84.
6. Orevkov S. Yu. *Separating semigroup of genus 4 curves*. 2024. arXiv:2412.02460 [math].
7. Rokhlin V. A. *Complex orientations of real algebraic curves*. Functional Analysis and Its Applications. 1975. V. 8(4). P. 331–334.
8. Manzaroli M. *Real plane separating (M-2)-curves of degree d and totally real pencils of degree (d-3)*. 2024. arXiv:2404.09671 [math].
9. Orevkov S. Yu. *Algebraically unrealizable complex orientations of plane real pseudo holomorphic curves*. Geometric and Functional Analysis. 2021. V. 31(4). P. 930–947. arXiv:2010.09130 [math].

# АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

*N. V. Маслова<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург*

<sup>2</sup>*Уральский математический центр, Екатеринбург*

Роль симметрии в науке общеизвестна, а понятие группы широко обобщает фундаментальные свойства симметрии. Многие разделы математики и естествознания используют язык теории групп в качестве рабочего (например, теория Галуа алгебраических уравнений, классификация кристаллографических групп Федорова и др.). Начиная с середины XX века, с расцветом дискретной математики и компьютерных наук, все более весомую роль в современной науке играют конечные группы, которые возникают как группы симметрий конечных графов, кодов и других объектов (не обязательно конечных). Поэтому изучение строения и действий конечных групп на различных объектах — это одно из магистральных направлений исследований в современной алгебре.

Однако для заданного объекта не всегда просто установить его группу симметрий, и даже сказать, какие конечные группы могут точно (т. е. с тривиальным ядром) действовать на этом объекте. Обычно из “видимых” свойств объекта можно извлечь информацию о некоторых арифметических параметрах его группы симметрий (например, длины орбит, порядки элементов и т. д.). Поэтому актуальна обратная задача — определить группу или хотя бы дать некоторые ее структурные описания, если известны арифметические параметры данной группы. Результаты такого рода являются универсальным математическим инструментом и имеют очень хороший потенциал для применения далеко за пределами математики.

Хорошо известными арифметическими параметрами конечной группы  $G$  являются ее спектр  $\omega(G)$  (т. е. множество всех порядков ее элементов) и *граф Грюнберга–Кегеля* (или *граф простых чисел*)  $\Gamma(G)$ , который определяется следующим образом: вершинами графа  $\Gamma(G)$  являются все простые делители порядка группы  $G$ , и две вершины  $p$  и  $q$  смежны в  $\Gamma(G)$  тогда и только тогда, когда  $pq \in \omega(G)$ . Будем говорить, что графы Грюнберга–Кегеля двух конечных групп совпадают, если совпадают множества их вершин и множества их ребер, и будем говорить, что графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны, если они изоморфны как непомеченные графы.

Вопрос характеристизации конечной группы ее спектром изучается с 80-х годов XX века, и в этом направлении получены сильные и интересные результаты; подробный обзор результатов о характеристизации конечных групп по спектру можно найти в [1] с обновлениями в [2, Section 2]. Легко понять, что граф Грюнберга–Кегеля конечной группы гораздо проще, чем спектр, восстановить из “видимых” свойств объекта, на котором действует эта группа, однако, как было показано в [3], вопрос характеристизации по графу Грюнберга–Кегеля имеет смысл рассматривать только для почти простых групп (в частности, для конечных неабелевых простых групп); тем не менее конечная группа может однозначно, с точностью до изоморфизма, быть определена даже изоморфным типом ее графа Грюнберга–Кегеля, примеры таких групп были недавно построены в [3–5]. Обзор результатов о характеристизации конечной группы графом Грюнберга–Кегеля можно найти в [2, 3, 5].

В этом докладе будут обсуждаться недавние результаты автора о характеристизации конечных простых групп по графу Грюнберга–Кегеля и по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля. Доклад основан на совместных работах в В. В. Паньшиным и с M. Chen и

М. Р. Зиновьевой.

*Результаты о характеризации конечных групп графом Грюнберга–Кегеля (например, групп  $F_4(q)$  для нечетных  $q$ ) получены при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 24-11-00119, <https://rscf.ru/en/project/24-11-00119/>.*

*Работа о характеризации конечных групп изоморфным типом графа Грюнберга–Кегеля выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1549).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grechkoseeva M. A., Mazurov V. D., Shi W., Vasil'ev A. V., Yang N. *Finite groups isospectral to simple groups.* Communications in Mathematics and Statistics. 2023. V. 11. P. 169–194.
2. Maslova N. V. *On arithmetical properties and arithmetical characterizations of finite groups.* arXiv:2401.04633v2 [math.GR].
3. Cameron P. J., Maslova N. V. *PCriterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg-Kegel graph.* J. Algebra. 2022. V. 607. Part A. P. 186–213.
4. Chen M., Maslova N. V., Zinov'eva M. R. *On characterization of groups by isomorphism type of Gruenberg-Kegel graph.* arXiv:2504.14703v1 [math.GR].
5. Maslova N. V., Panshin V. V., Staroletov A. M. *On characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple exceptional groups of Lie type.* European Journal of Mathematics. 2023. V. 9. Article number 78.
6. Lee M., Popiel T. *Recognisability of the sporadic groups by the isomorphism types of their prime graphs.* arXiv:2310.10113v3 [math.GR].

# ПОЛУОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ КАТЕГОРИЙ ТОЧНЫХ СТРУКТУР НА КАТЕГОРИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР НАКАЯМЫ

*H. M. Монченко<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup>Центр фундаментальной математики, МФТИ, Москва

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

## 1. Абелевы оболочки точных категорий конечного типа

Точные категории были впервые введены Квилленом в 1972 году для определения высшей K-теории. Формализм точных категорий позволяет расширить аппарат гомологической алгебры с абелевых категорий на более широкий класс аддитивных категорий. В литературе широко обсуждался вопрос классификации точных структур. В работе [1] было доказано, что на любой аддитивной категории существует максимальная точная структура, содержащая все меньшие. Позднее было получено явное описание максимальной точной структуры на квазиабелевых категориях, а также на категориях с расщепимыми идемпотентами.

Интерес вызывают промежуточные точные структуры, не являющиеся ни максимальными, ни минимальными. В работе [2] была дана полная классификация точных структур на категории с расщепимыми идемпотентами в терминах подкатегорий Серра категории контравариантных функторов  $\mathcal{Func}(\mathcal{E}^{op}, \mathcal{A}b)$ . Однако с практической точки зрения эта теорема оказывается сложно применимой, поскольку задача отыскания всех подкатегорий Серра оказывается чрезвычайно запутанной. Тем не менее в некоторых случаях, например для крулль-шмидтовых категорий конечного типа, удается получить явное описание всех точных структур на категории в ее внутренних терминах, используя теорию Ауслендера и почти расщепимые последовательности. Кроме того, вопрос классификации точных структур на категории оказывается тесно связан с изучением свойств правых/левых абелевых оболочек категорий, введенных А. И. Бондалом и А. Бодзентой в [3].

**Определение.** Пусть  $\mathcal{E}$  – точная категория. Ее *правой абелевой оболочкой* называется пара  $(\mathcal{A}_r(\mathcal{E}), i)$ , где  $\mathcal{A}_r(\mathcal{E})$  – абелева категория,  $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_r(\mathcal{E})$  – точный функтор, обладающая следующим универсальным свойством: для любой абелевой категории  $\mathcal{B}$  функтор  $i$  индуцирует эквивалентность категорий  $\text{Rex}(\mathcal{E}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \text{Rex}(\mathcal{A}_r(\mathcal{E}), \mathcal{B})$  точных справа функторов.

Заметим, что в общем случае абелева оболочка точной категории может не существовать. В работе [3] доказано, что функтор  $i$  индуцирует эквивалентность производных категорий  $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(\mathcal{A}_r(\mathcal{E}))$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем  $k$  конечного типа представления,  $B = \text{End}(\bigoplus_{i=1}^N M_i)$  – ее алгебра Ауслендера ( $M_i$  – все неразложимые правые  $A$ -модули). Положим  $\mathcal{A} = \text{mod-}A$ ,  $\mathcal{B} = \text{mod-}B$ . Тогда:

1. Правая абелева оболочка категории  $\mathcal{A}$  с минимальной точной структурой эквивалентна  $\mathcal{B}$ . Функтор  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  отождествляет категорию  $\mathcal{A}$  с полной подкатегорией  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$  проективных объектов в  $\mathcal{B}$ .
2. Точные структуры на  $\mathcal{A}$  находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами неразложимых непроективных объектов в  $\mathcal{A}$ .

3. Пусть  $I \subset [1, N]$  – некоторое подмножество всех неразложимых непроективных объектов,  $J = [1, N] - I$ .  $\mathcal{E}_I$  – категория  $\mathcal{A}$  с точной структурой, соответствующей  $I$ . Тогда  $\mathcal{A}_r(\mathcal{E}_I) \cong \text{mod-}e_JBe_J$ , где  $e_J = \sum_{j_k \in J} e_{j_k}$  – идемпотент, отвечающий неразложимым объектам из  $J$ . Эквивалентность задается (точным) функтором  $F = \text{Hom}_B(\bigoplus_{j_k \in J} P_{j_k}, -)$ .
4. Обозначим  $\mathcal{A}_J = \text{mod-}e_JBe_J$ . В обозначениях предыдущего пункта, категория  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_J)$  является факторкатегорией  $\mathcal{B}$  по подкатегории  $\mathcal{S}$ , порожденной  $\{S_i\}_{i \in I}$  – простыми объектами в  $\mathcal{B}$ , отвечающими неразложимым идемпотентам  $e_i$  (соответствующим тождественным морфизмам объектов  $M_i$ ).

Таким образом, задача производной классификации точных структур на  $\mathcal{A}$ , по существу, сводится к задаче производной классификации идемпотентных подалгебр  $B$ , таких что идемпотент  $e$  имеет вид  $e = e_P + \tilde{e}$ , где  $e_P$  – идемпотент, отвечающий  $A$  как правому модулю над собой.

Из классической двойственности Ауслендера [4] известно, что алгебра Ауслендера всегда имеет глобальную размерность 2 (даже если исходная алгебра  $A$  имела бесконечную глобальную размерность). Таким образом, алгебру  $B$  можно рассматривать как некоммутативное разрешение алгебры  $A$ . Более того, справедливо следующее несложное

**Утверждение.** Пусть  $A$  – конечномерная алгебра конечного типа представления над алгебраически замкнутым полем  $k$ ,  $B$  – ее алгебра Ауслендера. Пусть также  $e_1 = e_P + \tilde{e}$ ,  $e_2 = e_1 + e'$ , а  $\text{gl.dim } e_2Be_2 = n < \infty$ . Тогда  $\text{gl.dim } e_1Be_1 \leq n + 2$ .

Это, в частности, означает, что если абелева оболочка какой-то точной структуры имеет конечную глобальную размерность, то все меньшие точные структуры (т. е. содержащиеся в данной) также имеют абелевы оболочки конечной глобальной размерности.

## 2. Случай алгебры $A = k[x]/(x^n)$

Рассмотрим случай алгебры  $A = k[x]/(x^n)$ . Неразложимых модулей над ней всего  $n$ ,  $M_k = k[x]/(x^k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , модуль  $M_n$  является проективно-инъективным. Ее алгебра Ауслендера  $B$  – алгебра путей колчана с соотношениями:

$$\bullet_0 \xleftarrow[\alpha_1]{\beta_1} \bullet_1 \xleftarrow[\alpha_2]{\beta_2} \cdots \xleftarrow[\alpha_{n-1}]{\beta_{n-1}} \bullet_{n-1} \xleftarrow[\alpha_n]{\beta_n} \bullet_n$$

$$\beta_1\alpha_1 = 0, \quad \alpha_i\beta_i = \beta_{i+1}\alpha_{i+1}$$

В работе [5] были изучены сферические и исключительные объекты в категории  $\mathcal{B}$ . В частности, простые модули  $S_i$  при  $i < n$  являются 2-сферическими, находящимися в  $A_n$  конфигурации. Поэтому, как известно из работы [6], на категории  $D^b(B)$  сферическими скручиваниями эффективно действует группа кос  $Br_{n-1}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $I_1, I_2 \subset [1, n - 1]$ ,  $J_1 = [0, n] - I_1$ ,  $J_2 = [0, n] - I_2$ ,  $e_{J_1} = \sum_{j_k \in J_1} e_{j_k}$ ,  $e_{J_2} = \sum_{j_k \in J_2} e_{j_k}$ . Пусть также  $\mathcal{A}_1 = \text{mod-}e_{J_1}Be_{J_1}$ ,  $\mathcal{A}_2 = \text{mod-}e_{J_2}Be_{J_2}$ . Тогда  $\text{Perf}(\mathcal{A}_1)$  эквивалентна  $\text{Perf}(\mathcal{A}_2)$  как триангулированная категория тогда и только тогда, когда:

1.  $\#J_1 = \#J_2$ .
2. Множества разностей  $j_k - j_{k-1}$  для  $J_1$  и  $J_2$  совпадают как неупорядоченные мульти множества.

Для доказательства достаточности несложно построить производную автоэквивалентность категории  $D^b(\mathcal{B})$ , «переставляющую» подкатегории  $\mathcal{S}_t = \langle S_i \rangle_{i \in I_t}$ ,  $t = 1, 2$ , используя сферические скручивания объектов  $S_i$  и соотношения группы кос. Универсальное свойство факторкатегории доставляет требуемую эквивалентность.

Необходимость легко следует из рассмотрения эйлеровой характеристики на группе  $K_0(\mathcal{A}_t)$ ,  $t = 1, 2$ . Условия теоремы необходимы для того, чтобы соответствующие билинейные формы были эквивалентны над  $\mathbb{Z}$ .

Алгебра  $B$  является квазинаследственной с порядком  $n < n - 1 < \dots < 1$ . Стандартные модули имеют проективные резольвенты вида:

$$\Delta(1) \cong P(1)$$

$$0 \rightarrow P(i-1) \rightarrow P(i) \rightarrow \Delta(i) \rightarrow 0$$

Оказывается, что полуортогональное разложение, получаемое из стандартного полного исключительного набора, индуцирует полуортогональное разложение в производной категории  $\mathcal{A}_J$ .

**Теорема 3.** Пусть  $J \subset [0, \dots, n]$ , содержащее 0 и  $n$ . Тогда на  $\text{Perf}(\mathcal{A}_J)$  есть полуортогональное разложение с компонентами, эквивалентными

$$\mathcal{D}_k = \langle \Delta(j_s) \rangle_{s \in [j_{k-1}+1, j_k]} \cap \langle P_j \rangle_{j \in J}$$

где  $k \in [1, \#J]$ ,  $j_0 = 0$ . Более того, каждая компонента  $\mathcal{D}_k$  порождается единственным тилтинг-модулем  $T_k$  с алгеброй эндоморфизмов  $\text{End}(T_k) \cong k[x]/(x^{j_k - j_{k-1}})$ .

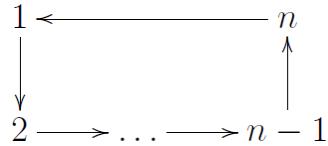
Здесь и далее под  $\langle A_i \rangle_{i \in I} \subset \mathcal{D}$  понимается минимальная триангулированная подкатегория  $\mathcal{D}$ , содержащая все объекты  $A_i$ .

### 3. Алгебры Накаямы

Пусть  $A$  – конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем.

**Определение.** Алгебра  $A$  называется алгеброй Накаямы, если все неразложимые проективные и инъективные модули унисерины, т. е. множество их подмодулей вполне упорядочено.

Широко известно, что алгебры Накаямы имеют конечный тип представления [4]. Алгебры Накаямы классифицируются так называемыми рядами Купиша (Kupisch series). Рядом Купиша называется конечный набор натуральных чисел  $\{a_i\}_{i=1}^n$ , таких что  $a_i \geq a_{i-1} - 1$  при  $2 \leq i \leq n$ ,  $a_0 \leq a_n - 1$ . В случае если  $a_n \neq 1$ , соответствующая алгебра Накаямы является алгеброй путей колчана с соотношениями:



Соотношения записываются таким образом, что  $a_i = \dim I(i)$ . В случае если  $a_n = 1$ , соответствующая алгебра имеет вид

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n$$

Соотношения в колчане выписываются из тех же соображений.

**Пример.** Ряд Купиша  $(n, n-1, \dots, 2, 1)$  соответствует алгебра путей колчана  $A_n$  без соотношений, ряд Купиша  $(n)$  соответствует алгебре  $k[x]/(x^n)$ , рассмотренной в предыдущем параграфе.

Для формулировки основного результата этого раздела нам понадобится еще одно определение, см. [7].

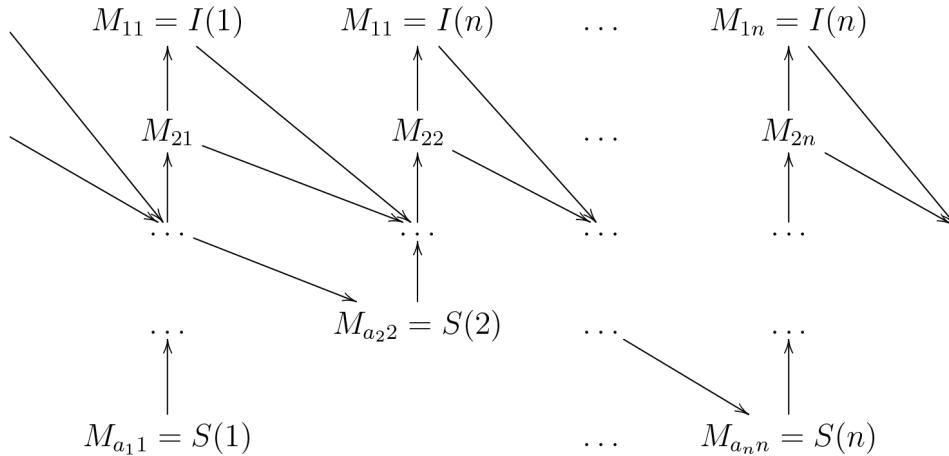
**Определение.** Преинъективным разбиением на множестве  $\text{Ind } A$  неразложимых модулей над конечномерной алгеброй  $A$  называется набор подмножеств  $\mathcal{I}_i \subset \text{Ind } A$ , определяемый индуктивно:

1. Множество  $\mathcal{I}_0$  состоит из неразложимых инъективных модулей.
2. Множество  $\mathcal{I}_{i+1}$  состоит из тех неразложимых модулей, которые являются максимальными фактор-модулями элементов  $\mathcal{I}_i$ .
3. Множество  $\mathcal{I}_\infty = \text{Ind } A - \bigcup_{i=0}^\infty \mathcal{I}_i$ .

Отметим, что если  $A$  конечного типа, то  $\mathcal{I}_\infty = \emptyset$ .

**Теорема 4** [7]. *Пусть  $A$  – алгебра конечного типа,  $B$  – ее алгебра Ауслендера,  $\Lambda$  – допустимый частичный порядок на множестве простых правых  $B$ -модулей (или, что равносильно, на множестве  $\text{Ind } A$ ), согласованный с преинъективным разбиением (т. е.  $M \preceq N$ , если  $M \in \mathcal{I}_i$ ,  $N \in \mathcal{I}_j$  и  $i < j$ ). Тогда  $B, \Lambda$  является квазинаследственной алгеброй.*

Если  $A$  – алгебра Накаямы, соответствующая ряду Купиша  $(a_i)_{i=1}^n$ , то на множестве неразложимых инъективных модулей существует естественный (циклический, если  $a_n \neq 1$ ) порядок. В силу их униформности, колчан Ауслендера – Райтен алгебры  $A$  можно изобразить в виде



В «столбцах» этого колчана стоят подмодули модуля  $I(n)$ , высота  $i$ -го столбца равна  $a_i$ . Вертикальные вложения отвечают неразложимым вложениям. Наклонные стрелки отвечают неразложимым эпиморфизмам, стрелка из модуля  $M_{ij}$  бьет в  $M_{i+1, j+a_j-a_i+1}$ , если такой существует. В случае если  $a_n \neq 1$ , этот колчан лучше изображать на цилиндре (на рисунке это показано стрелками, уходящими «в пустоту»). В  $i$ -й «строке» этого колчана расположены модули из  $\mathcal{I}_{i-1}$ .

Такой способ изображения колчана Ауслендера – Райтен алгебры Накаямы отличается от стандартного. Однако при таком расположении легко увидеть естественный порядок  $\Lambda$ ,

согласованный с преинъективным разбиением, на  $\text{Ind } A$ . А именно, упорядочим  $M_{ij}$  лексикографически (т. е.  $M_{ij} \preceq M_{i'j'}$  тогда и только тогда, когда  $i \leq i'$  или  $i = i', j \leq j'$ ). Вполне упорядоченное множество  $\text{Ind } A$  с построенным порядком  $\Lambda$  будем отождествлять с отрезком  $[1, \#\text{Ind } A] \subset \mathbb{N}$ .

Теперь сформулируем основной результат этого раздела.

**Теорема 5.** *Пусть  $A$  – алгебра Накаямы с рядом Купиша  $(a_i)_{i=1}^n$ ,  $B$  – ее алгебра Ауслендера,  $\Lambda$  – порядок, описанный выше,  $N = \#\text{Ind } A$ . Пусть также  $J \subset [1, N]$ , содержащее отрезок  $[1, n]$ . Положим  $e_J = \sum_{j \in J} e_j$ ,  $A_J = e_J B e_J$ . Тогда на  $\text{Perf}(A_J)$  есть полуортогональное разложение с компонентами, эквивалентными*

$$\mathcal{D}_k = \langle \Delta(j_k), \Delta(j_k + 1), \dots, \Delta(j_{k+1} - 1) \rangle \cap \langle P(j) \rangle_{j \in J}.$$

При этом каждая компонента  $\mathcal{D}_k$  порождается одним неразложимым тилдинг-модулем.

Автор благодарит своего научного руководителя А. И. Бондала за помощь в выполнении работы и ценные обсуждения.

Работа выполнена за счет средств государственного задания МФТИ (проект FSGM-2023-0013).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rump W. *On the maximal exact structure of an additive category*. FUNDAMENTA MATHEMATICAE. 2011. V. 214. Iss. 1. P. 77–87.
2. Enomoto Haruhisa. *Classification of exact structures and Cohen–Macaulay-finite algebras*. Advances in Mathematics. 2018. V. 335. P. 838–877.
3. Bodzenta A., Bondal A. *Abelian envelopes of exact categories and highest weight categories*. Math. Z. 2024. V. 308. P. 8.
4. Auslander M., Reiten I. *Representation theory of Artin algebras*. Comm. algebra. 1975. V. 3. P. 239–294.
5. Hille L., Ploog D. *Exceptional sequences and spherical modules for the Auslander algebra of  $k[x]/(x^t)$* . Pacific Journal of Mathematics. 2019. V. 302. № 2. P. 599–625.
6. Seidel P., Thomas R. *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*. Duke mathematical journal. 2001. V. 108.
7. Dlab V., Ringel C. M. *Auslander Algebras as Quasi-Hereditary Algebras*. Journal of the London Mathematical Society. 1989. s2-39: P. 457–466.
8. Theo Buhler. *Exact categories*. Expo. Math. 2010. V. 28. Iss. 1. P. 1–69.
9. Igusa K., Todorov G. *Preprojective Partitions and the Determinant of the Hom Matrix*. Proceedings of the American Mathematical Society. 1985. V. 94. № 2. P. 189–197.

# ТЕОРЕМА ПУХЛИКОВА–ХОВАНСКОГО ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТЕОРИЙ КОГОМОЛОГИЙ

*B. A. Петров<sup>1,2</sup>, Г. С. Шульга<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН

В [1] А. В. Пухликов и А. Г. Хованский описали кольцо когомологий (или кольцо Чжоу, что в данном случае одно и то же) проективного торического многообразия как кольцо дифференциальных операторов по модулю аннулятора многочлена объема соответствующего многогранника. Аналогичный результат верен и для многообразия полных флагов относительно специальной линейной группы (с многогранником Гельфанд–Цетлина). Недавно Л. В. Монин и Е. Ю. Смирнов в [2] перенесли эти результаты на K-теорию Гротендика; при этом вместо дифференцирований надо брать конечные разности, а вместо многочлена объема – многочлен Эрхарта, считающий число целочисленных точек внутри многогранника. И кольцо Чжоу, и кольцо Гротендика являются примерами ориентированных теорий когомологий в смысле Левина и Мореля [3]. Обобщаем результат Монина и Смирнова на произвольную ориентированную теорию когомологий. Многочлен, играющий роль многочлена объема, считается при этом по теореме Римана–Роха.

*Работа поддержанна грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (первый автор) и фондом “Родные города” (второй автор).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухликов А. В., Хованский А. Г. *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*. Алгебра и Анализ. 1992. V. 4. № 2. P. 161–185.
2. Monin L., Smirnov E. *Polyhedral models for K-theory of toric and flag varieties*. Seminaire Lotharingien de Combinatoire. 2023. V. 89B. Art. 76. 12 p.
3. Levine M., Morel F. *Algebraic Cobordism*. Springer Monographs Mathematics. 2007.
4. Calmes B., Petrov V., Zainoulline K. *Invariants, torsion indices and oriented cohomology of complete flags*. Ann. Scie. l’Ecole Normale Superieure. 2013. V. 46. P. 405–448.
5. Frohlich A. *Formal groups*. Lect. Notes Math. 1968. V. 74. 146 p.
6. Nenashev A., Zainoulline K. *Oriented cohomology and motivic decompositions of relative cellular spaces*. J. Pure Appl. Algebra. 2006. V. 205. P. 323–340.
7. Panin I., Smirnov A. *Riemann–Roch theorems for oriented cohomology*. In: Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory. 2004. P. 261–333.

# О ПРОСТРАНСТВЕ МОДУЛЕЙ ПАР «ДОПУСТИМАЯ СХЕМА – ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ» ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

*H. B. Тимофеева*

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова, Ярославль

Пусть  $S$  – неособое (неприводимое) проективное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем  $k = \bar{k}$  нулевой характеристики,  $\mathcal{O}_S$  – его структурный пучок,  $E$  – когерентный  $\mathcal{O}_S$ -модуль без кручения. Пусть  $L$  – очень обильный обратимый пучок на  $S$ ; он считается фиксированным. Символ  $\chi(\cdot)$  означает характеристику Эйлера–Пуанкаре когерентного пучка.

В докладе обсуждается построение схемы модулей допустимых пар  $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$  в случае произвольной размерности  $\dim \tilde{S} = \dim S \geq 2$ . Каждая пара состоит из допустимой схемы  $\tilde{S}$  с выделенной поляризацией  $\tilde{L}$  и полуустойчивого локально свободного пучка  $\tilde{E}$  ранга  $r$  и с полиномом Гильберта  $rp(n)$ . В частности, это обстоятельство можно интерпретировать как способ построения компактификации пространства модулей стабильных векторных расслоений на  $S$  векторными расслоениями на некоторых специальных (допустимых) схемах вместо классической компактификации присоединением не локально свободных когерентных пучков.

Причиной интереса к данному предмету исследования является соответствие Кобаяши – Хитчина. Оно позволяет применить алгебро-геометрические методы к задачам дифференциально-геометрической и теоретико-калибровочной постановки, заменив рассмотрение модулей связностей в векторном расслоении (включая векторные расслоения с дополнительными структурами) рассмотрением модулей векторных расслоений, стабильных в смысле наклона.

Поскольку обычно схемы модулей стабильных векторных расслоений на алгебраическом многообразии непроективны, возникает естественный вопрос поиска таких компактификаций модулей векторных расслоений и модулей связностей, которые допускали бы расширение соответствия Кобаяши – Хитчина на обе компактификации целиком.

Соответствие Кобаяши – Хитчина оперирует с полем коэффициентов  $\mathbb{C}$ . Мы работаем с произвольным алгебраически замкнутым полем  $k$  нулевой характеристики.

Класс схем  $\tilde{S}$ , вовлекаемых в рассмотрение и называемых *допустимыми*, возникает при таком преобразовании  $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$  многообразия  $S$ , несущего когерентный пучок  $E$ , что пучок  $\sigma^*E/\text{tors}$  локально свободен. Подпучок  $\text{tors} \subset \sigma^*E$  в рассматриваемой ситуации является аналогом подпучка кручения. Само преобразование названо *стандартным разрешением*. В случае когда  $E$  – локально свободный пучок, соответствующая ему допустимая схема  $\tilde{S}$  изоморфна многообразию  $S$ , а морфизм  $\sigma$  – тождественный.

В [1] показано, что при  $\dim S = 2$  допустимая схема определяется выражением  $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$  всякий раз, когда схема  $\tilde{S}$  не изоморфна  $S$ . Здесь  $I \subset \mathcal{O}_S$  – пучок идеалов, определяемый структурой когерентного пучка  $E$ . Тогда определен морфизм  $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ , индуцированный структурой  $\mathcal{O}_S$ -алгебры на градуированном кольце  $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t^{s+1})$ . В случае  $\dim S > 2$  процедура разрешения состоит из серии последовательных преобразований, переводящих схему  $S_i$  в схему  $S_{i+1} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_{i+1}[t] +$

$+(t))^s/(t^{s+1})$ , где  $S_0 := S$  и  $I_{i+1} \subset \mathcal{O}_{S_i}$  – пучок идеалов, определяемый структурой исходного когерентного пучка  $E$ , подвергаемого разрешению. Поэтому имеется последовательность морфизмов  $\sigma_{i+1}: S_{i+1} \rightarrow S_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, \ell - 1$ , каждый из которых индуцирован естественной структурой  $\mathcal{O}_{S_i}$ -алгебры на градуированном кольце  $\bigoplus_{s \geq 0} (I_{i+1}[t] + (t))^s / (t^{s+1})$ . Длина  $\ell$  этой последовательности равна гомологической размерности  $\text{hd } E$  пучка  $E$ . Имеем схему  $\tilde{S} := S_\ell$  и композицию морфизмов  $\sigma := \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_\ell: \tilde{S} \rightarrow S$ . Опишем пучки идеалов, участвующие в конструкции.

Выберем самую короткую локально свободную резольвенту пучка  $E$  и разрежем соответствующую точную  $\mathcal{O}_S$ -последовательность  $0 \rightarrow \hat{E}_\ell \rightarrow \hat{E}_{\ell-1} \rightarrow \dots \rightarrow \hat{E}_0 \rightarrow E \rightarrow 0$  с локально свободными  $\mathcal{O}_S$ -модулями  $\hat{E}_\ell, \dots, \hat{E}_0$  на тройки:

$$0 \rightarrow W_i \rightarrow \hat{E}_{i-1} \rightarrow W_{i-1} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь  $W_\ell = \hat{E}_\ell$ ,  $W_1 = \ker(\hat{E}_0 \rightarrow E)$  и  $W_i = \ker(\hat{E}_{i-1} \rightarrow \hat{E}_{i-2}) = \text{coker}(\hat{E}_{i+1} \rightarrow \hat{E}_i)$  для  $i = 2, \dots, \ell - 1$ . Также принимаем во внимание, что все пучки  $W_i$ , кроме  $W_\ell$ , не являются локально свободными. Поскольку схема  $S$  предполагается регулярной,  $E$  обладает локально свободной резольвентой, длина которой не превосходит  $\dim S$ .

Пусть  $X$  – схема,  $F$  –  $\mathcal{O}_X$ -модуль с конечным представлением, определяемым тройкой  $\hat{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \hat{F}_0 \rightarrow F \rightarrow 0$ . Без потери общности предполагаем, что  $\text{rank } \hat{F}_1 \geq \text{rank } \hat{F}_0$ . Пучок нулевых идеалов Фиттинга  $\mathcal{O}_X$ -модуля  $F$  определяется выражением  $\mathcal{Fitt}^0 F = \text{im}(\bigwedge^{\text{rank } \hat{F}_0} \hat{F}_1 \otimes \bigwedge^{\text{rank } \hat{F}_0} \hat{F}_0^\vee \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{O}_X)$ , где  $\varphi'$  – морфизм  $\mathcal{O}_X$ -модулей, индуцированный морфизмом  $\varphi$ .

Преобразование [2] начинается с морфизма  $\sigma_1: S_1 \rightarrow S$ , который индуцирован в слое над  $0 \in \mathbb{A}^1$  морфизмом раздугия  $\sigma'_1: \widehat{\mathbb{A}^1 \times S} \rightarrow \mathbb{A}^1 \times S$  произведения  $\mathbb{A}^1 \times S$  в пучке идеалов  $I'_1 = I_1[t] + (t)$  для  $I_1 = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(W_{\ell-1}, \mathcal{O}_S)$ . В случае гомологической размерности пучка  $E$ , равной 1, существует разрешение, состоящее из одного шага [3]; это морфизм  $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ , определяемый пучком идеалов  $I = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) \subset \mathcal{O}_S$ . В то же время для  $\text{hd } E = \ell$  необходима серия  $\ell$  последовательных морфизмов  $\sigma'_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

Каждый морфизм  $\sigma_i: S_i \rightarrow S_{i-1}$  индуцирован пучком идеалов  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(W_{\ell-1}, \mathcal{O}_S), & I_2 &= \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\sigma_1^* W_{\ell-2}, \mathcal{O}_{S_1}), \\ I_3 &= \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\sigma_2^* \sigma_1^* W_{\ell-3}, \mathcal{O}_{S_2}), \dots, & I_\ell &= \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^0(\sigma_{\ell-1}^* \dots \sigma_1^* W_0, \mathcal{O}_{S_{\ell-1}}). \end{aligned} \quad (2)$$

Пучок  $W_{i-1}$  коядра каждой тройки (1) преобразуется в локально свободный пучок морфизмом  $\sigma_{\ell-i+1}$ . Показано, что структура морфизмов разрешения  $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$  не зависит от выбора локально свободной резольвенты, используемой для их построения.

Схема  $S_1$  состоит из главной компоненты  $S_1^0$  и дополнительной «компоненты»  $S_1^{add}$ . Главная компонента  $S_1^0 = (\sigma_1^0)^{-1} S$  – это алгебраическое многообразие, получаемое раздугием многообразия  $S$ , и  $\sigma_1^0 := \sigma_1|_{S_1^0}: S_1^0 \rightarrow S$  – соответствующий морфизм раздугия, определяемый пучком идеалов  $I_1 \subset \mathcal{O}_S$ . Дополнительная «компонента»  $S_1^{add}$  может нести неприведенную схемную структуру и обладать приводимой редукцией. В статьях, посвященных двумерному случаю (например [1]), эта замкнутая подсхема возникала как объединение дополнительных компонент допустимой схемы.

Переход к схеме  $S_2^0$  приводит к преобразованию обеих подсхем  $S_1^0$  и  $S_1^{add}$ . Приходим к алгебраическому многообразию  $S_2^0$ , получаемому раздугием главной компоненты  $S_1^0$  схемы  $S_1$ , и к схеме  $(\sigma_2^0)^{-1} S_1^{add}$ . Переход к схеме  $S_2$  также приводит к дополнительной «компоненте»  $S_2^{add}$ , и можно написать  $S_2 = S_2^0 \cup (\sigma_2^0)^{-1} S_1^{add} \cup S_2^{add}$ .

Наконец, на  $\ell$ -ом шаге приедем к схеме  $\tilde{S} := S_\ell = \tilde{S}^0 \cup \tilde{S}^{add}$ , где  $\tilde{S}^{add} = \bigcup_{j>0} \tilde{S}^j$ . Нумерация компонент  $S^j$  организована индуктивно следующим образом. «Компонента»  $\tilde{S}^j$  – это объединение собственных прообразов дополнительных компонент, каждая из которых пересекает подсхему  $S^{j-1}$  вдоль одного из ее исключительных дивизоров. Допустимая схема  $\tilde{S}$  является равноразмерной проективной алгебраической схемой конечного типа. Имеем  $\dim \tilde{S} = \dim S$ .

В случае  $\dim S = 2$  в [3] было показано, что выделенная поляризация может быть выбрана следующим образом:  $\tilde{L} = \sigma^* L^m \otimes \sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ , если  $m$  достаточно велико для того, чтобы пучок  $\tilde{L}$  был обильным. В случае произвольной размерности  $\geq 2$  выделенная поляризация на допустимой схеме  $\tilde{S}$  имеет вид

$$\tilde{L} := L_\ell = [\sigma_\ell^* \dots [\sigma_2^* [\sigma_1^* L^{m_1} \otimes (\sigma_1)^{-1} I_1 \cdot \mathcal{O}_{S_1}]^{m_2} \otimes (\sigma_2)^{-1} I_2 \cdot \mathcal{O}_{S_2}]^{m_3} \dots]^{m_\ell} \otimes (\sigma_\ell)^{-1} I_\ell \cdot \mathcal{O}_{S_\ell}.$$

Переобозначив тензорную степень  $L^{m_1 \cdot m_2 \dots \cdot m_\ell}$  символом  $L$  (т. е. заменив обратимый пучок  $L$  его подходящей тензорной степенью), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \sigma^* L \otimes \text{Exc}_{S_\ell}; \\ \text{Exc}_{S_\ell} &:= [\dots [((\sigma_1)^{-1} I_1 \cdot \mathcal{O}_{S_1})^{m_2} \otimes (\sigma_2)^{-1} I_2 \cdot \mathcal{O}_{S_2}]^{m_3} \dots]^{m_\ell} \otimes (\sigma_\ell)^{-1} I_\ell \cdot \mathcal{O}_{S_\ell}. \end{aligned}$$

Величина степени  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_\ell$ , для которой выполняется замена пучка  $L^{m_1 \cdot m_2 \dots \cdot m_\ell}$  новым  $L$ , может быть выбрана общей для всех рассматриваемых пучков  $E$ .

Ограничим рассмотрение теми когерентными пучками  $E$ , которые могут быть включены в плоские семейства со связной базой, содержащее локально свободные пучки. Такие пучки называем деформационно эквивалентными локально свободным пучкам.

Выделенная поляризация  $\tilde{L}$  предполагается фиксированной для каждой схемы  $\tilde{S}$ , полученной описанным способом. Если  $\tilde{S} = S$ , то  $\tilde{L} = L$ . Поляризации  $\tilde{L}$  для схем  $\tilde{S}$  таковы, что для всех  $(\tilde{S}, \tilde{L})$  их полиномы Гильберта равны:  $\chi(\tilde{L}^n) = \chi(L^n)$ ,  $n \gg 0$ .

Теперь опишем конструкцию подпучка  $\text{tors}$  в выражении  $\sigma^* E / \text{tors}$ . Всякий раз, когда хотя бы один из морфизмов  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , отличен от тождественного, подпучок  $\text{tors}$  оказывается ненулевым и, более того, отличается от подпучка кручения. Поэтому он называется *подпучком модифицированного кручения*, или *подпучком кручения в модифицированном смысле*.

Пусть  $U$  – открытое по Зарискову подмножество одной из компонент  $\tilde{S}^0$  либо  $\tilde{S}^j$ ,  $j > 0$ , и  $\sigma^* E|_{\tilde{S}^j}(U)$  – соответствующая группа сечений. Эта группа является  $\mathcal{O}_{\tilde{S}^j}(U)$ -модулем. Пусть  $\text{tors}_j(U)$  – подмодуль модуля  $\sigma^* E|_{\tilde{S}^j}(U)$ , образуемый теми сечениями  $s \in \sigma^* E|_{\tilde{S}^j}(U)$ , каждое из которых аннулируется некоторым простым идеалом положительной коразмерности в кольце  $\mathcal{O}_{\tilde{S}^j}(U)$ . Соответствие  $U \mapsto \text{tors}_j(U)$  определяет подпучок  $\text{tors}_j \subset \sigma^* E|_{\tilde{S}^j}$ . Заметим, что ассоциированные простые идеалы положительной коразмерности, аннулирующие сечения  $s \in \sigma^* E|_{\tilde{S}^j}(U)$ , соответствуют подсхемам с носителями в  $\tilde{S}^{add} = \bigcup_{j>0} \tilde{S}^j$ . Поскольку по построению схема  $\tilde{S} = \tilde{S}^0 \cup \tilde{S}^{add}$  является связной, подпучки  $\text{tors}_j$ ,  $j \geq 0$ , позволяют построить подпучок  $\text{tors} \subset \sigma^* E$ . Последний подпучок определяется следующим образом. Сечение  $s \in \sigma^* E|_{\tilde{S}^j}(U)$  удовлетворяет условию  $s \in \text{tors}|_{\tilde{S}^j}(U)$  тогда и только тогда, когда (i) существует сечение  $y \in \mathcal{O}_{\tilde{S}^j}(U)$  такое, что  $ys = 0$ ; (ii) при  $j > 1$  как минимум одно из следующих двух условий выполнено: либо  $y \in \mathfrak{p}$ , где  $\mathfrak{p}$  – простой идеал положительной коразмерности; либо существуют открытое по Зарискову  $V \subset \tilde{S}$  и сечение  $s' \in \sigma^* E(V)$  такие, что  $V \supset U$ ,  $s'|_U = s$ , и для  $s'|_{V \cap \tilde{S}^{j-1}}$  снова выполнены условия, аналогичные (i), (ii). При  $j = 1$  условия (ii) имеют вид: либо  $y \in \mathfrak{p}$ , где  $\mathfrak{p}$  – простой идеал

положительной коразмерности; либо существуют открытое по Зарискому  $V \subset \tilde{S}$  и сечение  $s' \in \sigma^*E(V)$  такие, что  $V \supset U$ ,  $s'|_U = s$  и  $s'|_{V \cap \tilde{S}_0} \in \text{tors}(\sigma^*E|_{\tilde{S}_0})(V \cap \tilde{S}^0)$ . В последнем выражении подпучок кручения  $\text{tors}(\sigma^*E|_{\tilde{S}_0})$  понимается в обычном смысле.

Процедура разрешения преобразует любой когерентный  $\mathcal{O}_S$ -пучок  $E$  без кручения на поляризованной проективной регулярной схеме  $S$  в *допустимую пару* вида  $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ , являющуюся обобщением аналогичного понятия для случая размерности 2 (соответственно, гомологической размерности 1). В частности,  $\tilde{S}$  – *допустимая схема*; ее строение зависит от строения пучка  $E$ , подвергаемого разрешению.

Пучок  $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -модулей  $\tilde{E}$  получается из пучка  $E$  *стандартным разрешением*, если для некоторой локально свободной  $\mathcal{O}_S$ -резольвенты  $\widehat{E}_\bullet \rightarrow E \rightarrow 0$  с промежуточными факторпучками  $W_i$ ,  $i = 0, \dots, \ell$ ,  $W_0 = E$ ,  $W_\ell = \widehat{E}_\ell$  и для последовательности морфизмов  $\tilde{S} = S_\ell \xrightarrow{\sigma_\ell} S_{\ell-1} \xrightarrow{\sigma_{\ell-1}} \dots \xrightarrow{\sigma_2} S_1 \xrightarrow{\sigma_1} S$  существует изоморфизм  $\tilde{E} = \sigma_\ell^* \dots \sigma_1^* E / \text{tors}$ . Морфизмы  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , определяются следующим образом:  $S_i = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_i[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ , пучки идеалов  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , даны равенствами (2) и  $\sigma_i: S_i \rightarrow S_{i-1}$  – структурный морфизм.

Напомним классическое определение.  $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучок  $\tilde{E}$  *стабилен по Гизекеру* (соответственно, *полустабилен по Гизекеру*) относительно поляризации  $\tilde{L}$ , если для любого собственного подпучка  $\tilde{F} \subset \tilde{E}$  при  $m \gg 0$  выполнено неравенство

$$\frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } \tilde{F}} < \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } \tilde{E}} \quad \left( \text{соответственно, } \frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } \tilde{F}} \leq \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)}{\text{rank } \tilde{E}} \right).$$

В случае  $\dim S > 2$  описание последовательности пучков идеалов  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , используемых при стандартном разрешении, становится трудной проблемой: для формулировки проблемы модулей для пар необходимо устраниТЬ информацию о пучке  $E$ , подвергаемом разрешению. Постановка проблемы модулей для допустимых пар должна быть независимой от проблемы модулей когерентных пучков по Гизекеру – Маруяме. Способом преодолеть эту трудность является расширение класса пар и снятие ограничений на вид идеалов  $I_i$ , определяющих морфизмы  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Такой подход дает потенциальную возможность включить в рассмотрение иные способы компактификации семейств стабильных векторных расслоений на исходном алгебраическом многообразии  $S$  и тем самым исследовать связи между различными возможными компактификациями, использующими локально свободные пучки.

Итак, пусть  $\sigma_i: S_i \rightarrow S_{i-1}$  – морфизм алгебраических схем такой, что

- $U \subset S_{i-1}$  – наибольшее открытое подмножество такое, что ограничение

$$\sigma_i|_{(\sigma_i)^{-1}(U)}: (\sigma_i)^{-1}(U) \rightarrow U$$

является изоморфизмом. Обозначим  $H := S_{i-1} \setminus U$ .

• Обозначим  $S_i^0 := \overline{(\sigma_i)^{-1}(U)}$  и назовем эту подсхему *главной компонентой* схемы  $S_i$ . Также обозначим  $\sigma_i^0 := \sigma_i|_{S_i^0}: S_i^0 \rightarrow S_{i-1}$ . Ограничение  $\sigma_i|_{S_i^0}: S_i^0 \rightarrow S_{i-1}$  является морфизмом раздупния с исключительным дивизором  $\sigma_i^{-1}(H)$ .

• Ограничение  $\sigma_i|_{S_i \setminus S_i^0}: \overline{S_i \setminus S_i^0} \rightarrow S_{i-1}$  пропускается через замкнутое вложение  $H \hookrightarrow S_{i-1}$ . Отсюда следует, что

• морфизм  $\sigma_i$  обладает разложением в композицию  $\sigma_i = \sigma_i^0 \circ \delta_i$ , где морфизм  $\delta_i: S_i \rightarrow S_i^0$  таков, что его ограничение  $\delta_i|_{S_i^0}: S_i^0 \rightarrow S_i^0$  является тождественным морфизмом, и существует разложение  $\delta_i|_{\overline{S_i \setminus S_i^0}}: \overline{S_i \setminus S_i^0} \rightarrow H \hookrightarrow S_{i-1}$ .

Допустимая схема  $\tilde{S}$  обладает последовательностью морфизмов

$$\tilde{S} = S_\ell \xrightarrow{\sigma_\ell} S_{\ell-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{\sigma_1} S = S_0,$$

в которой морфизмы  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , имеют вид, описанный выше: рассматриваются схемы вида  $S_i = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_i[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$  для пучков идеалов  $I_i \subset \mathcal{O}_{S_{i-1}}$ . Морфизм  $\sigma_i$  – это структурный морфизм схемы  $S_i$  на схему  $S_{i-1}$ . При этом не накладывается ограничений на вид пучков идеалов  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Также  $\tilde{S} = \bigcup_{i=0}^{\ell} \tilde{S}^i$ , где  $\tilde{S}^0$  – собственный прообраз  $S$  в  $\tilde{S}$  (главная компонента), а  $\tilde{S}^i$  – объединение собственных прообразов в  $\tilde{S}$  дополнительных компонент, возникших на  $i$ -м шаге преобразования, описываемом морфизмом  $\sigma_{\ell-1+i}$ , для  $1 \leq i \leq \ell$ .

Если  $E_\ell = \tilde{E}$  получен из  $\mathcal{O}_S$ -пучка  $E = E_0$  стандартным разрешением, то  $E_i = \delta_i^* E_i|_{S_i^0}/\text{tors}$  и  $E_i = \sigma_i^* E_{i-1}/\text{tors}$ . Кручение понимается в модифицированном смысле. При рассмотрении пучка на целой схеме его подпучок tors становится обычным подпучком кручения.

Композиция  $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell$  обладает разложением  $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell = \sigma_{[\ell]} \circ \delta_{[\ell]}^0$ , где  $\sigma_{[\ell]}: \tilde{S}^0 \rightarrow S$  – композиция морфизмов раздутия,  $\delta_{[\ell]}^0: \bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{S}^i \rightarrow \tilde{S}^0$ .

**Определение [4].**  $S$ -(полу)стабильной парой  $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$  при  $\dim S \geq 2$  называются следующие данные:

- $\tilde{S} = \tilde{S}^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{S}^i$  – допустимая схема,  $\tilde{S}^0$  и  $\tilde{S}^i$ ,  $i > 0$ , – ее компоненты,  $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$  – канонический морфизм;
- $\tilde{E}$  – векторное расслоение на схеме  $\tilde{S}$ ;
- $\tilde{L} \in \text{Pic } \tilde{S}$  – выделенная поляризация,

такие что

- $\chi(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n) = rp(n)$ ;
- пучок  $\tilde{E}$  стабилен по Гизекеру (соответственно, полустиблен по Гизекеру) относительно поляризации  $\tilde{L}$  на схеме  $\tilde{S}$ ;
- пучок  $\tilde{E}$  удовлетворяет условию  $\tilde{E} = (\delta_{[\ell]}^0)^* \tilde{E}|_{\tilde{S}^0}$ .

Важным моментом является распространение стандартного разрешения на случай плоского семейства когерентных пучков  $((p: T \times S \rightarrow T, \mathbb{L} = \mathcal{O}_T \boxtimes L), \mathbb{E})$  таким образом, чтобы после преобразования получить также плоское семейство допустимых схем, несущее локально свободный пучок, ограничивающийся на каждой допустимой схеме  $\tilde{S}$  до искомого локально свободного пучка  $\tilde{E}$ . Для этого проводится дополнительное преобразование  $\xi: \tilde{T} \rightarrow T$  базы  $T$  первоначального семейства.

Имеют место следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $T$  – алгебраическая схема конечного типа над полем  $k$  и  $L$  – (достаточно большой) очень обильный обратимый пучок на неособом проективном алгебраическом многообразии  $S$ . Положим  $\Sigma = T \times S$ . Пусть  $\mathbb{E}$  –  $T$ -плоский когерентный  $\mathcal{O}_\Sigma$ -модуль ранга  $r$  такой, что  $\mathbb{E}|_{t \times S}$  когерентный пучок без кручения, деформационно эквивалентный локально свободному пучку, и послойный полином Гильберта  $\chi(\mathbb{E}|_{t \times S} \otimes L^n) = rp(n)$  не зависит от выбора точки  $t \in T$ . Тогда существуют

- морфизм  $\xi: \tilde{T} \rightarrow T$ ;
- плоское семейство  $\pi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{T}$  с морфизмом схем  $\sigma: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ ;
- обратимый  $\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}$ -пучок  $\tilde{\mathbb{L}}$ ,

такие что

- $\tilde{\mathbb{E}} = \sigma^* \mathbb{E}/\text{tors}$  – локально свободный  $\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}$ -модуль;

- $\chi(\widetilde{\mathbb{L}}^n|_{\pi^{-1}(t)})$  постоянно по  $t \in T$ ;
- $\chi(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^n|_{\pi^{-1}(t)}) = rp(n)$ ;
- коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xleftarrow{\sigma} & \widetilde{\Sigma} \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ T & \xleftarrow{\xi} & \widetilde{T} \end{array}$$

**Теорема 2.** *Неприведенная схема модулей  $\widetilde{M}_0$  полустабильных допустимых пар, деформационно эквивалентных парам с  $\widetilde{S} \cong S$  и соответствующих данным  $(S, L)$ ,  $r$ ,  $p(n)$ , изоморфна обединению  $\overline{M}_0$  компонент неприведенной схемы Гизекера – Маруямы  $\overline{M}$  для пучков ранга  $r$  на  $(S, L)$ , обладающих полиномом Гильберта  $gr(n)$ , содержащих локально свободные пучки.*

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1636).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеева Н. В. *О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений*. Матем. заметки. 2011. Т. 90:1. С. 143–150.
2. Тимофеева Н. В. *Локально свободное разрешение когерентных пучков в произвольной размерности*. Матем. заметки. 2021. Т. 110:4. С. 635–640.
3. Тимофеева Н. В. *О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. III: Функториальный подход*. Матем. сб. 2011. Т. 202:3. С. 107–160.
4. Тимофеева Н. В. *Стабильность и эквивалентность допустимых пар произвольной размерности для компактификации пространства модулей стабильных векторных расслоений*. ТМФ. 2022. Т. 212:1. С. 109–128.

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## ТОЧНАЯ НА КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ

*A. H. Бахвалов*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Хорошо известно (см., например, [1, т. 1, гл. II, (4.10)]), что если  $2\pi$ -периодическая функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, 2\pi]$ , то ее коэффициенты Фурье

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

при  $n \neq 0$  удовлетворяют неравенству

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{V(f; [0, 2\pi])}{|n|}, \quad (1)$$

и константа  $1/2\pi$  в этом неравенстве точная.

Эта оценка обобщалась рядом авторов на функции из пространств ограниченной обобщенной вариации ( $p$ -вариация Винера,  $\Phi$ -вариация Юнга,  $\Lambda$ -вариация Ватермана и др.). Наиболее общий результат получен Е. И. Бережным [2]. Он состоит в следующем.

Рассмотрим симметричное пространство числовых последовательностей, т. е. такое нормированное пространство  $X$ , состоящее из числовых последовательностей, что норма последовательности не меняется при ее перестановке, и к тому же для любой последовательности  $\{a_k\} \in X$  и для любых чисел  $\{\lambda_k\}$ ,  $|\lambda_k| \leq 1$ , выполнено неравенство

$$\|\{\lambda_k a_k\}\|_X \leq \|\{a_k\}\|_X.$$

Фундаментальной последовательностью симметричного пространства  $X$  называется последовательность  $\psi(X, n) = \|\sum_{k=1}^n e^k\|_X$ , где  $\{e^k\}$  — стандартные орты. Будем рассматривать только такие  $X$ , для которых  $\psi(X, n) \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Под нормой конечной последовательности  $\{a_k\}_{k=1}^n$  в  $X$  будем понимать норму финитной последовательности  $\sum_{k=1}^n a_k e^k$ .

Вариацией функции  $f$  относительно  $X$  на торе  $\mathbb{T}$  (аналогично на промежутке  $D$  вещественной прямой) называется величина

$$V_X(f; \mathbb{T}) = \sup_{\{I_k\} \in \Omega(\mathbb{T})} \|\{f(I_k)\}\|_X,$$

где  $\Omega(\mathbb{T})$  — множество конечных систем вложенных в  $\mathbb{T}$  попарно непересекающихся интервалов  $\{I_n\}$ . Можно считать, что интервалы  $\{I_n\}$  лежат в некотором отрезке  $[x, x + 2\pi]$ , где не обязательно  $x = 0$ .

Класс функций, для которых  $V_X(f; \mathbb{T})$  конечна, обозначим через  $BV(X, \mathbb{T})$ .

**Теорема [2, теорема 14].** Пусть  $X$  — симметричное пространство,  $f \in BV(X, \mathbb{T})$ , тогда для любого целого  $n \neq 0$  выполняется оценка

$$|c_n(f)| \leq \frac{V_X(f; \mathbb{T})}{\psi(X, |n|)}.$$

Усилим эту оценку следующим образом:

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — симметричное пространство,  $f \in BV(X, \mathbb{T})$ , тогда для любого целого  $n \neq 0$  выполняется оценка

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{V_X(f; \mathbb{T})}{\psi(X, 2|n|)}. \quad (2)$$

Для конкретного случая обычной вариации  $X = l_1$ , где  $\psi(l_1, n) = n$ , оценка (2) дает неравенство

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{V(f; \mathbb{T})}{|n|}.$$

Сравнивая с (1), видим, что порядок убывания один и тот же, но константа в оценке (1) меньше.

Показываем, что на классе всех пространств  $BV(X, \mathbb{T})$ , заданных симметричными пространствами  $X$ , константы в неравенстве (2) неулучшаемы. Для этого устанавливаем следующую оценку  $p$ -вариации экспоненты.

**Теорема 2.** Пусть  $V_p(f, \mathbb{T}) = V_{l_p}(f, \mathbb{T})$  —  $p$ -вариация Винера. Для любого целого  $n \neq 0$  при достаточно больших  $p > \tilde{p}(n)$  справедлива двусторонняя оценка

$$2(2|n|)^{1/p} \leq V_p(e^{inx}; \mathbb{T}) < 2(2|n| + 1)^{1/p}.$$

Отсюда выводится

**Теорема 3.** Оценка (2) неулучшаема в следующем смысле:

(1) при любом  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ни для какого  $\gamma \in \mathbb{N}$  и ни для какой постоянной  $C < 1/2$  не верно, что для всех симметричных пространств  $X$  и всех функций  $f \in BV(X, \mathbb{T})$  выполнена оценка

$$|c_n(f)| \leq C \cdot \frac{V_X(f; \mathbb{T})}{\psi(X, \gamma|n|)};$$

(2) при любом  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ни для какого натурального  $\gamma > 2$  не верно, что для всех симметричных пространств  $X$  и всех функций  $f \in BV(X, \mathbb{T})$  выполнена оценка

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{V_X(f; \mathbb{T})}{\psi(X, \gamma|n|)}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Наука, 1965. Т. 1–2.
2. Бережной Е. И. Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. II. Вопросы равномерной сходимости рядов Фурье. Сиб. мат. ж. 2001. Т. 42. № 3. С. 515–532.

# ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ТЕОРЕМАХ ТИПА РУНГЕ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИЛЬНО РАВНОМЕРНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

*П. Ю. Вилков*

*Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск*

В 1885 году Рунге установил критерий для пар областей  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  в  $\mathbb{C}$ , определяющий когда любая голоморфная функция в  $\Omega_2$  может быть равномерно приближена на компактах голоморфными функциями в  $\Omega_1$ . Аналогичные теоремы известны для эллиптических и параболических операторов [1, 2]. Напомним, что дифференциальный оператор  $\mathcal{L}$  называется сильно равномерно параболическим, если он имеет вид  $\mathcal{L} = \partial_t - L$ , где  $L$  – сильно равномерно эллиптический оператор. Обозначим через  $S_{\mathcal{L}}(G)$  множество обобщенных функций, удовлетворяющих однородному уравнению  $\mathcal{L}u = 0$  на  $G$ . Используем свойство нормальности оператора (см. [3, с. 245–246]) и дополнительные требования на области.

- (A1) Для любых  $t \in [T_1, T_2]$  множества  $G(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, t) \in G\} \subset \mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $C^{2m}$  при  $n \geq 2$  и объединением конечного числа интервалов при  $n = 1$ .
- (A2) Граница  $\partial G$  – объединение  $G(T_1) \cup G(T_2) \cup \Gamma$ , где  $\Gamma = \cup_{t \in (T_1, T_2)} \partial G(t)$  является  $C^{2m,1}$ -гладким многообразием без точек, касательная плоскость параллельна координатной плоскости  $\{t = 0\}$ .

На оператор  $\mathcal{L}$  накладываем свойство единственности продолжения по пространственным переменным (UCP). Для любого  $u \in S_{\mathcal{L}}(G)$  и любого  $t_0 \in (T_1, T_2)$ , если  $u(x, t_0) = 0$  для всех  $x$  из открытого подмножества  $\omega \subset G(t_0)$ , то  $u \equiv 0$  в открытой связной компоненте множества  $G(t_0)$ , содержащей  $\omega$ .

Дадим дополнительные определения.

- (A) Множество  $G(t)$  – липшицева область в  $\mathbb{R}^n$  для каждого  $t \in (T_1, T_2)$ , и для любых  $t_3, t_4$  таких, что  $T_1 < t_3 < t_4 < T_2$ , множество  $\Gamma_{t_3, t_4} = \cup_{t \in [t_3, t_4]} \partial G(t)$  является липшицевым многообразием в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (B) Для каждого  $t \in \mathcal{I}$  множество  $G_2(t) \setminus G_1(t)$  не имеет компактных компонент  $G_2(t)$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $\mathcal{L}$  удовлетворяет свойству нормальности и  $G_1 \subset G_2$  – области в полосе  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{I}$ , такие что  $G_2 \neq \mathbb{R}^n \times \mathcal{I}$ . Если (UCP) выполняется для  $\mathcal{L}^*$ ,  $G_2$  удовлетворяет условию (A), область  $G_1$  удовлетворяет (A1), (A2), и для пары  $G_1, G_2$  выполнено условие (B), тогда  $S_{\mathcal{L}}(\overline{G}_2)$  всюду плотно в  $\mathbf{L}_{k, \mathcal{L}}^2(G_1)$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $\mathcal{L}$  удовлетворяет свойству нормальности, и  $G_1 \subset G_2$  области в полосе  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{I}$  удовлетворяют условию (A). Если условие (UCP) выполнено для оператора  $\mathcal{L}$ , и частные производные  $\partial_t L_\alpha$  коэффициентов  $L_\alpha$ ,  $0 < |\alpha| \leq 2m$ ,  $t$  непрерывны в полосе  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{I}$ , тогда условие (B) является необходимым для того, чтобы пространство  $S_{\mathcal{L}}(\overline{G}_2)$  было всюду плотным в  $\mathbf{L}_{k, \mathcal{L}}^2(G_1)$ .

Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1790).

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Tarkhanov N. *The Analysis of Solutions of Elliptic Equations*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. NL. 1997. V. 406.
2. Diaz R. *A Runge theorem for solutions of the heat equation*. Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. № 4. P. 643–646.
3. Eidel'man S. D. *Parabolic equations*. Partial differential equations – 6. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. Moscow: VINITI, 1990. V. 63. P. 201–313.

# ОДНОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ХАУСДОРФА В НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

*Е. Д. Данелян<sup>1</sup>, А. Н. Карапетянц<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Региональный научно-образовательный математический центр*

*Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

При наличии измеримой функции  $k$  (наше интегральное ядро) на интервале  $(-1, 1)$ , рассматривается интегральный оператор

$$\mathcal{H}_\mu f(x) = \int_{-1}^1 k(t)f(\varphi_t(x)) d\mu(t), \quad (1)$$

где  $\mu$  – произвольная положительная мера Радона на  $(-1, 1)$  в некоторых пространствах измеримых, непрерывных и дифференцируемых функций и  $\varphi_x$  инволютивный автоморфизм на  $(-1, 1)$ , задаваемый формулой:

$$\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-xt}, \quad t \in (-1, 1).$$

Устанавливаются достаточные условия ограниченности операторов (1) в некоторых пространствах, инвариантных относительно автоморфизма  $\varphi_x$ .

Также рассматриваются интегральные операторы типа Хаусдорфа с переменным ядром, которые определяются следующим образом:

$$K_\mu f(x) \equiv \int_{-1}^1 k(x, t)f(\varphi_x(t)) d\mu(t).$$

Исследуется ограниченность в весовых пространствах Лебега, а также рассматривается вопрос об аппроксимации такими операторами.

*Работа поддержанна Региональным научно-образовательным математическим центром Южного федерального университета, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1720).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cardona D., Duduchava R., Hendrickx A., Ruzhansky M. *Global pseudo-differential operators on the Lie group  $G = (-1, 1)^n$* . arXiv:2209.09751.
2. Danelyan E., Karapetyants A. *On a class of Hausdorff type operators on interval*. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2024.
3. Duduchava R. *Convolution equations on the Lie group  $G = (-1, 1)$* . Georgian Mathematical Journal. 2023. V. 30. № 5. P. 683–702.
4. Mirotin A. R. *Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces  $H^1$  over locally compact groups*. J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473. P. 519–533.
5. Petrov V. E. *Integral transform on a segment*. Problemy Matem. Analiza. 2005. V. 31. P. 67–95; English transl. J. Math. Sci. 2006. V. 132. № 4. P. 451–481.

# ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ, ЗАДАВАЕМЫЕ В ТЕРМИНАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

A. N. Карапетянц<sup>1,2</sup>, И. Ю. Смирнова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Региональный научно-образовательный математический центр  
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Вводятся и изучаются весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой, определенные в терминах преобразования Фурье (Меллина). Именно, рассматриваются пространства на единичном диске со смешанной нормой, связанной с полярными координатами, и на верхней полуплоскости со смешанной нормой, связанной с декартовыми и также с полярными координатами. В указанных пространствах со смешанной нормой рассматриваются изучаются операторы Тёплица со специальными символами, также связанными с соответствующей геометрией.

*Работа поддержанна Региональным научно-образовательным математическим центром Южного федерального университета, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1720).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Karapetyants A., Smirnova I. *Weighted holomorphic mixed norm spaces in the unit disc defined in terms of Fourier coefficients*. Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. V. 67. № 7. P. 1543–1553.
2. Карапетянц А. Н., Смирнова И. Ю. Характеризация весовых пространств аналитических функций со смешанной нормой, определенных в терминах условий на коэффициенты Фурье. Известия вузов. Математика. 2022. № 1. С. 57–64.
3. Avetisyan Z., Karapetyants A., Smirnova I. *Mixed Fourier norm spaces of analytic functions on the upper half-plane and Toeplitz operators*. Mathematical Notes. 2025. V. 117. № 3. P. 345–356.
4. Смирнова И. Ю. Весовые пространства аналитических функций на верхней полуплоскости со смешанной нормой, определенные в терминах преобразования Меллина и операторы Тёплица. Математические заметки. 2025. Т. 118. № 3.

# О СУБГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

*P. P. Мурясов*

*Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа*

Основным результатом являются условия субгармоничности функций с разделенными переменными в многомерном случае в терминах *L-выпуклых* и  $\rho$ -*субсферических* функций, исследование плоского случая было опубликовано в статье [1].

Приведем данное в [2] определение *L-выпуклой* функции.

Рассмотрим конечный или бесконечный интервал  $(a, b)$  и линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p \frac{d}{dx} + q,$$

где  $p$  и  $q$  — непрерывные в интервале  $(a, b)$  функции. Функция  $f$  называется *L-выпуклой* в интервале  $(a, b)$ , если для каждого интервала единственности  $(a_1, b_1) \subset (a, b)$  и для любых  $x, x_1, x_2 \in (a_1, b_1)$ :  $x_1 \leq x \leq x_2$ , выполняется неравенство

$$f(x) \leq v(x, x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)),$$

где  $v(x, x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$  — решение краевой задачи

$$Lv = 0, \quad v(x_1) = f(x_1), \quad v(x_2) = f(x_2).$$

Приведем данное в [3] определение  $\rho$ -*субсферической* функции.

Пусть функция  $g$  задана на единичной сфере  $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Будем называть  $g$   $\rho$ -*субсферической* функцией в том и только в том случае, когда она интегрируема по Лебегу на  $S_{n-1}$ , полунепрерывна сверху на  $S_{n-1}$  и удовлетворяет в смысле обобщенных функций неравенству

$$[\Delta_S + \rho(\rho + n - 2)]g \geq 0,$$

где  $\Delta_S$  — оператор Лапласа–Бельтрами на  $S_{n-1}$ .

Сформулируем основной результат.

**Теорема 1.** Пусть в интервале  $(r_1, r_2)$ , где  $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ , задана вещественная функция  $f \geq 0$ ;  $f$  обращается в ноль лишь на множестве меры ноль, непрерывна в  $(r_1, r_2)$ , а также имеет в  $(r_1, r_2)$  слабые производные до второго порядка включительно. Пусть в открытом множестве  $\Omega_s$  на единичной сфере  $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  задана вещественная функция  $g \geq 0$ ;  $g$  обращается в ноль лишь на множестве  $(n-1)$ -мерной меры ноль, непрерывна в  $\Omega_s$ , а также имеет в  $\Omega_s$  слабые производные до второго порядка включительно. Функция  $u$ , в  $n$ -мерной сферической системе координат имеющая вид

$$u(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = f(r)g(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \tag{1}$$

является субгармонической функцией в  $n$ -мерном угловом или колышевом секторе  $G$ , заданном соотношениями  $r_1 < r < r_2$ ,  $\theta \in \Omega_s$ , тогда и только тогда, когда существует вещественное число  $c$ , для которого  $f$  —  $L_1$ -выпуклая функция в интервале  $(r_1, r_2)$ ,  $g$  — субфункция оператора  $L_2$  в  $\Omega_s$ , где

$$L_1 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (n-1)r \frac{d}{dr} - c, \tag{2}$$

$$L_2 = \Delta_S + c. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть в интервале  $(r_1, r_2)$ , где  $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ , задана вещественная функция  $f \geq 0$ ;  $f$  обращается в ноль лишь на множестве меры ноль, непрерывна в  $(r_1, r_2)$ , а также имеет в  $(r_1, r_2)$  слабые производные до второго порядка включительно. Пусть на единичной сфере  $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  задана отличная от константы вещественная функция  $g \geq 0$ ;  $g$  обращается в ноль лишь на множестве  $(n-1)$ -мерной меры ноль, непрерывна на  $S_{n-1}$ , а также имеет слабые производные до второго порядка включительно. Функция  $u$ , в  $n$ -мерной сферической системе координат имеющая вид (1), является субгармонической функцией в  $n$ -мерном шаровом слое, заданном соотношением  $r_1 < r < r_2$ , тогда и только тогда, когда существует вещественное число  $\rho > 0$ , для которого  $f - L_1$ -выпуклая функция в интервале  $(r_1, r_2)$ ,  $g - \rho$ -субсферическая функция, где

$$L_1 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (n-1)r \frac{d}{dr} - \rho(\rho+n-2). \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мурясов Р.Р. Субгармонические функции с разделенными переменными и их связь с функциями, выпуклыми относительно пары функций. Изв. вузов. Матем. 2024. № 6. С. 49–67.
2. Хейфиц А.И. Аналитические свойства функций, выпуклых относительно решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 1025–1034.
3. Кондратюк А.А. О методе сферических гармоник для субгармонических функций. Матем. сб. 1981. Т. 158. № 2. С. 147–165.

# НЕРАВЕНСТВО МАРКОВА–НИКОЛЬСКОГО МЕЖДУ $L^q$ И $L^0$ СРЕДНИМИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЯМИ ВНЕ КРУГА

*A. Э. Рокина**Институт математики и механики УРО РАН, Екатеринбург*

Обозначим через  $\mathcal{P}_n$  множество алгебраических многочленов степени не более чем  $n$  с комплексными коэффициентами. Введем подмножество многочленов из  $\mathcal{P}_n$ . Пусть  $\mathcal{P}_n(G)$  — множество многочленов из  $\mathcal{P}_n$ , не обращающихся в ноль в области  $G \subset \mathbb{C}$ , то есть

$$\mathcal{P}_n(G) := \{p_n \in \mathcal{P}_n : p_n(z) \neq 0, z \in G\}.$$

$L^q$ -средние многочлена  $p_n$  на отрезке  $[-1, 1]$  определяются равенствами

$$\|p_n\|_\infty := \|p_n\|_{C([-1, 1])} = \max\{|p_n(x)| : x \in [-1; 1]\} \text{ при } q = \infty;$$

$$\|p_n\|_q := \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |p_n(x)|^q dx \right)^{1/q} \text{ при } 0 < q < \infty;$$

$$\|p_n\|_0 := \lim_{q \rightarrow +0} \|p_n\|_q = \exp \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |p_n(x)| dx \right) \text{ при } q = 0.$$

Обозначим через  $M_{q,p}(n, k)$  точную (наименьшую возможную) константу неравенства Маркова–Никольского

$$\|p_n^{(k)}\|_q \leq M_{q,p}(n, k) \|p_n\|_p, \quad p_n \in \mathcal{P}_n, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq q, \quad p \leq \infty. \quad (1)$$

Неравенствам (1) посвящено большое количество исследований. Хороший обзор результатов можно найти в [1]. Точные значения  $M_{q,p}(n, k)$  известны далеко не при всех значениях параметров. Особый интерес для данной работы представляет случай  $0 \leq q \leq \infty$ ,  $p = 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ . В этом случае точная константа  $M_{q,0}(n, k)$  была найдена П. Ю. Глазыриной [2].

Неравенства Маркова–Никольского с ограничениями на нули многочлена исследованы в меньшей степени. В работах автора [3, 4] на классе  $\mathcal{P}_n(D_R)$  – многочленов с нулями вне открытого круга  $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , изучалась задача Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ . Эта задача эквивалентна неравенству Маркова–Никольского в случае, когда порядок производной совпадает со степенью многочлена  $k = n$ . В частности, для  $k = n$  в этих работах вычислены точные константы неравенства Маркова–Никольского на классе многочленов  $\mathcal{P}_n(D_R)$  при  $p = \infty$ ,  $p = 0$  и для многочленов четной степени при произвольном  $0 < p < \infty$ , а в случае многочленов нечетной степени получены двусторонние оценки.

В настоящей работе на классе многочленов  $\mathcal{P}_n(D_R)$  с нулями вне открытого круга  $D_R$  изучается точная константа  $M_q(n, k; R)$  в случае Глазыриной неравенства Маркова–Никольского. А именно, исследуется точное неравенство

$$\|p_n^{(k)}\|_q \leq M_q(n, k; R) \|p_n\|_0, \quad p_n \in \mathcal{P}_n(D_R), \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq q \leq \infty. \quad (2)$$

Задача состоит в нахождении точной константы  $M_q(n, k; R)$  и экстремальных многочленов, на которых неравенство (2) обращается в равенство.

Основным результатом является следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $0 \leq k \leq n$ ,  $2 \leq q \leq \infty$ ,  $R \geq 1$ . Тогда для точной константы в неравенстве (2) справедливо равенство

$$M_q(n, k; R) = \frac{n! \|(\cdot - R)^{n-k}\|_q}{(n-k)! \|(\cdot - R)^n\|_0}.$$

Экстремальными являются многочлены

$$p_n^*(x) = \begin{cases} c(x \pm R)^n, & c \in \mathbb{C}, \quad k < n; \\ c(x - R)^s(x + R)^{n-s}, & 0 \leq s \leq n, \quad c \in \mathbb{C}, \quad k = n, \end{cases}$$

и только они.

Кроме того, на классе многочленов  $\mathcal{P}_n(\mathbb{C} \setminus \overline{D_R})$  с нулями в замкнутом круге  $\overline{D_R}$  рассмотрим точную (наибольшую возможную) константу  $T_{s,q}(n, k; R)$  в неравенстве Турана

$$\|p_n^{(k)}\|_s \geq T_{s,q}(n, k; R) \|p_n\|_q, \quad p_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C} \setminus \overline{D_R}), \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq s \leq \infty. \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении точной константы  $T_{s,q}(n, k; R)$  и экстремальных многочленов, на которых неравенство (3) обращается в равенство. Обзор результатов в неравенстве Турана можно найти в [5].

В случае  $k = n$  справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $k = n$ ,  $0 \leq s$ ,  $q \leq \infty$ ,  $R \geq 1$ . Тогда точная константа в неравенстве (3) не зависит от  $s$  и для нее справедливо равенство

$$T_{s,q}(n, n; R) = \begin{cases} n! \|(\cdot - R)^n\|_q^{-1} & \text{для } nq \geq 2; \\ n! \|(\cdot - iR)^n\|_q^{-1} & \text{для } nq < 2. \end{cases}$$

Экстремальными многочленами являются

$$p_n^*(x) = \begin{cases} (x \pm R)^n, & \text{для } nq > 2; \\ (x + z)^n, & |z| = R, \quad \text{для } nq = 2; \\ (x \pm iR)^n, & \text{для } 0 < nq < 2; \\ (x + iR)^s(x - iR)^{n-s}, & 0 \leq s \leq n, \quad \text{для } q = 0. \end{cases}$$

Других экстремальных многочленов нет.

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1549).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner R. B., Govil N. K., Milovanović G. V. *Extremal problems and inequalities of Markov-Bernstein type for algebraic polynomial*. Academic Press. London : Elsevier, 2022.
2. Глазырина П. Ю. Точное неравенство Маркова–Никольского для алгебраических многочленов в пространствах  $L^q, L^0$  на отрезке. Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 1. С. 3–22.

3. Пестовская А. Э. *Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, с ограничением на расположение корней*. Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 3. С. 166–175.
4. Rokina A. E. *Polynomials least deviating from zero in  $L^p(-1;1)$ ,  $0 \leq p \leq \infty$ , with a constraint on the location of their roots*. Ural Math. J. 2023. V. 9. № 2 P. 157–164.
5. Глазырина П. Ю., Ревес С. Д. *Неравенства Турана-Эрёда, обратные к неравенству Маркова, для  $L^q$ -нормы по границе плоской выпуклой области*. Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2018. Т. 303. С 87–115.

# ПРОЕКТИВНО-ПЕРЕСТАНОВОЧНОЕ УНИТАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ КОНЕЧНЫХ ФРЕЙМОВ

*B. B. Севостьянова*

*Самарский национальный исследовательский университет им. С. П. Королева*

Пусть  $\mathbb{H}^d$  — евклидово (унитарное) пространство размерности  $d$  над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  (соответственно  $\mathbb{C}$ ).

**Определение 1.** Конечный набор векторов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  в пространстве  $\mathbb{H}^d$  будем называть фреймом, если существуют константы  $0 < a \leq b < \infty$ , такие что для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leq b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Приведем другое эквивалентное определение фрейма [1]. Фреймом в пространстве  $\mathbb{H}^d$  называется произвольный набор векторов, для которого  $\text{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$ . Другими словами, фрейм — обобщение определения базиса, в котором не требуется линейная независимость векторов.

Теория конечных фреймов активно развивалась в последние годы. Благодаря свойствам полноты, устойчивости и избыточности, фреймы получают многочисленные приложения в различных областях, таких как анализ сигналов, обработка изображений, кодирование и восстановление данных, квантовая теория информации и теория сжатых измерений.

Введем на множестве фреймов различные отношения эквивалентности.

**Определение 2.** Фреймы  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  и  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  называются унитарно эквивалентными, если существует унитарное преобразование  $\mathbf{U}$ , такое что  $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ .

Хорошо известно, что матрицы Грама двух систем векторов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  и  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  совпадают тогда и только тогда, когда эти системы унитарно эквивалентны. Тогда унитарно эквивалентные фреймы однозначно определяются скалярными произведениями  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ ,  $i \leq j$ .

**Определение 3.** Фреймы  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$  и  $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$  называются проективно унитарно эквивалентными, если существует унитарное преобразование  $\mathbf{U}$  и числа  $\alpha_i \in \mathbb{F}$ ,  $|\alpha_i| = 1$ , для которых  $\psi_i = \alpha_i \mathbf{U}\varphi_i$  при любых  $i$ .

Умножение вектора  $\varphi_i$  на число  $\alpha_i$  меняет матрицу Грама  $\text{Gram}(\Phi)$  фрейма  $\Phi$  следующим образом:  $i$ -я строка в  $\text{Gram}(\Phi)$  умножается на  $\alpha_i$ , а  $i$ -й столбец — на  $\overline{\alpha_i}$ , другими словами, фреймы  $\Phi$  и  $\Psi$  проективно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется диагональная матрица  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , такая что

$$\text{Gram}(\Psi) = D \text{Gram}(\Phi) D^*.$$

Будем рассматривать проективно унитарные классы эквивалентности, т. е. множество всех фреймов, проективно унитарно эквивалентных друг другу. Нетрудно проверить, что примерами функций, постоянных на проективно унитарных классах эквивалентности, являются так называемые  $t$ -произведения, т. е. произведения вида

$$\Delta(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_m}) = \langle \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2} \rangle \langle \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3} \rangle \dots \langle \varphi_{i_m}, \varphi_{i_1} \rangle.$$

В работе [2] показано, что фреймы в  $\mathbb{H}^d$  — проективно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают все их  $t$ -произведения. Там же описан алгоритм по нахождению минимального набора  $t$ -произведений, однозначно описывающих данный перестановочно унитарный класс эквивалентности. Если для некоторого фрейма все скалярные произведения  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$  отличны от нуля, то можно показать, что его проективно унитарный класс эквивалентности однозначно определяется 1, 2 и 3-произведениями вида

$$\left( \|\varphi_i\|^2, |\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle|^2, \Delta(\varphi_1, \varphi_j, \varphi_k) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < k \leq n}}.$$

Множество рациональных функций, постоянных на проективно унитарных классах эквивалентности, образует поле, обозначим его через  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 1.** Поле рациональных функций, постоянных на проективно унитарных классах эквивалентности, — это поле рациональных функций от 1, 2 и 3-произведений:

$$\mathcal{A} = \mathbb{F} \left( \|\varphi_i\|^2, |\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle|^2, \Delta(\varphi_1, \varphi_j, \varphi_k) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < k \leq n}}.$$

**Определение 4.** Будем говорить, что фреймы  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  и  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  перестановочно унитарно эквивалентны, если существует перестановка  $\sigma \in S_n$ , для которой фреймы  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  и  $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$  унитарно эквивалентны.

Транспозиция  $\sigma$ , меняющая местами векторы  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  фрейма  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ , в матрице Грама  $\text{Gram}(\Phi)$  поменяет местами строки и столбцы с номерами  $i$  и  $j$ .

Примерами функций, постоянных на перестановочно унитарных классах эквивалентности, являются любые симметрические функции от длин всех векторов фрейма  $\|\varphi_i\|^2$ . В работах [3, 4] для вещественного и комплексного случая явно выписаны наборы функций, которые постоянны на перестановочно унитарных классах эквивалентности и которые разделяют перестановочно унитарные классы эквивалентности в общем положении.

Далее рассмотрим максимальное отношение эквивалентности.

**Определение 5.** Фреймы  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  и  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  называются проективно-перестановочно унитарно эквивалентными, если существуют унитарное преобразование  $\mathbf{U}$ , перестановка  $\sigma \in S_n$  и числа  $\alpha_i \in \mathbb{F}$ ,  $|\alpha_i| = 1$ , для которых  $\psi_i = \alpha_i \mathbf{U} \varphi_{\sigma(i)}$ .

Пусть сначала  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ . Рассмотрим три серии полиномов от 1, 2 и 3-произведений. Можно убедиться, что функции из всех серий не меняются после произвольной перестановки индексов. Первая серия однозначно с точностью до перестановки определяет длины векторов:

$$\begin{aligned} s_1 &= \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2, \\ s_2 &= \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 + \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_3\|^2 + \dots + \|\varphi_{n-1}\|^2 \|\varphi_n\|^2, \\ &\vdots \\ s_n &= \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \dots \|\varphi_n\|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим через  $N$  число всех пар  $(i, j)$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ . В качестве второй серии

инвариантов возьмем

$$\begin{aligned}
 t_1 &= |\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle|^2 + |\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle|^2 + \dots + |\langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle|^2, \\
 t_2 &= \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 |\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle|^2 + \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_3\|^2 |\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle|^2 + \dots + \\
 &\quad + \|\varphi_{n-1}\|^2 \|\varphi_n\|^2 |\langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle|^2, \\
 &\vdots \\
 t_N &= (\|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2)^{N-1} |\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle|^2 + (\|\varphi_1\|^2 \|\varphi_3\|^2)^{N-1} |\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle|^2 + \dots + \\
 &\quad + (\|\varphi_{n-1}\|^2 \|\varphi_n\|^2)^{N-1} |\langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle|^2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Если рассматривать вторую серию как неоднородную систему линейных уравнений от  $|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|^2$  с известными  $\|\varphi_i\|^2$  и  $t_i$ , то можно показать, что при почти любых значениях  $\|\varphi_i\|^2$  система имеет единственное решение, определяющее  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$  с точностью до знака.

Пусть  $M$  обозначает число троек  $(i, j, k)$ , где  $1 \leq i < j < k \leq n$ . Рассмотрим третью серию

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) + \dots + \Delta(\varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n), \\
 w_2 &= \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \|\varphi_3\|^2 \Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \|\varphi_4\|^2 \Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) + \\
 &\quad + \dots + \|\varphi_{n-2}\|^2 \|\varphi_{n-1}\|^2 \|\varphi_n\|^2 \Delta(\varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n), \\
 &\vdots \\
 w_M &= (\|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \|\varphi_3\|^2)^{M-1} \Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \\
 &\quad + (\|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \|\varphi_4\|^2)^{M-1} \Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) + \dots + \\
 &\quad + (\|\varphi_{n-2}\|^2 \|\varphi_{n-1}\|^2 \|\varphi_n\|^2)^{M-1} \Delta(\varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично, по значениям инвариантов из третьей серии почти для любых  $\|\varphi_i\|^2$  можно восстановить значения всех 3-произведений. Таким образом, упорядочив длины  $\|\varphi_1\|^2, \|\varphi_2\|^2, \dots, \|\varphi_n\|^2$ , т. е. фиксируя порядок на множестве векторов, почти всегда можно восстановить значения всех 1, 2 и 3-произведений, которые однозначно определяют проективно унитарный класс эквивалентности.

Определим отображение  $\pi$ , которое ставит в соответствие фрейму  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$  набор значения функций из трех серий на фрейме  $\Phi$ , т. е.

$$\pi(\Phi) = (s_1(\Phi), \dots, s_n(\Phi), t_1(\Phi), \dots, t_N(\Phi), w_1(\Phi), \dots, w_M(\Phi)).$$

**Теорема 2.** Существует непустое подмножество  $V$ , всюду плотное во множестве фреймов с  $n$  векторами из  $d$ -мерного евклидова пространства, для которого прообраз любой точки из  $\pi(V)$  — проективно-перестановочно унитарный класс эквивалентности.

Обозначим через  $\mathcal{B}$  поле рациональных функций, постоянных на проективно-перестановочно унитарных классах эквивалентности конечных фреймов в  $\mathbb{R}^n$ , совпадает с полем рациональных функций от полиномов (1), (2) и (3):

$$\mathcal{B} = \mathbb{R}(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N, w_1, \dots, w_M).$$

В случае комплексного поля функции (1), (2) из первой и второй серий также не будут меняться при произвольной перестановке векторов, в то время как (3) перестановки меняют. Например, для транспозиции  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  имеем

$$\Delta(\varphi_{\sigma(1)}, \varphi_{\sigma(2)}, \varphi_{\sigma(3)}) = \Delta(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3) = \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle \langle \varphi_3, \varphi_2 \rangle = \overline{\Delta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}.$$

Далее, обозначив  $g_i = \|\varphi_i\|^2$ , третью серию в случае комплексного поля заменим на следующую:

$$u_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} ((g_{i_1} - g_{i_2})(g_{i_2} - g_{i_3})(g_{i_3} - g_{i_1}))^{2(k-1)} \cdot \operatorname{Re}(\Delta(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3})), \quad (4)$$

$$v_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} ((g_{i_1} - g_{i_2})(g_{i_2} - g_{i_3})(g_{i_3} - g_{i_1}))^{2k-1} \cdot \operatorname{Im}(\Delta(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3})), \quad (5)$$

где  $k = 1, 2, \dots, M$ . Проверка показывает, что любая перестановка векторов оставляет функции  $u_k$  и  $v_k$  без изменений.

Аналогично, рассмотрим отображение  $\varpi$ ,

$$\varpi(\Phi) = (s_i(\Phi), t_j(\Phi), u_k(\Phi), v_k(\Phi)),$$

ставящее в соответствие каждому фрейму  $\Phi$  значения функций из трех серий для этого фрейма. Имеют место

**Теорема 4.** Существует непустое подмножество  $W$ , всюду плотное во множестве фреймов с  $n$  векторами из  $d$ -мерного унитарного пространства, для которого образ любой точки из  $\varpi(W)$  — проективно-перестановочно унитарный класс эквивалентности.

**Теорема 5.** Поле рациональных функций, постоянных на проективно-перестановочно унитарных классах эквивалентности конечных фреймов в  $\mathbb{C}^n$ , — поле рациональных функций от полиномов (1), (2), (4) и (5).

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (Соглашение № 075-02-2025-1791).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Boston : Birkhauser, 2002.
2. Waldron S. F. D. *An Introduction to Finite Tight Frames*. Boston : Birkhauser, 2018.
3. Севостьянова В. В. *Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов*. Математика и теоретические компьютерные науки. 2003. Т. 1. № 3. С. 46–58.
4. Севостьянова В. В. *Инварианты на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля*. Математические заметки. 2024. Т. 116. № 4. С. 582–596.

## ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

### О КОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА ОТРАЖЕНИЙ БИЛЬЯРДОВ МИНКОВСКОГО В МНОГОГРАННОМ УГЛЕ

*P. V. Баринов*

*МКН СПбГУ, Санкт-Петербург*

В статье изучаются бильярдные траектории в пространствах Минковского – конечномерных вещественных векторных пространствах с заданной гладкой, строго выпуклой нормой (не обязательносимметричной). Основное внимание уделяется задаче о числе отражений в области, ограниченной гиперплоскостями – полиэдральном конусе.

**Основной результат:** любая траектория бильярда Минковского в полиэдральном конусе содержит лишь конечное количество точек отражения.

**Ключевые конструкции и методы.** Отражение в пространстве Минковского определяется не углом, а через вариационный принцип: точка отражения минимизирует сумму длин отрезков до и после столкновения. Эквивалентно, отражение описывается условием на преобразование Лежандра  $L(v)$ , связывающее касательные и кокасательные направления:

$$[L(v^+) - L(v^-)] \Big|_H = 0.$$

Здесь  $L : X \rightarrow X^*$  – преобразование Лежандра, связанное с нормой:  $L(x) = d_x(\|x\|^2/2)$ ,  $H$  – гиперплоскость, от которой отразилась траектория.

Одним из шагов в доказательства является так называемая редукция конуса. Если конус невырожден, т. е. пересечение его граней – только одна точка, то с некоторого момента траектория не будет отражаться хотя бы от одной стенки. Это позволяет перейти к конусу, в котором все грани имеют общую прямую  $E$ .

Для доказательства глобальной конечности применяется редукция размерности. Если конус имеет общее направление  $E$  всех своих граней, то траектория проектируется на фактор-пространство  $X/E$ . Однако чтобы сохранить структуру бильярда, на факторе нужно задать *новую норму Минковского*.

Построение этой нормы основано на фиксировании *импульса траектории*  $P_{\gamma,e}(t) = L(\gamma'(t))(e)$ , который остается постоянным вдоль траектории, где  $e \in E$ . Используя этот инвариант, определяется двойственная норма на  $(X/E)^*$ :

$$\|p\|_{C,a}^* := \|\pi^* p + a\|^*,$$

где  $a$  – ковектор с фиксированным значением импульса,  $\pi^*$  – подъем из  $(X/E)^*$  в  $X^*$ , а  $C$  – значение импульса. Далее по двойственной норме восстанавливается прямая норма  $\|\cdot\|_{C,a}$  на  $X/E$ .

Натуральная перепараметризация проекции траектории в новой норме является бильярдной в факторе и попадает в задачу меньшей размерности. Доказательство завершается по индукции.

# УСЛОВИЕ ФОКСА – МИЛНОРА ДЛЯ КОНКОРДАНТНЫХ УЗЛОВ В ГОМОЛОГИЧЕСКИХ 3-СФЕРАХ

*Б. Выонг*

*РНОМЦ Томского государственного университета*

Классическая теория узлов рассматривает задачу размещения окружности в трехмерной сфере, то есть классификацию топологических вложений с точностью до изотопии окружающего пространства. Другая существенная проблема — классификация узлов с точностью до кобордизма, которая приводит к исследованию и построению инварианта кобордизма. Один из таких инвариантов был изучен Р. Фоксом и Дж. Милнором, анонсирован в 1957 году и опубликован в статье [1], где авторы доказали условие полинома Александера для узла, являющегося срезанным типом. Здесь рассматриваем узлы в ориентированной гомологической 3-сфере. Для них существуют инварианты Александера, связанные с узлами, такими как в классическом случае (см. [2, с. 91-93]). То есть геометрическая сущность, порождающая инварианты Александера узлов в ориентированной гомологической 3-сфере, устанавливается посредством бесконечного циклического накрытия дополнения узла. В частности, для каждого узла в ориентированной гомологической 3-сфере существует корректно определенный многочлен Александера, связанный с узлом. Многочлен является инвариантом относительно окружающей изотопии узлов в ориентированной гомологической 3-сфере. Краткую информацию о многочленах Александера узлов в ориентированной гомологической 3-сфере можно найти в статье [3]. Для особого случая гомологической сферы Пуанкаре  $P$  существует алгоритм вычисления многочлена Александера для узла или зацепления в  $P$  [4]. Естественно спросить, выполняется ли условие Фокса–Милнора для многочлена Александера для случая конкордантных узлов в ориентированной гомологической 3-сфере. Утвердительный ответ дает следующая теорема.

**Теорема А.** *Пусть  $k_0, k_1$  — конкордантные узлы в ориентированной гомологической 3-сфере  $M$ . Тогда многочлены Александера узлов связаны следующим уравнением<sup>1</sup>:*

$$\Delta_{k_0}(t) \doteq p(t)p(1/t)\Delta_{k_1}(t),$$

где  $\Delta_{k_0}(t), \Delta_{k_1}(t)$  — многочлены Александера относительно  $t$  узлов  $k_0, k_1$  соответственно, а  $p(t)$  — многочлен с целыми коэффициентами.

Для доказательства теоремы А следуем стратегии, предложенной Фоксом и Милнором в [1] и описанной в работах Дж. Крайнбила [5] и В. Тураева [6, с. 139].

Можно обобщить теорему А следующим образом.

**Теорема Б.** *Пусть  $M, M'$  — гомологические сферы, связанные гомологическим кобордизмом  $W$  так, что граница  $\partial W = M \cup M'$ . Более того, включения  $M \hookrightarrow W$  и  $M' \hookrightarrow W$  индуцируют изоморфизмы на гомологиях. Пусть  $k : S^1 \rightarrow M$  — узел в  $M$  и  $k' : S^1 \rightarrow M'$  — узел в  $M'$ . Пусть  $g : S^1 \times I \rightarrow W$  — конкордантность между  $k$  и  $k'$ . Тогда многочлены Александера узлов  $k, k'$  связаны уравнением*

$$\Delta_k(t) \doteq p(t)p(1/t)\Delta_{k'}(t),$$

---

<sup>1</sup>Обозначение  $\Delta_1 \doteq \Delta_2$  означает  $\Delta_1 = \pm t^n \Delta_2$  для некоторого целого  $n$ .

где  $\Delta_k(t)$ ,  $\Delta_{k'}(t)$  – многочлены Александера узлов  $k$ ,  $k'$  соответственно, а  $p(t)$  – многочлен с целыми коэффициентами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fox R. H., Milnor J. W. *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*. Osaka J. Math. 1966. V. 3. P. 257–267.
2. Saveliev N. *Lectures on the Topology of 3-Manifolds: An Introduction to the Casson Invariant*. 2-nd revised edition. Berlin, Boston : De Gruyter, 2012. 207 p.
3. Austin D., Rolfsen D. *Homotopy of Knots and the Alexander Polynomial*. Canad. Math. Bull. 1999. V. 42(3). P. 257–262.
4. Vuong B., Evtteev V. *On knots in Poincare homology sphere*: preprint.
5. Kreinbihl J. *A Fox–Milnor theorem for knots in a thickened surface*. J. Knot Theory Ramifications. 2019. V. 28. № 12. 1950073. 15 p.
6. Turaev V. *Reidemeister torsion in knot theory*. Russian Math. Surv. 1986. V. 41. P. 119–182.

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЕНИЙ ЛИУВИЛЯ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ АНАЛОГОВ КЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

*B. A. Кибкало<sup>1,2</sup>, E. C. Якимова (Агуреева)<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,*

<sup>2</sup>*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*

Одним из актуальных направлений дальнейшего развития топологического подхода, введенного А. Т. Фоменко [1], является его расширение на новые классы интегрируемых систем, в частности, на кусочно-гладкие биллиарды и на системы с некомпактными слоениями Лиувилля или неполными потоками гамильтоновых векторных полей.

Также большой интерес представляет класс систем, предложенный в работе [2] А. В. Борисовым и И. С. Мамаевым. Он задается следующим преобразованием в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ :

$$x_1 \rightarrow ix_1, \quad x_2 \rightarrow ix_2, \quad J_1 \rightarrow iJ_1, \quad J_2 \rightarrow iJ_2, \quad J_3 \rightarrow J_3, \quad x_3 \rightarrow x_3.$$

Такое преобразование сохраняет вещественность скобки Пуассона и первых интегралов для многих известных интегрируемых систем механики, включая волчки Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, а также их обобщение при добавлении постоянного гиростатического момента (например, систему Жуковского).

Такой псевдоевклидов аналог системы Жуковского с гиростатическим моментом  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и главными моментами инерции  $A_1, A_2, A_3$  имеет четыре независимых первых интеграла: две функции Казимира  $f_1, f_2$ , гамильтониан  $H$  и дополнительный квадратичный интеграл  $K$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, & f_2 &= x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b, \\ H &= \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, & K &= J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k. \end{aligned}$$

Эти квадратичные интегралы задаются с помощью псевдоевклидова (не знакоопределенного) скалярного произведения векторов координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и импульсов  $(J_1, J_2, J_3)$ .

Для исследования бифуркационных диаграмм псевдоевклидова аналога системы Жуковского в осесимметричном случае, когда  $A_1 = A_2 \neq A_3$ , удобно перейти от исходного множества параметров  $(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3) \in \bar{Z} \subset \mathbb{R}^4$  к паре параметров  $(\alpha, \beta)$ , выражающих соотношения между параметрами моментов инерции и компонентами вектора гиростатического момента. Это позволяет понизить размерность параметрического пространства и выделить множество, разделяющее различные типы бифуркационной картины.

Для этого на подмножестве  $Z \subset \bar{Z}$ , где  $\lambda \neq 0$ , зададим функции

$$\alpha = \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^{1/3}, \quad \beta = \left( \frac{\lambda_3}{\lambda} \right)^{2/3}, \quad (1)$$

значения которых будем называть существенными параметрами системы. Их введение позволяет описать разделяющее множество как полный прообраз в  $Z$  объединения нескольких кривых в первом квадранте плоскости  $O\alpha\beta$ .

**Теорема 1.** В осесимметричном случае  $A_1 = A_2 \neq A_3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , множество  $\Theta$ , разделяющее различные типы бифуркационных диаграмм псевдоевклидова аналога системы Жуковского задается как объединение множества

$$\Theta_0 = \{(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3) : A_1 > 0, A_3 > 0, \lambda \cdot \lambda_3 = 0\} \quad (2)$$

и прообразов в  $Z$  следующих кривых на плоскости существенных параметров:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \beta = \alpha^2, \quad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

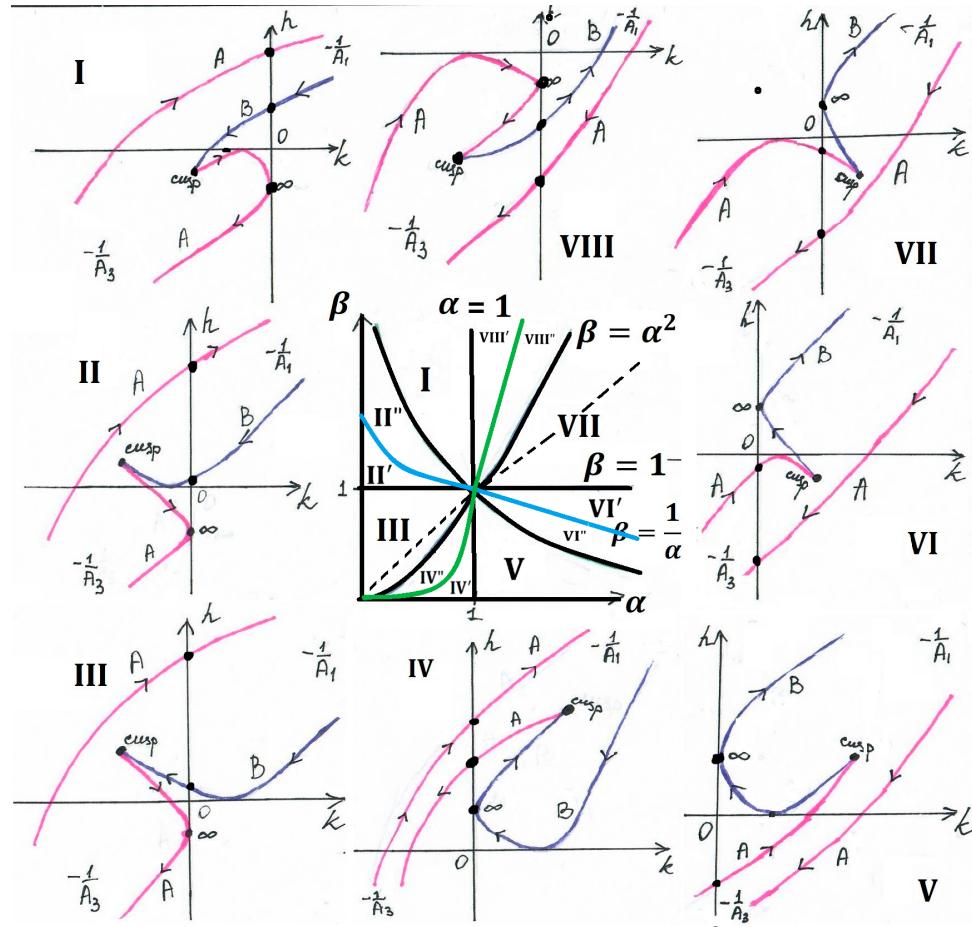


Рис. 1. Разделяющее множество на плоскости  $O\alpha\beta$  и соответствующий системам из областей I–VIII вид кривой  $(k(t), h(t))$  на плоскости  $Okh$  с типами 2-атомов

Эти кривые разбивают первый квадрант плоскости  $O\alpha\beta$  на восемь областей (I–VIII), различающихся типом бифуркационной диаграммы отображения момента ( $H, K$ ) и составом 2-атомов в регулярных слоях.

В работе авторов [3] была построена полная бифуркационная диаграмма, выявлены критические множества и описаны инварианты Фоменко для регулярных слоений.

При переходе к общему случаю ( $A_1 \neq A_2 \neq A_3$ ) возникают существенные аналитические затруднения. Основные сложности связаны с вычислением координат точек возврата и нахождением параметрических выражений для координат особых точек. Однако

для специальных подклассов параметров, образующих всюду плотное множество, удалось получить явные выражения бифуркационных кривых на плоскости  $Okh$ , что позволило провести топологический анализ.

Рассмотрим подкласс систем, в котором параметры моментов инерции удовлетворяют соотношению

$$1 + A_2 t = (1 + A_1 t)x + (1 + A_3 t)(1 - x), \quad (3)$$

где  $x \in [0, 1]$  — рациональный параметр. Такое условие позволяет аналитически выразить координаты двух точек возврата  $t_1, t_2$  на параметрической кривой  $(h(t), k(t))$ .

**Теорема 2.** Пусть параметры  $A_1, A_2, A_3$  удовлетворяют условию (3). Тогда

1) существует ровно две точки возврата  $t_1$  и  $t_2$ , в которых

$$d^2 H|_K = 0,$$

и координаты  $(h(t_i), k(t_i))$  выражаются аналитически;

2) в этих точках отображение момента  $(H, K)$  имеет особенность параболического (каспидального) типа: бифуркационная диаграмма содержит каспидальные точки, а соответствующее слоение теряет локальную тривидальность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российским научным фондом (проект 24-71-10100). Е. С. Якимова (Агуреева) является стипендиатом Фонда “Базис”.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация*. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
2. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces*. Russ. J. Math. Phys. 2016. T. 23. № 4. С. 431–454.
3. Агуреева Е. С., Кибкало В. А. *Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры Ли  $e(2, 1)$* . Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2024. № 5. С. 3–16.

# МУЛЬТИВИРТУАЛЬНЫЕ КОСЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ

*T. A. Козловская*

*Региональный научно-образовательный математический центр Томского государственного университета*

Э. Артин ввел группу кос [1] и показал, что каждой косе (элементу группы кос) соответствует зацепление. Группа кос  $B_n$ ,  $n \geq 2$ , на  $n$  нитях задается порождающими элементами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (2)$$

Существует гомоморфизм группы  $B_n$  на группу подстановок  $S_n$ , переводящий порождающий  $\sigma_i$  в транспозицию  $(i, i+1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Ядро этого гомоморфизма называется группой крашеных кос и обозначается символом  $P_n$ .

Одно из обобщений теории узлов – теория виртуальных узлов, была введена Л. Кауфманом [2] в конце 1990-х годов. Диаграмма виртуального узла – это плоский четырехвалентный граф, каждый перекресток которого является либо классическим, либо виртуальным. Обобщенные движения Рейдемейстера состоят из классических движений Рейдемейстера и движения объезда (см. рис.1).

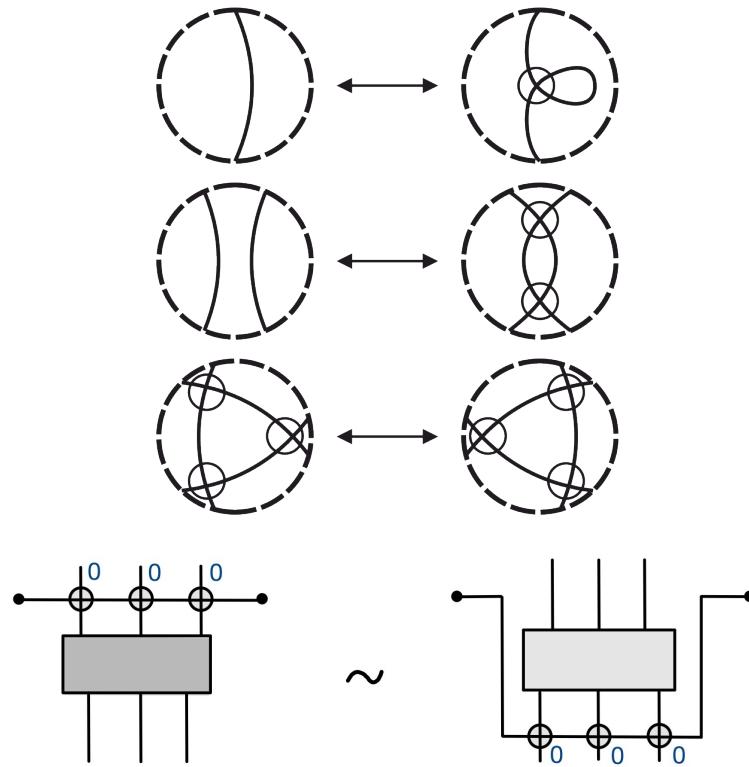


Рис. 1. Виртуальные движения Рейдемейстера и движение объезда

С теорией виртуальных узлов связаны некоторые ее фактор-теории, которые получаются добавлением аналогов преобразований Рейдемейстера. На этом пути возникает

теория плоских виртуальных узлов, теория узлов со спайками, теория Гауссовых узлов и ряд других. При этом, в основе этих теорий лежат соответствующие аналоги групп кос.

По аналогии с классическими группами кос Л. Кауфман ввел виртуальные группы кос  $VB_n$ . Группой виртуальных кос  $VB_n$  на  $n$  нитях называется группа с порождающими элементами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ , соотношениями (1), (2) и дополнительными соотношениями

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i, \quad |i - j| \geq 2,$$

$$\rho_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2,$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Легко проверить, что подгруппа в  $VB_n$ , порожденная элементами  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ , изоморфна группе подстановок  $S_n$  на  $n$  символах. Также известно, что элементы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  порождают в группе виртуальных кос  $VB_n$  подгруппу, изоморфную группе кос  $B_n$ .

В [3] Л. Кауфман определил мультивиртуальные узлы и косы. Теория мультивиртуальных узлов обобщает теорию виртуальных узлов, которая, в свою очередь, обобщает теорию классических узлов.

В данной работе определяем группу крашеных мультивиртуальных кос как ядро естественного гомоморфизма группы мульти-виртуальных кос на группу подстановок.

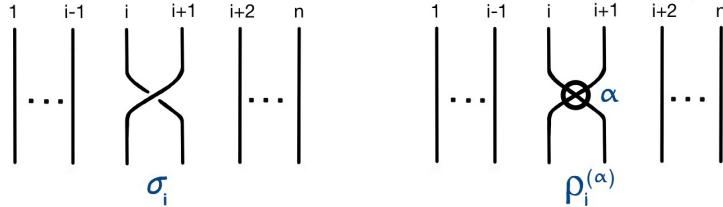


Рис. 2. Геометрическая интерпретация порождающих  $\sigma_i, \rho_i^{(\alpha)}$

$k$ -мультивиртуальная группа кос  $kMVB_n$  [3] задается порождающими (см. рис. 2).

$$\sigma_i, \quad \rho_i^{(\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha = 0, 1, \dots, k-1,$$

и определяющими соотношениями:

### I. Инволютивность

$$\left( \rho_i^{(\alpha)} \right)^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha = 0, 1, \dots, k-1.$$

### II. Дальняя коммутативность

– однородная:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \rho_i^{(\alpha)} \rho_j^{(\alpha)} = \rho_j^{(\alpha)} \rho_i^{(\alpha)}, \quad |i - j| \geq 2;$$

– смешанные соотношения ( $\alpha \neq \beta$ ):

$$\sigma_i \rho_j^{(\alpha)} = \rho_j^{(\alpha)} \sigma_i, \quad \rho_i^{(\alpha)} \rho_j^{(\beta)} = \rho_j^{(\beta)} \rho_i^{(\alpha)}, \quad |i - j| \geq 2.$$

### III. Косовские соотношения

– однородные:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

$$\rho_i^{(\alpha)} \rho_{i+1}^{(\alpha)} \rho_i^{(\alpha)} = \rho_{i+1}^{(\alpha)} \rho_i^{(\alpha)} \rho_{i+1}^{(\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2;$$

– смешанные ( $\beta = 1, 2, \dots, k - 1$ ):

$$\sigma_i \rho_{i+1}^{(0)} \rho_i^{(0)} = \rho_{i+1}^{(0)} \rho_i^{(0)} \sigma_{i+1},$$

$$\rho_{i+1}^{(\beta)} \rho_i^{(0)} \rho_{i+1}^{(0)} = \rho_i^{(0)} \rho_{i+1}^{(0)} \rho_i^{(\beta)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

**Замечание.** Следующие соотношения не выполняются в  $k$ -мультивиртуальной группе кос  $kMVB_n$ :

$$F1: \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i^{(\alpha)} = \rho_{i+1}^{(\alpha)} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 0 \leq \alpha \leq k - 1;$$

$$F2: \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}^{(\alpha)} = \rho_i^{(\alpha)} \sigma_{i+1} \sigma_i, \quad 0 \leq \alpha \leq k - 1;$$

$$F3: \rho_i^{(0)} \rho_{i+1}^{(\beta)} \rho_i^{(\beta)} = \rho_{i+1}^{(\beta)} \rho_i^{(\beta)} \rho_{i+1}^{(0)}, \quad \rho_i^{(\gamma)} \rho_{i+1}^{(\beta)} \rho_i^{(\beta)} = \rho_{i+1}^{(\beta)} \rho_i^{(\beta)} \rho_{i+1}^{(\gamma)},$$

$$\rho_i^{(\gamma)} \rho_{i+1}^{(\gamma)} \rho_i^{(\beta)} = \rho_{i+1}^{(\beta)} \rho_i^{(\gamma)} \rho_{i+1}^{(\gamma)}, \quad 0 < \gamma < \beta \leq k - 1.$$

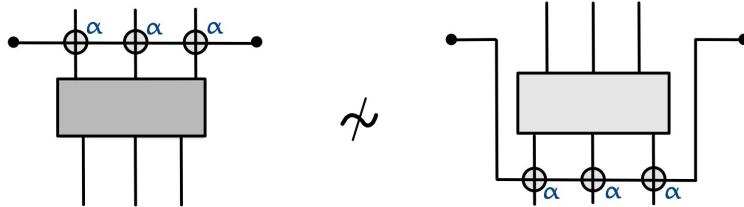


Рис. 3. Движение объезда

Если  $k = 0$ , то  $kMVB_n$  является группой кос  $B_n$ . Если  $k = 1$ , то  $kMVB_n$  является виртуальной группой кос  $VB_n$ .

Определим гомоморфизм  $\varphi_n: VB_n \rightarrow S_n$ , посылающий порождающие  $\sigma_i$  и  $\rho_i$  в  $\rho_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Ядро этого гомоморфизма называется группой виртуальных крашеных кос и обозначается  $VP_n$ .

В [4] доказано, что группа  $VP_n$  порождается элементами

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma_i^{-1}, \quad \lambda_{i+1,i} = \rho_i (\lambda_{i,i+1}) \rho_i = \sigma_i^{-1} \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$\lambda_{ij} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} (\lambda_{i,i+1}) \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$

$$\lambda_{ji} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} (\lambda_{i+1,i}) \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$

$$1 \leq i < j - 1 \leq n - 1,$$

и определяется соотношениями

$$\lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{kl} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ki} \lambda_{kj} \lambda_{ij} = \lambda_{ij} \lambda_{kj} \lambda_{ki},$$

где разные буквы обозначают разные индексы.

Группа плоских виртуальных кос  $FVB_n$  является фактор-группой группы  $VB_n$  по соотношениям  $\sigma_i^2 = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Далее будем обозначать  $\rho_i = \rho_i^{(0)}$ .

Определим гомоморфизм  $\varphi_{n,k}: kMVB_n \rightarrow S_n$ ,  $\sigma_i \mapsto \rho_i$ ,  $\rho_i^{(\alpha)} \mapsto \rho_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, k - 1$ . Ядро этого гомоморфизма  $\ker \varphi_{n,k}$  будем называть группой крашеных мультивиртуальных кос  $kMVP_n$ .

Группа  $kMVP_n$  содержит элементы:

$$\lambda_{i,i+1}^{(0)} = \rho_i \sigma_i^{-1}, \quad \lambda_{i+1,i}^{(0)} = \rho_i \lambda_{i,i+1}^{(0)} \rho_i = \sigma_i^{-1} \rho_i, \quad \lambda_{i,i+1}^{(\beta)} = \rho_i \rho_i^{(\beta)},$$

$$1 \leq \beta \leq k - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

и

$$\lambda_{i,j}^{(0)} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1}^{(0)} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$

$$\lambda_{j,i}^{(0)} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i+1,i}^{(0)} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$

$$\lambda_{i,j}^{(\beta)} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1}^{(\beta)} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$

$$1 \leq i < j - 1 \leq n - 1, \quad 0 < \beta \leq k - 1.$$

**Теорема 1.** Группа  $kMVP_n$  порождается элементами:

$$\lambda_{ij}^{(\alpha)}, \quad \lambda_{ji}^{(0)}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad 0 \leq \alpha \leq k - 1,$$

и определяется соотношениями:

$$\lambda_{ij}^{(\alpha)} \lambda_{kl}^{(\beta)} = \lambda_{kl}^{(\beta)} \lambda_{ij}^{(\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq k - 1,$$

$$\lambda_{ik}^{(0)} \lambda_{jk}^{(0)} \lambda_{ij}^{(0)} = \lambda_{ij}^{(0)} \lambda_{jk}^{(0)} \lambda_{ik}^{(0)}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n,$$

$$\lambda_{ik}^{(\alpha)} \lambda_{jk}^{(\alpha)} \lambda_{ij}^{(\alpha)} = \lambda_{ij}^{(\alpha)} \lambda_{jk}^{(\alpha)} \lambda_{ik}^{(\alpha)}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \quad 1 \leq \alpha \leq k - 1,$$

где разные буквы обозначают разные индексы.

**Теорема 2** (Структура группы  $kMVB_n$ ).

1.  $kMVB_n = kMVP_n \rtimes S_n$ .
2.  $\langle \lambda_{ij}^{(0)} \mid 1 \leq i \neq j \leq n \rangle \cong VP_n$ .
3. Для любого  $\alpha \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$  выполнено  $\langle \lambda_{ij}^{(\alpha)} \mid 1 \leq i \neq j \leq n \rangle \cong FVP_n$ .
4. Если  $n = 3$ , то  $kMVP_3 \cong VP_3 * (FVP_3)^{(k-1)}$ .

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-02-2025-1728/2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Artin E. *Theorie der Zöpfe*. Abh. Math. Semin Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
2. Kauffman L. *Virtual knot theory*. Eur. J. Comb. 1999. V. 20. P. 663–690.
3. Kauffman L. *MultiVirtual Knot Theory*. 2024. <https://arxiv.org/abs/2409.07499>. 82 p.
4. Bardakov V. *The virtual and universal braids*. Fund. Math. 2004. V. 181. P. 1–18.

# ПОЧТИ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

*Я. В. Нагибин*

Санкт-Петербургский государственный университет

Пусть  $M$  – связное компактное ориентируемое 3-многообразие с непустым краем. Идеальная триангуляция многообразия  $M$  называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число тетраэдров среди всех идеальных триангуляций этого многообразия. Число тетраэдров в минимальной идеальной триангуляции многообразия  $M$  называется *триангуляционной сложностью* и обозначается через  $c_\Delta(M)$ . Верхние оценки сложности обычно возникают из явного построения триангуляций, в то время как поиск нижних оценок в общем случае является трудной задачей. Для гиперболического многообразия с каспами У. Терстоном было замечено неравенство:

$$c_\Delta(M) \geq \frac{\text{vol}(M)}{v_3}, \quad (1)$$

где через  $v_3$  обозначен объем правильного идеального тетраэдра в пространстве  $\mathbb{H}^3$ , см., например, [1]. Гиперболические многообразия, на которых достигается нижняя оценка называются *тетраэдральными*. Список тетраэдральных многообразий до сложности 21 был составлен А. Ю. Весниным, С. Гаруфалидисом, М. Гернером, В. В. Таркаевым и Е. А. Фоминых, в работе [2].

Е. А. Фоминых была предложена идея рассмотреть *почти тетраэдральные* многообразия – многообразия, которые обладают триангуляцией из  $n$  тетраэдров, и объем которых удовлетворяет неравенству

$$(n - 1) \cdot v_3 < \text{vol}(M) < n \cdot v_3. \quad (2)$$

Неравенство (1) позволяет заключить следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть  $M$  – почти тетраэдральное многообразие. Тогда*

$$c_\Delta(M) = \left\lfloor \frac{\text{vol}(M)}{v_3} \right\rfloor.$$

## 1. Метод построения новых почти тетраэдральных многообразий

К. Адамс в работе [3] привел метод, как с помощью двух ориентируемых гиперболических многообразий конечного объема  $M_1$  и  $M_2$ , содержащих трижды проколотые сферы, получить новое гиперболическое многообразие, объем которого равен сумме объемов  $\text{vol}(M_1)$  и  $\text{vol}(M_2)$ . Опишем метод подробнее.

Обозначим через  $M_1$  и  $M_2$  ориентируемые гиперболические 3-многообразия конечного объема. Пусть  $S_1$  и  $S_2$  – трижды проколотые несжимаемые сферы, правильно вложенные в  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Обозначим через  $M'_i$  дополнение  $M_i \setminus N(S_i)$ , через  $S_i^0$  и  $S_i^1$  – две копии  $S_i$  в крае  $\partial M'_i$ . Пусть  $\lambda_0 : S_1^0 \rightarrow S_2^0$  и  $\lambda_1 : S_1^1 \rightarrow S_2^1$  – любые два гомеоморфизмы, одновременно сохраняющие или обращающие ориентацию. Будем говорить, что многообразие  $M$  является *сферической суммой*  $M_1$  и  $M_2$ , если оно получено из  $M_1$  и  $M_2$  путем склеек сфер  $S_1^0$  и  $S_2^0$  по отображению  $\lambda_0$  и сфер  $S_1^1$  и  $S_2^1$  по отображению  $\lambda_1$ .

**Теорема 2** [3, Theorem 4.5]. *Пусть  $M$  – сферическая сумма многообразий  $M_1$  и  $M_2$ . Тогда  $M$  – гиперболическое многообразие с каспами и  $\text{vol}(M) = \text{vol}(M_1) + \text{vol}(M_2)$ .*

Для получения новых почти тетраэдральных многообразий введем понятие *допустимой* триангуляции. Будем называть идеальную триангуляцию трехмерного многообразия *допустимой*, если она содержит две грани, объединение которых есть трижды проколотая сфера. Эту сферу будем также называть *допустимой*. Будем говорить, что многообразие  $M$  является *допустимой сферической суммой* многообразий  $M_1$  и  $M_2$ , если оно получено следующим образом: разрежем  $M_1$  и  $M_2$  по допустимым сферам, а затем склеим их между собой по аффинным отображениям, одновременно сохраняющим или обращающим ориентацию. Основным результатом является следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $M_1$  – тетраэдральное многообразие,  $M_2$  – почти тетраэдральное многообразие,  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  – их допустимые минимальные триангуляции соответственно. Если многообразие  $M$  является допустимой сферической суммой многообразий  $M_1$  и  $M_2$ , то:

1.  $M$  – почти тетраэдральное многообразие;
2.  $c_\Delta(M) = c_\Delta(M_1) + c_\Delta(M_2)$ .

## 2. Бесконечные серии почти тетраэдральных многообразий

Алгоритм получения бесконечных серий почти тетраэдральных многообразий следующий:

1. Зафиксируем почти тетраэдральное многообразие  $N$  с допустимой минимальной триангуляцией и бесконечную серию тетраэдральных многообразий  $M_k$  с допустимыми минимальными триангуляциями.
2. Возьмем допустимую сферическую сумму многообразий  $N$  и  $M_k$ . Результат суммы – почти тетраэдральное многообразие  $N_k$ .

Поэтому для получения бесконечных серий почти тетраэдральных многообразий остается описать как получать бесконечные серии тетраэдральных многообразий с допустимой минимальной триангуляцией. Для этого было доказано следующее предложение:

**Предложение 1.** Предположим, что минимальная триангуляция тетраэдрального многообразия  $M$  содержит неразбивающую допустимую сферу. Тогда для любого натурального  $k$  существует  $k$ -листное накрытие многообразия  $M$ , обладающее минимальной триангуляцией с допустимой неразбивающей сферой.

### 2.1. Семейства зацеплений

Пусть  $L$  – гиперболическое зацепление, имеющее диаграмму, как на рис. 1 слева.

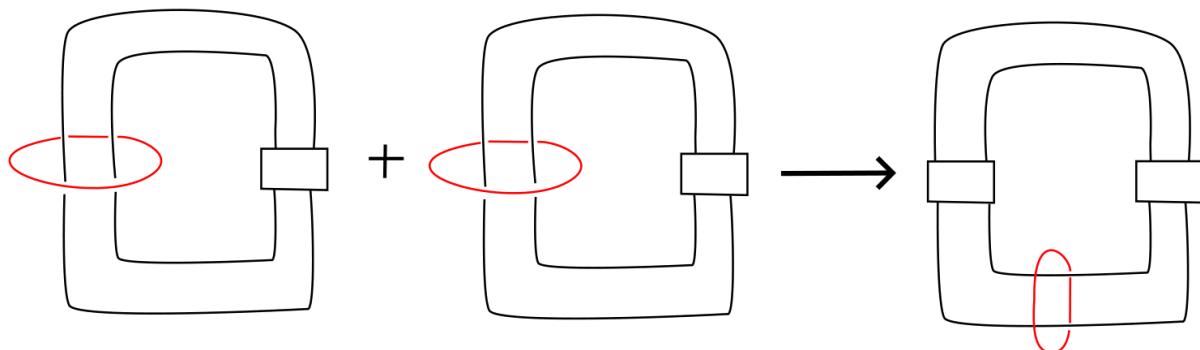


Рис. 1. Сферическая сумма дополнений зацеплений

Тогда в многообразии  $M = S^3 \setminus L$  трижды проколотую сферу можно увидеть явно. А именно, диск, натянутый на красную тривиальную компоненту, дважды протыкается оставшимися компонентами, то есть является трижды проколотой сферой.

Если имеются два гиперболических зацепления  $L_1$  и  $L_2$ , которые имеют диаграммы, как на рис. 1 слева, то сферическая сумма многообразий  $S^3 \setminus L_1$  и  $S^3 \setminus L_2$  является дополнением зацепления  $L$ , изображенного на рисунке справа.

Отметим, что существуют тетраэдральные дополнения зацеплений, например,  $L8a20$ , и почти тетраэдральные дополнения зацеплений, например,  $L10n84$ , которые имеют диаграмму как на рис. 1, а также обладают допустимой минимальной триангуляцией. Поэтому, если окажется, что дважды проколотый диск изотопен допустимой сфере в минимальной триангуляции, то удастся получить бесконечную серию дополнений зацеплений известной сложности.

Рассмотрим допустимую трижды проколотую сферу  $S$  в минимальной триангуляции многообразия  $S^3 \setminus L8a20$ . Про сферу  $S$  известно, что два ее прокола лежат на одном каспе, а третий прокол – на другом каспе. Обозначим компоненты зацепления  $L8a20$  через  $K_1, K_2, K_3$  и ориентируем их так, что коэффициенты зацеплений равны  $lk(K_2, K_3) = 0$ ,  $lk(K_1, K_2) = lk(K_1, K_3) = 2$ . Так как в зацеплении  $L8a20$  компоненты  $K_2$  и  $K_3$  симметричны, то можно считать, что один из проколов сферы  $S$  лежит на компоненте  $K_2$ .

**Предложение 2.** *Допустимая трижды проколотая сфера  $S$  в минимальной триангуляции многообразия  $S^3 \setminus L8a20$  изотопна диску, натянутому на компоненту  $K_2$ , дважды протыкаемому компонентой  $K_1$ .*

Рассмотрим допустимую трижды проколотую сферу  $S$  в минимальной триангуляции многообразия  $S^3 \setminus L8a20$ . Про сферу  $S$  известно, что два ее прокола лежат на одном каспе, а третий прокол на другом каспе. Обозначим компоненты зацепления  $L10n84$  через  $K_1, K_2, K_3$  и ориентируем их так, что коэффициенты зацеплений равны  $lk(K_1, K_3) = 0$ ,  $lk(K_1, K_2) = 2$ ,  $lk(K_2, K_3) = 3$ .

**Предложение 3.** *Допустимая трижды проколотая сфера  $S$  в минимальной триангуляции многообразия  $S^3 \setminus L10n84$  изотопна диску, натянутому на компоненту  $K_1$  и дважды протыкаемому компонентой  $K_2$ .*

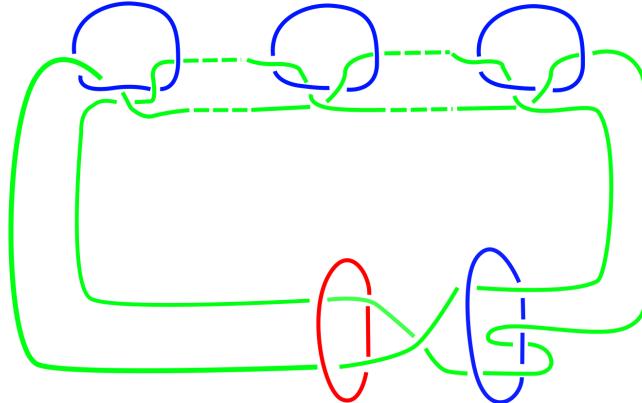


Рис. 2. Зацепление  $L_k$

**Следствие 1.** *Обозначим через  $M_k$  дополнительное пространство зацепления  $L_k$ , изображенного на рис. 2. Тогда  $c_\Delta(M_k) = 10k + 8$ .*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Thurston W. P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds: With a Preface by Steven P. Kerckhoff*. American Mathematical Society. 2022.
2. Fominykh E., Garoufalidis S., Goerner M., Tarkaev V., Vesnin A. *A Census of Tetrahedral Hyperbolic Manifolds*. Experimental Mathematics. 2016. Т. 25. № 4. С. 466–481.
3. Adams C. C. *Thrice-Punctured Spheres in Hyperbolic 3-Manifolds*. Transactions of the American Mathematical Society. 1985. Т. 287. № 2. С. 645–656.

# ИНТЕГРИРУЕМАЯ БИЛЛИАРДНАЯ СИСТЕМА В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ, РАЗДЕЛЕННЫХ СОФОКУСНЫМИ КВАДРИКАМИ

*M. A. Никулин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

<sup>2</sup>*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*

Теория интегрируемых бильярдов развивается в двух в каком-то смысле встречных направлениях:

- (1) доказательство гипотезы Биркгофа;
- (2) поиск интегрируемых модификаций эллиптического бильярда.

В решении задачи (1), начиная с работы С. В. Болотина [1], за последние годы был достигнут значительный прогресс — упомянем здесь работы Миронова, Бялого и Драговича [2, 3].

В направлении задачи (2) заметный прогресс связан с группой исследователей, возглавляемых А. Т. Фоменко (В. В. Ведюшкина (Фокичева) [4, 5], В. А. Кибкало). Объем полученных результатов здесь настолько значителен, что коротко изложить их не представляется возможным. Мы рекомендуем обратиться к обзору А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной [6]. Хорошо известно, что бильярд в эллипсе в присутствии постоянного магнитного поля, перпендикулярного плоскости стола, не интегрируем (физическая точка зрения отражена в большом количестве статей, в частности, см. Берри и Робник [7, 8]). Математически строгие утверждения, в том числе для бильярдных столов на поверхностях постоянной кривизны, содержатся в работах [9–11]. Однако бильярд в магнитном поле в круге интегрируем и демонстрирует интересное поведение с точки зрения инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем.

В направлении (2) отметим интересную систему, введенную Драговичем и Раднович в [12] (так называемая «бильярдная игра»), а также недавнюю работу [13]. Кроме того, имеется цикл работ про интегрируемые бильярды с потенциалом, см., например, [14, 15], инициированный работой В. В. Козлова [16].

Недавно авторами был обнаружен новый класс интегрируемых систем, связанный с бильярдами в областях, ограниченных софокусными квадриками. Опишем простейшие случаи систем из этого класса. Пусть задана область  $\Omega$ , ограниченная эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a > b > 0$ . Дуга софокусной квадрики разделяет  $\Omega$  на области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Припишем каждой области  $\Omega_i$  коэффициент  $n_i$ ,  $i = 1, 2$ , имеющий смысл показателя преломления. Рассмотрим движение материальной точки в области  $\Omega$ . Будем считать, что на внешней границе области  $\Omega$  движение подчиняется закону «угол падения равен углу отражения», а на общей границе областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  выполняется модифицированный закон преломления, который опишем ниже в общем виде.

Пусть две области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  граничат по кривой  $C$ . Показатели преломления для этих областей равны  $n_i$  и  $n_j$  соответственно. Будем считать, что движение материальной точки при достижении кривой  $C$  подчиняется следующим правилам (далее будем ссылаться на них как на модифицированный закон преломления (\*)).

1. Выполнено соотношение  $n_i \cos \theta_i = n_j \cos \theta_j$ , где  $\theta_i, \theta_j \in [0, \pi/2]$  – углы, которые образуют отрезки траектории в соответствующих областях с нормалью к кривой  $C$ , если  $\theta_i$  и  $\theta_j$  корректно определены.
2. Если  $n_i > n_j$  и материальная точка, двигаясь в области  $\Omega_i$ , достигает кривой  $C$ , причем в точке пересечения траектории с кривой  $C$  выполнено неравенство  $\cos \theta_i > n_j/n_i$ , то происходит полное внутреннее отражение траектории в область  $\Omega_i$  по закону «угол падения равен углу отражения» (в этом случае угол  $\theta_j$  не определен, поскольку  $(n_i/n_j) \cos \theta_i > 1$ ).
3. В предыдущих двух пунктах два соседних отрезка траектории с общей точкой на кривой  $C$  лежат по разные стороны от нормали к кривой  $C$  в этой точке.
4. Если  $n_i > n_j$  и материальная точка, двигаясь в области  $\Omega_j$ , достигает кривой  $C$ , причем  $\theta_j = 0$ , тогда  $\cos \theta_i = n_j/n_i$  и материальная точка продолжает движение в области  $\Omega_i$  вдоль любого из двух возможных направлений, образующих угол  $\theta_i$  с нормалью к кривой  $C$ .
5. Аналогично при  $n_i < n_j$ .

Для удобства будем считать, что при преломлении модуль вектора скорости не меняется.

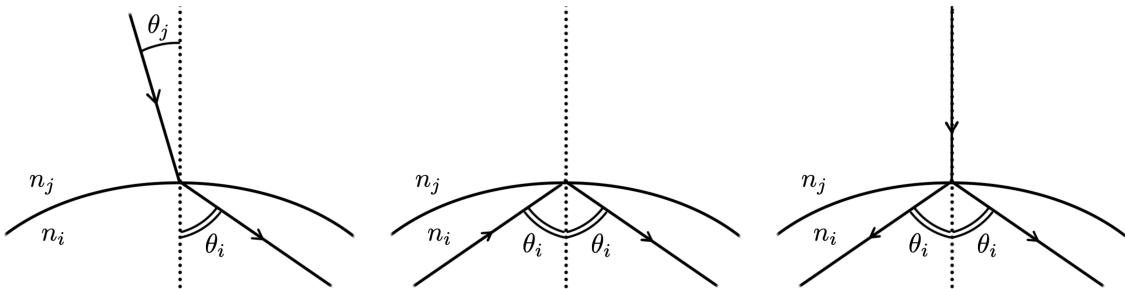


Рис. 1. Иллюстрации к пунктам 1, 2 и 4

Вернемся к рассматриваемой системе в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Покажем, что подчиняющаяся закону преломления (\*) система будет интегрируемой и предъявим дополнительный интеграл  $\Xi$ . В некоторых случаях значения этого дополнительного интеграла  $\Xi$  принадлежат не прямой, а окружности. Дополнительно будут описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности уровня интеграла  $\Xi$  для случая двух областей, разделенных софокусным эллипсом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин С. В. *Интегрируемые билльярды Биркгофа*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1990. № 2. С. 33–36.
2. Bialy M., Mironov A. E. *The Birkhoff–Poritsky conjecture for centrally-symmetric billiard tables*. Annals of Mathematics. 2022. Т. 196. № 1. С. 389–413.
3. Dragovic V., Mironov A. E. *On Differential Equations of Integrable Billiard Tables*. Acta Mathematica Sinica. 2024. Т. 40. № 1. С. 417–424.
4. Фокичева В. В. *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*. Матем. сб. 2015. Т. 206. № 10. С. 127–176.

5. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В. *Бильярды и интегрируемые системы*. Успехи математических наук. 2023. Т. 78. № 5(473). С. 93–176.
6. Fomenko A. T., Vedyushkina V. V. *Billiards and integrable systems*. Russian Mathematical Surveys. 2023. Т. 78. № 5 (473). С. 93–176.
7. Robnik M., Berry M. *Classical billiards in magnetic fields*. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1985. Т. 18. № 9. С. 1361.
8. Robnik M., Berry M. *Statistics of energy levels without time-reversal symmetry: Aharonov–Bohm chaotic billiards*. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1986. Т. 19. № 5. С. 649.
9. Bialy M., Mironov A. E. *Polynomial non-integrability of magnetic billiards on the sphere and the hyperbolic plane*. Russian Mathematical Surveys. 2019. Т. 74. № 2. С. 187.
10. Bialy M., Mironov A. E. *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2016. Т. 49. № 45. С. 18.
11. Bialy M., Mironov A. E., Shalom L. *Magnetic billiards: non-integrability for strong magnetic field; Gutkin type examples*. Journal of Geometry and Physics. 2020. Т. 154. С. 103716.
12. Dragović V., Gasiorek S., Radnović M. *Billiard Ordered Games and Books*. Regul. Chaotic Dyn. 2022. Т. 27. № 2. С. 132–150.
13. Bialy M., Mironov A. E., Tabachnikov S. *Wire billiards, the first steps*. Advances in Mathematics. 2020. Т. 368. С. 107154.
14. Dragović V. *Integrable perturbations of Birkhoff billiards within ellipse, English translation (AMS)*. J. Appl. Math. Mech. 1998. Т. 62. № 1. С. 159–162.
15. Dragović V. *The Appell hypergeometric functions and separable mechanical systems*. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Т. 35. № 9. С. 2213–2222.
16. Kozlov V. V. *Some integrable extensions of Jacobi's Problem of geodesics on an ellipsoid*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Т. 59. № 1. С. 1–7.

# СЛОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*C. E. Пустовойтов*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Математическим биллиардом называется динамическая гамильтоновская система, описывающая движение материальной точки внутри ограниченной замкнутой области при условии абсолютно упругого отражения от границы. Началом теории биллиардов принято считать работы Дж. Биркгофа, изучившего динамику классического эллиптического биллиарда и доказавшего его интегрируемость. Также Биркгоф выдвинул гипотезу, согласно которой плоский биллиард, ограниченный гладким выпуклым контуром, является интегрируемым лишь в случае эллипса. В своей классической формулировке гипотеза остается недоказанной, однако в ее направлении были достигнуты значительные результаты. Также интересны аналоги этой гипотезы для неклассических систем. Так, рассмотрим плоские биллиарды, помещенные в постоянное магнитное поле индукции  $\beta$ , ортогональное к плоскости биллиардного стола. Магнитное поле действует на биллиардный шар единичного заряда, отклоняя его траекторию по окружности Лармора. Эта система гамильтонова на своем фазовом пространстве со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

В [1] А. Е. Миронов и М. Бялый доказали следующую теорему, отвечающую на вопрос интегрируемости такого биллиарда (иными словами, был доказан магнитный аналог гипотезы Биркгофа).

**Теорема 1** [1]. *Пусть магнитный биллиард задан в выпуклой области  $\mathcal{B}$ , ограниченной кусочно-гладкой кривой, и магнитное поле имеет индукцию  $\beta$ . Если граница  $\partial\mathcal{B}$  не есть окружность, магнитный биллиард не является алгебраически интегрируемым для любых значений индукции  $\beta$ , кроме, быть может, конечного числа таких значений.*

В связи с этим рассмотрим интегрируемые магнитные биллиарды, ограниченные окружностью или парой концентрических окружностей (будем называть их круговым и кольцевым биллиардом). Такие биллиарды являются интегрируемыми, причем дополнительный первый интеграл имеет следующий вид:

$$F = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + k(xy - y\dot{x}).$$

Оказывается, функции  $H$  и  $F$  имеют явный геометрический смысл. А именно, биллиардные траектории состоят из дуг окружностей Лармора равных радиусов  $\sqrt{H}$ , центры которых равноудалены от центра биллиарда на расстояние  $\sqrt{F}$ . Такое геометрическое описание траекторий позволяет определить области на биллиардном столе, в которых биллиардный шар может находиться при фиксированных значениях первых интегралов. Эти области называются *областями возможного движения* и являются проекциями соответствующих слоев слоения Лиувилля, на которые разбито фазовое пространство биллиарда совместными поверхностями уровней функций  $H$  и  $F$ . Результатом анализа областей возможного движения является описание слоения, выполненное в терминах инвариантов Фоменко–Цишанга.

**Теорема 2.** Для кругового магнитного биллиарда изоэнергетическое многообразие  $Q^3 = \{H = \text{const}\}$  гомеоморфно трехмерной сфере  $S^3$  при любом значении интеграла  $H$ . Соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид  $A - A$  с метками  $r = 0$  и  $\varepsilon = 1$ . Для кольцевого магнитного биллиарда изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  гомеоморфно произведению  $S^1 \times S^2$  при любом значении интеграла  $H$ . Инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид  $A - A$  с метками  $r = \infty$  и  $\varepsilon = 1$ .

Список полученных систем и их слоений Лиувилля достаточно скучен. Тем не менее его можно расширить, используя конструкцию топологических биллиардов, предложенную В. В. Ведюшкиной [2]. А именно, склеим несколько круговых и кольцевых биллиардных областей по их общим граничным окружностям в двумерное ориентируемое многообразие (возможно, с краем). Определим динамику на полученном “столе” таким образом, что, отражаясь от границы склейки, биллиардный шар переходит с одной области на другую. Возможны четыре случая: конфигурационное пространство топологического биллиарда гомеоморфно диску (билиард  $bD$ ), замкнутому цилиндру ( $bC$ ), сфере ( $bS$ ) или тору ( $bT$ ). Конструкция топологического биллиарда сохраняет дополнительный первый интеграл, т. е. система является интегрируемой.

Для таких систем был разработан алгоритмический подход, который позволяет строить инвариант Фоменко–Цишанга, исходя из формы топологического биллиарда. Результатом построенного алгоритма служит частичное описание грубой молекулы.

**Теорема 3.** Алгоритмически построенная грубая молекула топологического магнитного биллиарда удовлетворяет следующим свойствам.

- Вершинам молекулы соответствуют 3-атомы  $A$ , 3-атомы серии  $B_\tau$  (или атомы с плюсами и минусами в терминологии работы Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемкова [3]), а также 3-атомы из серии  $C_\tau$  в случае биллиарда  $bT$ , где  $\tau$  есть последовательность положительных целых чисел.
- Билиард  $bT$  может допускать лишь два 3-атома серии  $C_\tau$ , лежащих на соседних уровнях дополнительного интеграла  $F$ . Причем эти 3-атомы единственны на своих уровнях.
- Граф грубой молекулы биллиардов  $bC$ ,  $bD$  и  $bS$  является деревом. Граф биллиарда  $bT$  допускает кратные ребра (которые образуют единственные циклы) между 3-атомами серии  $C_\tau$ .
- При достаточно больших значениях энергии грубая молекула имеет симметричный вид  $W - W$ , где  $W$  – это корневое поддерево, причем обе симметричные части в молекуле соединены ребром (либо кратными ребрами), инцидентным обоим корням. В такой молекуле 3-атомы имеют вид  $A$ ,  $B_n$  и  $C_n$ .

Теперь вычислим числовые метки, которые вместе с построенной грубой молекулой определяют инвариант Фоменко–Цишанга. Как оказалось, они зависят только от топологического типа биллиарда. Разобьем 3-атомы на две группы: **1)** минимальный атом  $A$ , 3-атом  $B_k$ , перестраивающий (склеивающий)  $k + 1$  тор Лиувилля в один тор, и 3-атом  $C_k$ , перестраивающий (склеивающий)  $k$  торов Лиувилля в два тора; **2)** максимальный атом  $A$ , 3-атом  $B_k$ , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в  $k + 1$  тор, и 3-атом  $C_k$ , перестраивающий (разделяющий) два тора Лиувилля в  $k$  торов.

**Теорема 4.** Инвариант Фоменко–Цишанга топологического магнитного биллиарда имеет следующий вид:

- грубая молекула строится по алгоритму, приведенному в теореме 2в случае биллиардов  $bC$ ,  $bD$  и  $bS$ , или алгоритму, приведенному в теореме 3 в случае биллиарда  $bT$ ;
- метка  $r$  равна нулю на всех ребрах, инцидентных 3-атомам  $A$ , и бесконечности на остальных ребрах (и следовательно, существует лишь одна семья);
- метка  $\varepsilon$  равна +1 на всех ребрах, соединяющих два 3-атома из одной группы либо два 3-атома  $A$ , и -1 в остальных случаях;
- метка  $n$  единственной семьи равна нулю в случае биллиардов  $bC$  и  $bT$ , ±1 в случае биллиарда  $bD$  и ±2 в случае биллиарда  $bS$ .

Таким образом, были классифицированы топологические магнитные биллиарды с точки зрения их слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях. Кроме того, был приведен алгоритм, обратный к алгоритму построения инварианта Фоменко – Чишанга. А именно, алгоритм строит топологический магнитный биллиард по представленному инварианту, удовлетворяющему определенным свойствам. С помощью этого алгоритма было доказано, что топологическими магнитными биллиардами реализуются интегрируемые системы на поверхностях вращения в потенциальном поле, рассмотренные Е. О. Кантонистовой в [4], с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bialy M., Mironov A. E. *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*. J. Phys. A. 2016. V. 49:45. 455101. 18 p.
2. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды*. Известия РАН. 2019. Т. 83:6. С. 63–103.
3. Кудрявцева Е. А., Ошемков А. А. *Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения*. Чебышевский сб. 2020. Т. 21:2. С. 244–265.
4. Е. О. Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальному поле*, Матем. сб. 2016. Т. 207:3. С. 47–92.

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Д. В. Соловьев*

*Новосибирский государственный университет*

Исследуются натуральные механические системы

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}_{mg}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{mg}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

с гамильтонианом  $H$  в магнитном поле  $\omega$

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x^1, x^2), \quad \omega = \Omega(x^1, x^2)dx^1 \wedge dx^2,$$

допускающие рациональный по импульсам интеграл вида

$$F = \frac{a(x^1, x^2)p_1 + b(x^1, x^2)p_2 + d(x^1, x^2)}{g(x^1, x^2)p_2 + h(x^1, x^2)},$$

где магнитная скобка Пуассона имеет вид

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) + \Omega(x^1, x^2) \left( \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

Основными результатами работы являются следующие теоремы,  $(x^1, x^2) = (x, y)$ .

**Теорема 1 [1]. Функция**

$$F = \frac{p_1 + l(x, y)}{p_2 + k(x, y)}$$

является первым интегралом гамильтоновой системы (1) тогда и только тогда, когда функции  $l(x, y)$ ,  $k(x, y)$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$kl = s_3xy + s_1y + s_2x - s_0,$$

$$l^2 - k^2 = s_3(x^2 - y^2) + 2s_1x - 2s_2y + s_4,$$

где  $s_0, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$  — произвольные постоянные, а потенциал и магнитное поле имеют вид

$$V(x, y) = -\frac{1}{2} (k^2 + s_3x^2 + 2s_1x), \quad \omega = k_x dx \wedge dy.$$

**Теорема 2 [1]. Функция**

$$F = \frac{yp_1 - xp_2 + l(x, y)}{p_2 + k(x, y)}$$

является первым интегралом гамильтоновой системы (1) тогда и только тогда, когда функции  $u(x, y) = yk(x, y)$ ,  $v(x, y) = l(x, y) + xk(x, y)$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$2(u^2 - v^2) = 2s_5 - 4s_4x + x^2(-4s_2 + 4s_3 + 4s_1x + s_0x^2) + 2(2s_2 - 2s_3 - 3x(2s_1 + s_0x))y^2 + s_0y^4,$$

$$uv = y(s_4 - x(-2s_2 + 2s_3 + 3s_1x + s_0x^2) + (s_1 + s_0x)y^2),$$

где  $s_0, \dots, s_5 \in \mathbb{R}$  — произвольные постоянные, а потенциал и магнитное поле имеют вид

$$V(x, y) = -\frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{y^2} + 2s_0x^2 + 4s_1x \right), \quad \omega = \frac{u_x}{y} dx \wedge dy.$$

Первые результаты о существовании таких систем были получены в [2], наша работа дополняет и обобщает их. Отметим, что вопрос о существовании таких интегралов для натуральных систем, но уже без магнитного поля, остается открытым. В работах [1, 3, 4] было показано, что при некоторых дополнительных предположениях о виде рационального интеграла у указанной системы обязательно существует линейный интеграл. Что интересно, для геодезических потоков аналогичная задача оказалась проще (см. [5]). Известно довольно много примеров двумерных римановых метрик, обладающих рациональным интегралом, в том числе на фиксированном уровне энергии в магнитном поле (см. [6, 7]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов С. В., Соловьев Д. В. *О рациональных интегралах натуральных систем в магнитном поле* Сиб. мат. журн. 2025 (принято к печати).
2. Hietarinta J. *New integrable Hamiltonians with transcendental invariants* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. № 1057. P. 1057–1060.
3. Агапов С. В. *Рациональные интегралы натуральной механической системы на двумерном торе* Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61. № 2. С. 255–265.
4. Агапов С. В., Турсунов М. М. *О рациональных интегралах двумерных натуральных систем* Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64. № 4. С. 665–674.
5. Козлов В. В. *О рациональных интегралах геодезических потоков* Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 439–445.
6. Agapov S., Shubin V. *Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples* Journ. of Geom. and Phys. 2021. V. 170. 104389.
7. Agapov S., Potashnikov A., Shubin V. *Integrable magnetic geodesic flows on 2-surfaces* Nonlinearity. 2023. V. 36. № 4. P. 2128–2147.

# HOPF TYPE THEOREMS FOR CONVEX SURFACES

*I. M. Shirokov*

*St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute*

**Abstract.** In this paper we study variations of the Hopf theorem concerning continuous maps  $f$  of a compact Riemannian manifold  $M$  of dimension  $n$  to  $\mathbb{R}^n$ . We investigate the case when  $M$  is a closed convex  $n$ -dimensional surface and prove that the Hopf theorem (as well its quantitative generalization) is still valid but with the replacement of geodesic to quasigeodesic in the sense of Alexandrov (and Petrunin). Besides, we study a discrete version of the Hopf theorem. We say that a pair of points  $a$  and  $b$  are  $f$ -neighbors if  $f(a) = f(b)$ . We prove that if  $(P, d)$  is a triangulation of a convex polyhedron in  $\mathbb{R}^3$ , with a metric  $d$ , compatible with topology of  $P$ , and  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^2$  is a simplicial map of general position, then there exists a polygonal path in the space of  $f$ -neighbors that connects a pair of ‘antipodal’ points with a pair of identical points. Finally, we prove that the set of  $f$ -neighbors realizing a given distance  $\delta > 0$  (in a specific interval), has non-trivial first Steenrod homology with coefficients in  $\mathbb{Z}$ .

## 1. Introduction

In this paper we continue the program of generalizations of the Hopf theorem, concerning continuous maps  $f$  of a compact Riemannian manifold  $M$  of dimension  $n$  to Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  (see [1] for a description of the program):

**Theorem 1** [2]. *Let  $n$  be a positive integer, let  $M$  be a compact Riemannian manifold of dimension  $n$ , and let  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a continuous map. Then for any prescribed  $\delta > 0$ , there exists a pair  $\{x, y\} \in M \times M$  such that  $f(x) = f(y)$  and  $x$  and  $y$  are joined by a geodesic of length  $\delta$ .*

In [1] we proved that the set of pairs of points satisfying the Hopf theorem when  $\delta$  is fixed (such that there are no  $\delta$ -conjugate points) is uncountable (see [1] for an exact formulation and proof of quantitative version of the Hopf theorem). However, the topological structure of the set of such pairs was not explored and remains unclear. Understanding this structure is one of the main driving forces for the present work.

The paper is organized as follows. First, in Sections 2 and 3, we extend the Hopf theorem (and its quantitative version) to the case when  $M$  is a closed convex hypersurface (with geodesics replaced by quasigeodesics). Precise definitions of quasigeodesics are not necessary for the statements of our results and their proofs. However, definitions can be found in [3] (for two-dimensional convex surfaces) and in [4, 5] (for Alexandrov spaces with curvature  $\geq \kappa$ , and in particular, for convex hypersurfaces). See also [6] for a beautiful exposition of quasigeodesics on two-dimensional convex polyhedra.

Next, in Section 4, we study a ‘discrete’ version of the Hopf theorem concerning piece-wise linear maps of a boundary of a convex polyhedron  $P \subset \mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^2$  and prove several topological results on the structure of “solutions” of the Hopf theorem.

## 2. Generalization of the Hopf theorem for convex surfaces

**Definition 1.** By a closed convex  $n$ -dimensional surface we mean the boundary of  $n$ -dimensional convex body in the Euclidean  $(n+1)$ -space  $\mathbb{R}^{n+1}$ . We assume that such a surface is provided with induced length metric from  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Lemma 1** [7]. Let  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ , and  $\mathcal{X}_\infty$  be complete metric spaces, and  $\varepsilon_n \rightarrow 0+$  as  $n \rightarrow \infty$ . Suppose that for each  $n$  there is an  $\varepsilon_n$ -isometry  $f_n: \mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}_\infty$ . Then there exists a Gromov–Hausdorff convergence  $\mathcal{X}_n \xrightarrow{GH} \mathcal{X}_\infty$ <sup>1</sup>.

**Theorem 2** [5]. Assume  $\mathcal{X}_n \xrightarrow{GH} \mathcal{X}_\infty$  without collapse (that is  $\dim \mathcal{X}_n \geq \dim \mathcal{X}_\infty$ ). And  $\gamma_n \in \mathcal{X}_n$  is a sequence of quasigeodesics which in the  $d$ -metric (on  $\mathbf{X}$ ) converges pointwise to  $\gamma \in \mathcal{X}_\infty$ . Then  $\gamma$  is a quasigeodesic.

Now we are ready to prove the following:

**Proposition 1** [5]. Let  $M$  be a closed convex  $n$ -dimensional surface, and let  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a continuous map. Then for any prescribed  $\delta > 0$ , there exists a pair  $\{x, y\} \in M \times M$  such that  $f(x) = f(y)$  and  $x$  and  $y$  are joined by a quasigeodesic of length  $\delta$ .

*Proof.* Let  $B$  be the convex body bounded by  $M$ . Let  $\{M_n\}_{n=1}^\infty$  be a sequence of smooth closed convex  $n$ -dimensional surfaces in  $B$  such that  $M_n$  converges to  $M$  as  $n \rightarrow \infty$  in the sense of Hausdorff.

Let  $p$  be a point inside  $B$ . And let  $R_n$  be the radial projection with center at  $p$  of  $M_n$  on  $M$ . It is easy to see that each  $R_n$  is  $\varepsilon_n$ -isometry for some  $\varepsilon_n > 0$  and  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Hence the sequence  $\{M_n\}_{n=1}^\infty$  converges to  $M$  in the sense of Gromov–Hausdorff by Lemma 1.

For each  $n > 0$  define a map  $f_n = f \circ R_n: M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . By the Hopf theorem there exists a pair  $\{x_n, y_n\} \in M_n \times M_n$  such that  $f(x_n) = f(y_n)$  and  $x_n$  and  $y_n$  are joined by a geodesic of length  $\delta$  in  $M_n$ . Denote this geodesic parametrized by the arc length as  $\gamma_n$ . Passing to a subsequence in  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$  if necessary we can assume by Arzela–Ascoli theorem that  $\gamma_n$  converges to some continuous curve  $\gamma$  of length  $\delta$ . Putting the metric  $d$  from Remark 1 on the common space  $\mathbf{X} = M \sqcup M_1 \sqcup M_2 \sqcup \dots$ , it follows that  $\gamma_n$  converges pointwise to  $\gamma$  as  $n \rightarrow \infty$  in the metric  $d$ . Hence by Petrunin theorem  $\gamma$  is quasigeodesic. This completes the proof.

### 3. Quantitative version of the Hopf theorem for convex surfaces

**Definition 2.** Let  $n$  be a positive integer, and let  $\delta$  be a positive real number. Let  $M$  be a closed convex  $n$ -dimensional surface, and let  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a continuous map. We denote by  $\mathcal{F}(\delta)$  the subset of  $M \times M$  such that  $\{a, b\} \in \mathcal{F}(\delta)$  if and only if  $f(a) = f(b)$  and the points  $a$  and  $b$  are joined by a quasigeodesic of length  $\delta$ .

We call points  $a, b \in M$   $\delta$ -conjugate if they are joined by an infinite number of quasigeodesics of length  $\delta$ . We denote the set of such points by  $\mathcal{C}(\delta)$ .

**Theorem 3.** Let  $n$  be a positive integer such that  $n > 1$ , and let  $\delta$  be a positive real number. Let  $M$  be a closed convex  $n$ -dimensional surface, and let  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a continuous map. If  $\mathcal{C}(\delta)$  is empty, then  $\mathcal{F}(\delta)$  is uncountable.

*Proof.* The proof is presented in [8].

There is an interesting future direction of generalization of Hopf's original argument to the case of  $n$ -dimensional Alexandrov spaces  $M$  of curvature  $\geq \kappa$  without boundary. Is it possible to construct a continuous map, an analogue of exponential map, from an  $n$ -dimensional open ball to the Alexandrov space, such that the center of a ball is mapped to  $p \in M$  and radial curves are mapped to quasigeodesics, starting from  $p$  (different radial curves could be mapped to the same quasigeodesics)?

### 4. Discrete version of the Hopf theorem

Let  $P$  be a triangulation<sup>2</sup> of the boundary of a convex polyhedron in  $\mathbb{R}^3$ . And let  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^2$

<sup>1</sup>For definitions see [8].

<sup>2</sup>Recall that triangulation of topological space is simplicial complex homeomorphic to it. We take as a homeomorphism the identity map.

be a continuous map which is affine on each triangle of  $P^3$ . Next, we assume that  $f$  is a map of general position<sup>4</sup>. We recall that two points  $a$  and  $b$  of  $P$  are called  $f$ -neighbors if  $f(a) = f(b)$ <sup>5</sup>. If  $d$  is a metric on  $P$ , we say that  $f$ -neighbors  $a$  and  $b$  realize distance  $\delta \geq 0$  if  $d(a, b) = \delta$ . For  $\delta > 0$  we define  $\mathfrak{D}(\delta)$  to be the set of  $f$ -neighbors realizing distance  $\delta > 0$ .

First we define the ‘induced by  $f$ ’ triangulation of  $P$  by the following algorithm.

**Algorithm 1** ‘Induced by  $f$ ’ triangulation of  $P$ .

1. Denote by  $T$  the triangulation of  $f(P)$ , which is constructed by the following three steps.
  - (1) Define *vertex set* of  $T$  as intersection points of images of distinct edges of  $P$ .
  - (2) Define *constraints*  $C$  as the set of line segments which arise from subdivision (induced by vertex set of  $T$ ) of image of each edge of  $P$ .
  - (3) Create constrained Delaunay triangulation  $CD$  of  $f(P)$  with constraints  $C$ . Triangulation  $T$  of  $f(P)$  is defined as the family of those simplices of  $CD$  that belong to  $f(P)$ .
2. Construct ‘induced by  $f$ ’ triangulation of  $P$  as the family of triangles (and their edges and vertices), which arise by the following two steps:
  - (1) Choose triangle  $t$  of  $T$ .
  - (2) Take the closure of preimage of relative interior of  $t$ .

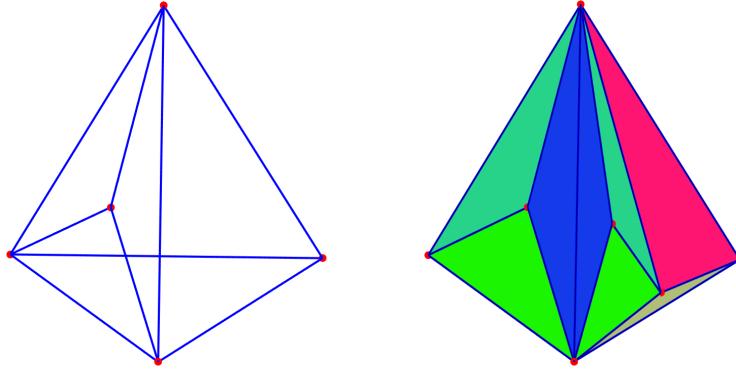


Fig. 1. Initial and ‘induced by  $f$ ’ triangulations of  $P$ . Triangles, whose images coincide, are colored identically.

We denote the ‘induced by  $f$ ’ triangulation of  $P$  as  $T_f P$ . An example of such triangulation is shown in Fig. 1. To state our main result of this section we need several auxiliary definitions, constructions and results.

For a given map  $f$  we introduce the notion of a *complex of  $f$ -neighbors*.

**Definition 3** (Complex of  $f$ -neighbors).

For any two distinct triangles  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  of  $T_f P$ , whose images coincide, we define two triangles of corresponding  $f$ -neighbors in  $P \times P \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , which we denote by  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  and  $[\mathcal{B}, \mathcal{A}]$  (we will denote corresponding edges in the same way). We construct complex of  $f$ -neighbors  $\mathfrak{F}_f$  as

<sup>3</sup> $f$  can be given at vertices of  $P$  and extended to  $P$  by affine extension.

<sup>4</sup>No three vertex images lie on the same line.

<sup>5</sup>For convenience, we do not require that  $a$  and  $b$  are distinct.

a family of such triangles, their edges and vertices. Notice that  $\mathfrak{F}_f$  coincides with the closure (in  $P \times P$ ) of the set of  $f$ -neighbors realizing non-zero distances.

**Lemma 2.** *Let  $P$  be a triangulation of the boundary of a convex polyhedron in Euclidean space  $\mathbb{R}^3$ . And let  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a continuous map which is affine on each triangle of  $P$  and of general position. Then the associated complex of  $f$ -neighbors  $\mathfrak{F}_f$  is a simplicial complex and any edge of  $\mathfrak{F}_f$  belongs to exactly two triangles of  $\mathfrak{F}_f$ <sup>6</sup>.*

*Proof.* The detailed proof is presented in [8].

**Lemma 3.** *Let  $n$  be a positive integer. Let  $M$  be a closed manifold of dimension  $n$  with non-trivial  $\mathbb{Z}_2$  action. And let  $\mathbb{S}^n$  be a Euclidean unit  $n$ -sphere in the Euclidean  $(n+1)$ -space  $\mathbb{R}^{n+1}$  with standard antipodal  $\mathbb{Z}_2$  action. Let  $f: M \rightarrow \mathbb{S}^n$  be a continuous map of an odd degree. Then  $f$  is  $\mathbb{Z}_2$ -equivariant at least at one point of  $M$ .*

*Proof.* Suppose to the contrary that  $f$  is not  $\mathbb{Z}_2$ -equivariant at any point of  $M$ . Then we can homotope  $f$  to  $f'$  moving points  $f(x)$  and  $f(\mathbb{Z}_2(x))$  to the midpoint of the shortest arc connecting them for each  $x \in M$ . By simplicial approximation theorem it follows that there exists a sufficiently small triangulation  $T(M)$  of  $M$  such that  $f'$  is homotopic to a continuous map  $f''$ , which agrees with  $f'$  at vertices of  $T(M)$  and affinely extended to each simplex of  $T(M)$ . By a further subdivision of  $T(M)$  we can assume that the set of vertices of  $T(M)$  is  $\mathbb{Z}_2$  invariant. The map  $f''$  has an even degree by construction. This is a contradiction.

**Definition 4** (Antipodal points for closed convex surface).

Let  $B$  be an  $(n+1)$ -dimensional convex body in  $\mathbb{R}^{n+1}$  and  $P$  be its boundary. And let  $p$  be a point in  $\text{Int } B$ <sup>7</sup>. There is natural  $\mathbb{Z}_2$  action on  $P$  associated with the point  $p$ : if  $l$  is a line through  $p$ , then its intersection points with  $P$  are reversed by the action. Let  $d$  be a metric on  $P$ . We set

$$\mathcal{D}(P, d) = \sup_{p \in \text{Int } B} \inf_{x \in P} d(x, \mathbb{Z}_2(x)).$$

The point  $p$ , for which supremum above is achieved, we call the center of  $P$ . Points  $a$  and  $b$  are called *antipodal* if  $a = \mathbb{Z}_2(b)$ . By Borsuk–Ulam theorem for any continuous map  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$  there are always exist antipodal points  $a$  and  $b$  such that  $f(a) = f(b)$  and  $d(a, b) \geq \mathcal{D}(P, d)$ .

**Theorem 4** (Discrete Hopf). *Let  $(P, d)$  be a triangulation of the boundary of a convex polyhedron in Euclidean space  $\mathbb{R}^3$ , with metric  $d$ , compatible with topology of  $P$ . And let  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a continuous map which is affine on each triangle of  $P$  and of general position. Then there exists a polygonal path of  $f$ -neighbors in  $\mathfrak{F}_f$  that connects a pair of antipodal points with a pair of identical points.*

*Proof.* For a proof see [8].

*Remark* [“Starship Enterprise”]. Observe that a component  $\mathcal{L}$  could be topologically non-trivial. It is an interesting exercise to see that in the case of a map  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  shown schematically on Fig. 2,  $\mathfrak{L}_f$  is connected and homeomorphic to a torus (hence the same is true for  $\mathcal{L}$ ). It’s easy to generalize this example so that  $\mathcal{L}$  can have any non-negative genus.

To explore the structure of the set  $\mathfrak{D}(\delta)$  of  $f$ -neighbors realizing distance  $\delta > 0$  we need the following auxiliary statement, which is apparently well known in the literature, but we couldn’t find the exact formulation.

**Lemma 4.** *Let  $n$  be a positive integer. And let  $M$  be a connected closed orientable  $n$ -dimensional manifold. And let  $K$  be a compact subspace of  $M$  such that  $M \setminus K$  is disconnected. Then  $(n-1)$ -dimensional Steenrod homology  $H_{n-1}(K; \mathbb{Z})$  are not trivial.*

<sup>6</sup>The MATLAB implementation of construction of  $T_f P$  and  $\mathfrak{F}_f$  is available upon request.

<sup>7</sup>We denote by  $\text{Int } X$  the interior of a topological space  $X$ .

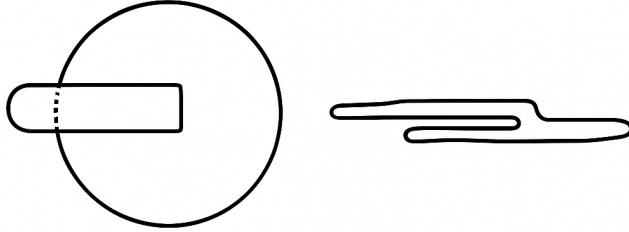


Fig. 2. Schematic picture of a map  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Top view on the left, front view on the right (before projection on a plane)

*Proof.* For a proof see [8].

**Proposition 2.** *Under assumptions of Theorem 4, the set  $\mathfrak{D}(\delta)$  of  $f$ -neighbors realizing a given distance  $\delta \in (0, \mathcal{D}(P, d))$ , has non-trivial first Steenrod homology with coefficients in  $\mathbb{Z}$ .*

*Proof.* The distance function  $d$  naturally lifts from complex of  $f$ -neighbors  $\mathfrak{F}_f$  to the continuous function  $\tilde{d}$  on  $\mathcal{L}_f$  (see the proof of the Theorem 4 for notation). By Theorem 4, there exists a component  $\mathcal{L}$  of  $\mathcal{L}_f$  such that  $\tilde{d}(\mathcal{L}) = [0, \mathcal{D}(P, d)]$ . Since the projection  $i: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{F}_f$  is a homeomorphism except possibly the vertices, where  $\tilde{d} = 0$ , the set  $C_\delta = \{x \in \mathcal{L} \mid \tilde{d}(x) = \delta\}$  is homeomorphic to  $\mathfrak{D}(\delta)$ . Applying Lemma 3 to  $(\mathcal{L}, C_\delta)$  completes the proof.

*I am grateful to Oleg R. Musin for pointing out the research direction of generalization of the Hopf theorem to the case of convex surfaces, interesting discussions and inspiration. This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-15-2025-344 dated 29.04.2025.*

## REFERENCE

1. Malytin A. V., Shirokov I. M. *Hopf-type theorems for  $f$ -neighbors*. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2022. V. 20. No 1. P. 165–182.
2. Hopf H. *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*. Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 129–139.
3. Aleksandrov A. D. *Intrinsic geometry of convex surfaces*. 1948 (in Russian).
4. Petrunin A. *Semicconcave Functions in Alexandrov's Geometry*. Surveys in Differential Geometry XI. 2013.
5. Petrunin A. *Quasigeodesics in multidimensional Alexandrov spaces*. Diploma. S. Peterburg State University. 1991.
6. Demaine E. D., Hesterberg A. C., Ku J. S. *Finding Closed Quasigeodesics on Convex Polyhedra*. 36th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2020). 2020.
7. Kapovitch V., Petrunin A., Lebedeva N. *A journey into Alexandrov geometry: curvature bounded below*.
8. Shirokov I. M. *Hopf-type theorems for convex surfaces*. ArXiv preprint. 2025. arXiv:2504.14567.
9. Massey W. S. *Homology and cohomology theory: an approach based on Alexander-Spanier cochains*. New York : M. Dekker, 1978.
10. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. *A course in metric geometry*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. Providence. RI. 2001. V. 33.
11. Steenrod N. E. *Regular cycles of compact metric spaces*. Uspekhi Mat. Nauk. 1947. V. 2. Iss. 2. P. 56–78.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ МЕТРИКИ КЕРРА

*И. А. Бизяев*

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет,  
Ижевск

В координатах Бойера–Линдквиста  $\mathbf{x} = (t, r, \theta, \varphi)$  интервал для метрики Керра  $g_{ij}$  имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j = -\frac{\rho^2 \Delta(r)}{A} dt^2 + \frac{A}{\rho^2} \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta(r)} + d\theta^2 \right), \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta(r) = r^2 - 2r + a^2, \\ A &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta(r) \sin^2 \theta, \quad \omega = \frac{2ra}{A}. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения движения для геодезических можно представить в следующей гамильтоновой форме:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \quad (2)$$

где  $\mathbf{p} = (p_t, p_r, p_\theta, p_\varphi)$  — момент импульса вдоль траектории, а  $g^{ij}$  — матрица, обратная к метрике, определяемой соотношением (1). Траектории лучей света лежат на нулевом уровне гамильтониана  $H = 0$  этой системы и после разделения переменных сводятся к анализу следующих квадратур:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= \frac{E^2}{\rho^4} R(r), \quad \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = \frac{E^2}{\rho^4} \Theta(\theta), \\ R(r) &= (r^2 + a^2 - a\lambda)^2 - [\eta + (\lambda - a)^2] \Delta(r), \quad \Theta(\theta) = \eta + \cos^2 \theta \left( a^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\eta$  и  $\lambda$  — значения первых интегралов.

Анализ этих квадратур выполнил Дж. Бардин [1]. Он проанализировал, как вращение черной дыры влияет на форму ее тени на ярко светящемся фоне, который расположен далеко от горизонта событий. Интересным результатом было то, что эта тень оказалась не симметричной относительно оси вращения черной дыры и, как отмечено в работе [2], напоминает форму буквы D.

В данной работе построена бифуркационная диаграмма и выполнена классификация типов траекторий лучей света в зависимости от значений первых интегралов (см. рис. 1).

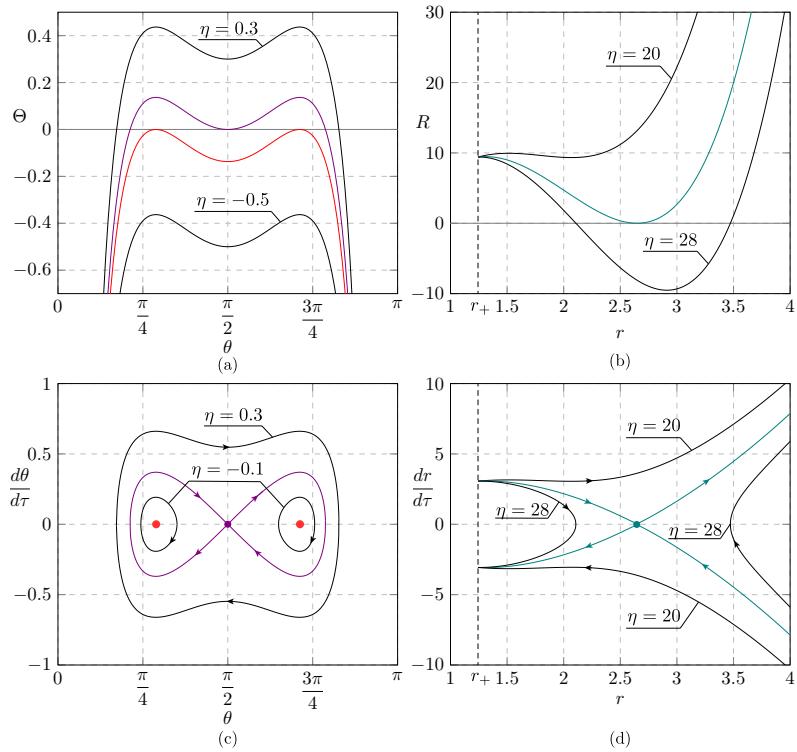


Рис. 1. В зависимости от  $\eta$  для фиксированных  $\lambda = -0.6$  и  $a = 0.97$  (а) – функция  $\Theta(\theta)$ , (б) – функция  $R(r)$ , а также (в), (г) – фазовые портреты

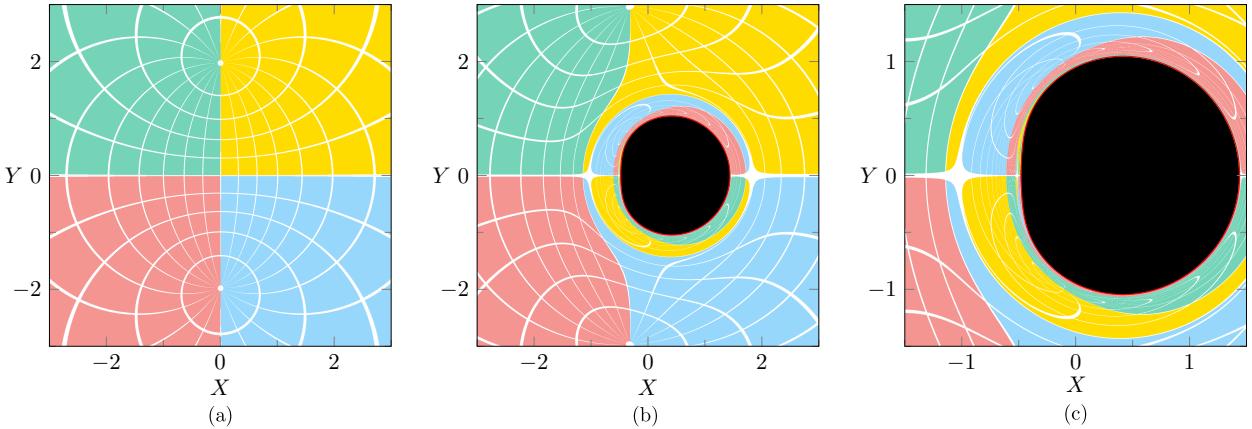


Рис. 2. (а) Рисунок небесной сферы на плоскости  $\mathcal{P}$  в плоском пространстве; (б) – изображение на плоскости  $\mathcal{P}$  в окрестности черной дыры после обратной трассировки лучей света и (в) – увеличенный фрагмент. Наблюдатель находится в экваториальной плоскости  $\theta_0 = \pi/2$  с  $r_0 = 5$  и угловой скоростью  $\Omega = 0$ . Небесная сфера – на расстоянии  $r = 1000$

Получены соотношения, описывающие границу тени черной дыры для стационарного наблюдателя, который вращается с произвольной угловой скоростью вокруг оси вращения черной дыры. Кроме того, построена обратная трассировка лучей света и показано, как изменяется изображение для наблюдателя при приближении к горизонту событий (рис. 2).

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № FEWS-2024-0007).*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Bardeen J. M. *Timelike and null geodesics in the Kerr metric*. Black Holes, B. DeWitt, C. DeWitt (Eds.). New York: Gordon and Breach, 1973. P. 215–240.
2. James O., Tunzelmann E., Franklin P., Thorne K. S. *Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie Interstellar*. Classical and Quantum Gravity. 2015. V. 32. № 6. P. 065001.

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

*A. M. Волков*

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург*

Рассматривается задача Коши для нелокального уравнения неразрывности

$$\partial_t m_t + \nabla \cdot (f(x, m_t) m_t) = 0, \quad m_0 = m_*,$$

где  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  — пространство вероятностных мер, а  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Это уравнение описывает систему бесконечного числа однотипных частиц, подчиняющихся уравнению

$$\dot{x} = f(x, m_t).$$

Решением нелокального уравнения неразрывности является мерозначная функция  $t \mapsto m_t$ , т. е. функция, ставящая каждому моменту времени  $t$  в соответствие вероятностную меру  $m_t$  над  $\mathbb{R}^d$ . Таким образом, в данном случае фазовым пространством является пространство вероятностных мер, наделенное метрикой Канторовича. В силу того, что данное пространство является польским, в нем можно естественным образом ввести понятия положения равновесия уравнения неразрывности и его устойчивости.

Ранее в статье [1] исследовались достаточные условия устойчивости положения равновесия. Основной целью настоящей работы является анализ достаточных условий неустойчивости.

Важной особенностью рассматриваемой задачи является нелинейность фазового пространства. Она не позволяет напрямую перенести понятия дифференцируемости и требует введения понятий, которые его обобщают. Большинство известных обобщений являются слишком строгими: типичный представитель функции Ляпунова — квадрат расстояния до положения равновесия — является недифференцируемым. Для преодоления данной проблемы, были использованы методы негладкого анализа. В частности, нами было введено понятие барицентрического субдифференциала.

**Определение.** Пусть  $q = p' = p/(p - 1)$ , а функционал  $\phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывен сверху. Тогда барицентрическим субдифференциалом  $\partial_b^- \phi(m)$  функции  $\phi$  в точке  $m$  будем называть множество всех таких функций  $\gamma \in L_q(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^{d*})$ , что для любой функции  $b \in L_p(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^d)$  и любого  $\tau > 0$  выполняется следующее соотношение:

$$\phi((\text{Id} + \tau b)\#m) - \phi(m) \geq \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x) \cdot \tau b(x) \, m \, dx + o(\tau).$$

Полученный результат обобщает известную для конечномерных систем теорему Четаева о неустойчивости на случай пространства вероятностных мер и нелокального уравнения неразрывности.

**Теорема.** Пусть мера  $\hat{m} \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$  — положение равновесия нелокального уравнения неразрывности, функция  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$  липшицева по совокупности аргументов, а также существует локально липшицевая функция  $\phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\phi$  субдифференцируема в шаре  $B_R(\hat{m})$  для некоторого  $R > 0$ ;
- 2) для любого  $R > 0$  существует такая точка  $\mu \in B_R(\hat{m})$ , что  $\phi(\mu) > 0$ ;
- 3) для любого  $\alpha > 0$  найдется такое  $\beta > 0$ , что для всех  $\mu$  из множества Лебега

$$\sup_{\gamma \in \partial_b^- \phi(\mu)} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x) \cdot f(x, \mu) \mu dx \geq \beta.$$

Тогда положение равновесия  $\hat{m}$  неустойчиво.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1549).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух Ю. В., Волков А. М. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия нелокального уравнения неразрывности. Матем. сб. 2025. Т. 216. № 2. С. 3–31.

## К ВОПРОСУ О СОЕДИНИМОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ЛОМАНЫМИ НА ГРУППАХ КАРНО

*A. B. Грешнов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>2</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

Пусть  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_r\}$  — гладкие векторные поля, определенные на некоторой области  $U \subset \mathbb{R}^N$ . Положим

$$a_J X = \sum_{j=1}^r a_j X_j, \quad a_J = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r, \quad a_i = \text{const.}$$

Обозначим через  $\exp(a_J X)(u)$ ,  $u \in U$ , точку интегральной линии  $\exp(sa_J X)(u)$ ,  $s \geq 0$ , векторного поля  $a_J X$ , соответствующую значению  $s = 1$ ; для простоты полагаем, что выражение  $\exp(a_J X)(u)$  корректно определено для каждого вектора  $a_J$ . По индукции определим  $k$ -ломаную  $L_k(x_0, x_k)$ , индуцированную набором  $\mathcal{X}$ , состоящую из  $k$  сегментов  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , (имеющую  $k$  звеньев) и  $k+1$  вершин в точках  $x_0, \dots, x_k$  с началом в точке  $x_0$  и концом в точке  $x_k$ :

$$L_k(x_0, x_k) = \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad I_i = \bigcup_{s \in [0, 1]} \exp(sa_{J_i} X)(x_{i-1}), \quad \exp(a_{J_i} X)(x_{i-1}) = x_i, \quad |a_{J_i}| \neq 0; \quad (1)$$

при этом полагаем, что никакие два «следующие друг за другом» вектора  $a_{J_i}$  и  $a_{J_{i+1}}$  не коллинеарны. Если в (1) отказаться от условия  $|a_{J_i}| \neq 0$ , то получим определение ломаной, имеющей не более  $k+1$  вершин и  $k$  звеньев,  $k = 0, 1, \dots$

Если в (1) рассматривать в качестве  $a_{J_i}$  векторы только с одной ненулевой компонентой, то такие  $k$ -ломаные будем называть *базисными* и обозначать их  $L_k^{\mathcal{X}}(u, v)$ .

Рассмотрим связное гладкое многообразие  $\mathcal{M}$ ,  $\dim \mathcal{M} = N$ , и  $C^\infty$  — гладкие векторные поля  $\mathcal{X}_{\mathcal{M}} = \{X_1, \dots, X_m\}$ ,  $m < N$ , удовлетворяющие условию Хермандера на  $\mathcal{M}$  (субриманово многообразие [1–3]). Векторные поля  $X_1, \dots, X_m$  и под расслоение  $H_{\mathcal{M}} \subset T\mathcal{M}$ , натянутое на  $X_1, \dots, X_m$ , называются *горизонтальными*, набор векторных полей  $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$  — *пороождающим*. Абсолютно непрерывная кривая  $\gamma = \gamma(s) : [0, s_0] \rightarrow \mathcal{M}$  называется *горизонтальной*, если  $\dot{\gamma}(s) \in H_{\mathcal{M}}(\gamma(s))$  почти всюду. Хорошо известна следующая

**Теорема 1** (Рашевского–Чоу [1, 2]). *Любые две точки  $u, v \in \mathcal{M}$  могут быть соединены некоторой горизонтальной кривой  $\gamma \subset \mathcal{M}$ , состоящей из конечного числа отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей, принадлежащих порождающему набору  $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$ .*

Отметим следующий, более точный по сравнению с теоремой 1, результат.

**Теорема 2** [2]. *Любые две точки  $u, v \in \mathcal{M}$  могут быть соединены горизонтальной кривой в  $\mathcal{M}$ , состоящей не более чем из  $2N$  отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей, принадлежащих порождающему набору  $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$ .*

Хорошо известными частными случаями субримановых многообразий являются группы Карно [4, 5], в частности, группы Гейзенберга и Энгеля [1–6]. В работе [6] была доказана следующая

**Теорема 3.** Рассмотрим каноническую группу Энгеля  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ . Для любых двух точек  $u, v \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  найдется горизонтальная ломаная  $L_k(u, v)$ , индуцированная порождающим набором  $\mathcal{E} = \{X, Y\}$ ,  $k \leq 4 = \dim \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ , где  $X, Y$  — базисные горизонтальные левоинвариантные векторные поля алгебры Ли группы  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ .

Канонической группой Энгеля  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  называется аффинно-векторное пространство  $\mathbb{R}^4$  с системой координат  $(x, y, t, z)$  и групповой операцией  $\cdot : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , определяемой правилом

$$\begin{aligned} w \cdot w' &= P_w(x', y', t', z') = (x, y, t, z) \cdot (x', y', t', z') = \\ &= \left( x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), z + z' + \frac{\beta}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta}{12}(x - x')(xy' - x'y) \right) = \\ &= (f_1, f_2, f_3, f_4), \quad \alpha, \beta > 0. \end{aligned}$$

Нейтральный элемент группы  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  совпадает с началом координат  $O = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ ; для любого элемента  $w = (x, y, t, z)$  обратный к нему элемент имеет вид

$$w^{-1} = (-x, -y, -t, -z).$$

Значение базисных левоинвариантных векторных полей  $X, Y, T, Z$  (базис Якоби [4]) в каждой точке  $w = (x, y, t, z)$  определяется как

$$(X, Y, T, Z)(w) = \frac{\partial P_w(x', y', t', z')}{\partial (x', y', t', z')} \Big|_{(x', y', t', z')=(0, 0, 0, 0)};$$

их координатная запись имеет вид

$$X = \left( 1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta}{2}x - \frac{\alpha\beta}{12}xy \right), \quad Y = \left( 0, 1, \frac{\alpha}{2}x, \frac{\alpha\beta}{12}x^2 \right), \quad T = \left( 0, 0, 1, \frac{\beta}{2}x \right), \quad Z = (0, 0, 0, 1).$$

Нетрудно проверить, что векторные поля  $X, Y, T, Z$  удовлетворяют следующей «таблице коммутаторов»:

$$\begin{cases} [X, Y] = \alpha T, \\ [X, T] = \beta Z, \end{cases}$$

все остальные возможные коммутаторы  $X, Y, T, Z$  равны  $\vec{0}$ . Левоинвариантные векторные поля  $X, Y$  — горизонтальные, набор векторных полей  $\mathcal{E} = \{X, Y\}$  — порождающий.

Из фактов общей теории следует, что для любой точки  $M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  выполняется

$$\exp(x'X + y'Y + t'T + z'Z) \circ \exp(xX + yY + tT + zZ)(M) = \exp(f_1X + f_2Y + f_3T + f_4Z)(M),$$

в частности,

$$\begin{aligned} \exp(x'X + y'Y + t'T + z'Z) \circ \exp(xX + yY + tT + zZ)(O) &= \\ &= (x, y, t, z) \cdot (x', y', t', z') = (f_1, f_2, f_3, f_4). \end{aligned}$$

Группа Энгеля является «простейшим примером» групп Карно ступени выше чем 2. Тем не менее ее изучение существенно осложнено тем, что с геометрической точки зрения интегральные линии горизонтальных векторных полей уже не «прямые линии» (как в случае 2-ступенчатых групп Карно, к которым относятся группы Гейзенберга), и аналитически (применяя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа) имеем дело с изучением специальных

полиномов третьей степени от многих переменных. Так как  $\text{top dim } \mathbb{E}_{\alpha,\beta} = 4$ , то результат теоремы 3 можно рассматривать как «наилучшую версию» теоремы Рашевского—Чоу для группы Энгеля с точки зрения количества звеньев горизонтальных ломаных (см. теорему 2). Но здесь необходимо отметить следующее обстоятельство: определяя как выше горизонтальные ломаные  $L_k(u, v)$ , мы рассматриваем в качестве направлений их звеньев всевозможные линейные комбинации векторных полей  $X, Y$ , тогда как по теоремам 1, 2 направления звеньев горизонтальных ломаных определяются исключительно полями  $X, Y$  (базисные горизонтальные ломаные). То есть в теореме 3 «расширили класс» допустимых горизонтальных (базисных) ломаных, за счет чего был получен точный результат.

Решаем задачу о нахождении минимального числа  $N_{\mathcal{E}}$  такого, что для любых двух точек  $u, v \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  найдется горизонтальная базисная ломаная  $L_k^{\mathcal{E}}(u, v)$ , где  $k \leq N_{\mathcal{E}}$ . Учитывая «левоинвариантность» структуры алгебры Ли, такая задача эквивалентна нахождению минимального числа  $N_{\mathcal{E}}$  такого, что для любой точки  $u \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  найдется горизонтальная базисная ломаная  $L_k^{\mathcal{E}}(O, u)$ ,  $k \leq N_{\mathcal{E}}$ , где  $O$  — нейтральный элемент группы  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ . Исходя из результатов работы [6], невозможно соединить все точки  $M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  базисными горизонтальными  $k$ -ломаными, где  $k \leq 3$ .

Нами доказана следующая

**Теорема 4.** *Почти все точки  $M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$  могут быть соединены с нейтральным элементом  $O$  группы Энгеля некоторой базисной горизонтальной ломаной  $L_k^{\mathcal{E}}(O, M)$ , где  $k \leq 4 = \dim \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ .*

При этом на группе Энгеля существуют такие точки, которые не могут быть соединены с ее нейтральным элементом посредством базисной горизонтальной  $k$ -ломаной, где  $k \leq 4$ .

Теорема 4 своеобразным образом дополняет результат теоремы 3.

Используя теорему 4, доказали следующую теорему.

**Теорема 5.** *Для любой точки  $M = (x'_0, y'_0, t'_0, z'_0)$  найдется ломаная  $L_k^{\mathcal{E}}(O, M)$ ,  $k \leq 6$ .*

Отметим, что в работе [7] для 2-ступенчатых групп Карно  $\mathbb{D}_n$  с горизонтальным распределением коранга 1 было доказано, что любые две точки  $u, v \in \mathbb{D}_n$  могут быть соединены базисной горизонтальной  $k$ -ломаной  $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u, v)$ , где  $k \leq \dim \mathbb{D}_n + 2$ , а для почти все точек  $v \in \mathbb{D}_n$  существует базисная горизонтальная  $k$ -ломаная  $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(O, v)$ , где  $k \leq \dim \mathbb{D}_n + 1$ ; здесь  $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}$  — набор базисных левоинвариантных горизонтальных векторных полей алгебры Ли группы  $\mathbb{D}_n$ .

Дополнительную информацию, связанную с рассматриваемой в работе проблемой, читатель может найти в работах [8–10].

*Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, Соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gromov M. *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*. Prog. Math. 1996. V. 144. P. 79–323.
2. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*. Cambridge University Press. 2020. 763 p.
3. Vodopyanov S. K., *Geometry of Carnot-Carathéodory spaces and differentiability of mappings*. Contemporary Mathematics. 2007. V. 424. P. 247–301.

4. Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian*. Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 2007.
5. Pansu P. *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*. Ann. Math. 1989. V. 119. P. 1–60.
6. Greshnov A. *Optimal horizontal joinability on the Engel group*. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche. Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni. 2021. V. 32. P. 535–547.
7. Грешнов А. В., Жуков Р. И. *Оптимальные оценки количества звеньев базисных горизонтальных ломаных для 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1*. Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. С. 243–254.
8. Грешнов А. В., Жуков Р. И. *Горизонтальная соединимость на канонической 3-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коранга 2*. Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 4. С. 736–746.
9. Грешнов А. В., Жуков Р. И. *Горизонтальная соединимость на 5-мерной 2-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коразмерности 2*. Алгебра и логика. 2023. Т. 62. № 2. С. 205–218.
10. Грешнов А. В. *Метод Аграчева–Барилари–Боскайна и оценки числа звеньев горизонтальных ломаных, соединяющих точки в канонической группе Карно  $G_{3,3}$* . Оптимальное управление и динамические системы: сб. статей к 95-летию академика Р. В. Гамкрелидзе. М.: МИАН, 2023. Т. 321. С. 108–117.

# АСИМПТОТИКА РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛЯХ НА БАЗЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*С. А. Кащенко, М. Ю. Смирнов, А. О. Толбей*

*Региональный научно-образовательный математический центр «Центр интегрируемых систем» при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова*

## 1. Введение

Исследуется асимптотика релаксационного периодического решения обобщенного логистического уравнения с запаздыванием

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \lambda \left[ 1 - \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)N(t+s) \right] N. \quad (1)$$

Это уравнение является весьма важным для приложений. Оно описывает, в частности, динамику изменения численности биологических популяций с учетом возрастной структуры и характера (сезонного или непрерывного) размножения. Положительные параметры  $\lambda h_1, h_2$  ( $h_2 > h_1$ ) и монотонная функция  $r(s)$  (с ограниченным изменением на  $[-h_2, -h_1]$ ) имеют четкий биологический смысл. Будем интересоваться вопросом о существовании медленно осциллирующего положительного периодического решения и его свойствами при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Исследуем вопрос о существовании, устойчивости и асимптотике периодического решения уравнения (1) при условии, когда параметр  $\lambda$  является достаточно большим:  $\lambda \gg 1$ . Будет показано, что при этом условии уравнение (1) имеет устойчивое периодическое решение релаксационного характера, и будет найдено его асимптотическое разложение. Отметим, что в техническом плане наибольшие сложности представляет исследование свойств устойчивости. В этой связи обратим внимание на то, что количество различных неустойчивых периодических решений (1) неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$  [1, 2].

Уравнение (1) при  $\lambda \gg 1$  является сингулярно возмущенным. Для исследования его решений в [1, 2] был разработан специальный метод большого параметра. Суть его заключается в следующем. В фазовом пространстве  $C_{[-h, 0]}$  (здесь и далее  $h = h_2$ ) специальным образом (используя, в том числе, и соображения биологического характера) фиксируется множество  $S = S(\lambda)$ . Далее изучается асимптотика всех решений  $N(t, \varphi)$  с начальными функциями  $\varphi(s) \in S$ . Устанавливается, что через некоторый промежуток времени  $t = t_\varphi(\lambda)$  решение  $N(t, \varphi)$  снова попадает в  $S$ . Тем самым определяется оператор последования  $\Pi$ :  $\Pi(\varphi(S)) = N(S + t_\varphi(\lambda), \varphi)$  ( $S \in [-h, 0]$ ). Центральным его свойством является выполнение включения  $\Pi S \subset S$ . Отсюда и из общих утверждений (см., например, [3]) приходим к выводу, что оператор  $\Pi$  в  $S$  имеет неподвижную точку  $\varphi_0(S)$ , которой отвечает периодическое решение  $N_0(t, \lambda) = N(t, \varphi_0)$ . Указанная схема была успешно применена для исследования сложных релаксационных колебаний во многих прикладных задачах.

Далее изучаются модели, которые совсем немного — на малую величину  $\varepsilon$  — отличаются от модели (1). Биологический смысл параметра  $\varepsilon$  состоит в предположении, что в рассматриваемый однородный ареал происходит миграция с малой постоянной скоростью.

## 2. Учет малой миграции в логистическом уравнении с запаздыванием

Уравнение

$$\dot{N} = \lambda N [1 - N(t-1)] \quad (2)$$

при достаточно больших значениях малтузианского коэффициента  $\lambda$  имеет устойчивое, медленно осциллирующее периодическое (с периодом  $T(\lambda)$ ) решение  $N_0(t)$ , которое совершает ровно один всплеск на некотором отрезке длины периода и для него выполнены асимптотические при  $\lambda \rightarrow \infty$  равенства:

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \exp [\lambda(1 + o(1))]; \\ \max_t N_0(t) &= \exp [\lambda(1 + o(1))]; \quad \min_t N_0(t) = \exp [-\exp [\lambda(1 + o(1))]]. \end{aligned} \quad (3)$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим вопрос о поведении решений логистического уравнения с запаздыванием и с малой миграцией

$$\dot{N} = \lambda N [1 - N(t-1)] + \varepsilon \quad (4)$$

при достаточно больших значениях  $\lambda$ . Основной вывод состоит в том, что уравнение (4) (при  $\lambda \geq \lambda_0$ ) имеет устойчивое, медленно осциллирующее  $T_\varepsilon(\lambda)$  — периодическое решение  $N_\varepsilon(t)$  с одним всплеском на периоде, причем

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\lambda) &= 2 + o(1); \\ \max_t N_\varepsilon(t) &= \exp [\lambda(1 + o(1))]; \quad \min_t N_\varepsilon(t) = \exp [-\lambda(1 + o(1))]. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\varepsilon > 0$  существенно уменьшился период колебаний и увеличился минимум численности, что позволяет сделать вывод о стабилизации решений.

Приведем асимптотические формулы для  $N_\varepsilon(t)$ . Здесь и ниже  $\delta > 0$  будем обозначать произвольную, достаточно малую, но не зависящую от  $\lambda$ , постоянную. При  $t \in [1, 0 - \delta]$  имеем  $N_\varepsilon(t) = \exp(\lambda t(1 + o(1)))$ , а при  $t \in [1 + \delta, 2]$  —  $N_\varepsilon(t) = \varepsilon \lambda^{-1} \exp[-\lambda(t - 1 + o(1))]$ . Формулы для малых промежутков  $[1 - \delta, 1 + \delta]$  и  $[2, T_\varepsilon(\lambda)]$  из-за громоздкости приводить не будем. Примерный вид периодического решения  $N_\varepsilon(t)$  приведен на рис. 1.

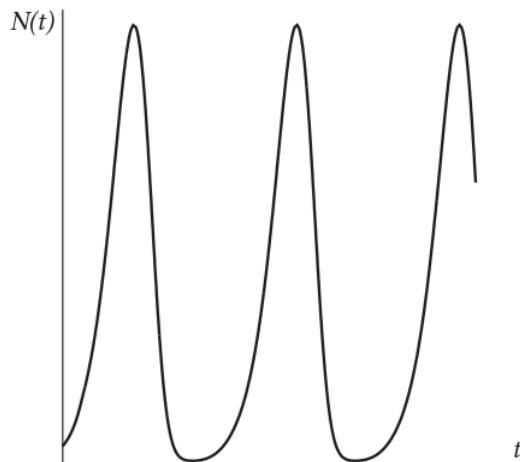


Рис. 1. Примерный вид периодического решения  $N_\varepsilon(t)$

### 3. Быстрые осцилляции в уравнении с малой миграцией

Как уже отмечалось, уравнение (2) имеет быстро осциллирующие периодические решения [1, 2], которые неустойчивы и количество которых неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Периоды этих решений меньше 1, а порядок (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) наибольшего и наименьшего значений тот же, что и у  $N_0(t)$ . Главной их отличительной особенностью является то, что на промежутке длины периода они имеют один всплеск, причем длительность его имеет порядок  $\exp[-\lambda(1+o(1))]$ , т. е. она чрезвычайно мала. Для уравнения (4) ситуация принципиально иная. Сначала опишем режимы с одним всплеском на промежутке запаздывания  $[-1, 0]$ . Для этого фиксируем произвольно два таких числа  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , что  $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 0$  и через  $S(\xi)$  ( $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ) обозначим множество таких непрерывных на  $[-1, 0]$  функций  $\varphi(s)$ , которые удовлетворяют следующим свойствам:

- 1)  $\varphi(s) > 0$ ;  $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = \varphi(0) = 1$ ;  $\varphi(s) < 1$  при  $s \in [-1, \xi_1) \cup (\xi_2, 0]$  и  $\varphi(s) > 1$  при  $s \in (\xi_1, \xi_2)$ ;
- 2)  $\varphi(s) \geq \frac{1}{2} \exp \lambda(s - \xi_1)$  при  $s \in [\xi_1, \xi_2 - \delta]$ ;
- 3)  $\int_{-1}^{\xi_1} \varphi(s) ds + \int_{\xi_2}^0 \varphi(s) ds \leq \lambda^{-1/2}$ .

Обозначим  $N(t, \varphi)$  решение (4) с начальным условием  $\varphi(s) \in S(\xi)$ . Изучим асимптотику этой функции при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Пусть сначала  $t \in [0, 1 + \xi_1]$ . Тогда  $N(t, \varphi) = \exp \lambda t [1 + o(1)]$ . Обозначим  $t_1(\varphi), t_2(\varphi), \dots$  — последовательные положительные нули функции  $N(t, \varphi) - 1$ . Рассмотрим затем  $N(t, \varphi)$  при  $t \in [1 + \xi_1, 1 + \xi_2]$ . В результате приходим к выводу, что  $t_1(\varphi) = 1 + \xi_1 + o(1)$  и  $N(t, \varphi) = o(1)$  при  $t \in [1 + \xi_1 + \delta, 1 + \xi_2]$ . На следующем шаге получаем, что  $t_2(\varphi) = 1 + \xi_2 + o(1)$ . Введем в рассмотрение оператор  $\Pi$ , который ставит функции  $\varphi(s) \in S(\xi)$  в соответствие с функцией  $N(s + t_2(\varphi), \varphi) : \Pi(\varphi(s)) = N(s + t_2(\varphi), \varphi)$ ,  $s \in [-1, 0]$ . Из асимптотических формул для  $N(t, \varphi)$  вытекает, что  $N(s + t_2(\varphi), \varphi) \in S(\xi)$ , где  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  и  $\bar{\xi}_1 = -1 - \xi_2 + o(1)$ ,  $\bar{\xi}_2 = \xi_1 - \xi_2 + o(1)$ .

Таким образом, поведение  $N(t, \varphi)$  определяется в основном динамикой изменения параметров  $\xi_{1,n}$  и  $\xi_{2,n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а динамика последних в главном описывается отображением  $\xi_{1,n+1} = -1 - \xi_{2,n}$ ;  $\xi_{2,n+1} = \xi_{1,n} - \xi_{2,n}$ . Для  $z_n = -1 - \xi_{1,n}$  приходим к уравнению

$$z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = 1. \quad (5)$$

Отсюда

$$z_n = (1 + \xi_{1,n}) = -\xi_{2,n-1} = 1/3 + \alpha \exp[2\pi i n/3] + \bar{\alpha} \exp[-2\pi i n/3],$$

а произвольная комплексная  $\alpha$  определяется начальными данными. Таким образом, уравнение (4) имеет семейство быстро осциллирующих решений, динамика которых описывается отображением (5). Можно утверждать, что такая структура решений (с начальными условиями из  $S(\xi)$ ) сохраняется в течение асимптотически большого — порядка  $\lambda$  — отрезка времени. Вывод о том, что и при  $t \rightarrow \infty$  структура таких решений не изменится, сделать нельзя: в силу «негрубости» отображения (5) «малые» добавки с течением времени могут накапливаться.

Рассмотренная здесь ситуация обобщается на решения, число всплесков которых на отрезке запаздывания  $[-1, 0]$  равно  $m$ , где  $m$  — произвольна. Аргумент  $\xi$  в выражении  $S(\xi)$

состоит теперь из  $2m$  компонент  $\xi_1, \dots, \xi_{2m}$ . По аналогии с (5) для описания динамики изменения величин  $\xi_{jn}$  приходим к отображению  $z_{n+2m} + z_{n+2m-1} + \dots + z_n = 1$ , а значит,

$$z_n = (2m+1)^{-1} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \exp \frac{2\pi i n}{2j+1} + \bar{\alpha}_j \exp \frac{-2\pi i n}{2j+1}.$$

Сформулированные результаты о динамике простейших экосистем с малой миграцией существенно отличаются от тех, в которых миграция не учитывалась. Тем самым даже малая миграция в определенных ситуациях может приводить к принципиальным изменениям динамики установившихся режимов. В этом плане наблюдается интересная аналогия с задачей о структуре решений в моделях популяций с малой диффузией. Интересны результаты об эффективном управлении периодом релаксационных колебаний с помощью малых периодических воздействий.

*Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1636).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кащенко С. А. *Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием*. М.: КРАСАНД, 2020. 576 с.
2. Kashchenko S. A. *Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation*. Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. № 7. P. 470–494.
3. Эдвардс Р. Э. *Функциональный анализ : Теория и приложения*. Пер. с англ. Г. Х. Бермана, И. Б. Раскиной, под ред. В. Я. Лина. М. : Мир, 1969. 1071 с.

# ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА

*B. A. Павленко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа

<sup>2</sup>Уфимский университет науки и технологий

Помимо шести классических ОДУ Пенлеве в настоящий момент многие исследователи интересуются и другими нелинейными дифференциальными уравнениями более высокого порядка, которые также интегрируются ИДМ. На сегодня известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{q_j}, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

с гамильтонианами  $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ , каждое из которых есть условие совместности трех линейных систем дифференциальных уравнений вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \quad (2)$$

$$V'_\eta = A V, \quad (3)$$

где квадратные матрицы  $L_{s_k}$  и  $A$  (матрица  $A$  одна и та же для обеих гамильтоновых систем (1)) одинаковой размерности рациональны по переменной  $\eta$ . Соответствующие решения дифференциальных уравнений, являющиеся условием совместности таких пар, называются изомонодромными. К их числу относятся решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Х. Кимуры ([1]). Позднее Х. Кавамуко (см. [2]) дополнил этот список.

Известно, что для всех представителей иерархии Кимуры справедливы две эквивалентные формы: форма совместных пар гамильтоновых систем (1), определяемых квадратичными по импульсам  $p_1, p_2$  и рациональными по координатам  $q_1, q_2$  различными парами гамильтонианов  $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ , а также форма совместных пар гамильтоновых систем (1), определяемых квадратичными по импульсам  $p_1, p_2$  и полиномиальными по координатам  $q_1, q_2$  различными парами гамильтонианов  $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ . Для почти всех из этих гамильтоновых систем с двумя степенями свободы уже построены  $2 \times 2$  матричные совместные решения пар аналогов уравнений Шрёдингера

$$\varepsilon \Psi_{s_k} = H_{s_k} \left( s_1, s_2, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}, x, y \right) \Psi, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

с  $\varepsilon = 1$ , соответствующие парам гамильтонианов  $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ ,  $k = 1, 2$ , этих изомонодромных систем. (При этом их построение осуществляется совершенно явно в терминах решений соответствующих изомонодромных систем.) Для эволюционных уравнений (4), определяемых низшими представителями  $H^{9/2}$  и  $H^5$  вырождений системы Гарнье, это сделано в статье Б. И. Сулейманова [3]. Для самой системы Гарнье — первого представителя  $H^{1+1+1+1+1}$  данной иерархии соответствующие решения представлены в работе Б. И. Сулейманова и Д. П. Новикова [4]. Для вырождений  $H^{2+1+1+1}$  и  $H^{4+1}$  подобного рода решения выписаны в работах автора совместно с Б. И. Сулеймановым, [5, 6] соответственно). Для еще одного вырождения, а именно, для  $H^{3+2}$  автор представил соответствующие решения эволюционных уравнений в [7].

В настоящей работе будут сконструированы  $2 \times 2$  матричные решения аналогов временных уравнений Шрёдингера с  $\varepsilon = 1$ , которые соответствуют гамильтоновой системе  $H^{2+2+1}$ . Эти решения будут представлены в двух формах: в рациональной и в полиномиальной. Другими словами, построим решения уравнений вида

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_j} = H_{\tau_j}^{3+1+1} \left( \tau_1, \tau_2, x, y, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi, \quad j = 1, 2, \quad \varepsilon = 1. \quad (5)$$

В (5) дифференциальные операторы  $H_{\tau_j}^{3+1+1}(\tau_1, \tau_2, x, y, -\varepsilon \partial/\partial x, -\varepsilon \partial/\partial y)$  соответствуют гамильтонианам с рациональными координатами. Затем мы предъявим решения уравнений вида

$$\varepsilon \Psi_{s_k} = H_{s_k}^{3+1+1} \left( s_1, s_2, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial r}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho}, r, \rho \right) \Phi, \quad k = 1, 2, \quad \varepsilon = 1, \quad (6)$$

где дифференциальные операторы  $H_{s_k}^{3+1+1}(s_1, s_2, -\varepsilon \partial/\partial r, -\varepsilon \partial/\partial \rho, r, \rho)$  соответствуют гамильтонианам с полиномиальными координатами. Соответствующие решения (5), (6) явным образом будут выражены через совместные решения матричных линейных пар ИДМ (2), (3) из статьи [8], условием совместности которых являются гамильтоновы дифференциальные уравнения (1), соответствующие гамильтонианам системы  $H^{3+1+1}$ .

Следует отметить, что гамильтонова система  $H^{3+1+1}$  из иерархии Кимуры является последним (единственным) представителем, для которой соответствующие уравнения Шрёдингера еще не построены.

Система  $H^{3+1+1}$  в статье [1] выписана в двух формах: в одной из них соответствующие две совместные гамильтоновы системы ОДУ по координатам рациональны, а во другой форме – полиномиальны.

В случае рациональной зависимости от координат система  $H^{3+1+1}$  имеет вид

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial T_j} = \frac{\partial H_j}{\partial \mu_k}, \quad \frac{\partial \mu_k}{\partial T_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial \lambda_k}, \quad j, k = 1, 2, \quad (7)$$

где гамильтониан  $H_1(T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$  задается формулой

$$\begin{aligned} T_1^3 H_1 = & \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_2 - 1)P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 - \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)^2(\lambda_1 - 1)P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2 - \\ & - \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_2 - 1)P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\kappa_0}{\lambda_1} - \frac{\gamma T_1^2}{(\lambda_1 - 1)^3} + \frac{\gamma T_2}{(\lambda_1 - 1)^2} + \frac{\kappa_1 - 2}{\lambda_1 - 1} + \frac{P'(\lambda_1)}{P(\lambda_1)} \right) \mu_1 + \\ & + \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)^2(\lambda_1 - 1)P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\kappa_0}{\lambda_2} - \frac{\gamma T_1^2}{(\lambda_2 - 1)^3} + \frac{\gamma T_2}{(\lambda_2 - 1)^2} + \frac{\kappa_1 - 2}{\lambda_2 - 1} + \frac{P'(\lambda_2)}{P(\lambda_2)} \right) \mu_2 + \\ & + \frac{\kappa(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(P(\lambda_1) - P(\lambda_2))}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned}$$

где  $P(\lambda)$  в статье [1] выписана с опечаткой.

В самой статье

$$P(\lambda) = \left( T_1^2 - T_1 + \sum_{k=1,2} \frac{T_1^2}{\lambda_k - 1} \right) (\lambda - 1) - T_1^2.$$

Должно быть

$$P(\lambda) = \left( T_1^2 - T_2 + \sum_{k=1,2} \frac{T_1^2}{\lambda_k - 1} \right) (\lambda - 1) - T_1^2.$$

Таким образом, первый гамильтониан запишется в виде

$$\begin{aligned}
 T_1^3 H_1 = & \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)^3(T_1^2\lambda_2 - T_2\lambda_2 + T_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 - \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)^3(T_1^2\lambda_1 - T_2\lambda_1 + T_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2^2 - \\
 & - \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)^3(T_1^2\lambda_2 - T_2\lambda_2 + T_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\kappa_0}{\lambda_1} - \frac{\gamma T_1^2}{(\lambda_1 - 1)^3} + \frac{\gamma T_2}{(\lambda_1 - 1)^2} + \frac{\kappa_1}{\lambda_1 - 1} \right) \mu_1 - \\
 & - \frac{T_2\lambda_1(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_2 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1 + \frac{T_1^2\lambda_1(\lambda_1 - 1)(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2 + 1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1 + \\
 & + \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)^3(T_1^2\lambda_1 - T_2\lambda_1 + T_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\kappa_0}{\lambda_2} - \frac{\gamma T_1^2}{(\lambda_2 - 1)^3} + \frac{\gamma T_2}{(\lambda_2 - 1)^2} + \frac{\kappa_1}{\lambda_2 - 1} \right) \mu_2 + \\
 & + \frac{T_2\lambda_2(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)^2}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2 - \frac{T_1^2\lambda_2(\lambda_2 - 1)(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1 + 1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2 + \\
 & + \kappa[T_1^2(\lambda_1\lambda_2 - 1) - T_2(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Ниже приведем соответственно второй гамильтониан

$$\begin{aligned}
 T_1^2 H_2 = & \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)^3(\lambda_2 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 - \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)^3(\lambda_1 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2^2 - \\
 & - \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)^3(\lambda_2 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\kappa_0}{\lambda_1} - \frac{\gamma T_1^2}{(\lambda_1 - 1)^3} + \frac{\gamma T_2}{(\lambda_1 - 1)^2} + \frac{\kappa_1 - 1}{\lambda_1 - 1} \right) \mu_1 + \\
 & + \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)^3(\lambda_1 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\kappa_0}{\lambda_2} - \frac{\gamma T_1^2}{(\lambda_2 - 1)^3} + \frac{\gamma T_2}{(\lambda_2 - 1)^2} + \frac{\kappa_1 - 1}{\lambda_2 - 1} \right) \mu_2 + \\
 & + \kappa(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Вторая выписанная в статье [1] форма системы  $H^{3+1+1}$

$$\frac{\partial q_k}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_k}, \quad j, k = 1, 2, \quad (10)$$

задается полиномиальными по координатам  $q_j$  гамильтонианами

$$\begin{aligned}
 H_1 = & q_1^3 p_1^2 + 2q_1^2 \left( q_2 + \frac{1}{s_2} \right) p_1 p_2 + q_1 \left( q_2^2 + \frac{q_2}{s_2} - \frac{(s_1 + 1)q_1}{2} \right) p_2^2 - \\
 & - \left( (\kappa_0 + \kappa_1 - 1)q_1^2 + \gamma \left( q_1 + \frac{q_2}{s_2} \right) \right) p_1 - \\
 & - \left( (\kappa_0 + \kappa_1 - 1)q_1 q_2 + \frac{\kappa_1 q_1}{s_2} - \gamma \left( \frac{s_1}{s_2^2} - \frac{1}{2} \right) q_2 + \frac{\gamma}{s_2} \right) p_2 + \kappa q_1, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 = & q_1^2 \left( q_2 + \frac{1}{s_2} \right) p_1^2 + 2q_1 \left( q_2^2 + \frac{q_2}{s_2} - q_1 \left( \frac{s_1}{s_2^2} + \frac{1}{2} \right) \right) p_1 p_2 + \\
 & + \left( q_2^3 + \frac{q_2^2}{s_2} + \left( \frac{s_1^2}{s_2^3} - \frac{s_2}{4} \right) q_1^2 - \left( \frac{s_1}{s_2^2} + \frac{3}{2} \right) q_1 q_2 - \frac{q_1}{s_2} \right) p_2^2 - \\
 & - \left( (\kappa_0 + \kappa_1 - 1)q_1 q_2 + \frac{\kappa_1 q_1}{s_2} - \gamma \left( \frac{s_1}{s_2^2} - \frac{1}{2} \right) q_2 + \frac{\gamma}{s_2} \right) p_1 - \\
 & - (\kappa_0 + \kappa_1 - 1)q_2^2 p_2 - \left( \kappa_0 - 1 + \kappa_1 \left( \frac{s_1}{s_2^2} + \frac{1}{2} \right) \right) q_1 p_2 + \\
 & + \gamma \left( \frac{s_1^2}{s_2^3} - \frac{s_2}{4} \right) q_2 p_2 + \frac{\kappa_1}{s_2} q_2 p_2 - \gamma \left( \frac{s_1}{s_2^2} + \frac{1}{2} \right) p_2 + \kappa q_2. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Эти две формы системы  $H^{2+2+1}$  связаны друг с другом симплектическим преобразованием

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}{T_1^2}, & q_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{T_1} - \frac{\tau_2(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}{T_1^3}, \\ s_1 &= T_2 - \frac{T_1^2}{2}, & s_2 &= T_1, \end{aligned} \quad (13)$$

выписанном в [1].

В [8] приведена еще одна гамильтонова система

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t_j} = \frac{\partial K_j}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial Q_k}, \quad j, k = 1, 2, \quad (14)$$

с полиномиальными гамильтонианами  $K_i(t_1, t_2, Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ ,

$$\begin{aligned} K_1 &= P_1 Q_1 (P_1 - Q_1 - t_1) + \theta_1^\infty P_1 + \theta^1 Q_1 + P_1 P_2 Q_2 + \\ &\quad + \frac{1}{t_1 - t_2} (P_1 (Q_1 - Q_2) - \theta^1) (P_2 (Q_2 - Q_1) - \theta^0), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= P_2 Q_2 (P_2 - Q_2 - t_2) + \theta_1^\infty P_2 + \theta^0 Q_2 + P_1 P_2 Q_1 + \\ &\quad + \frac{1}{t_2 - t_1} (P_1 (Q_1 - Q_2) - \theta^1) (P_2 (Q_2 - Q_1) - \theta^0). \end{aligned} \quad (16)$$

Как указано в [8], на решениях уравнений (14) с гамильтонианами (15), (16) совместна следующая система линейных ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \left( \frac{A_0^{(0)}}{\eta} + \frac{A_1^{(0)}}{\eta - (t_2 - t_1)} + A_\infty^{(-1)} + A_\infty^{(-2)} \eta \right) Y, \\ \frac{\partial Y}{\partial t_1} = \frac{A_1^{(0)}}{\eta - (t_2 - t_1)} Y, \\ \frac{\partial Y}{\partial t_2} = \left( -\frac{A_1^{(0)}}{\eta - (t_2 - t_1)} - A_\infty^{(-2)} \eta + B_1 \right) Y \end{cases} \quad (17)$$

с матричными коэффициентами

$$\begin{aligned} A_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} P_2 Q_2 & u(\theta^0 Q_2 - P_2 Q_2^2) \\ \frac{P_2}{u} & \theta^0 - P_2 Q_2 \end{pmatrix}, & A_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} P_1 Q_1 & u(\theta^1 Q_1 - P_1 Q_1^2) \\ \frac{P_1}{u} & \theta^1 - P_1 Q_1 \end{pmatrix}, \\ A_\infty^{(-1)} &= - \begin{pmatrix} 0 & u(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \theta_1^\infty) \\ \frac{1}{u} & t_2 \end{pmatrix}, & A_\infty^{(-2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & u(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \theta_1^\infty) \\ \frac{1}{u} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Константы удовлетворяют условию Фукса–Хукухары:

$$\theta^0 + \theta^1 + \theta_1^\infty + \theta_2^\infty = 0.$$

Легко видеть, что замена

$$Y = \exp \left( \frac{\theta^1}{2} \ln |\eta - t_2 + t_1| + \frac{\theta^0}{2} \ln |\eta| + \frac{\eta^2}{4} - \frac{t_2 \eta}{2} \right) Z$$

совместные системы ИДМ (17) переводят в эквивалентные им совместные системы

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \eta} = \left( \frac{B_0^{(0)}}{\eta} + \frac{B_1^{(0)}}{\eta - (t_2 - t_1)} + B_\infty^{(-1)} + B_\infty^{(-2)} \eta \right) Z, \\ \frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{B_1^{(0)}}{\eta - (t_2 - t_1)} Z, \\ \frac{\partial Z}{\partial t_2} = \left( -\frac{B_1^{(0)}}{\eta - (t_2 - t_1)} - B_\infty^{(-2)} \eta + B_1 \right) Z \end{cases} \quad (18)$$

с матричными коэффициентами, которые уже имеют нулевой след.

Именно эта матричная форма уравнений ИДМ для гамильтоновой системы  $H^{3+1+1}$  используется в этой статье для построения решений соответствующих эволюционных уравнений. Матрица  $M = Z^{-1}(t_1, t_2, \eta)Z(t_1, t_2, \zeta)$  размерности  $2 \times 2$ , образованная по совместному фундаментальному решению  $Z$  линейных систем (18), удовлетворяет двум следующим эволюционным уравнениям с временами  $t_1$  и  $t_2$ :

$$(t_1 - t_2)M_{t_1} = -\frac{\zeta(\zeta + t_1 - t_2)(\eta + t_1 - t_2)}{\zeta - \eta} M_{\zeta\zeta} + \frac{\eta(\zeta + t_1 - t_2)(\eta + t_1 - t_2)}{\zeta - \eta} M_{\eta\eta} + \frac{(\zeta + \eta)(\zeta + t_1 - t_2)(\eta + t_1 - t_2)}{(\zeta - \eta)^2} (M_\zeta + M_\eta) + g_1 M, \quad (19)$$

$$(t_1 - t_2)M_{t_2} = \frac{\zeta\eta(\zeta + t_1 - t_2)}{\zeta - \eta} M_{\zeta\zeta} - \frac{\zeta\eta(\eta + t_1 - t_2)}{\zeta - \eta} M_{\eta\eta} - \frac{\zeta\eta(\zeta + \eta) + (t_1 - t_2)(\zeta^2 + \eta^2)}{(\zeta - \eta)^2} (M_\zeta + M_\eta) + g_2 M. \quad (20)$$

Применяя к уравнениям (19), (20) ряд замен, получим эволюционные уравнения, которые соответствуют гамильтоновой системе  $H^{3+1+1}$  с рациональными коэффициентами.

Далее, с помощью квантового аналога преобразования (13) получим эволюционные уравнения, которые соответствуют гамильтоновой системе  $H^{3+1+1}$  с полиномиальными коэффициентами.

Таким образом, эволюционные уравнения, которые, в свою очередь, являются аналогами временных уравнений Шрёдингера, соответствующие гамильтоновой системе  $H^{3+1+1}$  и будут построены.

*Автор благодарит Б. И. Сулейманова за консультации. Работа выполнена в рамках госзадания ИМ ВЦ УФИЦ РАН (проект № FMRS-2025-0009).*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Kimura H. *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*. Annali di Matematica pura et applicata IV. 1989. V. 155. № 1. P. 25–74.
2. Kawamuko H. *On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations* WSEAS Transact. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47.
3. Сулейманов Б. И «Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы. Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. Выпуск 3. С. 52–62.
4. Новиков Д. П., Сулейманов Б. И. «Квантования» изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы. ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 39–57.
5. Павленко В. А., Сулейманов Б. И. Решения аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых изомонодромной гамильтоновой системой  $H^{2+1+1+1}$ . Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. № 4. С. 92–102.
6. Павленко В. А., Сулейманов Б. И. Решения аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых изомонодромной гамильтоновой системой  $H^{4+1}$ . Известия РАН, серия физическая. 2020. Т. 84. № 5. С. 695–698.
7. Павленко В. А. Решения аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих паре гамильтоновых систем  $H^{3+2}$ . ТМФ. 2022. Т. 212. № 3. С. 340–353.
8. Kawakami H., Nakamura A., Sakai H. *Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations*. arXiv:1209.3836. 2012.

# ДИНАМИКА МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВОЗМУЩЕНИЙ

*A. N. Рогалев*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Под динамикой множества решений понимается изменение формы и размеров множества решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений под влиянием возмущений. Как правило возможно оценивать параметры динамики, зависящие от влияния возмущающих или управляющих воздействий, включенных в постановку задачи. Например, определять включения множеств решений и их изменения. Хотя две задачи с возмущениями или управлениями довольно различны, решения задач могут иметь схожие свойства решения. Общее требование состоит в том, что для каждой из систем ОДУ, включенных в постановку задачи, необходимо вычислить оценки решения, то есть вычислить оценку множества всех решений. Невозможно исследовать только одно из множества этих решений [1]. В постановку задачи оценки множеств решений неточные данные включаются несколькими способами. В одном случае исходные данные системы ОДУ заданы неточно:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y_i(t_0) \in \left[ \underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0 \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Возможно также, что, помимо неточно заданных исходных данных, на правую часть системы влияют возмущающие воздействия  $u(t)$ , о которых известно только, что  $u(t) \in U$ :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + u(t), \quad y_i(t_0) \in \left[ \underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0 \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Для задачи (1) множество всех решений описывается формулой

$$Y(t) = Y(t, Y_0) = \left\{ y(t, y_0) : \forall y(t_0) \in Y_0, \forall t \geq 0, \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \right\}.$$

Для задачи (2) множество всех возможных решений (траекторий) запишется следующим образом:

$$Y(t) = Y(t, Y_0) = \left\{ y(t, y_0) : \forall y(t_0) \in Y_0, \forall u(t) \in U, \forall t \geq 0, \frac{dy}{dt} = f(t, y(t), u(t)) \right\}.$$

Множество решений обыкновенных дифференциальных уравнений характеризуется двумя видами решений. Значение решения  $y(t_*)$  называется граничным значением (граничной точкой) множества решений  $Y(t)$  в точке  $t_*$ , если в любой окрестности этого значения находятся числа, не принадлежащие множеству решений. Если для значения множества решений  $z(t_*)$  найдется окрестность  $S(t) = \{|s(t) - z(t_*)|\}$ , содержащая только точки множества  $z(t_*)$ , то  $z(t_*)$  называется внутренним (внутренней точкой) значением множества решений. Граничное значение называется крайним значением, если для одной или нескольких компонент вектора решений это значение больше или меньше всех значений компонент вектора решений.

Можно выделить два подхода к численной оценке множеств решений математических моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) с возмущающими воздействиями. Для возмущений известны только границы этих значений.

Первый подход к решению этой задачи заключается в многократном решении исходной системы ОДУ с выбором числовых значений системы из этих границ. Второй подход к решению основан на выполнении специально подобранных операций над определенными множествами геометрических объектов (параллелепипеды, сферы, эллипсоиды). Эти геометрические объекты включают в себя множества всех решений систем ОДУ. Включение достигается на основе операций с границами значений решений (как неточно заданными данными).

Первый подход требует очень большого количества вычислительных операций, которое растет экспоненциально. Во втором подходе вычисляемые границы имеют тенденцию к слишком большому росту. Полученные оценки множеств решений очень неточны.

Выходом из этих трудностей задачи является использование символьного представления приближенных решений задачи [2], [3], [4]. Для символьных методов также требуется изучение свойств граничных точек множества решений, использование свойств инъективности оператора сдвига, использование формул для вариаций решений в линейном и нелинейном случаях и регуляризация задачи. Регуляризация численной оценки заключается в использовании формул, сохраняющих геометрические свойства точных решений на большом конечном интервале времени.

В рамках данного проекта разработаны методы, реализующие алгоритмы построения символьических формул, решений совместно с оценками свойств множеств решений. Это позволило существенно улучшить характеристические свойства методов оценки. Приведем простой наглядный пример.

Необходимо определить, при каких условиях существует граничная траектория множества решений, а также может ли существовать внутренняя точка, лежащая на граничной траектории.

До сих пор достаточно проблематично исследовать свойство инъективности (взаимной единственности) решений ОДУ. Для линейных систем ОДУ свойство взаимной однозначности является следствием формулы Коши общего решения. Кроме того, существует свойство аффинности для отображений, определяемых решениями линейных систем ОДУ.

Остается одна возможность – для нелинейных систем ОДУ с единственными решениями в некоторой области исходных данных границы этих областей в каждый конкретный момент времени переходят в границы областей решений. Для границы области решения не существует окрестности, содержащей только решения ОДУ. Любая окрестность будет включать также значения, не принадлежащие ни одному решению. Поэтому либо значения граничных поверхностей определяются в наборе дискретных точек (на сетке), либо оценки максимальных значений вычисляются в направлениях осей координат, либо в любом выбранном направлении вдоль осей координат. Предварительно полезно построить регуляризацию оценок границ множеств решений, перейдя к линейному приближению исходной системы. Регуляризация означает нахождение информации о множестве точных решений. Эта регуляризация задается значениями сжатия/расширения в заданных направлениях, смещения по оси времени и поворота на некоторый угол [5]. Можно говорить о деформации множества решений в линейном приближении (в некотором смысле, вспоминая линейную теорию упругости).

Бесконечно малые векторы, исходящие из центра исходного множества (т. е. нашего шара радиуса  $\rho$ ), переходят в векторы, исходящие из центра смещенного (и деформиро-

ванного) множества, подчиняясь действию аффинора. Итак, преобразование вектора  $\overrightarrow{MM'}$  в вектор  $LL'$  происходит (с указанной степенью точности) с помощью аффинора  $E + \Delta t \cdot U$ , где  $U$  – производный аффинор векторного поля скоростей, а  $\Delta t$  – прошедший бесконечно малый промежуток времени. Под аффинором понимается оператор, через который выражается линейное (аффинное) преобразование (линейная однородная векторная функция). Но действие такого аффинора сводится к чистой деформации, порождаемой аффинором  $E + \Delta t \cdot B$ , и к вращению посредством аффинора  $E + \Delta t \cdot C$ . При этом  $B$ ,  $C$  – симметричные и кососимметричные части аффинора  $U$ . В нашем случае их координаты выражаются согласно  $U(M)$  – производному аффинору векторного поля  $a(M)$

$$b_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right), \quad c_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right).$$

Система (3) служит иллюстрацией и показывает поведение внутренних и внешних точек множества решений.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_2 - y_3, & \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + 0.25y_2 + y_4, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1y_3 + 3, & \frac{dy_4}{dt} &= -0.5y_3 + 0.05y_4, \\ y_i(t_0) &\in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \tag{3}$$

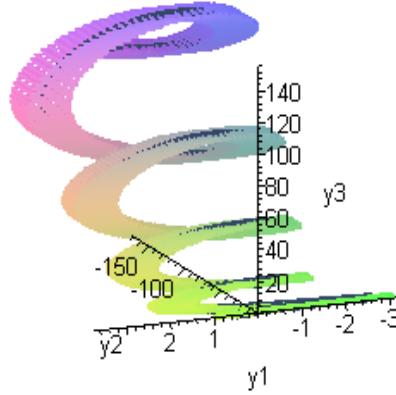


Рис. 1. Вычисленные границы множеств решений задачи (3), проекция в пространство  $y_1, y_2, y_3$  на интервале времени  $[0, 15]$

Поэтому в данной работе построена модель оценки решения системы управления, реализующая концепцию символьной формулы. Она использует идеи метода вариации констант также в нелинейной форме, включает алгоритмическое описание и описание свойства решений системы и динамику изменения решений во времени.

При больших значениях  $t$  решения могут иметь точки сингулярности, поэтому оценки множеств решений растут экспоненциально, либо по другому закону, и не несут никакой информации. Приводить эти оценки не имеет смысла. Например, для системы ОДУ

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + \cos(t)$$

решение имеет вид

$$y_1(t) = \sin(t) + \cos(t) + \frac{t}{2} \sin(t), \quad y_2(t) = \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{t}{2} \cos(t)$$

Возмущение  $\cos(t)$  приводит к линейно растущему решению. Можно сделать вывод, что различные возмущающие воздействия, вводимые в правую часть системы, не могут быть охарактеризованы как функции, принадлежащие только одному классу ограниченных функций, поведение решений будут сильно различаться.

Пусть  $y(t)$  и  $z(t)$  – решения задач

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + g(t, z), \quad z(t_0) = z_0, \quad (5)$$

где векторные функции  $f, g$  непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка по  $y$  в некоторой области  $(n+1)$ -мерного пространства, тогда

$$z(t) = y(t) + \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0, y, y_0 + s(z_0 - y_0))(z_0 - s_0)ds + \int_{y_0}^y \frac{\partial y}{\partial y_0}(s, y, z(s)) \cdot g(s, z(s))ds. \quad (6)$$

Эти соотношения помогают оценить устойчивость нелинейных систем и получить информацию о свойствах множества решений этих задач [6]. Формула (6) может быть использована для установления связей между решениями возмущенной полной системы и решениями невозмущенной усеченной системы ОДУ [6, 7]. Если  $y(t)$  является решением уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + F(t, y), \quad (7)$$

и для  $t_0 \leq t \leq t_1$  выполняются следующие условия: 1)  $A(t)$  – является непрерывной функцией и  $\gamma(A(t)) = \gamma(t)$ ; 2)  $\|F(t, y)\| \leq f_1(t) \|y\| + f_2(t)$ , тогда для того же  $t$  неравенство

$$\|y(t)\| \leq \exp \left( \int_{t_0}^t [\gamma(\sigma) + f_1(\sigma)] d\sigma \right) \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t f_2(s) \cdot \exp \left[ \int_s^t (\gamma(\sigma) + f_1(\sigma)) d\sigma ds \right] \quad (8)$$

справедливо. Неравенство (8) помогает оценить разницу между решениями систем ОДУ с различными управляющими воздействиями. Помимо оценки разницы решений, нам также важно перейти от исходной системы ОДУ к нелинейной системе интегральных уравнений.

Отображение линейного члена правой части должно быть непрерывным, а правая часть должна быть ограниченной; решение должно быть единственным. В этом случае формула вариации для произвольных произвольных констант обосновывает переход от системы ОДУ с управлением к системе интегральных уравнений:

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t)^{-1}(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(t)^{-1}(\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (9)$$

здесь  $\Phi(t)$  – фундаментальная матрица решений системы  $dy/dt = A(t)y(t)$ . Этот метод называется методом вариации произвольных постоянных. Этот метод использует замену переменных в системе ОДУ:

$$y = \Phi(t)u.$$

Если применить его для решения линейной системы ОДУ задачи с начальными данными, то получим формулу Коши:

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t)^{-1}(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(t)^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (10)$$

Изучение динамики множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с воздействиями, заданными как функциональные параметры, позволяет исследовать свойство инъективности (взаимной однозначности) решений ОДУ. Для нелинейных систем ОДУ, имеющих единственное решение в некоторой области начальных данных, границы этих областей переходят в границы областей решений в каждый конкретный момент. Множества решений ОДУ с начальными данными, принадлежащими областям начальных данных, имеют сложные границы (границы поверхности в пространстве  $R^n$  размерности  $n$ ). Для границ (поверхностей) невозможно подобрать формулы функций, с помощью которых возможно было описать границы. В итоге есть две возможности – либо описывать значения граничных поверхностей в наборе дискретных точек (на сетке), либо вычислять их оценки максимальных значений в направлениях координатных осей, либо максимум в любом выбранном направлении. Предварительно полезно строить регуляризацию оценок границ множеств решений, переходя к линейному приближению исходной системы. Эту регуляризацию задают величины сжатия/растяжения в заданных направлениях, смещения по оси времени и поворота на некоторый угол.

## ЛИТЕРАТУРА

- Мартынюк А. А. Устойчивость множества траекторий нелинейной динамики. Доклады Академии наук. 2007. Т. 414. № 3. С. 299–303.
- Rogalev A. N. *Symbolic Methods for Estimating the Sets of Solutions of Ordinary Differential Equations with Perturbations on a Finite Time Interval*. Journal of Vibration Testing and System Dynamics. 2023. Т. 7(1). Р. 31–37.
- Рогалев А. Н. Регуляризация численных оценок областей решений дифференциальных уравнений с возмущающими воздействиями Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21. № 3. С. A57–A69. <https://DOI 10.33048/semi.2024.21.A03>.
- Rogalev A. N. *Stability of solutions of ordinary differential equations with control and perturbations under structural perturbations*. In De Gruyter Proceedings in Mathematics. Analytical Methods in Differential Equations. Ed. By Sergey V. Meleshko. Sibusico Moyo and Eckart Schultz. 2025. Р. 153–162.
- Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М.: Наука, 1967.
- Алексеев В. М. *Об оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений. I*. Записки Московского университета. 1961. № 2. С. 28–36.
- Алексеев В. М. *Об оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений. II*. Записки Московского университета. 1961. № 3. С. 3–10.

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ ДВУМЕРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

*A. X. Сташ, Н. А. Лобода*

*Адыгейский государственный университет, Майкоп*

## 1. Введение

Для изучения колебательных свойств движения И. Н. Сергеевым были введены сначала *характеристические частоты* [1], а затем *показатели колеблемости, блуждаемости и вращаемости* [2–4].

В работах [4, 5] были проведены исследования свойств колеблемости, блуждаемости и вращаемости по первому приближению. В частности, в [5] было показано, что однодimensionalные спектры каждого из показателей колеблемости и блуждаемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения могут быть совершенно произвольными: модуль разности этих чисел может меняться от нуля до бесконечности.

Эффект смены знака характеристических показателей Ляпунова при переходе от нелинейной системы к системе ее линейного приближения был продемонстрирован в [6, 7], а в работах [8, 9] были построены нелинейные системы, которые еще дополнительно обладали бесконечными спектрами показателей Ляпунова.

В [10, 11] было доказано существования нелинейных систем со счетными спектрами показателей колеблемости и блуждаемости, в то время как спектры одноименных показателей соответствующих линейных систем их первых приближений состоят ровно из одного неотрицательного числа.

В связи с этим возникает вопрос: *насколько произвольными могут быть спектры показателей колеблемости и блуждаемости нелинейной системы с фиксированными спектрами одноименных показателей системы ее первого приближения?*

## 2. Показатели колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим  $\mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и дадим основные определения.

**Определение 1** [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости нулей функции  $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$  зададим равенствами*

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_\bullet^0(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^0(x, m, t) \quad \left( \check{\nu}_\bullet^0(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^0(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^0(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu^0(x, m, t) \quad \left( \check{\nu}_\circ^0(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu^0(x, m, t) \right),\end{aligned}$$

где  $\nu^0(x, m, t)$  — число нулей функции  $\langle x, m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ .

**Определение 2** [2]. Для функции  $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$  и числа  $t > 0$  введем *вариацию* следа

$$P(u, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(u, \tau) \right| d\tau, \quad e(u, \tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции  $u$  за время от 0 до  $t$ , причем ситуацию, когда функция  $u$  имеет на отрезке  $[0; t]$  хотя бы один ноль, считаем *вырожденной* и  $P(u, t) = +\infty$  по определению.

**Замечание.** Геометрический смысл вариации следа функции  $u$  — это полная *длина пути* на единичной сфере конца единичного вектора  $e(u, \tau)$  при  $\tau \in [0; t]$ . Отсутствие у функции  $u$  нулей гарантирует, что вариация ее следа принимает только *конечные значения* (как интеграл  $P(u, t)$  от непрерывной функции на отрезке).

**Определение 3** [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости нулей* функции  $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*)$  зададим равенствами

$$\hat{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t) \quad \left( \check{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t) \right),$$

$$\hat{\rho}_\circ(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx, t) \quad \left( \check{\rho}_\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx, t) \right),$$

где  $\text{Aut} \mathbb{R}^n$  — множество всех невырожденных линейных операторов  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### 3. Формулировка основных результатов

Для заданной открытой окрестности  $G$  точки 0 в евклидовой (векторной) фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in G. \quad (2)$$

С системой (1) свяжем линейную систему ее *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_t(t, x), \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_t(t, x)| = o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Через  $\mathcal{S}_*(f)$  будем обозначать множество всех *непродолжаемых* (т. е. максимально продолженных) ненулевых решений системы (1), а через  $x_f(\cdot, x_0)$  — решение задачи (2), и для любых  $\gamma_2 > \gamma_1 \geq 0$  зададим множество

$$G_{\gamma_1, \gamma_2} \equiv \{x_0 \in G \mid \gamma_1 < |x_0| < \gamma_2\}.$$

Возможность изменения мощности спектра каждого из показателей колеблемости и блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения демонстрируют следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Для любых  $m > 1$  и непустого подмножества  $S \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  существуют системы вида (1) и (3) при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_t(t, x)| \leq |x|^m, \quad x \in G \equiv \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

обладающие при любом  $\varkappa = \check{\nu}_\circ^0, \hat{\nu}_\circ^0, \check{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^0, \check{\rho}_\circ, \hat{\rho}_\circ, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\bullet$  свойствами

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(f)) = \{1\}, \quad \varkappa(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\}, \quad (5)$$

причем при любом  $\varepsilon > 0$  выполнено равенство

$$\{\varkappa(x_f(\cdot, x_0)) \mid x_0 \in G_{0,\varepsilon}\} = \varkappa(\mathcal{S}_*(f)).$$

**Теорема 2.** Для любого интервала  $S = (a, b) \subset [0, 1]$  или  $S = [0, 1]$  существуют две системы вида (1) и (3) при условии (4), спектры каждого показателя  $\varkappa = \check{\nu}_o^0, \hat{\nu}_o^0, \check{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^0, \check{\rho}_o, \hat{\rho}_o, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\bullet$ , которых обладают соответственно свойствами (5), причем при  $S = [0, 1]$  при любом  $\varepsilon > 0$  множество  $\{\varkappa(x_f(\cdot, x_0)) \mid x_0 \in G_{0,\varepsilon}\}$  имеет мощность континуума.

#### 4. Заключение

В настоящей работе установлено существование примера линейной двумерной системы с точечным спектром каждого из показателей колеблемости и блуждаемости — такой, что у специальной возмущенной нелинейной двумерной системы сразу все перечисленные показатели имеют произвольный наперед заданный конечный или счетный спектр, состоящий из рациональных чисел единичного отрезка, или даже континуальный спектр, содержащий весь этот отрезок. Этот результат показывает отсутствие непосредственной связи между мощностями спектров каждого из показателей колеблемости и блуждаемости нелинейной системы и системы ее первого приближения. В работе [12] доказано существование такой двумерной нелинейной дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели Ляпунова, и нелинейностью произвольно заданного высшего порядка малости в окрестности начала координат, что все ее нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством положительной полуоси. Интересным остается вопрос о возможности перенесения аналогичного свойства и на показатели колеблемости или блуждаемости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-03-2024-074/5).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Сергеев И. Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения*. Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
- Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы*. Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
- Сергеев И. Н. *Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем*. Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2(46). С. 171–183.
- Сергеев И. Н. *Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.
- Сергеев И. Н. *Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению*. Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 726–734.
- Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*. Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 1. P. 703–728.

7. Леонов Г. А. *Об одной модификации контрпримера Perrona*. Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1566–1567.
8. Ильин А. В., Изобов Н. А. *Бесконечный вариант эффекта Perrона смены значений характеристических показателей дифференциальных систем*. Доклады Академии наук. 2014. Т. 457. № 2. С. 147–151.
9. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Континуальный вариант эффекта Perrона смены значений характеристических показателей*. Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1427–1439.
10. Сташ А. Х. *Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения*. Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 8. С. 1139–1142.
11. Лобода Н. А. *Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения*. Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 176–187.
12. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Perrona*. Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.

# О ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ОТСЛЕЖИВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ВОЗМУЩЕНИЕМ И ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ

*П. Г. Сурков<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Рассматривается задача отслеживания траектории нелинейной системы дифференциальных уравнений дробного порядка с заданным начальным значением

$$[D_*^\gamma x](t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad t \in T := [\sigma, \theta], \quad \theta < +\infty, \quad x(\sigma) = x_\sigma, \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^d$  — фазовый вектор,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее воздействие (возмущение),  $B$  — постоянная  $d \times m$  матрица, функция  $f(\cdot)$  липшицева с постоянной  $L > 0$ . Здесь для функции  $x(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^d$  и произвольного  $\gamma \in (0, 1)$  выражение

$$[D_*^\gamma x](t) := \frac{d}{dt} \left[ I^{1-\gamma} (x(\cdot) - x(\sigma)) \right] (t)$$

задает дробную производную Герасимова–Капуто порядка  $\gamma$ , см. [1], и дробный интеграл порядка  $\gamma \in (0, 1)$  от произвольной функции  $x(\cdot) \in L_1(T; \mathbb{R}^d)$  с началом в точке  $\sigma$  определяется формулой

$$[I^\gamma x](t) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{\sigma}^t (t-s)^{\gamma-1} x(s) ds,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция.

Траектория системы (1) заранее неизвестна и определяется меняющимся во времени возмущением  $u(\cdot)$ , которое также не задано. Информация о величине этого возмущения недоступна для наблюдателя. С другой стороны, во время функционирования системы все координаты фазового вектора доступны для измерений. Будем предполагать, что такие измерения носят непрерывный характер, т. е. в их результате в каждый момент  $t \in T$  находятся векторы  $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^d$ , удовлетворяющие неравенству

$$|\xi^h(t) - x(t)|_d \leq h, \quad t \in T, \quad (2)$$

где  $h \in (0, 1)$  — точность измерений,  $|\cdot|_d$  — норма в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^d$ , функции  $\xi^h(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^d$  измеримы.

Пусть наряду с системой (1) имеется еще одна вспомогательная управляемая система

$$[D_*^\gamma w^h](t) = f(w^h(t)) + Bv^h(t), \quad t \in T, \quad w(\sigma) = x_\sigma, \quad (3)$$

в которой закон формирования управления  $v^h(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$  можно указать.

Таким образом, приходим к следующей задаче. Требуется построить алгоритм формирования управления  $v^h(\cdot)$  по принципу обратной связи во вспомогательной системе (3), работающей в режиме реального времени, позволяющий в условиях отсутствия априорной информации о траектории системы (1) и о неизвестном внешнем воздействии  $u(\cdot)$

осуществить отслеживание траектории  $x(\cdot)$  решением вспомогательной системы  $z(\cdot)$ , если измерения (2) позиции системы производятся с погрешностью, непрерывно и одновременно с функционированием системы.

В случае наличия априорной информации о мгновенных ограничениях на возмущение,  $u, v^h \in P$ ,  $P \subset \mathbb{R}^m$  — заданное ограниченное и замкнутое множество, поставленная задача может быть решена с применением метода экстремального сдвига Н. Н. Красовского [2]. Вместе с тем, если информации о возмущении исчерпывается лишь включением  $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$ , то требуется модификация метода экстремального прицеливания с введением локальной регуляризации [3]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений задача отслеживания траектории с точки зрения указанного подхода рассматривалась в [4], а для распределенных систем с памятью — в [5]. В настоящей работе рассматривается более широкий класс систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, для которых ставится задача отслеживания траектории. Дробный анализ в настоящее время является одним из активно развивающихся направлений математики. Введение дробных производных в математические модели позволяет более точно описывать процессы с наследственными свойствами и памятью. Соответственно, все большую роль для таких моделей играет задача динамического отслеживания траектории, которая может быть использована, например, для диагностики срывов в режиме реального времени.

Введем вспомогательную функцию  $\alpha := \alpha(h) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$  и будем выбирать управление  $v^h(t)$  по формуле

$$v^h(t) = \alpha^{-1} B'(\xi^h(t) - w^h(t)), \quad t \in T, \quad (4)$$

где  $B'$  обозначает транспонированную матрицу к  $B$ .

**Теорема.** *Пусть функция  $\alpha(h)$  и постоянная  $\beta \in (0, 2)$  таковы, что*

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad (\alpha(h))^{-2} h^\beta \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

*Тогда найдется постоянная  $h_* \in (0, 1)$ , и можно выписать в явном виде постоянную  $C$ , не зависящую от  $h$  и  $\alpha$ , такую, что при всех  $h \in (0, h_*)$  выполнена оценка*

$$|x(t) - w^h(t)|_d^2 \leq C(\alpha(h) + h^\mu), \quad t \in T,$$

где  $\mu := 1 \wedge 2 - \beta$ .

В основе доказательства лежит процедура стабилизации функционалов типа Ляпунова:

$$\varepsilon^h(t) := |x(t) - w^h(t)|_d^2 + \alpha[I^\gamma(|v^h|_m^2 - |u|_m^2)](t), \quad t \in T,$$

а также применение модифицированного неравенства Гронуолла – Беллмана с интегралом дробного порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. Amsterdam : Elsevier Science, 2006.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры*. М : Наука, 1974.
3. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. *О моделировании управления в динамической системе*. Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1975. № 2. С. 51–68.
4. Максимов В. И. *Об отслеживании траектории динамической системы*. ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 951–960.

5. Сурков П. Г. *Отслеживание решения параболического уравнения с памятью для общего класса управлений*. Изв. вузов. Матем. 2016. № 10. С. 53–64.

# ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

## ТЕХНОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНТЕГРИРОВАННЫХ И МЕЖПРЕДМЕТНЫХ УРОКОВ

*Ж. С. Абдыкеров<sup>1,2</sup>, О. М. Замятин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

**Актуальность.** В современной образовательной системе активно применяется концепция межпредметности как эффективного подхода к обучению. Межпредметность предполагает неотделимую связь и взаимодействие различных предметных областей, что помогает студентам увидеть глубинные связи между знаниями и развить более целостное понимание мира [1].

Основная идея межпредметности заключается в том, что знания в разных предметах не являются отдельными, закрытыми системами, а наоборот, имеют междисциплинарный характер и взаимосвязь. При соблюдении принципов межпредметности ученики и студенты имеют возможность видеть общие понятия, закономерности и связи в различных учебных предметах и дисциплинах [2].

Появляется способность связывать предметные картины мира, переключаться между ними и формировать собственную целостную непротиворечивую картину мира [3].

Применение межпредметности в образовании имеет несколько основных целей. Во-первых, это позволяет ученикам перейти более глубокий уровень обучения, поскольку они могут проследить связи и отношения между предметами, а не просто запоминать отдельные факты и информацию. Во-вторых, межпредметный подход способствует развитию у учеников разных типов мышления (каждая картина мира подразумевает под собой определенный тип мышления как способ решения задач внутри картины мира, а значит, и внутри предмета) это формирует способность к разному типу анализа (причинно-следственный, элементарный, критериальный и т. д.), поскольку они учатся видеть проблемы и задачи с разных точек зрения.

Кроме того, межпредметность помогает стимулировать творческое мышление и способствует развитию интегративных навыков. Ученикам и студентам предоставляется возможность использовать знания из разных предметов для решения сложных задач и проблем. Это развивает их способность к применению знаний на практике и повышает эффективность обучения [4].

В пределе межпредметность – это способ формирования новых типов мышления, который складываются на стыке уже известных-предметных. На практике межпредметность может быть реализована различными способами и в различных образовательных технологиях [5].

**Описание технологии.** Образовательные технологии могут включать совместные проекты и исследования, игровые элементы, моделирование различных процессов, производств и даже миров. Способы реализации межпредметности подразумевают взаимосвязь и сопоставление знаний из разных предметов. Важно, чтобы преподаватели сотрудничали между собой и объединяли свои усилия для создания целостной образовательной среды,

в которой межпредметность будет активно применяться [6]. Сосредоточиться можно на двух вариантах:

1. Сложный объект, для изучения которого необходимы знания из разных предметов. Учителям необходимо выбрать объект, для изучения и работы, с которым необходимо изучение разного рода предметов. Такими объектами могут выступать как объекты реального мира – например ТЭК (топливно-энергетический комплекс), так и понятия, теоретические, умозрительные, например – картина мира (для цельного понимания которого необходимо изучение нескольких из них). Каждая из тем может быть реализована в виде исследовательского проекта, игры, лекционных, практических и лабораторных занятий, решения кейсов и т. д.

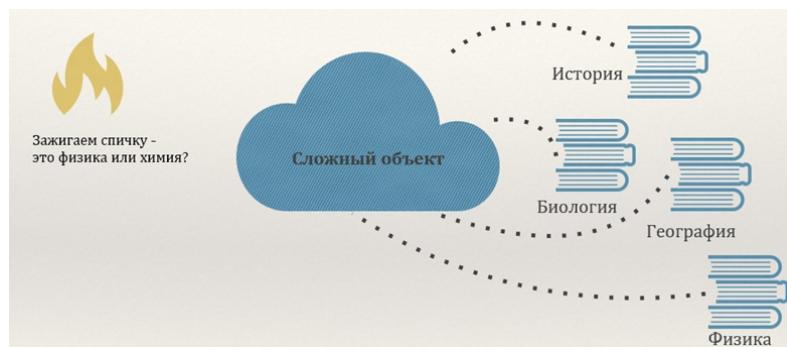


Рис. 1. Сложный объект

2. Общее понятие, которое есть в каждом из предметов реализующих межпредметный формат работы.

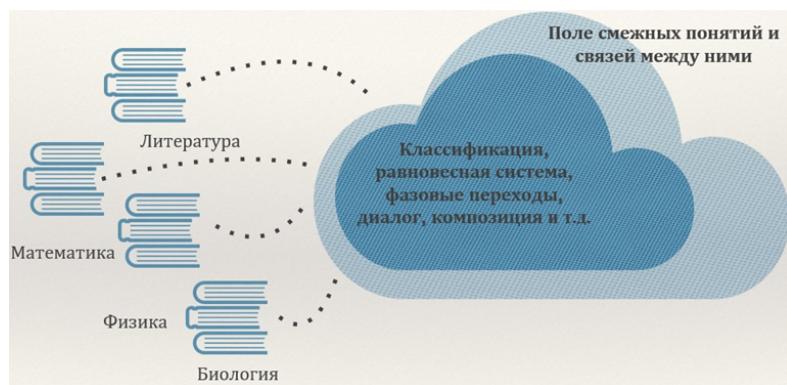


Рис. 2. Общее понятие [7]

Это более сложный способ реализации межпредметности, так как требует формулировки и формирования понятия у учеников, а затем предлагать деятельность, в которой они могли бы проявить способность им пользоваться. По сути, это прямая работа с мышлением. Здесь можно привести понятия: закономерность, анализ, связь и т. д., но все они направлены на формирование конкретных когнитивных навыков, способности видеть и формулировать закономерности, проводить разные виды аналитики (критериальный, причинно-следственный и т. д.), способности на схемах показывать связи между объектами и понятиями из разных предметных областей.

Далее опишем этапы проектирования интегрированного урока, которые включают несколько ключевых шагов.

**1. Анализ.** Первым шагом является анализ учебных программ по различным учебным предметам. Необходимо определить те темы и задачи, которые могут быть объединены и рассмотрены совместно. Анализ проводится в творческой группе учителей-предметников (далее – педагоги), готовых к взаимодействию в рамках разработки интегрированных уроков, где происходит обсуждение их учебных планов/КТП/планов урока. Этапы анализа:

- **Эмоциональный анализ.** Основная задача учителя-предметника, заинтересованного в разработке интегрированного урока, рассмотреть свой предмет целостно и представить его педагогам; при этом задача педагогов определить/почувствовать/понять, что их заинтересовало в данном предмете, какие темы и понятия пересекаются, и так поступает каждый учитель-предметник, участвующий в создании интегрированных уроков.

- **Создание поля понятий.** Совместно с педагогами формируется понятийное поле в области пересечения понятий, терминов, тем.

- **Поиск связей.** Одним из самых важных этапов является выстраивание связей (элементов-связок) между понятиями. Именно на этом этапе конструируется интеграция понятий в рамках урока.

- **Сведение понятий.** На данном этапе формируется план урока, в котором достраивается понятийное поле за счет интеграции понятий разных предметных областей.

Поле понятий закладывается в образовательный контекст. Несколько примеров подобного рода понятий и описания интегрированных уроков.

**Интегрированный урок алгебры, геометрии, биологии «Воздух».** Урок разработан для учеников 8-го класса. Длительность 90 минут (2 урока подряд).

**Цель урока:** формирование у учеников понимания применения математики для решения конкретной практической задачи.

**Описание:** в рамках данного интегрированного урока перед учениками моделировалась следующая ситуация. Действие происходило в закрытом помещении с мебелью, участники были разделены на команды, и перед каждой командой стояла задача — посчитать какое количество времени всем находящимся в комнате будет хватать кислорода при условии отсутствия воздухообмена с внешней средой.

Были даны основные и дополнительные данные, такие как:

- 1) В «свежем» воздухе помимо прочих газов содержится 21 % кислорода.
- 2) На «свежем» воздухе средний человек делает 16 вдохов в минуту.
- 3) На «свежем» воздухе человек в спокойном состоянии в среднем вдыхает 0,5 литра воздуха за один вдох.
- 4) Организм человека устроен так, что только часть из кислорода, находящегося в легких всасывается в кровь. Остаток кислорода уходит с выдохом. В среднем, это четверть от всего вдыхаемого кислорода.
- 5) Будем считать, что когда концентрация кислорода достигнет 7 % — он станет непригодным для дыхания. Критическая же концентрация CO<sub>2</sub> — 5 %.
- 6) Для упрощения расчетов будем считать, что люди дышат синхронно и после каждого выдоха происходит мгновенная диффузия, т. е. выдыхаемый воздух мгновенно смешивается с тем, что был.
- 7) Газ занимает целиком все пространство, поэтому объем воздуха равен объему комнаты. Можно уточнить расчеты и вычесть объемы посторонних объектов (людей, мебели и т. д.).
- 8) Был дан график частоты дыхания в зависимости от концентрации кислорода:



Рис. 3. Частота дыхания в зависимости от кислорода

По итогам участники, которые наиболее точно и близко смогли произвести соответствующие расчеты, были признаны победителями.

**2. Определение целей и задач.** Вторым шагом является определение цели и задач интегрированного урока. Чего именно хотим добиться, объединяя предметы? Какие ключевые навыки должны быть развиты у учеников? Цель и задачи формулируются в языке желаемых результатов, которые планируем получить при проведении интегрированных уроков. В рамках интегрированных уроков необходимо и обязательно планировать предметные и межпредметные результаты, причем за межпредметностью не должна теряться предметность. Так же в ходе работы, могут быть выявлены метапредметные результаты.

**3. Выбор методов и форм работы.** Выбор методов и форм работы на интегрированном уроке зависит от конкретной темы и задач. Это может быть проектная работа, исследовательская деятельность, дискуссии, ролевые игры и др. Важно выбирать такие методы, которые стимулируют активность и способствуют развитию творческих способностей. Основная задача инициировать активную деятельность учеников, а не учителя.

**4. Подбор контента.** Четвертым шагом станет подбор контента, который будет использован на уроке. Это могут быть учебники, статьи, видео, интерактивные материалы и др. Контент должен соответствовать как теме, так и выбранным методам и формам работы.

**5. Планирование урока.** Планирование интегрированного урока должно включать последовательность действий, временные рамки, оценочные средства и необходимые ресурсы. Важно учесть, как будет организовано взаимодействие между предметами, как будет оцениваться достижение целей и задач.

**6. Реализация урока.** Шестой шаг — проведение урока. Педагоги объединяют усилия для создания образовательной среды, где интегрированные знания и навыки активно применяются учениками. Важно обеспечить поддержку, мотивацию и постановку задач на всем протяжении урока.

**7. Оценка и рефлексия.** После проведения интегрированного урока важно произвести оценку полученных результатов — рефлексию, что позволит определить, насколько достигнуты цель и задачи, какие навыки были развиты, какие сложности возникли и что

можно улучшить в будущем, и позволит оценить результаты, которые были получены в ходе реализации интегрированного урока.

**Вывод.** Технология создания интегрированных уроков с межпредметными связями активно применяется в современной образовательной практике, поскольку она позволяет ученикам развивать комплексное мышление и применять знания на практике. Одновременно она способствует более глубокому пониманию материала, развитию критического мышления и мотивации к обучению. Этот подход открывает новые горизонты в образовании и помогает подготовить учеников к комплексным вызовам современного мира.

*Авторы благодарят коллектив проекта «Большая математическая мастерская» за возможность апробации и проектирования элементов интегрированных уроков, помощь в проведении расчетов.*

*Работа поддержанна Международным математическим центром в Академгородке, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию научных центров мирового уровня (Соглашение № 52-2019 от 31.07.2019 г.).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Браже Т. Г. *Интеграция предметов в современной операций школе* М.: Литература предприятия в школе. 2014. № 2. С. 150–154.
2. Глинская Е. А. А. *Межпредметные связи в обучении*. ПМТФ. 1993. Т. 34. № 2. С. 24–31.
3. Данилюк Д. Я. *Учебный предмет как интегрированная система данных*. Педагогика. 2012. № 4. С. 24–28.
4. Дик Ю. И. *Интеграция учебных предметов*. Современная педагогика. 2014. № 9. С. 42–47.
5. Зверев И. Д. *Интеграция и “интегрированный предмет”*. Биология жизни в школе. 2014. № 50. С. 46–49.
6. Зверев И. Д. *Межпредметные связи в современной школе*. Педагогика. 2011. С. 134.
7. Сухаревская Е. Ю. *ИТехнология интегрированного урока. Практическое пособие для учителей*. РПИ. 2012. С. 165–173.

# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛИ В КУРСОВОМ ИЗЛОЖЕНИИ РАЗДЕЛОВ

*И. А. Андреева*

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

## **1. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛС ОДУ). Основные понятия, алгебраический фундамент.**

Нормальная линейная система ОДУ в векторно-матричной записи имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t), \quad (1)$$

где  $t$  — вещественная независимая переменная,  $P(t) = \{p_k^i(t)\}$ ,  $i, k = \overline{1, n}$ , и  $q(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))^*$  — заданные матрица-функция и вектор-функция переменной  $t$ , непрерывные в некотором интервале  $I = (\alpha, \beta)$  оси  $t$ , вещественные или комплексные,  $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^*$  — искомая вектор-функция переменной  $t$ , вещественная или комплексная (она может быть комплексной и при вещественных  $P(t)$  и  $q(t)$ ). Число  $n \in \mathbb{N}$  называется порядком системы. Область  $G$ , в которой определена и непрерывна правая часть системы, называется областью задания или пространством системы. В чисто вещественном случае  $G = I \times \mathbb{R}^n$ , в комплексном случае  $G = I \times \mathbb{C}^n$ . Таких областей для системы может быть несколько и даже бесконечно много (по числу интервалов  $I$ ).

Далее будем рассматривать систему (1) в фиксированной области  $G = I \times \mathbb{K}^n$ ,  $I = (\alpha, \beta)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

**Определение 1.** Решением системы (1) называется всякая непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{K}^n$  (где  $I'$  — открытый, замкнутый или полуоткрытый промежуток), которая, будучи подставлена в систему вместо  $x$ , обращает ее в тождество относительно  $t \in I'$ .

Задача Коши (начальная задача) для системы (1) ставится следующим образом: задается точка  $(t_0, x_0) \in G$ ; требуется найти решение системы  $\varphi(t)$ , удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Разрешимость этой задачи гарантирует следующая теорема существования и единственности.

**Теорема Пикара.** Для любой точки  $(t_0, x_0) \in G$  задача Коши (1), (2) имеет решение

$$x = \varphi(t), \quad t \in I, \quad (3)$$

определенное на всем интервале  $I$ , и такое ее решение единствено.

Согласно определению 1, сужение решения (3) на любой промежуток  $I' (\subset I)$  также есть решение системы (1). Однако далее под решением системы (1) всегда будем понимать решение вида (3), то есть решение, определенное на всем интервале  $I$ .

**Определение 2.** Множество (семейство) всех решений системы (1) называется ее общим решением, а решение, проходящее через фиксированную точку  $(t_0, x_0) \in G$ , то есть удовлетворяющее фиксированному условию (2), — частным решением.

Общее решение (1) всегда можно записать в следующем виде. Зафиксируем число  $\tau \in I$ . Пусть  $(t_0, x_0) \in G$  — произвольная точка, (3) — решение задачи Коши (1), (2). Это решение определено в интервале  $I \Rightarrow$  оно определено при  $t = \tau \Rightarrow$  для него однозначно определен вектор  $\xi = \varphi(t) \in \mathbb{K}^n$ . Наоборот,  $\forall \xi \in \mathbb{K}^n$  точка  $(\tau, \xi) \in G \Rightarrow$  (по теореме Пикара) существует решение системы (1)  $\varphi(t)$ ,  $\varphi(\tau) = \xi$ , определенное в  $I$ . Обозначим это решение символом  $\varphi(t, \xi)$ . Тогда семейство всех решений системы (1), имеющих точки в  $G$ , то есть ее общее решение в этой области, примет вид

$$x = \varphi(t, \xi), \quad \xi \in \mathbb{K}^n, \quad (4)$$

где  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  —  $n$ -мерный параметр этого семейства.

Если в системе (1)  $q(t) \equiv (0, \dots, 0)^*$ ,  $t \in I$ , то она называется *линейной однородной системой* (ЛОС ОДУ). В противном случае — *линейной неоднородной системой* (ЛНС ОДУ).

## 2. Линейная однородная система ОДУ.

Рассмотрим ЛОС ОДУ  $n$ -го порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (5)$$

где  $t$ ,  $P(t)$ ,  $x$  такая же, что и в (1). Эта система — частный случай системы (1); поэтому все, сказанное в п. 1 о системе (1), в равной мере относится и к системе (5). В частности, областью задания системы (5) будем считать фиксированную область  $G = I \times \mathbb{K}^n$ .

## 3. Пространство решений.

Пусть  $\tau \in I$  — фиксированное число,  $\xi \in \mathbb{K}^n$  — произвольный вектор,  $\varphi(t, \xi)$  — решение системы (5) с начальной точкой  $(\tau, \xi)$ . Тогда, согласно (4),

$$\mathcal{L}^n := \{x = \varphi(t, \xi), \xi \in \mathbb{K}^n\} \quad (6)$$

есть ее общее решение (в области  $G$ ).

**Лемма 1.** 1) Общее решение (6) системы (5) есть линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ . 2) Это пространство изоморфно пространству  $\mathbb{K}^n$ , рассматриваемому как линейное.

1) На основании теоремы Пикара равенство элементов множества  $\mathcal{L}^n$  и линейные операции над ними определяются следующим образом:  $\varphi(t, \xi_2) = \varphi(t, \xi_1) \iff \xi_2 = \xi_1$ ,  $\varphi(t, \xi_2) + \varphi(t, \xi_1) = \varphi(t, \xi_1 + \xi_2)$ ,  $c\varphi(t, \xi) = \varphi(t, c\xi)$ , где  $c \in \mathbb{K}$ . Легко видеть, что действия сложения элементов  $\mathcal{L}^n$  и их умножения на числа из  $\mathbb{K}$  обладают свойствами коммутативности и дистрибутивности. Следовательно,  $\mathcal{L}^n$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ .

2) Рассмотрим отображение  $H: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{L}^n$ ,  $\xi \mapsto \varphi(t, \xi)$ . На основании теоремы Пикара заключаем: а)  $H$  — биективно, б)  $H$  — линейно, ибо 61) для  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{K}^n$   $H(\xi_1 + \xi_2) = \varphi(t, \xi_1 + \xi_2) = \varphi(t, \xi_1) + \varphi(t, \xi_2) = H(\xi_1) + H(\xi_2)$ , 62) для  $\xi \in \mathbb{K}^n$  и  $c \in \mathbb{K}$   $H(c\xi) = \varphi(t, c\xi) = c\varphi(t, \xi) = cH(\xi)$ . Из а) и б) следует, что отображение  $H$  — изоморфизм пространств  $\mathbb{K}^n$  и  $\mathcal{L}^n \Rightarrow \mathcal{L}^n \simeq \mathbb{K}^n$ .

**Замечание 1.** Отображение  $H^{-1}: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\varphi(t, \xi) \mapsto \xi$  также есть изоморфизм.

Из леммы 1 вытекает вся общая теория ЛОС ОДУ, а именно для системы (5) справедливы следующие теоремы (в них символом  $\mathbb{K}^n$  обозначается пространство  $\mathbb{K}_{lin}^n$ , а символом  $\mathcal{L}^n$  — пространство решений (6) системы (5)).

**Теорема 1** (о соответствии линейных комбинаций векторов в  $\mathbb{K}^n$  и  $\mathcal{L}^n$ ). Для  $k \in \mathbb{N}$

$$\xi = c^1 \xi_1 + \dots + c^k \xi_k \iff \varphi(t, \xi) = c^1 \varphi(t, \xi_1) + \dots + c^k \varphi(t, \xi_k).$$

Применяя к первому равенству отображение  $H$ , получаем второе; применяя ко второму равенству отображение  $H^{-1}$ , получаем первое.

**Теорема 2** (о соответствии линейно независимых векторов в  $\mathbb{K}^n$  и  $\mathcal{L}^n$ ).

Для  $k \in \mathbb{N}$   $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{K}^n$  – линейно независимы  $\iff \varphi(t, \xi_1), \dots, \varphi(t, \xi_k) \in \mathcal{L}^n$  – линейно независимы.

Для любого  $k \in \mathbb{N}$  векторы  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{K}^n$  – линейно независимы  $\iff [c^1 \xi_1 + \dots + c^k \xi_k = \theta \iff c^1 = \dots = c^k = 0] \iff$  (теорема 1.1)  $[c^1 \varphi(t, \xi_1) + \dots + c^k \varphi(t, \xi_k) = \theta \iff c^1 = \dots = c^k = 0]$   $\iff$  векторы  $\varphi(t, \xi_1), \dots, \varphi(t, \xi_k) \in \mathcal{L}^n$  – линейно независимы.

**Теорема 3** (о соответствии базисов в  $\mathbb{K}^n$  и  $\mathcal{L}^n$ ).

$$\xi_1, \dots, \xi_n – базис \mathbb{K}^n \iff \varphi(t, \xi_1), \dots, \varphi(t, \xi_n) – базис \mathcal{L}^n.$$

Векторы  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – базис  $\mathbb{K}^n \iff$  1)  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – линейно независимы, 2)  $\forall \xi \in \mathbb{K}^n \exists!$  представление вида  $\xi = c^1 \xi_1 + \dots + c^n \xi_n$ ,  $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{K} \iff$  (теоремы 2 и 1):

1)  $\varphi(t, \xi_1), \dots, \varphi(t, \xi_n) \in \mathcal{L}^n$  – линейно независимы,

2)  $\forall \xi \in \mathbb{K}^n \exists!$  представление вида  $\varphi(t, \xi) = c^1 \varphi(t, \xi_1) + \dots + c^n \varphi(t, \xi_n)$ ,  $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{K} \iff \varphi(t, \xi_1), \dots, \varphi(t, \xi_n)$  – базис  $\mathcal{L}^n$ .

**Следствие 1** (о размерности  $\mathcal{L}^n$ ).  $\text{Dim } \mathcal{L}^n = n$ .

Из теоремы 3 следует, что в пространстве  $\mathcal{L}^n$  существует базис из  $n$  векторов. Из этого далее следует, что  $\dim \mathcal{L}^n = n$ .

**Определение 3.** Если

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n – \quad (7)$$

решения системы (5), то матрица  $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  называется *матрицей решений* этой системы. В случае когда решения (7) линейно независимы, их совокупность называется *фундаментальной системой решений* системы (5), а матрица  $\Phi(t)$  – *фундаментальной матрицей решений* этой системы. Если при некотором  $\tau \in I$   $\Phi(\tau) = E$  (единичной матрице), то говорят, что *матрица  $\Phi(t)$  нормирована* в точке  $t = \tau$ .

В последних терминах теорема 3 принимает вид

**Теорема 3'.** Пусть  $\tau \in I$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}^n$ . Если  $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – неособенная матрица, то  $\Phi(t) = (\varphi(t, \xi_1), \dots, \varphi(t, \xi_n))$  – фундаментальная матрица решений системы (5), и наоборот.

**Следствие 2.** Если  $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  – фундаментальная матрица решений ЛОС ОДУ (5), то общее решение системы может быть записано в виде

$$\mathcal{L}^n = \{\Phi(t)c, c = (c^1, \dots, c^n)^* \in \mathbb{K}^n\}, \quad (8)$$

а частное решение, проходящее через точку  $(\tau, \xi)$ , – в виде

$$\varphi(t, \xi) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\xi. \quad (9)$$

Если  $\Phi(\tau) = E$ , то последняя формула имеет вид

$$\varphi(t, \xi) = \Phi(t)\xi. \quad (10)$$

- 1) Для  $c \in \mathbb{K}^n$  вектор-функция  $\varphi(t) \equiv \Phi(t)$ ,  $c \equiv c^1\varphi_1(t) + \dots + c^n\varphi_n(t)$  — решение системы (1.5) как линейная комбинация ее решений (7), являющихся столбцами матрицы  $\Phi(t)$ ;
- 2) для ЛС АУ

$$\Phi(\tau)c = \xi, \quad (\tau, \xi) \in G,$$

существует решение относительно  $c$ :  $c = c_0 = \Phi^{-1}(\tau)\xi$ , ибо по теореме (3') при условиях следствия  $\Xi = \Phi(\tau)$  — неособенная матрица. Выделяя из семейства решений (8) решение, соответствующее  $c = c_0$ , получаем решение (9), проходящее через точку  $(\tau, \xi)$ . Следовательно, семейство решений (8) содержит все решения системы (5), начинающиеся в  $G$ , то есть является ее общим решением в области  $G$ .

Дальнейшее рассмотрение понятия и свойств вронскиана решений ЛС ОДУ, а также структуры пространства решений линейной неоднородной системы ОДУ окончательно проявляет фундаментальные общие с пространствами решений линейных алгебраических систем основы. Их целесообразно положить в основу изложения соответствующих разделов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бибиков Ю. Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. СПб., 2022. 304 с.
2. Фаддеев Д. К. *Лекции по алгебре*. СПб., 2023. 416 с.
3. Андреева И. А. *Математика. Линейные системы и особые решения обыкновенных дифференциальных уравнений*. С.-Пб.: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2024. (Математика в Политехническом университете). 85 с.  
<https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2024/tr24-167.pdf> DOI: 10.18720/SPBPU/5/tr24-167

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЫСЛITЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА И ОТНОШЕНИЯ В АНАЛИЗЕ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

*E. M. Богатов<sup>1,2</sup>, A. V. Боровских<sup>3,4</sup>*

<sup>1</sup>*Филиал ФГАУ ВО “Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”, Губкин, Белгородская область*

<sup>2</sup>*Старооскольский технологический институт (филиал) ФГАУ ВО “Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”*

<sup>3</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

<sup>4</sup>*Научно-образовательный математический центр Северо-Осетинского государственного университета, Владикавказ*

## **Введение**

Чтобы обсуждать роль математических мыслительных средств в истории математики, необходимо уточнить терминологию. Если придерживаться определения математики как науки об отношениях между идеализированными объектами (см. по этому поводу [1]), то *мыслительное средство* – это то, что позволяет мысленно действовать с самими объектами и указанными отношениями. Следуя [2], будем различать различать знаковые, понятийные и идеальные мыслительные средства.

*Знаковые* средства служат для замены операций с объектами операциями со знаками, обозначающими эти объекты. *Идеальные* мыслительные средства позволяют рассуждать и доказывать (сумма углов треугольника равна  $180^\circ$  только для *идеального* треугольника, составленного из *идеальных* отрезков *идеально* прямых линий). Поскольку процедура идеализации необратима (по идеальному объекту восстановить реальный невозможно), для удержания связи между реальным объектом и его идеализацией служат *понятийные* средства. Именно благодаря им можем суждение относительно идеального объекта применить к реальному.

Следует отметить, что атрибутика конкретного математического объекта зависит от того, в какую систему мыслительных средств он включен. К примеру, интеграл является знаковым средством, когда решаем задачи из сборника под редакцией Б. П. Демидовича; является идеальным средством (пределом интегральных сумм) когда про него что-то доказываем, и понятийным средством – когда выстраиваем отношение между формулой с интегралом и каким-то, например физическим, явлением.

Переходя теперь к исследованию развития математики, логично заключить, что ее история может быть представлена как история появления новых *математических отношений*; возникновение, эволюция и трансформация *систем знаковых средств*, позволяющих оперировать этими отношениями, и *систем идеальных средств*, позволяющих рассуждать об этих отношениях и что-то про них доказывать. В качестве примера рассмотрим некоторые закономерности развития теории положительных операторов.

## **Линейная теория положительных операторов: от конечномерного уровня к абстрактному**

Здесь нам потребуется новый термин: *математический конструкт* – осмысленное отношение между математическими мыслительными средствами, выраженное, как правило, в виде теорем, признаков, принципов, критериев и т. п. Одним из первых таких конструк-

тов в теории положительных операторов явилась теорема Перрона<sup>1</sup> (1907), выражающая отношение между положительностью элементов матрицы и наличием наибольшего по модулю, простого положительного собственного значения и соответствующего ему собственного вектора  $A$  с положительными координатами.

Перенос приведенного отношения в бесконечномерную область стал возможен благодаря появлению теории Фредгольма, позволяющей ассоциировать системы линейных уравнений, состоящих из бесконечного числа переменных и уравнений, с интегральным уравнением. При этом знаковое средство векторной алгебры – матрица  $A$ , действующая на конечномерный вектор  $X$ , в теореме Р. Ентча (1912) трансформировалась в интеграл

$$Ax(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b K(s,t)x(t)dt, \quad (1)$$

где  $K(x,t)$  – симметричное ядро,  $x(t)$  – непрерывная функция.

В конструкте Ентча было представлено отношение между положительностью ядра оператора  $A$  из (1) и существованием его наименьшего по модулю, простого положительного собственного значения  $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ , которому соответствует положительная на интервале  $(a,b)$  собственная функция.

Еще одно мыслительное средство, сыгравшее важную роль в изучении положительности – *позитивная последовательность*, определение которой было дано М. Г. Крейном (1937) и восходило к идеям Ф. Рисса (1928):

*Если для всех положительных (в обычном смысле) многочленов  $P(t)$  вида*

$$P(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t), \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad t \in [a,b], \quad x_i(t) \in C[a,b],$$

*функционал  $B(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$  также положителен, то последовательность  $\{c_i\}$  называется позитивной.*

После того как определение позитивности было распространено Крейном (1938) на произвольные функционалы  $F$ , действующие в бесконечномерном (банаховом) пространстве  $E$ , в виде способности  $F$  преобразовывать элементы некоторого конуса  $K \subset E$  в неотрицательные (в обычном смысле) элементы, осталось приложить совсем немного усилий к переходу на уровень операторов. Указанный переход стал возможен благодаря переносу ряда фактов теории  $n$ -мерных выпуклых множеств Минковского (прежде всего, теоремы об отдельности) на банаховы пространства (G. Ascoli, 1932; S. Mazur, 1933), с введением соответствующих понятий и операциональных систем. Однако и здесь на первых порах не обошлось без опоры на конечномерные результаты, прежде всего, из области теории осцилляционных матриц (подробности см. в [3]). Аналогия с вполне неотрицательными матрицами помогла ученику М. Г. Крейна М. А. Рутману (1940) дать понятие *сполне позитивного линейного оператора*, некоторая натуральная степень которого преобразует любой граничный элемент телесного конуса  $K$  в его внутренний элемент. Такое нововведение позволило представить отношения между положительным оператором и его спектральным радиусом, фигурирующие ранее в теореме Ентча, в *абстрактном* виде:

<sup>1</sup> Точные литературные ссылки на соответствующие источники, использованные в докладе, можно найти в [3].

*Вполне непрерывный линейный оператор  $A$ , вполне позитивный относительно телесного конуса  $K$ , имеет в этом конусе один и только один собственный вектор. Соответствующее ему собственное значение является наибольшим по модулю положительным собственным значением оператора  $A$ .*

### **Нелинейная теория положительных операторов: первые шаги и дальнейшее развитие**

Отсутствие работ предшественников в конечномерной ситуации до начала 1920-х гг. не помешало начать выстраивать отношения между свойствами нелинейного ядра интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s)) ds$$

и наличием у него положительных собственных элементов (П. С. Урысон, 1923).

Как отмечал М. А. Красносельский (1959), предположения Урысона относительно ядра  $K(x, s, y(s))$  отсылают нас к его вогнутости как функции переменной  $y$ , что позволяет доказывать сходимость метода последовательных приближений при исследовании положительной разрешимости этого уравнения, апеллируя к скалярной ситуации. Похожая апелляция была осуществлена и на абстрактном уровне (М. А. Рутман, 1948). Этот шаг привел к необходимости наложения ряда дополнительных условий на нелинейный оператор  $A$ :

1) монотонность по конусу:  $x \succ y \Rightarrow Ax \succ Ay$ ;

1) ограничение на рост значений оператора  $A$  вдоль некоторого луча внутри конуса:

$$\exists (u \in K; c > 0, \varepsilon > 0) [A(tu) \succ ctu] \forall (t \in [0, \varepsilon]).$$

Здесь выражение  $x \succ y$  означает, что  $(x - y) \in K$ , причем отношение  $\succ$  обладает свойствами обычного знака  $\geq$ .

Приведенные требования позволили Рутману усилить теорему Ентча, поскольку при их выполнении уравнение

$$Ax = \lambda x, \quad x \in K \subset E,$$

для вполне непрерывного оператора  $A$  всегда имеет положительное решение ( $\lambda > 0$ ,  $x \in K$ ), где норма элемента  $x$  может выбрана произвольно.

Таким образом, понятийное мыслительное средство – положительное решение – трансформировалось из положительной (в обычном смысле) функции в функцию, принадлежащую конусу, состоящему из положительных элементов, причем положительность теперь имеет уже совершенно абстрактный вид, для которого неотрицательные векторы или функции являются лишь “частным случаем”.

Изучение возможности получения абстрактного аналога теоремы Урысона в привело к необходимости введения нового класса операторов [4] –  $u_0$ -вогнутых операторов. Оператор  $A$ , действующий в банаевом пространстве  $E$ , полуупорядоченном посредством конуса  $K$ , называется  $u_0$ -вогнутым, если этот оператор положителен, монотонен, преобразует ненулевые элементы конуса внутрь конусного отрезка  $[\alpha u_0, \beta u_0]$  и для любого элемента  $\varphi \in K$ , такого что  $\varphi \succ \gamma u_0$ , ( $\gamma > 0$ ), и для любых чисел  $a, b$  из интервала  $(0, 1)$  можно указать такое положительное число  $\eta$ , что

$$A(t\varphi) \succ (1 + \eta)tA(\varphi) \quad t \in [a, b].$$

Свойства  $u_0$  – вогнутого оператора помогли Красносельскому и Ладыженскому доказать абстрактный аналог теоремы Урысона о спектре.

**Теорема 1.** *Пусть  $A$  является  $u_0$ -вогнутым, вполне непрерывным оператором, асимптотически близким к линейному оператору  $Q$*

$$\lim_{\substack{\|\varphi\| \rightarrow \infty \\ \varphi \in K}} \frac{\|A\varphi - Q\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0$$

*и имеющим в точке  $\theta$  производную Фреше  $P$ :*

$$\lim_{\substack{\|\varphi\| \rightarrow 0 \\ \varphi \in K}} \frac{\|A\varphi - P\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

*Тогда позитивный<sup>2</sup> спектр оператора  $A$  состоит из интервала  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha$  – положительное собственное значение оператора  $P$ , а  $\beta$  – или ноль или положительное собственное значение оператора  $Q$ . При этом каждому собственному значению  $\lambda \in (\alpha, \beta)$  оператора  $A$  соответствует только один положительный собственный вектор  $\varphi_\lambda$ , отличный от  $\theta$ .*

Как видим, выражение отношения между положительностью и спектральными свойствами оператора, представленного в абстрактных терминах в теореме 1, потребовали трансформации ряда мыслительных средств математического анализа: вогнутости, дифференцируемости, асимптотической близости и др., которые обогатили теорию операторов как за счет расширения области применения теоремы Урысона, так и за счет пополнения арсенала методов использования указанных средств.

### Заключение

В систему мыслительных средств теории положительных операторов следует включить несколько групп мыслительных средств:

- 1) понятия, относящиеся к *характеризации конусов* (телесные, воспроизводящие, нормальные, правильные и т. п. конусы [5]) и к банаховым пространствам, упорядоченных конусом;
- 2) понятия, относящиеся к *положительности функционалов и операторов*. В абстрактном случае сюда будут входить дефиниции, использующие идеи монотонности ( $u_0$  – монотонный оператор), вогнутости ( $u_0$  – вогнутый оператор) и мажорируемости ( $u_0$  – ограниченный оператор, монотонная миноранта и мажоранта). Сюда же следует отнести понятия растягивающего и сжимающего конуса оператора;
- 3) понятия, *пришедшие из математического анализа*: сильная и асимптотическая производная по конусу, выпуклый и вогнутый оператор;
- 4) понятия, *связанные с определением вращения бесконечномерных векторных полей*, в том числе понятие относительного вращения (Ю. Г. Борисович, 1964).

Перечисленные мыслительные средства составляли к середине 1960-х гг. ядро теории положительных операторов. Они выступали как в роли понятийных, так и в роли идеальных средств. С их помощью были не только получены обобщения теорем Ентча и

<sup>2</sup>Позитивный спектр – это совокупность тех точек спектра, которым отвечают положительные собственные векторы.

Урысона, но и доказан ряд абсолютно новых теорем (конусная теорема Красносельского о неподвижной точке<sup>3</sup>, критерий наличия нескольких неподвижных точек, теорема о точках бифуркации, признак сходимости итерационной последовательности для вогнутых операторов и др. [3]).

Что касается знаковых средств, то их перечень оказался невелик: обозначение конуса ( $K$ ), упорядоченности в конусе ( $\succ$ ), миноранты ( $A^-$ ) и мажоранты ( $A^+$ ) оператора  $A$ ,  $u_0$  – вогнутых ( $u_0$  – монотонных,  $u_0$  – ограниченных) операторов, а также  $\{K, u_0\}$  – вогнутых операторов (И. А. Бахтин, 1957). Малость величины списка новых знаковых средств можно объяснить тем, что теория положительных операторов с конца 1930-х гг. являлась частью функционального анализа, поэтому в ней использовались уже устоявшиеся обозначения.

Отметим, что ряд мыслительных средств и конструктов обсуждаемой теории вышли за рамки математики и стали инструментом исследования (в том числе глобального) нелинейных систем [7]. Сюда в первую очередь следует отнести нелинейную механику с задачей о формах продольного изгиба сжатого стержня [8] и гидродинамику с задачей о профиле установившихся волн немалой амплитуды [9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. *Архитектура математики*. Матем. просвещение (математика, ее преподавание, приложения и история). 1960. № 5. С. 99–112.
2. Боровских А. В. *О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как совокупность мыслительных средств*. Вестник Московского университета. Серия 20. 2024. Т. 22. № 2. С. 61–82.
3. Богатов Е. М. *Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М. А. Красносельского*. Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика. Физика. 2020. Т. 52. № 2. С. 105–127.
4. Красносельский М. А., Ладыженский Л. А. *Структура спектра положительных неоднородных операторов*. Труды ММО. 1954. Вып. 3. С. 321–346.
5. Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
6. Kwong M. K. *The topological nature of Krasnoselskii's cone fixed point theorem*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2008. V. 69. Iss. 3. P. 891–897.
7. Богатов Е. М. *Об основных положениях нелинейного функционального анализа, как одного из базовых инструментов качественного исследования нелинейных систем*. История педагогики и естествознания. 2023. № 2. С. 16–21.
8. Бахтин И. А., Красносельский М. А. *К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости*. ДАН СССР. 1955. Т. 105. № 4. С. 621–624.
9. Красовский Ю. П. *К теории установившихся волн немалой амплитуды*. Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 6. С. 1237–1240.

<sup>3</sup>Ее можно поставить в один ряд с теоремой о неподвижной точке Брауэра и Шаудера – см. [6]

## ГЕЙМИФИКАЦИОННАЯ СИСТЕМА КУРСА ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ «СПАСТИ ОКЕАН» И ЕЕ АПРОБАЦИЯ

Д. А. Збродько<sup>1</sup>, А. В. Фролова<sup>2,3</sup>, Т. М. Сирина<sup>2,3</sup>, М. А. Долматова<sup>4</sup>

<sup>1</sup> АНО «Консультационный центр «Резонанс», Томск

<sup>2</sup> Школа олимпиадной математики «Пять в уме», Новосибирск

<sup>3</sup> Школа «Дио-Ген», Новосибирск

<sup>4</sup> Свободный исследователь

В рамках Мастерской команде проекта предлагалось построить геймифицированную систему курса школьной математики, используя различные игровые механики, чтобы сделать процесс обучения более привлекательным и интересным для обучающихся.

### Описание геймификационной системы

Геймификационная система «Спасти океан» – это надстройка над процессом изучения курса математики за 5 класс. В начале года дети оказываются на дне Марианской впадины. Им предстоит пройти 7 уровней и победить 4 монстров. В конце учебного года ученикам нужно будет победить финального (четвертого) монстра, спасти Мировой океан и выйти на побережье.

**Важный принцип.** Геймификация – это прежде всего про добровольность. Система создана таким образом, что при отсутствии желания ребенок может в ней не участвовать и это никак не повлияет на его обычную учебу.

**Уровни.** Количество уровней соответствует количеству изучаемых тем. Переход на следующий уровень происходит по результатам усвоения материала прошлой темы.

**Баллы.** Внутриигровая валюта – баллы. На них можно покупать артефакты и сбивать монстрами уровень «злой энергии». Получить баллы можно за контрольные, самостоятельные и домашние работы, а также за урочную и внеурочную деятельность на усмотрение учителя.

**Животные.** На каждом уровне ученики могут выбрать себе одно из двух или трех животных, с которым они хотят дружить. В начале года животное с первого уровня появляется о четырех монстрах, которые поработили всю Марианскую впадину, и артефактах, которые могут помочь ученикам в борьбе за спасение океана.

**Артефакты.** Артефакты покупаются для друга-животного за баллы. Различные комбинации из трех артефактов дают дополнительные возможности в учебной деятельности. При этом на первом уровне доступны для покупки только 3 артефакта, на каждом следующем уровне становятся доступными еще 3 артефакта.

**Монстры.** В начале каждой четверти появляется один из монстров и рассказывает, как он атакует в случае «проигрыша» учеников. В случае «победы» учеников монстр не наносит урон. Условия «победы» различаются у разных монстров, но всегда зависят от количества двоек в классе по результатам проверочной работы. Если к концу четверти школьники в сумме набирают нужное количество баллов для снятия «злой энергии» монстра, то он переходит на сторону учеников, иначе остается бороться на стороне зла.

В начале учебного года ученики находятся на дне Марианской впадины. Цель – спасти океан от монстров и выбраться на побережье к концу учебного года. Подъем из глубины на побережье разделен на 7 уровней – по числу тем в курсе 5 класса, т. е. 1 уровень – 1 тема. Переход на следующий уровень происходит по результатам усвоения материала прошлой темы. Разработчики предполагают, что переход с уровня на уровень будет происходить

у всего класса автоматически по факту окончания уроков по теме, но учитель может использовать переход на следующий уровень как стимул. Например, если ученик отстал по последней теме, можно дать ему возможность сделать дополнительную работу, чтобы перейти на следующий уровень вместе с остальными одноклассниками.

На каждом уровне ученик может выбрать себе одного из двух или трех животных, с которым он хочет дружить. Эти животные представлены в виде карточек, которые выдаются ребенку на руки. Карточки животных остаются с ребенком до конца года (т. е. к концу года у ученика будет 7 карточек друзей-животных). В начале года животное с первого уровня повествует о четырех монстрах, которые поработили всю Марианскую впадину, способах борьбы с монстрами и артефактах, которые могут помочь ученикам. Таблицу друзей-животных смотрите в методических рекомендациях к геймификационной системе.

Ребенок в течение учебного года может приобретать своим животным какие-то артефакты за заработанные баллы. На первом уровне доступны для покупки только 3 артефакта, на каждом следующем уровне становятся доступными еще 3 (можно приобретать артефакты и с предыдущих уровней). Некоторые наборы из 3 артефактов образуют сеть, для получения одного сета необходимо собрать артефакты с одного или нескольких уровней.

### ***Начисление баллов***

Баллы зарабатываются выполнением работ: домашней, самостоятельной, контрольной. В 5 классе всего предполагается 10 контрольных работ, 14 самостоятельных работ, 50 домашних заданий. Также предполагаются дополнительные активности в виде докладов и интересных рассказов на уроке (на усмотрение учителя), за которые в сумме за год можно будет получить 300 баллов.

### ***Основная таблица перевода оценок в баллы***

Оценка/тип работы	Контрольная	Самостоятельная	Домашняя
5	100 баллов	50 баллов	10 баллов
4	40 баллов	40 баллов	7 баллов
3	25 баллов	25 баллов	5 баллов
2	0 баллов	0 баллов	0 баллов

Если контрольные работы оцениваются по 100-балльной шкале, то ребенок получает столько баллов, сколько выставлено за работу. Аналогично, если самостоятельные или домашние работы оцениваются по другой шкале, то баллы стоит ставить пропорционально разбалловке в таблице. За год за учебную деятельность можно получить максимум 2200 баллов.

Также возможно заработать дополнительные 300 баллов, например, за доклад (30 баллов), за активность на уроке (5 баллов) и т. д.

**Комментарий.** Это один из возможных расчетов баллов. Учитель может использовать свою систему начисления баллов, но стоит придерживаться максимума в 2500 баллов за год, поскольку от этого зависит игровой баланс.

### ***Использование баллов***

Учет заработанных и потраченных баллов ведется учителем. Ученики могут потратить баллы: 1) на артефакты; 2) на снижение «злой энергии» монстров.

С таблицей артефактов можно ознакомиться в методических рекомендациях к геймификационной системе.

Каждый сет действует только один раз, т. е. если сет использован, то такого сета у ребенка больше нет, но можно купить артефакты повторно и снова собрать сет. Учащимся рекомендуется использовать сеты до конца учебного года. Если сеты остались неиспользованными или получены в конце учебного года, то их судьба решается учителем. Например, артефакты можно переносить на следующий учебный год. Каждому сету соответствует бафф (бафф (англ. buff) – понятие в компьютерных играх, обозначающее временное усиление игрока). Это соответствие сразу известно детям (ищите в методических рекомендациях, также оно есть в книжке с Правилами игры (для учеников), с. 4–7).

Стоимость артефактов учитель может определять самостоятельно с учетом игрового баланса: необходимо, чтобы «серьезные» баффы стоили дорого, а щутливые – дешево. Помимо приобретения артефактов для друзей-животных, баллы нужны для борьбы с монстрами. У каждого монстра есть своя «злая энергия». Уровень этой энергии разный у всех монстров. Перед вывешиванием монстра впишите заранее его уровень энергии. Чтобы победить монстра, нужно обнулить его «злую энергию»: каждый ученик в классе «жертвует» сколько-то из своих баллов, и «злая энергия» монстра уменьшается на эту величину. Периодически (на усмотрение учителя) нужно указывать на карточке монстра, сколько «злой энергии» у монстра осталось.

В 4 четверти самый сильный монстр – Левиафан. Если мы его побеждаем, то в итоге предотвращаем выход Левиафана из Мирового океана и спасаем мир.

*Комментарий.* Цель – помимо выхода на побережье все-таки обнулить монстров, потому что на побережье мы должны выйти просто в силу окончания учебного года.

*Комментарий.* Зная, что у учеников будут отниматься баллы за то, что одноклассники получают двойки за проверочные работы, другие ученики могут расстраиваться. В этот момент важно рассказать о том, что это общая борьба с монстром, а также дополнительно мотивировать детей баллами. Например, можно давать баллы детям, которые помогают своим отстающим одноклассникам, а отстающим детям можно давать дополнительные баллы за факт улучшения (т. е. ученик и так получит больше баллов, если напишет контрольную на 4, а не на 3, но и за факт улучшения тоже добавится еще 5 баллов).

### *Использование системы в учебном процессе*

Для того чтобы внедрить геймификационную систему, достаточно ознакомиться с методическими рекомендациями и распечатать все материалы. Система может быть использована не только для 5, но и для 6–8 классов, а также для других школьных предметов.

### *Апробация*

В рамках БММ эксперименты не проводились, но данная система была апробирована в 2024–2025 учебном году в школе неформального образования «Резонанс» в Томске на учениках 7 класса. В выбранном классе учатся 16 учеников. А также в данной школе практикуют иную систему оценивания – в 100-балльной шкале. При апробации необходимо это было учитывать.

С точки зрения учителя, взявшегося прикладывать эту систему в учебный процесс, первая сложность будет заключаться в схватывании всей сюжетной составляющей и обеспечивающих ее процессов. Держать в актуальной памяти, в какой момент нужно объявить о том или ином событии, подготовить распечатки и вводить синхронно учебным процессом. Для этого была создана электронная таблица учета успеваемости учеников, в которой фиксировалось выполнение домашних заданий, самостоятельных и контрольных работ.

Поскольку для проведения апробации был выбран 7 класс, то нужно было переложить «системные условия» на учебный план курса именно этого класса. Система предполага-

гает 7 отдельных уровней и требует 7 отдельных тем, либо урезания некоторых уровней в случае недостатка тем, либо объединения тем в один уровень, так как новых карточек самостоятельно включить в систему больших затрат не удастся. В нашем случае в программе 7 класса имелось также 7 тем, что облегчило адаптацию системы. Примерно через неделю после запуска системы можно было слышать на переменах разговоры учеников о выстраивании лучшей стратегии для получения баллов и борьбы с монстрами – сюжетная линия и игровые механизмы их привлекали. Ученики уточняли о возможностях получения артефактов и как их можно использовать.

Ажиотаж то стихал, то возобновлялся. Особенно с появлением новых монстров в начале четверти, а также перед написанием контрольных и самостоятельных работ – цель минимизировать потери своих баллов посредством более успешной сдачи контрольных точек.

Можно отметить, что появление более стоящих артефактов отложено на более поздний срок, что понижало интерес после первых позитивных эмоций от только что введенной игровой системы. И многие ученики не видели ценности в их приобретение. В связи с этим стоит пересмотреть баланс артефактов – сделать появление более значимых несколько ранее, чтобы ученики оценили приятное использование и увидели их ценность. В свою очередь это нивелирует просадку интереса примерно в первой трети учебного года.

Первая апробация закончилась тем, что ученикам не хватило нескольких очков, чтобы одолеть главного злодея. Но они справились с предыдущими тремя. Можно выделить несколько причин такой ситуации: во-первых, учителю не удалось к концу года поддержать важность борьбы против главаря, зарядить, воодушевить учеников, во-вторых, усталость их к концу года. Возможно, это место тоже требует корректировки баланса: как лучше завершить год с геймификационной системой, чтобы не потерялась радость преодоления трудности, игровой, и ощущением невозможности это сделать?

*Работа выполнена в рамках Большой математической мастерской 2024 и поддержана Математическим центром в Академгородке.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Методические рекомендации по геймификации курса школьной математики.* Проект Большой математической мастерской в Математическом центре в Академгородке. Новосибирск. 2024. 15 с.
2. *Аналитические материалы «По результатам проведения Национального исследования качества математического образования в 5–7 классах».* Подготовлены Московским центром непрерывного математического образования. 2014–2015. [www.mccme.ru](http://www.mccme.ru).
3. Виленкин Н. Я., Жохов В. И., Чесноков А. С. [и др.]. *Математика, 5 класс (базовый уровень) : учебник в 2 частях.* М. : Просвещение, 2024.

## О ЗАПУСКЕ ПИЛОТНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ НА ММФ НГУ

*A. B. Карпенко*

*Новосибирский государственный университет*

Механико-математический факультет НГУ – классический факультет классического университета с более чем шестидесятилетней историей. ММФ реализует программы по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование», «Математика и компьютерные науки», «Математика и механика», «Компьютерные и информационные науки».

Факультет борется за абитуриентов, конкурируя как со столичными университетами, так и с сильными региональными университетами, в том числе ТГУ, СФУ, КФУ, УрФУ и др. С 2021 года для снижения внутренней конкуренции набор производится не на отдельные направления, а на укрупненную группу «Математика и механика».

Реформирование образования на таком факультете – сложный и ответственный процесс. Важно сохранить высокий уровень качества подготовки специалистов, а также обеспечить им возможность обучения в ведущих магистратурах и аспирантурах России и мира. Именно поэтому в 2019 году руководством факультета было принято решение о том, что ключевая ставка будет делаться на запуск пилотных программ – профилей.

В рамках доклада речь пойдет об изменениях в структуре портфеля образовательных программ механико-математического факультета НГУ, произошедших в период с 2019 года по настоящее время. Ниже приведем основные эффекты.

Запуск пилотных профилей позволил ММФ НГУ привлечь мотивированных абитуриентов, готовых пройти отбор на соответствующую программу, а также показать существенное преимущество классических программ – осознанный выбор в процессе обучения.

Привлечение к обучению в магистратуре факультета иностранных обучающихся позитивно сказалось на наборе в аспирантуру, международности аспирантуры и повышении защищаемости в PhD-совете НГУ иностранных граждан.

Реализация профилей и модулей позволила провести апробацию отдельных курсов, педагогических подходов и отдельных инструментов. В настоящее время ведется работа по систематизации и оформлению накопленного опыта.

*Автор благодарит коллеги из образовательных программ, которые взяли на себя смелость разработать и запустить программы.*

*Разработка программ «Инженерная школа: искусственный интеллект и прикладной инжиниринг», «Исследовательская группа фундаментальной математики», «Математические методы и информационные технологии в механике», «Прикладное машинное обучение и большие данные» выполнена при финансовой поддержке Математического центра в Академгородке (Соглашение № 075-15-2022-282).*

## ГРАФОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

*Н. Ю. Кропачева<sup>1</sup>, Г. В. Павилайнен<sup>1</sup>, Г. В. Федорова<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup>Военно-морской политехнический институт, Санкт-Петербург

В условиях стремительно возросших объемов информации и скорости ее обмена возникает необходимость новых подходов к обучению студентов и курсантов, развитие их когнитивной (познавательной) способности, формирование информационной компетенции. Исследования показывают, что человеческая память сохраняет приблизительно 10 % услышанного, 50 % — увиденного и 90 % — проделанного собственоручно. Когнитивный подход в обучении связывает между собой традиционные части познавательного процесса – восприятие, внимание, память, воображение и мышление – в единое целое, чтобы обеспечить существование человека в информационной перенасыщенной среде.

Обучающие технологии с элементами моделирования способствуют развитию логического мышления, формируют умения и навыки исследовательской интеллектуальной деятельности. При этом суть познавательного процесса заключается в том, чтобы обучающийся построил образ изучаемого объекта, показал состав и иерархию функциональных элементов, направленных на достижение поставленной цели.

В последние годы для решения разнообразных задач активно используются методы теории графов – графовые методы. Они дают простой и мощный инструмент построения моделей и решения задач упорядочения объектов. Использование графового подхода позволяет представить объекты и процессы исследования в доступной для понимания и анализа наглядной форме, избежать многих логических ошибок.

Рассмотрим возможности применения теории графов при изучении раздела «Математический анализ» и, в частности, «Дифференцирование сложной функции нескольких переменных».

Пусть требуется найти полную производную функции  $z = f(x, y)$ . Будем использовать графическое представление структуры сложной функции нескольких переменных. Переход от исходных аргументов к итоговому значению  $z = f(x, y)$  сложной функции зададим графиком, вершинами которого служат последовательно вложенные аргументы, а роль весов ребер выполняют формулы-правила перехода от аргумента к аргументу. Построенный график наглядно иллюстрирует правило дифференцирования сложной функции или так называемое цепное правило, которое позволяет вычислить производную композиции двух и более функций на основе частных производных.

Рассмотрим первый случай: пусть в некоторой области  $D$  задана дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$ , причем каждая из переменных  $x, y$ , в свою очередь, является дифференцируемой функцией независимой переменной  $t$ , то есть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Таким образом,  $z$  фактически является функцией одной переменной. Представим схему, соответствующую этой ситуации (рис. 1). В этом случае первый переход по верхним стрелкам соответствует частным производным  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Далее переходим к переменной  $t$ . Переход по левой ветке схемы соответствует производной  $(\frac{\partial z}{\partial x})(dx/dt)$  соответственно, а по правой –  $(\frac{\partial z}{\partial y})(dy/dt)$ . Согласно структуре графа, можно пойти либо по левой ветке, либо по правой, то есть при вычислении производной будем суммировать соответствующие производные. В этом случае производная  $z$  по  $t$  называется полной производной и

будет вычисляться по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Как видим, структура формулы соответствует структуре рис. 1.



Рис. 1

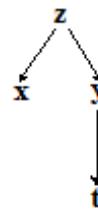


Рис. 2

В частном случае, если  $y = y(x)$ , получаем  $z(t) = f(x, y(x))$  (рис. 2). Структура схемы совпадает со структурой предыдущего рисунка. Предполагая, что  $z = f(x, y)$ ,  $y = y(x)$  дифференцируемы, для производной сложной функции  $z(t) = f(x, y(x))$  получим формулу (у первого слагаемого пропадает сомножитель  $dx/dt$ ):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Рассмотрим второй случай: пусть в некоторой области  $D$  задана дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$ , причем каждая из переменных  $x, y$ , в свою очередь, является дифференцируемой функцией независимых переменных  $u$  и  $v$ , то есть  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Представим схему, соответствующую этой ситуации (рис. 3):

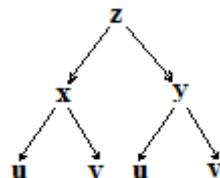


Рис. 3

В этом случае первый переход по верхним стрелкам соответствует частным производным  $\partial z / \partial x$  и  $\partial z / \partial y$ . Следующий переход, в свою очередь, соответствует частным производным по переменным  $u$  и  $v$  для переменных  $x$  и  $y$ :  $\partial x / \partial u$  и  $\partial x / \partial v$ ,  $\partial y / \partial u$  и  $\partial y / \partial v$ . Проводя аналогию с первым случаем, для функции  $z$  можем вычислить частные производные по переменным  $u$  и  $v$  (рис. 4):

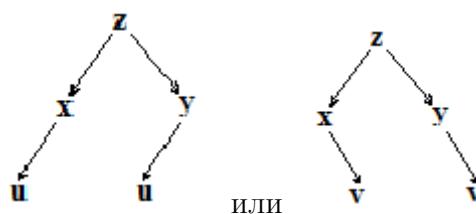


Рис. 4

В этом случае формулы вычисления частных производных примут вид

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно вывести формулы дифференцирования сложной функции любого числа независимых переменных и любом числе промежуточных аргументов. Структура формулы будет также соответствовать структуре соответствующего графа.

*Пример.* Данна функция  $w = x^2y^3 - yz^2 + 2xz$ , где  $x = t$ ,  $y = \ln t$ ,  $z = 3t^3$ . Необходимо вычислить производную функции  $w$  от  $t$ .

Сначала графически изобразим структуру функции  $w$  (рис. 5):

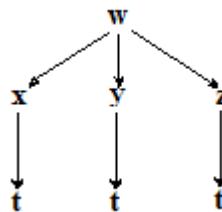


Рис. 5

В этом случае формула полной производной сложной функции будет выглядеть как

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Сначала находим частные производные:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 + 2z, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 - z^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2yz + 2x.$$

Далее вычисляем производные промежуточных переменных:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = 9t^2.$$

В итоге получаем:

$$\frac{dw}{dt} = (2xy^3 + 2z) + (3x^2y^2 - z^2) \frac{1}{t} + (-2yz + 2x) 9t^2.$$

И теперь надо вместо  $x$ ,  $y$ ,  $z$  подставить их зависимости от  $t$ :

$$\frac{dw}{dt} = [2t(\ln t)^3 + 6t^3] + [3t^2 \ln^2 t - (3t^3)^2] \frac{1}{t} + [-2 \ln t(3t^3) + 2t] 9t^2.$$

Как видим, графовое представление структуры формулы позволяет при изложении теоретического материала решать следующие задачи обучения:

- стимулирование учебно-познавательной активности обучающихся;
- повышение их самоорганизации;

- развитие логики рассуждений, что позволяет лучше усваивать материал;
- совершенствование формы записи мыслей, что делает ее более компактной и обозримой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kolesov A. K., Kropacheva N. Y. *The use of graph simulation to enhance learning of students*. 3<sup>rd</sup> International Conference «Research, Innovation and Education» by SCIEURO in London, 25–30 January 2016. P. 89–92.
2. Бунякина Е. В., Кропачева Н. Ю., Федоров А. Б., Федорова М. Ю. *Модели теории графов при когнитивном подходе в обучении*. Сб. статей по материалам межвузовской научно-практической конференции «Адаптация системы профессиональной подготовки военных специалистов в вузах к развитию Вооруженных сил Российской Федерации». Санкт-Петербург, 30 мая 2019. СПб: ВУНЦ ВМФ ВМА ВМИ, 2020. С. 332–339.
3. Вятский государственный университет: [Эл. ресурс]. URL: <https://dev.e.vyatsu.ru/mod/page/view.php?id=324234&lang=en>.

## КАБИНЕТ ПРАКТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ: ОТ ПРОШЛОГО ДО НАСТОЯЩЕГО

*Г. А. Кутеева, О. И. Шаталова, Г. А. Синильщикова*

Санкт-Петербургский государственный университет

Тема этого доклада посвящена появлению и развитию одного из центров физико-математического образования в России – Кабинета практической механики при физико-математическом факультете Императорского Санкт-Петербургского университета. Этот Кабинет был открыт в 1865/66 учебном году доцентом Михаилом Федоровичем Окатовым (1829–1901), что подтверждается документами, хранящимися в Санкт-Петербургском государственном университете [1, 2]. Таким образом, в 2025 году отмечается 160-летие основания Кабинета.

В июле 2025 года сотрудники Музея истории физики и математики СПбГУ создали онлайн-выставку на платформе izi.travel [3], посвященную этому событию. Там представлены фотографии подлинных экспонатов из Кабинета практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета, а также фотографии некоторых документов (см. рис. 1).



Рис. 1. Экспонаты выставки. (а.) Степоходящая машина П. Л. Чебышева. Черновая модель первой в мире шагающей машины, экспонированной на Всемирной выставке в Париже в 1878 году. (б.) Механизм Чебышева. (в.) Выпуклый трехсторонник в квадрате (треугольник Рело). (г.) Сердцевидный эксцентрик

Настоящий доклад состоит из двух частей. Первая часть – история Кабинета практической механики, его возникновение, дальнейшее развитие вплоть до революции 1917 года

и несколько позже. Приводятся также небольшие справочные материалы о персоналиях, которые связаны с Кабинетом в тот или иной момент времени.

Если погружаться в историю этого Кабинета, то оказывается, что вся тема очень обширна. Далее представим тезисно основные моменты доклада.

1. 1865 год. Организован Кабинет практической механики. Первые экспонаты. Михаил Федорович Окатов. Его диссертации на степень магистра и доктора прикладной математики. О М. Ф. Окатове известно не очень много. Краткая информация о нем дана в Сетевом биографическом словаре [4], где указывается, что М. Ф. Окатов исследовал коэффициент поперечной деформации для различных сортов стали, а также способствовал организации в университете кабинета практической механики. Приведем новый для авторов исторический документ из цифрового архива Российской государственной библиотеки, связанный с М. Ф. Окатовым [5]. В документе указывается, что к 1878 году М. Ф. Окатов имел чин IV класса, несколько орденов, был заслуженным и экстраординарным профессором С.-Петербургского университета (рис. 2).

ЧИНЫ ЧЕТВЕРТОГО КЛАССА.			
<b>1408</b>	<b>ОКАТОВЪ</b>		
	Михаилъ Федоровичъ. (Д. Ст. Сен.) Заслуж. Профессоръ. Радио-гравиметристъ. Профессоръ ИМ. ИЕР. С.-Петербургск. Университета.	Сл. Стан. 2 ст. 1860 Сл. Акад. 2 ст. 1872 Имеетъ медаль изъ пам. войны 1853—1856 г.	
	Въ службѣ съ 1848 Сент. 23 — 4 классъ — 1875 Дек. 26		
	(Былъ изъ отставки съ 1 Июля по 1 Сент. 1849 г.)		
	Жалов. 1600 р. Столон. 200 — Бакрт. 200 — Пенсия 1000 — 72 н. 3500 р. 72 н.		

ЧИНЫ ЧЕТВЕРТОГО КЛАССА.			
<b>1409</b>	<b>СТРЕЛЗЕДИНСКІЙ</b>		
	Адольфъ Осиповичъ. (Д. Ст. Сен.) Офицеръ Профессоръ Кавказск. Восто- чн. Института.— Большой личный, но во- енные части, пра- таковъ Всено- Медицинск. Управле- ній.	Сл. Акад. 3 ст. 1863 Сл. Стан. 2 ст. съ ИМП. Кор. 1871 Имеетъ медаль изъ пам. войны 1853—1856 г.	
	Въ службѣ съ 1850 Окт. 3 — 4 классъ — 1875 Дек. 26		
	Жалов. 2400 р. Столон. 300 — Бакрт. 300 — 3000 р.		

Рис. 2. Слева страница, посвященная М. Ф. Окатову, из списка гражданским чинам IV класса, документ исправлен по 1-е марта 1878 года [5]

2. Консерваторы и хранители Кабинета. Список хранителей, составленный Николаем Владимировичем Розе, 1939 год (по материалам музея истории СПбГУ [6]). Консерваторами (хранителями) этого кабинета были молодые ученые, недавние выпускники Университета, которые были оставлены Университетом “для приготовления к профессорскому званию”.

3. Приобретаемые Кабинетом приборы и модели. 1865-1894 года. 1894 год – год смерти академика П. Л. Чебышева. Переданы в дар модели, собственноручно им изготовленные.

4. Классификация приобретаемых моделей, приборов, механизмов. Вплоть до начала революции 1917 года и несколько позже (по материалам сохранившейся Инвентарной книги [2]).

Вторая часть доклада – современное отношение к сохранившимся экспонатам. Здесь рассказывается о том, что подлинные модели и механизмы 19 века являются экспонатами офлайн- и онлайн-выставок. Студенты кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ участвуют в проектах, посвященных моделированию и анимации экспонатов.

Примерно с 2012 года прошло много занятий по лабораторно-вычислительному практикуму с использованием экспонатов музея. Во время практикума студенты проводят расчеты кинематического анализа механизмов 19 века (траектории, скорости, ускорения точек). Описание практикума и некоторых лучших решенных задач во время практикума даны в ссылках [7–9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Годичный торжественный акт в Императорском С.-Петербургском Университете, бывший 2 декабря 1866 г.* СПб., 1867.
2. *Инвентарная книга кабинета практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета.* СПб., начата 1865 г. (рукописная).
3. <https://izi.travel/ru/browse/4c25d8ac-a726-42fa-9f3a-58b2bddad48f/ru>
4. *Сетевой биографический словарь профессоров и преподавателей Санкт-Петербургского университета (1819-1917).* СПб., 2012. <https://bioslovhist.spbu.ru/person/695-okatov-mikhail-fedorovich.html?ysclid=mbr0d3w5tg598899269>
5. *Список гражданским чинам IV класса. Исправлен по 31-е декабря 1858 года / Инспекторский отд. собственной е. и. в. канцелярии.* Санкт-Петербург : Тип. Правительствующего сената, [1859]-1916. Исправлен по 1-е марта 1878 года, т. 2. 1878. [2], 1624, 45 с. : табл.
6. Розе Н. *История кафедры механики.* ЛГУ. 1939. 9 л. (Музей истории СПбГУ. Ф ФиК. Д. 449.)
7. Кутеева Г. А. *Лабораторный практикум “Кинематический анализ механизмов” на примере исторических моделей из коллекции СПбГУ.* Вторая межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом “Математика - это просто!”. Материалы конференции. 2020. С. 122–137.
8. Кутеева Г. А., Дорофеев Н. П., Тверев К. К. *Моделирование механизма “Качение эллипса по эллипсу”.* Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2022–2023 гг. Санкт-Петербург, 2023. С. 50–56.
9. Kuteeva G., Shugailo T. *Laboratory Student Workshop: Experience with Darboux Mechanism.* WSEAS Transactions on Systems. 2023. V. 22. P. 116–121.

# О ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ СОДЕРЖАНИЯ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

*Н. Д. Подуфалов*

*Российская академия образования, Москва*

Доклад подготовлен на основе выступлений автора на совместном заседании Научного совета РАО по развитию математического и естественно-научного образования и Методологического семинара Московского государственного педагогического университета (МПГУ, 25.02.2025 г.) и на Международной научно-практической интернет-конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» (МПГУ, 22-30.04.2025 г.), а также результатов анализа уровня остаточных знаний по математике, проводимого на базе Красноярского математического центра Сибирского федерального университета (КМЦ) и Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева (КГПУ им. В. П. Астафьева). В докладе рассматриваются вопросы повышения уровня и качества знаний выпускников «массовой» общеобразовательной школы, т. е. задачи модернизации «массового» общего образования.

Одной из центральных проблем, без решения которой невозможна полномасштабная реализация утвержденного Правительством РФ Комплексного плана мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования до 2030 года, является проблема выбора оптимального содержания общего образования, в первую очередь, школьных курсов математики и естественно-научных дисциплин. Например, на протяжении длительного периода времени не удается выработать консолидированное мнение ученых-математиков, учителей математики и преподавателей вузовских курсов математики по вопросам оптимизации перечня разделов высшей математики и их содержания, включаемых в учебные программы общего образования, а также модернизации содержания разделов элементарной математики.

Расширение содержания разделов высшей математики в школьном курсе, начатое в 60-е годы при проведении системной реформы математического образования, позволило повысить уровень «продвинутого» математического образования, но привело к ряду негативных последствий в «массовом» общем образовании – в условиях сокращения учебного времени, отводимого на изучении математических и естественнонаучных предметов, а также в условиях общей учебной перегрузки учеников и учителей и снижения интересов молодого поколения к точным наукам, заметно снизился уровень знаний выпускников «массовой» школы в области элементарной математики, показатели качества знаний разделов высшей математики также являются неудовлетворительными [1-4].

Результаты экспертных оценок по этим вопросам, как правило, зависят от личной позиции экспертов, а их позиции в ряде случаев значительно различаются и не удается выработать консолидированные подходы к решению проблемы оптимизации содержания школьного курса математики. Поэтому без проведения соответствующих экспериментальных исследований невозможно обеспечить научную обоснованность и объективность принимаемых решений по этим вопросам. Так же учебно-методическое обеспечение преподавания новых разделов математики должно проходить необходимую апробацию в «массовой» школе. Вместе с тем, негативная практика «силового» внесения изменений в содержание и методики преподавания школьного курса математики продолжается. Например,

недавнее введение в государственный стандарт общего образования и в учебные школьные программы разделов по теории вероятностей и математической статистике проведено без предварительной широкой экспериментальной апробации учебно-методического обеспечения и методик их преподавания в «массовой» школе. Причем, это решение было принято в условиях значительных сомнений многих специалистов в области математики и учителей по поводу самой возможности эффективного освоения «средним школьником» данных разделов математики. Попытки создать адаптированный курс тоже вызывают много вопросов – нельзя преподавать математику «на пальцах».

Вопросы модернизации содержания школьного математического образования являются системными и комплексными, а результаты их разрешения будут значительным образом влиять и на личные судьбы представителей молодого поколения, и на процессы научного и научно-технического развития всей страны. По-видимому, эти факторы стали основной причиной того, что данная проблема регулярно обсуждается в научных и образовательных кулуарах, на различных конференциях, но только сейчас задача ее решения обозначена на уровне руководства страны.

Можно констатировать, что успешность решения задач, поставленных в Комплексном плане, в первую очередь «находится в руках» ученых-математиков, преподавателей и учителей математики. Она определяется успешностью выработки консолидированных предложений по решению задачи модернизации содержания школьного курса математики. Одним из конструктивных и научно-обоснованных подходов к решению обсуждаемой проблемы может стать следующий: провести в «массовой» школе одновременное представительное и объективное тестирование по всем разделам высшей и элементарной математики, включенным в школьный курс. По итогам анализа, по каждому разделу, по которому итоги тестирования будут неудовлетворительными, принять решение либо об исключении этого раздела из школьного курса, либо о выделении на изучение этого раздела необходимого учебного времени, а также о переработке учебно-методического обеспечения с последующей его апробацией в «массовой» школе. Для достижения объективности и достоверности такого тестирования целесообразно использовать опыт, отработанный в ходе проведения ЕГЭ.

Учитывая, что уровень знаний по ряду разделов элементарной математики также низкий, необходимо провести анализ и возможную корректировку содержания курса элементарной математики и после этого определить объемы учебного времени, необходимого для изучения данных разделов, которые позволяют «среднему» учителю сформировать нужный уровень знаний и умений у «среднего» ученика.

Анализ итогов тестирования уровня остаточных знаний по математике, проводимого уже несколько лет на базе КМЦ с участием КГПУ им. В. П. Астафьева, подтверждает высказанное и показывает, что необходимо оставить в школьной программе разделы, связанные с изучением производной (возможно, уточнив объем учебного времени), а по остальным разделам высшей математики принять одно из решений, указанных выше (см. также [5–7]).

Учитывая значительное расхождение в подходах различных специалистов в области математики к решению этих вопросов, целесообразно воспользоваться опытом решения таких проблем в советский период – когда на высоком уровне создавалась представительная и компетентная комиссия, которая должна была выработать предложения по решению стоящих задач и принятию необходимых управленческих решений. Так было при проведении системной реформы математического образования. Как показал опыт проведенной реформы – это не идеальный способ решения стоящих задач, поскольку возможны опи-

бочные решения, но все же – это продвижение вперед, в ходе которого могут выявляться и устраняться возможные ошибки. Сейчас мы практически «топчемся на месте», реализуя частные решения, которые не могут существенно изменить ситуацию. Наглядный пример – выполнение относительно недавнего поручения Президента РФ о необходимости повышения качества изучения математики и информатики в средней школе. С большим запозданием была создана рабочая группа и одним из конкретных предложений было разрешить директору школы использовать на эти цели один дополнительный учебный час. В условиях большой перегрузки учебного процесса такое решение – неэффективно.

Не вызывает сомнений, что одновременно и параллельно должен проводится анализ ситуации с преподаванием естественно-научных школьных дисциплин. Там тоже стоит проблема оптимального выбора содержания и поиска более эффективных методов и методик преподавания.

Важно учитывать, что поиск оптимальных решений предстоит осуществлять в условиях значительной предметной насыщенности образовательных школьных программ, а также существенной учебной перегрузки и учителей, и учащихся. Должен быть найден разумный баланс между предметными циклами и гуманитарной направленности, и математической, и естественно-научной в рамках весьма ограниченного учебного времени. При этом нельзя упускать вопросы формирования у молодого поколения научного мировоззрения и важных для развития российского государства гражданских позиций.

После решения задачи оптимизации содержания, дальнейшая работа будет состоять уже в поиске и выборе наиболее эффективных методов и методик освоения модернизированного содержания. Для повышения эффективности этой работы нет необходимости в принятии каких-либо решений высокого государственного уровня, а требуется моральное и материальное стимулирование обществом и государством научной, учебно-методической и инновационной деятельности ученых, преподавателей и учителей, постоянная общественная и государственная поддержка их в решении задачи поиска и реализации новых дидактических решений и инноваций, и, соответственно, существенное повышение статуса и роли Учителя в российском обществе.

Не вызывает сомнений, что в решении задач модернизации содержания разделов математики, включаемых в программу общеобразовательной школы, могут и должны сыграть важную роль математические центры России.

*Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1234).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дураков Б.К., Подуфалов Н.Д. *Математическое образование в контексте методологических проблем развития российской системы образования*. Педагогика. 2018. № 7. С. 3–12.
2. Подуфалов Н.Д. *О проблемах реализации концепции развития математического образования*. Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. Отв. ред. В. Р. Майер. Красноярский гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева. Красноярск. 2018.
3. Подуфалов Н.Д. *О развитии методологии школьного математического образования*. Педагогика. 2019. № 5. С. 5–17.

4. Дураков Б. К., Кравцова О. В., Майер В. Р., Подуфалов Н. Д. *О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике*. Известия РАО. 2021. № 3 (55). С. 105–119.
5. Дураков Б. К., Кравцова О. В., Майер В. Р., Подуфалов Н. Д., Семенова Д. В. *О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике*. Педагогика. 2022. № 5. С. 57–68.
6. Дураков Б. К., Кравцова О. В., Майер В. Р., Подуфалов Н. Д., Семенова Д. В., Шевелева И. В. *О тестировании остаточных знаний по математике в 2022 году*. Педагогика. 2023. № 1. С. 51–59.
7. Подуфалов Н. Д. *О задачах по реализации Комплексного плана мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования до 2030 года и проблемах оптимизации содержания общего образования*. Труды Международной научно-практической интернет-конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» (МПГУ, 22–30 апреля 2025 года), секция 4. <https://news.scienceand.ru/апрель-2025>.

# ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ К ОБУЧЕНИЮ МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПАСНЫХ ФАКТОРОВ ПОЖАРА

*Е. И. Скафа, Е. Г. Евсеева, А. С. Гребенкина*

*Донецкий государственный университет*

Важнейшей целью обучения математике будущих инженеров в современных условиях специальной военной операции является формирование умений строить математические модели в области пожарной безопасности. Указанные модели характеризуются сложностью и громоздкостью расчетов в ходе их решения, наличием в исходных данных неизвестных и быстро меняющихся параметров, требованием оперативности решения модели. В части моделей невозможно найти аналитическое решение, такие модели могут быть решены только численными методами.

Многие ученые указывают на необходимость применения метода математического моделирования при обучении математике студентов инженерных специальностей [1; 2]. Возможности применения имитационного моделирования в процессе подготовки инженерных кадров всесторонне рассмотрены в многочисленных исследованиях [2; 3], однако построение имитационных математических моделей в сфере гражданской защиты предлагается включать в обучение исключительно студентов пожарно-технических специальностей [4; 5]. Перспективы применения таких моделей в процессе обучения студентов других инженерных специальностей не рассматривались ранее, но в настоящее время повышенных рисков и высокой опасности возникновения пожаров и других ЧС, по нашему мнению, такая подготовка крайне важна для будущих инженеров различной специализации [6].

Обучение будущих инженеров математическому моделированию опасных факторов пожара возможно при наличии педагогических кадров, в совершенстве владеющих как теоретическими основами построения математических моделей в сфере обеспечения пожарной безопасности, так и практическим опытом получения точных решений, цифровыми инструментами имитационного моделирования, методической компетентностью по применению исследовательских методов обучения.

Подготовка преподавателей математики для высшей школы в Донецком государственном университете ведется по направлениям 44.04.01 – Педагогическое образование (в рамках магистерской программы “Математическое образование”) и 01.04.01 – Математика. В связи актуальностью и широтой проблемного поля задач пожарной безопасности в современных условиях нами предложено подготовку будущих преподавателей математики в высшей школе к обучению моделированию в сфере обеспечения пожарной безопасности осуществлять в рамках вариативной дисциплины “Методика обучения математическому моделированию опасных факторов пожара”, содержание которой включает темы:

1. Цели и содержание моделирования опасных факторов пожара в помещении.  
Типологии математических моделей.
2. Методика построения интегральной математической модели пожара в помещении.
3. Зонные математические модели пожара в помещении.
4. Дифференциальные математические модели пожара в помещении.

5. Математическая модель динамики опасных факторов в начальной стадии пожара.
6. Построение статистических моделей в сфере управления деятельностью противопожарных служб.
7. Методика применения цифровых инструментов моделирования опасных факторов пожара.

Изучение предложенной дисциплины возможно в магистратуре в третьем учебном семестре после изучения дисциплин “Педагогика высшей школы” и “Методика обучения в высшей школе”, а также по направлениям 01.04.01 на базе дисциплин “Современные компьютерные технологии” и “Математические модели в современном мире” и 44.04.01 – “Логика и методология математического моделирования” и “Избранные разделы высшей математики”, где рассматривается необходимый математический аппарат для моделирования.

В качестве примера рассмотрим моделирование температурного режима внутреннего пожара с учетом начальной стадии, которое осваивается будущими инженерами при изучении темы “Математическая модель динамики опасных факторов в начальной стадии пожара”, с использованием математических моделей, относящиеся к типу зонных и интегральных моделей пожара. Зонные модели основаны на предположении о формировании в помещении двух слоев: верхнего слоя продуктов горения (задымленная зона) и нижнего слоя невозмущенного воздуха (свободная зона). Состояние газовой среды в зональных моделях оценивается через осредненные термодинамические параметры не одной, а нескольких зон, причем межзонные границы обычно считаются подвижными. Однако более целесообразно моделировать пожар в начальной стадии посредством интегральной математической модели.

Приведем пример расчета температурного режима внутреннего пожара с учетом начальной стадии по методике, описанной в [7].

**Задача.** Условное возгорание произошло в производственном помещении, характеризующемся следующими размерами: площадь пола равна  $S = 2560 \text{ м}^2$ , объем помещения  $V = 15360 \text{ м}^3$ , суммарная площадь проемов  $A = 189 \text{ м}^2$ , высота проемов  $h = 2,95 \text{ м}$ . Общее количество пожарной нагрузки для древесины составляет  $6,4 \cdot 10^4 \text{ кг}$ , что соответствует пожарной нагрузке  $q = (6,4 \cdot 10^4)/2560 = 25 \text{ кг}/\text{м}^2$ , где  $q$  – количество пожарной нагрузки для площади пола. Температура окружающего воздуха  $T_0 = 293 \text{ К}$ . Необходимо рассчитать температурный режим условного пожара.

**Решение.** Сначала определим проемность  $\Pi$  помещения. Поскольку объем помещения  $V > 10 \text{ м}^3$ , то имеем

$$\Pi = \frac{\sum A_i \sqrt{h_i}}{S}, \quad (1)$$

где  $S$  – площадь пола,  $\text{м}^2$ ;  $h$  – высота  $i$ -го проема помещения,  $\text{м}$ ;  $A_i$  – площадь  $i$ -го проема помещения,  $\text{м}^2$ .

Используя данные о параметрах помещения и размерах проемов, по формуле (1) получим

$$\Pi = \frac{189 \cdot \sqrt{2,95}}{2560} = 0,13 \text{ м}^2.$$

Количество воздуха, необходимое для сгорания 1 кг материала, равно

$$V_0 = \frac{\sum V_{0i} P_i}{\sum P_i}, \quad (2)$$

где  $V_{0i}$  –  $i$ -я пожарная нагрузка,  $\text{м}^3$ ;  $P_i$  – общее количество пожарной нагрузки  $i$ -го компонента твердых горючих и трудногорючих материалов, кг [3].

Примем пожарную нагрузку  $V_{01} = 4,2 \text{ м}^3/\text{кг}$  объему воздуха, необходимому для полного сгорания килограмма древесины при влажности воздуха 10 %. Подставляя числовые значения в формулу (2), получим для одного проема:

$$V_0 = \frac{4,2 \cdot 6,4 \cdot 10^4}{6,4 \cdot 10^4} = 4,2 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Определим удельное критическое количество пожарной нагрузки  $q_{\text{кр.к}}$  для кубического помещения объемом  $V$ , равном объему исследуемого помещения:

$$q_{\text{кр.к}} = \frac{4500^3}{1 + 500^3} + \frac{\sqrt[3]{V}}{6V_0}, \quad q_{\text{кр.к}} = \frac{4500 \cdot 0,13^3}{1 + 500 \cdot 0,13^3} + \frac{\sqrt[3]{15360}}{6 \cdot 4,2} = 5,69 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Вычислим удельное количество пожарной нагрузки  $q_k$  для исследуемого помещения:

$$q_k = \frac{\sum P_i Q_{H_i}^p}{(6S - A)Q_{H_d}^p}, \quad (3)$$

где  $Q_{H_i}^p$  – низшая теплота сгорания  $i$ -го компонента материала пожарной нагрузки;  $Q_{H_d}^p$  – низшая теплота сгорания древесины.

Значения низшей теплоты сгорания горючего материала и древесины – табличные значения, которые приведены в [3].

Учитывая, что для помещения в форме куба  $S = V^{0,667}$ , найдем

$$q_k = \frac{6,4 \cdot 10^4 \cdot 13,8}{(6 \cdot 15360^{0,667} - 189)13,8} = 18,1 \text{ кг}/\text{м}.$$

Сравнивая значения  $q_{\text{кр.к}}$  и  $q_k$ , получим  $q_k = 18,1 > 5,69 = q_{\text{кр.к}}$ . Значит, в данном производственном помещении развивается пожар, регулируемый вентиляцией (ПРВ).

Определим максимальную среднеобъемную температуру  $T_{\max}$  на стадии объемного пожара для ПРВ в интервале времени  $0,15 \leq t \leq 1,22$  с точностью до 5 % :

$$T_{\max} = 940 e^{4,7 \cdot 10^{-3}(q-30)}; \quad T_{\max} = 940 e^{4,7 \cdot 10^{-3}(25-30)} = 962 K.$$

Характеристика продолжительности (время) пожара равна

$$t_n = \frac{\sum P_i Q_{H_i}^p}{6285A\sqrt{h}} \cdot \frac{n_{\text{ср}} \sum P_i}{\sum n_i P_i}, \quad (4)$$

где  $n_{\text{ср}}$  – средняя скорость выгорания древесины,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{мин})$ ;  $n_i$  – средняя скорость выгорания  $i$ -го компонента твердого горючего или трудногорючего материала,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{мин})$ . Подставляя значения в формулу (4), получаем:

$$t_n = \frac{6,4 \cdot 10^4 \cdot 13,8}{6285 \cdot 189\sqrt{295}} \cdot \frac{2,4 \cdot 6,4 \cdot 10^4}{2,4 \cdot 6,4 \cdot 10^4} = 0,43 \approx 0,5 \text{ ч.}$$

Для ПРВ время достижения максимального значения среднеобъемной температуры  $t_{\max}$  определяется соотношением  $t_{\max} = t_n = 0,5 \text{ ч} = 30 \text{ мин}$ . Изменение среднеобъемной температуры при объемном свободно развивающемся пожаре равно [7]:

$$T - T_0 = (T_{\max} - T_0) \cdot 115,6 \cdot \left( \frac{t}{t_{\max}} \right)^{4,75} e^{-4,75t/t_{\max}}. \quad (5)$$

Подставим в последнее соотношение найденные значения максимальной температуры пожара и время достижения этого значения:

$$T - 293 = (962 - 293) \cdot 115,6 \cdot \left( \frac{t}{30} \right)^{4,75} e^{-4,75t/30}; \quad T = 293 + 7,4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{t^{4,75}}{e^{0,15t}}.$$

Получили соотношение, позволяющее определить среднеобъемную температуру пожара в рассматриваемом производственном помещении в произвольный момент времени.

По результатам выполненного расчета сделаем выводы:

– для рассматриваемого производственного помещения динамика среднеобъемной температуры свободно развивающегося пожара определяется соотношением

$$T = 293 + 7,4 \cdot 10^{-3} \cdot (t^{4,75} / e^{0,15t}), \quad t – \text{время};$$

– при данной пожарной нагрузке максимальное значение среднеобъемной температуры равно 610 и достигается на 25-й минуте развития пожара.

Моделирование температурного режима внутреннего пожара может быть также выполнено средствами различных специализированных цифровых инструментов. Удобным средством прогнозирования изменения температуры пожара является программа СИТИС: ВИМ, которая выполняет расчет динамики развития опасных факторов пожара в здании по интегральной математической модели. Поскольку в основе моделирования развития пожара лежит интегральная модель, то все получаемые параметры пожара, такие как температура среды, тепловой поток, концентрации кислорода, концентрация продуктов сгорания и пр., являются среднеобъемными. Результаты моделирования выводятся в программе в табличной форме или графическом виде.

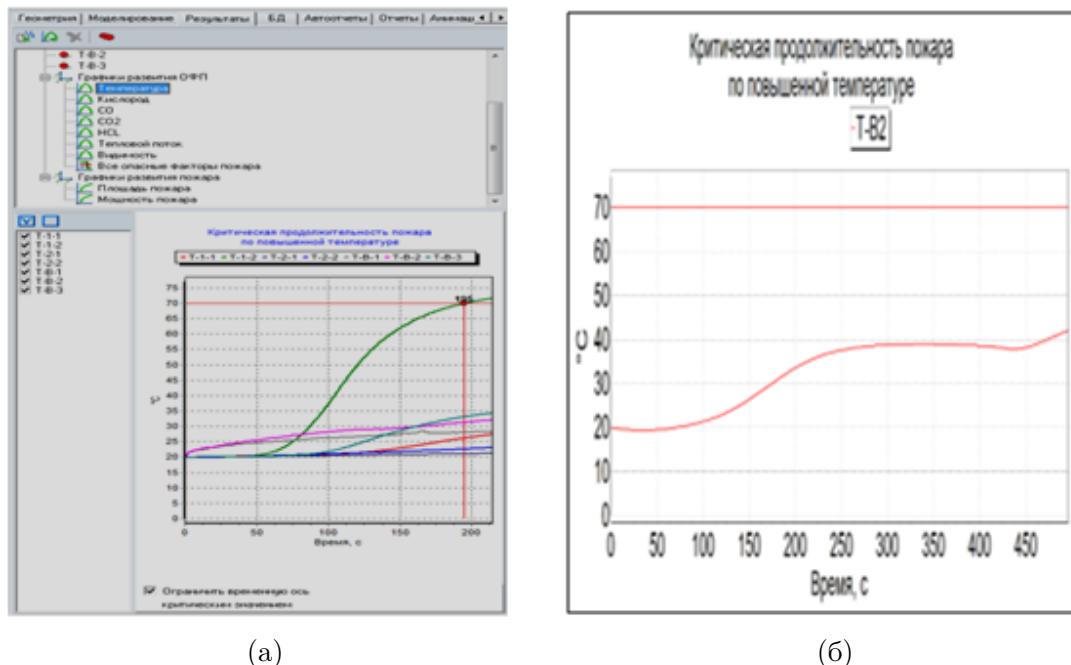


Рис. 1 – Пример моделирования температуры пожара в программе СИТИС: ВИМ: (а) – моделирование температуры пожара, усредненной по объему помещения; (б) – динамика роста среднеобъемной температуры в выбранной расчетной точке

Графики изменения опасных факторов пожара во времени в программе СИТИС: ВИМ можно построить в каждой, выбранной температуре пожара, усредненной по объему помещения. На рис. 1 (а) приведен пример моделирования температуры пожара, усредненной

по объему помещения. Во вкладке *Результаты* открыт флажок *Графики развития ОФП*, позволяющий выбрать именно тот опасный фактор пожара, динамика которого анализируется. В процессе моделирования программа СИТИС: ВИМ не только строит график динамики опасного фактора пожара, но и вычисляет критическую продолжительность пожара по этому фактору. Так, на рис. 1 (а) отражено вычисление критической продолжительности пожара по повышенной температуре (критическое значение равно  $70^{\circ}\text{C}$ ). На рис. 1 (б) показана динамика роста среднеобъемной температуры в выбранной расчетной точке Т-В2. Результат моделирования представлен в виде отдельного графика.

Готовность к обучению математическому моделированию будущих инженеров должна являться частью профессиональной компетентности преподавателя математики в высшей школе в современных условиях повышенных рисков возникновения чрезвычайных ситуаций. Рассматривая различные виды математических моделей и способы их применения в процессе обучения вариативной дисциплине “Методика обучения математическому моделированию опасных факторов пожара”, приходим к заключению, что математическое моделирование – одно из направлений практико-ориентированной математической подготовки, основанное на практических ситуациях, которые могут возникнуть в профессиональной деятельности будущих инженеров, которая позволит им получать более объективную и точную оценку рисков и послужит необходимой предпосылкой принятия обоснованных решений по предупреждению ЧС, смягчению и ликвидации их последствий.

*Исследования проводились в ФГБОУ ВО “ДонГУ” при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение № 075-02-2025-1608) от 27.02.2025.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Королев М. Е. *Теоретико-методические основы обучения будущих инженеров математическому моделированию в системе высшего технического образования: монография*. Науч. ред. Е. И. Скафа. Донецк: ДонНУ, 2021. 336 с.
2. Zavalani O., Kacani J. *Mathematical modelling and simulation in engineering education*. 15th International Conference on Interactive Collaborative Learning (ICL). Villach, Austria. 2012. Р. 1-5.
3. Skafa E. I., Evseeva E. G., Korolev M. E. *Integration of Mathematical and Computer Simulation Modeling in Engineering Education*. J. Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2022. № 15(4). Р. 413–430.
4. Гребенкина А. С. *Теоретико-методические основы практико-ориентированного подхода к математической подготовке будущих специалистов пожарной и техносферной безопасности: монография*. Науч. ред. Е. Г. Евсеева. Донецк: ДонНУ, 2022. 358 с.
5. Трофимец Е. Н. *Применение информационных технологий математического моделирования в вузах МЧС России*. Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). 2017. № 3(23). С. 66–70.
6. Скафа Е. И., Евсеева Е. Г., Гребенкина А. С. *Обучение будущих инженеров математическому моделированию опасных факторов пожара с применением цифровых инструментов*. Инновации в образовании. 2023. № 11. С. 63–76.
7. Пузач С. В. *Методы расчета тепломассообмена при пожаре в помещении и их применение при решении практических задач пожаровзрывобезопасности: монография*. М.: Академия ГПС МЧС России, 2005. 336 с.

# ОТ ИГРАЛЬНЫХ КУБИКОВ К МАРКОВСКИМ ЦЕПЯМ: ОПЫТ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО В ШКОЛЕ

*H. B. Трачева<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

В докладе представлен опыт разработки и реализации специализированного курса по теории вероятностей, математической статистике и методам Монте-Карло для учащихся 9–11 классов физико-математической школы. Обсуждаются вопросы адаптации математически строгих понятий к школьному уровню. Особое внимание уделено использованию симуляций и цифровых инструментов (в том числе языка Python) для визуализации распределений и демонстрации алгоритмов. В качестве мотивирующих тем рассматриваются, например, парадокс Монти Холла и задача о днях рождения. Также обсуждаются способы формирования у школьников базовых навыков анализа данных и статистического мышления. Доклад сопровождается примерами заданий и исследовательских мини-проектов [1–3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лютикас В. С. *Факультативный курс по математике. Теория вероятностей*. М.: Просвещение, 1990.
2. Бродский И. Л., Мешавкина О. С. *Вероятность и статистика. 10-11 классы. Планирование и практикум*. АРКТИ, 2009.
3. Войтишек А. В. *Основы метода Монте-Карло: учебное пособие*. Новосибирск: НГУ, 2010.

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИЦИОННОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧНОГО СТЕРЖНЯ

*O. N. Черепанова**Сибирский федеральный университет, Красноярск*

## **Вводные сведения**

В настоящее время большое внимание уделяется всестороннему исследованию композиционных материалов – по данному научному направлению имеется значительное количество работ. Это связано с тем, что все больше элементов реальных конструкций изготавливаются из композитов. Препятствием к более широкому использованию таких материалов является недостаточное теоретическое обоснование методов расчета их прочности и долговечности. Исследователям, желающим более подробно ознакомиться с рассматриваемыми вопросами, рекомендуем российский журнал «Композиты и наноструктуры», где освещается современное состояние и тенденции этого актуального направления. В [1] предложена модель композита с пластической матрицей и упругими волокнами. В указанной работе автор сформулировал гипотезу: «При нагружении композита возникает касательное напряжение между волокнами и матрицей, и оно постоянно». Основываясь на этой гипотезе, в данной работе найдены компоненты девиатора тензора напряжений и тем самым дана оценка напряженному состоянию композиционного стержня для данного способа армирования. При решении этой задачи эффективно показали себя законы сохранения, которые начинают использоваться и для решения других задач механики [2].

## **Постановка задачи**

Рассмотрим прямолинейный стержень, армированный упругими волокнами. Пусть количество волокон равно  $n$ . Предел текучести матрицы стержня при чистом сдвиге равен  $k$ , модуль упругости Юнга –  $G$ . Волокна располагаются вдоль образующей стержня в произвольном порядке коллинеарно оси  $Oz$ . Все волокна круглого сечения; центры располагаются в точках с координатами  $(x_i, y_j)$ , радиусы всех волокон равны  $r$ , модули Юнга  $G_i$ . Поперечное сечение стержня приведено на рис. 1.

Предел текучести при чистом сдвиге матрицы  $k$  меньше предела текучести волокон, поэтому волокна всегда находятся в упругом состоянии. На границе между волокном и связующим при нагружении возникает напряжение, оно по гипотезе [1] равно  $\tau < k$ .

Система уравнением в этом случае сводится к уравнению равновесия

$$\frac{\partial s_{13}}{\partial x} + \frac{\partial s_{23}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

и условию совместности упругих деформаций

$$\frac{\partial s_{13}}{\partial y} = \frac{\partial s_{23}}{\partial x}. \quad (2)$$

Условия на границе, свободной от напряжений и находящейся в пластическом состоянии, запишутся следующим образом:

$$s_{13}l_0 + s_{23}n_0 = 0, \quad s_{13}^2 + s_{23}^2 = k^2, \quad (3)$$

где  $(l_0, n_0)$  – нормаль к боковой поверхности. Эти условия перепишем в виде

$$s_{13} = \mp n_0 k, \quad s_{23} = \pm l_0 k. \quad (4)$$

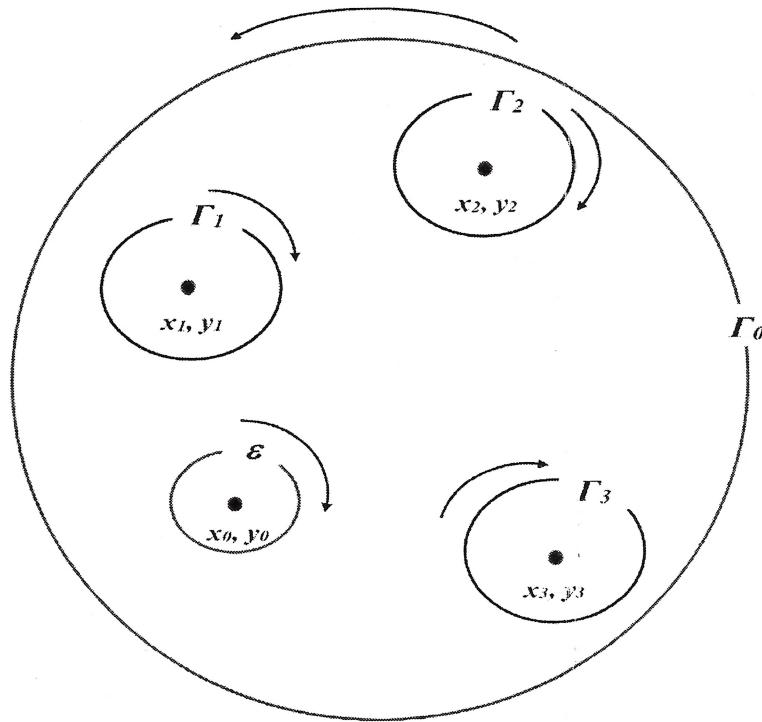


Рис. 1. Сечение стержня

В силу гипотезы Ю. Н. Работнова на границе между связующим и волокном выполнены условия

$$s_{13}n_i - s_{23}l_i = \tau, \quad s_{13}^2 + s_{23}^2 = k^2, \quad (5)$$

где  $n_i, l_i$  – компоненты вектора нормали к боковой поверхности  $i$ -го волокна. Их можно записать в виде

$$s_{13} = n_i\tau \pm l_i\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad s_{23} = l_i\tau \pm n_i\sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (6)$$

### Законы сохранения системы (1)–(2)

Для удобства положим

$$s_{13} = U, \quad s_{23} = V.$$

В этом случае получим следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} F_1 &= U_x + V_y = 0, & F_2 &= U_y - V_x = 0, \\ U &= \mp n_0 k, & V &= \pm l_0 k, \\ U &= n_i\tau \pm l_i\sqrt{k^2 - \tau^2}, & V &= l_i\tau \pm n_i\sqrt{k^2 - \tau^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для системы уравнений (7) закон сохранения ищем в виде

$$\partial_x A(x, y, U, V) + \partial_y B(x, y, U, V) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (8)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – дифференциальные линейные операторы, которые вместе с компонентами сохраняющегося тока подлежат определению.

Пусть

$$A = \alpha^1 U + \beta^1 V + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 U + \beta^2 V + \gamma^2, \quad (9)$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  – функции только от  $x, y$ .

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\begin{aligned}\alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, & \beta_x^1 + \beta_y^2 &= 0, & \alpha^1 &= \omega_1, \\ \beta^1 &= -\omega_2, & \alpha^2 &= \omega_2, & \beta^2 &= \omega_1, & \gamma_x^1 + \gamma_y^2 &= 0.\end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения, получаем

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \quad \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0. \quad (10)$$

Система уравнений (10) имеет два решения, которые имеют особенность в произвольной точке  $(x_0, y_0)$ , принадлежащей рассматриваемому сечению стержня ( $x_0, y_0$  – постоянные):

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \gamma^1 = \gamma^2 = 0, \quad (11)$$

$$\alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \gamma^1 = \gamma^2 = 0. \quad (12)$$

### Нахождение компонент девиатора тензора напряжений в точке $(x_0, y_0)$

Рассмотрим  $(x_0, y_0)$  – произвольную точку, принадлежащую матрице, и пусть в этой точке компоненты сохраняющегося тока имеют вид (11) или (12).

В силу формулы Грина из (8) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_0} A dy - B dx - \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (13)$$

где  $\varepsilon$  – окружность:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ .

Подставим в (13) решение (11) или (12), сделав замену переменных по формулам  $x - x_0 = \varepsilon \cdot \cos \varphi, y - y_0 = \varepsilon \cdot \sin \varphi$ . Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  и используя теорему о среднем, найдем  $s_{13}(x_0, y_0), s_{23}(x_0, y_0)$ .

В результате, проделав опущенные выкладки, получим формулы для вычисления компонент тензора девиатора напряжений в произвольной точке сечения стержня. Это позволяет построить границу между упругой и пластическими зонами в рассматриваемом композитном стержне. Величина и форма пластической зоны позволяет оценить его несущую способность и оптимальным образом провести армирование.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. *Механика деформированного твердого тела*. М.: Наука, 1991.
2. Сенцов С. И., Савостьянова И. Л. *Упруго-пластичность и законы сохранения*. Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнева, 2023.

# КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

## ОБ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ТИПА IPD

*K. E. Бахтин*

*РНОМЦ “Дальневосточный центр математических исследований”, ДВФУ,  
Владивосток*

Обобщенные гипергеометрические функции используются в широком спектре задач теоретической физики, прикладной математики, статистики и инженерных наук, не говоря уже о самой теоретической математике. В частности, функции  ${}_3F_2$  и  ${}_4F_3$ , вычисленные в единице, связаны с коэффициентами Клебша–Гордана и Рака [1, секции 8.2.5, 9.2.3] и [2, 3]. В последние годы специальные функции также играют важную роль в теории приближений. Их растущее значение объясняется их универсальностью [4, 5].

В теории гипергеометрических функций широко известны преобразования и формулы суммирования, которые восходят к Леонарду Эйлеру. Несмотря на долгую историю их изучения, исследования в этом направлении продолжаются. Большое внимание уделяется изучению обобщенных гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями. Напомним, что обобщенной гипергеометрической функцией с целыми параметрическими разностями (функция IPD типа) называется функция, содержащая пары параметров  $\begin{bmatrix} f+m \\ f \end{bmatrix}$  (известная, как целая положительная разность) и/или  $\begin{bmatrix} b \\ b+n \end{bmatrix}$  (известная, как целая отрицательная разность) для произвольных натуральных чисел  $m$ ,  $n$ . Гипергеометрические функции IPD типа и, в частности, широко известная формула суммирования Карлссона–Минтона используются в физике при вычислении интегралов Фейнмана. В данном докладе обсуждаются различные обобщения формулы суммирования Карлссона–Минтона, а также близкие результаты, касающиеся групп преобразований обобщенных гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями.

Формула суммирования Минтона (см., например [6, 1.2]) для обобщенной гипергеометрической функции имеет вид

$${}_pF_{p-1} \left( \begin{matrix} -k, b, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ b+1, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{k!}{(b+1)_k} \frac{(\mathbf{f} - b)_{\mathbf{m}}}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}},$$

где  $k \geq m$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{p-2}$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{p-2}$ . В дальнейшем этот результат был обобщен Карлсоном, который заменил  $-k$  на произвольное комплексное число  $a$ , удовлетворяющее условию  $\operatorname{Re}(1 - a - m) > 0$  (см., например [6, 1.3]):

$${}_pF_{p-1} \left( \begin{matrix} a, b, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ b+1, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)(\mathbf{f} - b)_{\mathbf{m}}}{\Gamma(b+1-a)(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}}. \quad (1)$$

Далее, в статье [6] формула (1) была распространена на случай замены числа  $b$  вектором  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ , приняв следующий вид:

$${}_{l+p-1}F_{l+p-2} \left( \begin{matrix} a, \mathbf{b}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \mathbf{b} + 1, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(1-a)(\mathbf{b})_1}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} \sum_{q=1}^l \frac{\Gamma(b_q)(\mathbf{f} - b_q)_{\mathbf{m}}}{\alpha_q \Gamma(1+b_q-a)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$  и  $\alpha_q = \prod_{v=1, v \neq q}^l (b_v - b_q)$ . При этом в формуле (2) все координаты вектора  $\mathbf{b}$  различны.

Аналог формулы (2) для случая, когда векторе  $\mathbf{b}$  есть одинаковые координаты, был получен нами в [7, (8)]. А именно, пусть  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ ,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ ,  $\operatorname{Re}(n - a! - m) > 0$ ,  $(-1 + a, -\mathbf{b}, -\mathbf{b} + a - 1, -\mathbf{f}) \notin \mathbb{N}_0^{2l+p-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} {}_{p+n+l-2}F_{p+n+l-3} \left( \begin{array}{c} a, \underbrace{b_1, \dots, b_1}_{n_1}, \underbrace{b_2, \dots, b_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{b_l, \dots, b_l}_{n_l}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \underbrace{b_1 + 1, \dots, b_1 + 1}_{n_1}, \underbrace{b_2 + 1, \dots, b_2 + 1}_{n_2}, \dots, \underbrace{b_l + 1, \dots, b_l + 1}_{n_l}, \mathbf{f} \end{array} \right) = \\ = \frac{\Gamma(1 - a)}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} \sum_{i=1}^l \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{(-1)^{k_i+1} \alpha_{k_i}^i}{(k_i - 1)!} \left( \frac{\Gamma(x) (\mathbf{f} - x)_{\mathbf{m}}}{\Gamma(x - a + 1)} \right)_{x=b_i}^{(k_i-1)}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\alpha_{k_i}^i$  коэффициенты разложения  $\prod_{i=1}^l \frac{b_i^{n_i}}{(b_i + x)^{n_i}}$  на простые дроби,

$$\prod_{i=1}^l \frac{b_i^{n_i}}{(b_i + x)^{n_i}} = \sum_{i=1}^l \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{\alpha_{k_i}^i}{(b_i + x)^{k_i}}.$$

Формула (3) выполняется только при положительном параметрическом балансе. При отрицательном балансе гипергеометрический ряд в единице расходится. Исключение составляет случай  $a = -k$ , где  $k \in \mathbb{N}_0$ . Чтобы сформулировать результат, нам понадобится определение коэффициентов Норлунда.

Для комплексных векторов  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{q-1})$  и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$  коэффициенты Норлунда определяются следующим образом:

$$g_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{q-2} \leq n} \prod_{l=1}^{q-1} \frac{(\psi_l + j_{l-1})_{j_l - j_{l-1}}}{(j_l - j_{l-1})!} (b_{l+1} - a_l)_{j_l - j_{l-1}},$$

где  $\psi_l = \sum_{i=1}^l (b_i - a_i)$ ,  $j_0 = 0$ ,  $j_{q-1} = n$ . В статье [6] была получена формула суммирования, которая дополняет известную формулу суммирования Минтона на случай, когда  $0 \leq k \leq m - 1$ . А именно, была доказана формула [6, 2.3]

$${}_pF_{p-1} \left( \begin{array}{c} -k, b, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ b + 1, \mathbf{f} \end{array} \right) = \frac{k!}{(b + 1)_k} \frac{(\mathbf{f} - b)_{\mathbf{m}}}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} - \frac{(-1)^m k! b}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} u_k, \quad (4)$$

где  $u_k = \sum_{i=0}^{m-k-1} g_{m-k-i-1}(\alpha; \beta)(b - i)_i$ , при этом  $\alpha = (b - \mathbf{f})$ ,  $\beta = (b - \mathbf{f} - \mathbf{m}, b + k)$ .

Из формулы (4) вытекает следующая

**Лемма 1.** Пусть  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ . Тогда

$$F \left( \begin{array}{c} -k, \mathbf{b}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \mathbf{b} + \mathbf{1}, \mathbf{f} \end{array} \right) = (\mathbf{b})_{\mathbf{1}} \sum_{l=1}^p \frac{K_l^{-1}}{b_l} \left( \frac{k! (\mathbf{f} - b_l)_{\mathbf{m}}}{(b_l + 1)_k (\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} - \frac{(-1)^m k! b_l}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} u_{k,l} \right), \quad (5)$$

где  $K_l = \prod_{v=1, v \neq l}^p (b_v - b_l)$ ,  $u_{k,l} = \sum_{i=0}^{m-k-1} g_{m-k-i-1}(\alpha; \beta)(b_l - i)_i$ , при этом  $\alpha = (-\mathbf{f})$ ,  $\beta = (-\mathbf{f} - \mathbf{m}, k)$ .

Заметим, что формула (5) неприменима в случае, когда вектор  $\mathbf{b}$  состоит из одинаковых координат. Для этого случая нами доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ ,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ ,  $n + k - m < 0$ ,  $-b_i \notin \mathbb{N}_0$ ,  $-f_r \notin \mathbb{N}_0$  для любых  $i = 1, \dots, l$ ,  $r = 1, \dots, p - 2$ . Тогда

$${}_{p+n+l-2}F_{p+n+l-3} \left( \begin{array}{c} -k, \underbrace{b_1, \dots, b_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{b_l, \dots, b_l}_{n_l}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \underbrace{b_1 + 1, \dots, b_1 + 1}_{n_1}, \dots, \underbrace{b_l + 1, \dots, b_l + 1}_{n_l}, \mathbf{f} \end{array} \right) = \frac{k!}{(\mathbf{f})_{\mathbf{m}}} \sum_{i=1}^l \sum_{c_i=1}^{n_i} \frac{(-1)^{c_i+1} \alpha_{c_i}^i}{(c_i - 1)!} \times \\ \times \left[ \left( \frac{(\mathbf{f} - x)_{\mathbf{m}}}{(x)_{k+1}} \right)_{x=b_i}^{(c_i-1)} + (-1)^{m+1} \sum_{v=0}^{m-k-2} g_{m-k-v-2}(\alpha; \beta) ((x - 1 - v)_{v+1})_{x=b_i}^{(c_i-1)} \right], \quad (6)$$

где  $\alpha_{c_i}^i$  — коэффициенты разложения  $\prod_{i=1}^l \frac{b_i^{n_i}}{(b_i + x)^{n_i}}$  на простые дроби,

$$\prod_{i=1}^l \frac{b_i^{n_i}}{(b_i + x)^{n_i}} = \sum_{i=1}^l \sum_{c_i=1}^{n_i} \frac{\alpha_{c_i}^i}{(b_i + x)^{c_i}}, \quad (7)$$

$g_{m-k-v-2}(\alpha; \beta)$  — коэффициенты Норлунда,  $\alpha = (-\mathbf{f})$ ,  $\beta = (-\mathbf{f} - \mathbf{m}, k)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

## ЛИТЕРАТУРА

- Varshalovich D. A., Moskalev A. N. *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific. 1988. Singapore, London.
- Krattenthaler C., Rao K. S. *On group theoretical aspects, hypergeometric transformations and symmetries of angular momentum coefficients*. Symmetries in Science XI. 2005. P. 355–375.
- Rao K. S., Doebner H. D., Natterman P. *Generalized hypergeometric series and the symmetries of 3-j and 6-j coefficients*. Number Theoretic Methods. Developments in Mathematics. 2002. V. 8. P. 381–403.
- Y. Quintana, Ramirez W., Urielles A. *On an operational matrix method based on generalized Bernoulli polynomials of level m*. Calcolo. 2018. V. 55.
- Cesarano C., Ramirez W., Diaz S. *New results for degenerated generalized Apostol–Bernoulli, Apostol–Euler and Apostol–Genocchi polynomials*. WSEAS Transactions on Mathematics. 2022. V. 21. P. 604–608.
- Karp D. B., Prilepkina E. G. *Extensions of Karlsson–Minton summation theorem and some consequences of the first Miller–Paris transformation*. Integral Transforms and Special Functions. 2018. V. 29. Issue 12. P. 955–970.
- Bakhtin K., Prilepkina E. *On Summations of Generalized Hypergeometric Functions with Integral Parameter Differences*. Mathematics. 2024. V. 12. Issue 11. P. 1656.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ПОСРЕДСТВОМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

*A. D. Мкртчян<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики НАН РА, Ереван*

<sup>2</sup>*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Исследуется задача аналитического продолжения степенного ряда одной комплексной переменной в сектор при условии интерполяции коэффициентов ряда голоморфной функцией. Полученный результат обобщает теорему Ле Руа – Линделёфа. В отличие от классической постановки, где требуется, чтобы рост (тип) интерполирующей функции в замкнутой правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z \geq 0$  был меньше  $\pi$ , в данной работе налагается менее ограничительное условие на совокупный рост функции вдоль мнимой оси, а именно  $h_\varphi(-\pi/2) + h_\varphi(\pi/2) < 2\pi$ . Это позволяет устранить симметричность относительно точки  $-1$  сектора, куда продолжается степенной ряд.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (1)$$

с радиусом сходимости  $0 < R < \infty$ .

**Теорема [1].** *Пусть функция  $\varphi(\zeta)$  является голоморфной функцией экспоненциального типа в области  $\mathbb{R}_{\geq 0} + i\mathbb{R}$  и интерполирует коэффициенты степенного ряда (1). Если  $\varphi(\zeta)$  удовлетворяет условию*

$$h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi,$$

*то сумма ряда (1) аналитически продолжается в сектор*

$$\Delta_{\sigma_1, \sigma_2} := \{z \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \arg z < 2\pi - \sigma_2\},$$

где

$$\sigma_1 = h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \sigma_2 = h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

*Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1790), и Комитетом по высшему образованию и науке Республики Армения (Соглашение № 24RL-1A028).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mkrtchyan A. J. *Analytic continuation of one variable power series by interpolating its coefficients*. Complex Variables and Elliptic Equations. 2025.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА

## СЛОЖНОСТЬ ЛИНЕЙНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ РАСШИРЕНИЙ БАЗИСНОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ ВИССЕРА

*К. И. Александров*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Москва*

Изучение алгоритмических свойств логик исторически было связано с оцениванием размера наименьших шкал Кripке, отделяющих формулы от логик. Для логики  $L$ , полной относительно некоторого класса конечных шкал Кripке, оценка размера наименьших шкал Кripке логики  $L$ , опровергающих формулы определенной длины, проводится с помощью функции сложности:

$$f_L(n) = \max \{ \min\{|\mathfrak{F}| : \mathfrak{F} \models L, \mathfrak{F} \not\models \varphi\} : \varphi \notin L, |\varphi| \leq n \},$$

где  $|\mathfrak{F}|$  обозначает длину шкалы, а  $|\varphi|$  – длину формулы. Это означает, что достаточно использовать шкалы Кripке логики  $L$  размера не больше  $f_L(n)$ , чтобы опровергнуть формулы не из  $L$  длины  $n$ .

Интерес к функции сложности логики связан с долгим убеждением, что ее характер (полиномиальный, экспоненциальный и др.) напрямую связан со сложностью логики, однако Э. Хемаспаандр установила существование нормальных модальных логик с линейной функцией сложности и неразрешимым унарным фрагментом. М. Н. Рыбаков и Д. П. Шкатов расширили ее результаты, а именно показали, что для любой степени неразрешимости существуют нормальные расширения модальных логик **KTB**, **K4**, **GL**, **Grz** с линейными функциями сложности и константными или унарными фрагментами с данной степенью неразрешимости, а также доказали существование суперинтуионистских пропозициональных логик с похожими свойствами.

В данной работе этот результат расширен на случай базисной пропозициональной логики **BPL**, которая представляет собой логику класса шкал Кripке с транзитивным и антисимметричным отношением достижимости, а именно показано, что для любой степени неразрешимости существует линейно аппроксимируемая логика, расширяющая **BPL**, константный фрагмент которой имеет данную степень неразрешимости.

Будем пользоваться стандартной семантикой Кripке. Для логики  $L$  и  $n \in \mathbb{N}$  обозначим  $L[n] = \{\varphi \in L : \varphi \text{ } n\text{-арна}\}$  и будем называть его *n-арным фрагментом логики L*. Логика  $L$  называется *финитно аппроксимируемой*, если она является логикой некоторого класса  $\mathcal{C}$  конечных шкал Кripке. Если логика  $L$  финитно аппроксимируема, то для нее можно определить функцию сложности.

Логика  $L$  называется *линейно аппроксимируемой*, если существуют  $c > 0$  и  $k \in \mathbb{N}$  такие, что  $f_L(n) \leq c \cdot n$  всякий раз, когда  $n \geq k$ .

Далее под множеством будем подразумевать подмножество натуральных чисел. Множество называется *разрешимым*, если существует алгоритм, который по любому данному

на вход числу сможет определить за конечное число шагов, принадлежит ли это число данному множеству. Множество  $A$  называется *разрешимым относительно*  $B$  (обозначение:  $A \leq_R B$ ), если существует алгоритм, который выясняет за конечное число шагов, принадлежит ли число множеству  $A$ , возможно с применением оракула, знающего, принадлежит ли это число  $B$ . То есть алгоритм может содержать инструкции, обращающиеся к оракулу, для того чтобы проверить, лежит ли элемент в  $B$ . Отношение  $\leq_R$  является частичным порядком;  $A \leq_R B$  означает, что задача принадлежности  $A$  не сложнее задачи принадлежности  $B$ . В случае  $A \leq_R B$  и  $B \leq_R A$  пишем  $A \sim_R B$ . Для  $A \subseteq \mathbb{N}$  класс эквивалентности  $\{B \subseteq \mathbb{N} : A \sim_R B\}$  называется *степенью неразрешимости*  $A$ . Каждый такой класс эквивалентности называется *степенью неразрешимости*. Для множества формул  $\Phi$  и множества  $A$  пишем  $\Phi \sim_R A$ , отождествляя  $\Phi$  с гёделевыми номерами формул из  $\Phi$ .

Определим  $\Box\varphi$  как сокращение для формулы  $\top \rightarrow \varphi$ . Тогда введенная связка для логики **BPL** аналогична модальности  $\Box$  логики **K4**, а именно: для любого мира  $w$  модели  $\mathfrak{M}$  логики **BPL**

$$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi \iff \text{для любого мира } w', \text{ достижимого из мира } w, \text{ выполняется } \mathfrak{M}, w' \models \varphi.$$

Данная «модальность» удобна для обозначения некоторых свойств миров в шкалах логики **BPL**.

**Утверждение 1.** Для мира  $w$  модели  $\mathfrak{M}$   $\mathfrak{M}, w \models \Box\perp \iff$  мир  $w$  не видит никакой другой мир.

Такие миры назовем *тупиками*. В частности, тупик является иррефлексивным миром.

Докажем, что бывают сколь угодно сложные, линейно аппроксимируемые логики среди расширений **BPL**. Для этого каждому натуральному числу сопоставим определенную шкалу Крипке. Тогда множества таких шкал будут соответствовать множествам натуральных чисел. Научимся описывать каждую шкалу константной формулой. Таким образом, получится соответствие между константными фрагментами логик и множествами натуральных чисел. Это докажет существование логик с константными фрагментами любой степени неразрешимости. С другой стороны, все такие логики получатся линейно аппроксимируемыми. Далее разберемся подробнее.

Для любого подмножества натуральных чисел  $A$  обозначим  $\bar{A} = (\mathbb{N} + 2) \setminus 2A$ , то есть  $\bar{A}$  содержит все нечетные числа больше 2, а четные — в зависимости от  $A$ .

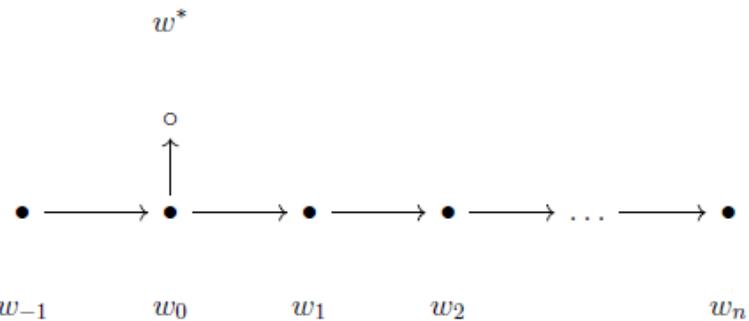


Рис. 1. Шкала  $\mathfrak{F}_n$

Теперь определим шкалы, соответствующие натуральным числам. Для любого  $n \in \mathbb{N} + 2$  обозначим (см. рис. 1 — рефлексивные миры обозначены незакрашенными кружками, иррефлексивные — закрашенными):

- $W_n^B = \{w_{-1}, w_0, w_1, \dots, w_n, w^*\}$ ;
- $R_n^B$  является транзитивным замыканием отношения

$$\{(w_i, w_{i+1}) : -1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(w_0, w^*), (w^*, w^*)\};$$

- $\mathfrak{F}_n^B = (W_n^B, R_n^B)$ .

Верхний индекс  $B$  относится к логике **BPL**. Заметим, что  $|\mathfrak{F}_n^B| = n + 3$ .

Для любого множества  $A \subseteq \mathbb{N}$  определим  $\mathcal{C}_A^B = \{\mathfrak{F}_n^B : n \in \overline{A}\}$ . Таким образом,  $\mathfrak{F}_n^B \in \mathcal{C}_A^B$  тогда и только тогда, когда либо  $n$  – нечетное больше 2, либо  $n$  – ненулевое четное, но его половина не лежит в  $A$ . Также обозначим  $\mathbf{L}_A^B = \text{Log}(\mathcal{C}_A^B)$ .

Далее, для любого множества  $A \subseteq \mathbb{N} + 2$  будем доказывать линейную аппроксимируемость логики  $\mathbf{L}_A^B$  и  $\mathbf{L}_A^B[0] \sim_R A$ . Это означает, что для любой степени неразрешимости  $D$  существует линейно аппроксимируемая логика  $\mathbf{L}_A^B$  такая, что  $\mathbf{L}_A^B[0] \in D$ .

Из следующей леммы будет следовать линейная аппроксимируемость любой логики  $\mathbf{L}_A^B$ .

**Лемма 1.** Для любых подмножеств натуральных чисел  $A$  и любой формулы  $\varphi$ , если  $\varphi \notin \mathbf{L}_A^B$ ,  $\mathfrak{F}_n^B \not\models \varphi$  для некоторого  $n$  такого, что  $n \in \overline{A}$  и  $n \leq |\varphi| + 4$ .

Пусть  $\varphi \notin \mathbf{L}_A^B$ . Тогда  $\mathfrak{F}_n^B, x_0 \not\models^v \varphi$  для некоторой шкалы  $\mathfrak{F}_n^B \in \mathcal{C}_A^B$ , некоторого мира  $x_0$  этой шкалы и некоторой оценки  $v$  на  $\mathfrak{F}_n^B$ . Допустим, что  $n > |\varphi| + 4$ , иначе лемма доказана.

Идея доказательства заключается в том, чтобы выбрать из  $W_n^B$  достаточно миров, чтобы, с одной стороны, формула  $\varphi$  все еще опровергалась в  $x_0$ , а с другой стороны, чтобы количество выбранных миров было таким, что получившаяся шкала была достаточно мала и находилась в  $\mathcal{C}_A^B$ . Для этого сначала для любой подформулы вида  $\square\psi$  формулы  $\varphi$  из  $R_n^B(x_0)$  выбирается мир, в котором  $\psi$  опровергается, а затем, чтобы получившаяся шкала была из  $\mathcal{C}_A^B$ , добавляется дополнительный мир, если число миров не лежит в  $\overline{A}$ . Подробное доказательство опустим.

**Утверждение 2.** Логика  $\mathbf{L}_A^B$  линейно аппроксимируется для любого множества  $A \subseteq \mathbb{N}$ .

Доказательство напрямую следует из леммы 1.

Далее покажем, что свободный от переменных фрагмент  $\mathbf{L}_A^B$  рекурсивно эквивалентен  $A$ . Для этого для любого  $k \in \mathbb{N} + 1$  определим формулы:

- $A_k = \square^{k+1} \perp \rightarrow \square^k \perp$ ;
- $B_k = \square^{k+1} \perp$ ;
- $\alpha_k = A_k \rightarrow (A_{k-1} \vee B_k)$ , то есть

$$\alpha_k = (\square^{k+1} \perp \rightarrow \square^k \perp) \rightarrow ((\square^k \perp \rightarrow \square^{k-1} \perp) \vee \square^{k+1} \perp).$$

Далее понадобится техническая лемма.

**Лемма 2.**  $\mathfrak{F}_n^B, x \not\models \alpha_k \iff n = k, x = w_{-1}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Тогда  $\mathbf{L}_A^B[0] \sim_R A$ .

Без ограничения общности можем предположить, что  $A$  не содержит 0 или 1, иначе можно рассматривать  $A' = A + 2$ . Понятно, что  $A' \sim_R A$  и  $A'$  не содержит 0 или 1. Из леммы 2 и определения  $\mathcal{C}_A^B$  и  $\mathbf{L}_A^B$  следует, что для любого  $n \in \mathbb{N} + 2$

$$n \in A \iff \mathfrak{F}_{2n}^B \notin \mathcal{C}_A^B \iff \alpha_{2n} \in \mathbf{L}_A^B.$$

Формула  $\alpha_{2n}$  — константа, а значит,  $A \leq_R \mathbf{L}_A^B[0]$ .

Далее поймем, что  $\mathbf{L}_A^B \leq_R A$ , откуда сразу будет следовать, что  $\mathbf{L}_A^B[0] \leq_R A$ . Заметим, что для любой формулы  $\varphi$  существует алгоритм, строящий за конечное число шагов множество

$$X = \{n \in \mathbb{N} : 2 \leq n \leq |\varphi| + 4 \text{ и } \mathfrak{F}_n^B \not\models \varphi\}.$$

Тогда из леммы 1 следует, что чтобы проверить, что  $\varphi \in \mathbf{L}_A^B$ , достаточно проверить, если  $n$  — четное, что  $n/2 \in A$ .

**Теорема 1.** Для любой степени неразрешимости существует линейно аппроксируемая логика, расширяющая  $BPL$ , константный фрагмент которой имеет данную степень неразрешимости.

Пусть задана степень неразрешимости  $D$  и  $A \in D$ . По утверждению 2 логика  $\mathbf{L}_A^B$  — линейно аппроксируемая. Из леммы 3  $\mathbf{L}_A^B[0] \sim_R A$ . Значит,  $\mathbf{L}_A^B[0] \in D$  и  $\mathbf{L}_A^B$  — искомая логика.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rybakov M., Shkatov D. *Complexity function and complexity of validity of modal and superintuitionistic propositional logics*. Journal of Logic and Computation. 2023. V. 33. P. 1566–1595.
2. Chagrov A. V., Zakharyashev M. V. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997.
3. Рыбаков М. Н. *Сложность пропозициональных логик с конечным числом переменных*. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Тверь: ТГУ, 2005.
4. Visser A. *A propositional logic with explicit fixed points*. Studia Logica. 1981. V. 40. P. 155–175.
5. Spaan E. *Complexity of Modal Logics*. PhD thesis. Universiteit van Amsterdam. 1993.

## STRONG CONSTRUCTIBILITY OF RECURSIVE ORDINALS

*S. S. Goncharov<sup>1,2</sup>, A. M. Petrenko<sup>1</sup>, V. K. Kravtsov<sup>1</sup>, E. I. Khlestova<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Novosibirsk State University*

<sup>2</sup>*Academy of Sciences, Siberian Branch, Mathematical Institute, Novosibirsk*

In the talk, results acquired as a result of investigation into strong constructibility of models on the basis of ordinal constructions [1] will be presented. It is shown that ordinals smaller than  $\omega^\omega$  are strongly constructive on the basis of criteria for strong constructibility of prime models of decidable theories. The basis of this research is the well known paper by A. Tarski, A. Mostowski, and D. Doner [2] on the decidability of elementary theories of any ordinal. Using this technique and computability theory it is shown that for any recursive ordinal  $\lambda$  it is possible to build a strongly constructive presentation for ordinal  $\omega^\omega \times \omega^\lambda$ .

**Theorem.** *Any computable ordinal is strongly constructive.*

This result can be used for some inductive constructions of models on the basis of ordinals in order to investigate their strong constructibility.

*The research was conducted with funding from grant № 23-11-00170 of the Russian Science Foundation, <https://rscf.ru/project/23-11-00170/>.*

### REFERENCE

1. Ershov Y. L., Goncharov S. S. *Constructive Models*. Springer, New York, NY, 2012.
2. Doner J. E., Mostowski A., Tarski A. *The Elementary Theory of Well-Ordering — A Metamathematical Study*. In: Logic Colloquium'77. A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris, eds. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. 1978. V. 96. P. 1–54.

# ТЕМПОРАЛЬНАЯ ЭПИСТЕМИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ДЛЯ АГЕНТОВ С ЗАДЕРЖКОЙ В ОСВЕДОМЛЕННОСТИ

*B. B. Долгоруков, Е. Л. Попова*

*Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии  
НИУ ВШЭ, Москва*

Моделирование осведомленности (awareness) является одним из направлений теории многоагентных систем и восходит к работам классиков теоретической информатики Р. Фейгина, Дж. Халперна, Й. Мозеса, М. Варди [1, 2]. Данные авторы показывают, что моделирование осведомленности позволяет решить проблему логического всеведения, которая представляет собой одно из ключевых затруднений стандартной эпистемической логики.

В настоящем докладе представим расширение подхода Р. Фейгина и соавторов, а именно, темпоральную эпистемическую логику для агентов с задержкой в осведомленности. Данная логика позволяет сочетать рассуждения о прошлых и будущих эпистемических состояниях агентов с динамикой их осведомленности.

Основная идея предлагаемой нами системы состоит в особом типе взаимодействия между текущим имплицитным знанием агента и его будущим эксплицитным знанием: изменение в имплицитном знании агента является триггером для изменения его эксплицитного знания на следующем шаге. Предложенная нами логика формализует процесс рассуждения агентов в условиях изменения среды. Мы моделируем следующий тип динамики осведомленности: агентам требуется некоторое время на вычисления для того, чтобы извлечь информацию из имеющихся у них данных, однако ситуация за время, которое агент потратил на вычисления, может измениться. Поэтому в общем виде динамика осведомленности агента предполагает, что эксплицитное знание описывает положение дел в прошлом.

Множество формул темпоральной эпистемической логики для агентов с задержкой в осведомленности ( $\mathcal{L}$ ) порождается следующей грамматикой:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_i\varphi \mid A_i\varphi \mid X\varphi \mid Y\varphi,$$

где  $p \in Prop$  – множество пропозициональных переменных,  $i \in Ag$  – конечное множество агентов.

Другие логические связки и константы вводятся стандартным образом. Модальные операторы читаются следующим образом:

- « $K_i\varphi$ » – «агент  $i$  (имплицитно) знает, что  $\varphi$ »,
- « $A_i\varphi$ » – «агент  $i$  осведомлен, что  $\varphi$ »,
- « $X\varphi$ » — «во всех вариантах следующего состояния верно, что  $\varphi$ »,
- « $Y\varphi$ » – «во всех вариантах предыдущего состояния верно, что  $\varphi$ ».

Формула « $\square_i\varphi$ » читается как «агент  $i$  эксплицитно знает, что  $\varphi$ » и вводится как следующее синтаксическое сокращение:

$$\square_i\varphi := K_i\varphi \wedge A_i\varphi.$$

Вводим также следующие синтаксические сокращения:

- $\hat{K}_i\varphi := \neg K_i \neg \varphi$ ,
- $\hat{X}\varphi := \neg X \neg \varphi$ ,
- $\hat{Y}\varphi := \neg Y \neg \varphi$ ,

Моделью темпоральной эпистемической логики для агентов с задержкой в осведомленности является следующая структура:

$$\mathcal{M} = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, \rightsquigarrow, A, V),$$

где

- $(W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$  – мультиагентная  $S5$ -модель Кripке,
- $\rightsquigarrow \subseteq W \times W$  – темпоральное отношение достижимости, описывающее стадии эволюции возможного мира,
- $A_i : W \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$  – функция осведомленности для  $i$ -го агента.

Темпоральное отношение достижимости должно удовлетворять следующим свойствам:

1.  $\forall x \forall y \forall z ((y \rightsquigarrow x \wedge z \rightsquigarrow x) \Rightarrow y = z)$ ;
2.  $\forall x \forall y \forall z ((x \rightsquigarrow y \wedge y \sim_i z) \Rightarrow \exists w (w \rightsquigarrow z \wedge x \sim_i w))$ ;
3.  $\forall x \forall y ((x \sim_i y \wedge \exists z (x \rightsquigarrow z)) \Rightarrow \exists w (y \rightsquigarrow w))$ ;
4.  $\forall x \forall y ((x \sim_i y \wedge \neg \exists z (x \rightsquigarrow z)) \Rightarrow \neg \exists w (y \rightsquigarrow w))$ ;
5.  $\forall x \forall y ((x \sim_i y \wedge \exists z (z \rightsquigarrow x)) \Rightarrow \exists w (w \rightsquigarrow y))$ ;
6.  $\forall x \forall y ((x \sim_i y \wedge \neg \exists z (z \rightsquigarrow x)) \Rightarrow \neg \exists w (w \rightsquigarrow y))$ .

Также модель должна удовлетворять следующим условиям:

1.  $x \rightsquigarrow y \Rightarrow A_i(x) \subseteq A_i(y)$ ;
2.  $(\varphi \in A_i(x) \wedge x \sim_i y) \Rightarrow \varphi \in A_i(y)$ ;
3.  $\forall x ([\forall y (x \sim_i y \Rightarrow y \models \varphi) \wedge \exists x' \exists x'' (x' \rightsquigarrow x \wedge x' \sim_i x'' \wedge x'' \not\models \varphi)] \Rightarrow \forall z (x \rightsquigarrow z \Rightarrow \hat{Y}\varphi \in A_i(z)))$ .

Истинность формулы в отмеченной модели определяется следующим образом:

- $\mathcal{M}, w \models p \iff w \in V(p)$ ;
- $\mathcal{M}, w \models \neg \varphi \iff \mathcal{M}, w \not\models \varphi$ ;
- $\mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ и } \mathcal{M}, w \models \psi$ ;
- $\mathcal{M}, w \models K_i \varphi \iff \forall w' (w \sim_i w' \Rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$ ;
- $\mathcal{M}, w \models X \varphi \iff \forall w' (w \rightsquigarrow w' \Rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$ ;
- $\mathcal{M}, w \models Y \varphi \iff \forall w' (w' \rightsquigarrow w \Rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$ ;

- $\mathcal{M}, w \models A_i\varphi \iff \varphi \in A_i(w)$ .

Предлагается следующая аксиоматизация темпоральной эпистемической логики для агентов с задержкой в осведомленности.

Аксиомные схемы:

1. Тавтологии классической логики высказывания;
2. Аксиомные схемы  $S5$  для  $K_i$ ;
3.  $X(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (X\varphi \rightarrow X\psi)$ ;
4.  $Y(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (Y\varphi \rightarrow Y\psi)$ ;
5.  $\varphi \rightarrow X\hat{Y}\varphi$ ;
6.  $\varphi \rightarrow Y\hat{X}\varphi$ ;
7.  $\hat{Y}\varphi \rightarrow Y\varphi$ ;
8.  $K_iX\varphi \rightarrow XK_i\varphi$ ;
9.  $X\perp \rightarrow K_iX\perp$ ;
10.  $\neg X\perp \rightarrow K_i\neg X\perp$ ;
11.  $Y\perp \rightarrow K_iY\perp$ ;
12.  $A_i\varphi \rightarrow XA_i\varphi$ ;
13.  $A_i\varphi \rightarrow K_iA_i\varphi$ ;
14.  $(\hat{Y}\neg K_i\varphi \wedge K_i\varphi) \rightarrow XA_i\hat{Y}\varphi$ ;

правила вывода:

- $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$ ;
- $\varphi / K_i\varphi$ ;
- $\varphi / X\varphi$ ;
- $\varphi / Y\varphi$ .

**Теорема.** Предложенная аксиоматизация является корректной и сильно полной.

Статья подготовлена в ходе проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fagin R., Halpern J. *Belief, Awareness, and Limited Reasoning*. Artificial Intelligence. 1988. V. 34. № 1. P. 39–76.
2. Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M.Y. *Reasoning About Knowledge*. Cambridge: The MIT Press, 1995.

# ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ КЛАССА КОНГРУЭНЦ-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОЛИГОНОВ

*E. L. Ефремов*

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

*Конгруэнцией* алгебраической структуры называется бинарное отношение, сохраняющее операции и предикаты, определенные в этой структуре. Умножение конгруэнций в общем случае не является коммутативной операцией. Алгебраические структуры, для которых умножение конгруэнций коммутативно, называются *конгруэнц-перестановочными*. Многие классы алгебр состоят из конгруэнц-перестановочных алгебр, однако класс унаров содержит унары, не являющиеся конгруэнц-перестановочными.

Одним из стандартных вопросов теории моделей алгебраических структур является вопрос аксиоматизируемости класса этих структур. Такие вопросы для различных классов полигонов над моноидом рассмотрены Степановой А. А., Ефремовым Е. Л., Птаховым Д. О., Gould V. и др. в работах [1–6]. Строение конгруэнц-перестановочных полигонов над коммутативным моноидом и над группой изучено Степановой А. А. и Чекановым С. Г. в работе [7], унаров — в работе Шамича Н. И. [8].

В настоящей работе приводится ряд результатов, полученных в ходе изучения вопроса строения и аксиоматизируемости класса конгруэнц-перестановочных полигонов над конечно-порожденным моноидом.

Все необходимые определения и теоремы можно найти в [9, 10, 12, 13].

Пусть  $S$  — моноид. *Левым  $S$ -полигоном* (или *полигоном над  $S$* ) называется непустое множество  $A$ , на котором определено действие моноида  $S$ , т. е.

- $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$  для любых  $a \in A$ ,  $s_1, s_2 \in S$ ,
- $1a = a$  для любого  $a \in A$ .

Обозначать левые полигоны над  $S$  будем через  $_S A$ . В работе рассматриваются только левые полигоны.

Полигон  $_S A$  называется *связным*, если для любых  $a, b \in A$  существуют  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_1, \dots, c_n$ ,  $s_1, \dots, s_{2n} \in S$  такие, что

$$a = s_1c_1, \quad s_{2i}c_i = s_{2i+1}c_{i+1} \quad (i \leq n), \quad s_{2n}c_n = b.$$

Полигон  $_S A$  называется *циклическим*, если существует элемент  $a \in A$  такой, что  $A = \{sa \mid s \in S\}$ . Элемент  $a$  при этом называется *порождающим*. Обозначать циклический полигон, порождаемый элементом  $a$ , будем через  $_S Sa$ .

Полигон  $_S A$  называется *линейно упорядоченным*, если  $\{_S Sa \mid a \in A\}$  — линейно упорядоченное относительно  $\leqslant$  множество.

*Конгруэнцией* полигона  $_S A$  называется отношение эквивалентности  $\rho$  на  $A$ , удовлетворяющее условию

$$\langle x, y \rangle \in \rho \implies \forall s \in S \quad (\langle sx, sy \rangle \in \rho).$$

Через  $Con(_S A)$  обозначим множество всех конгруэнций  $_S A$ . Вместо записи  $\langle a, b \rangle \in \rho$  иногда будем использовать запись  $a \rho b$ . Через  $\Delta_A$  обозначим конгруэнцию  $\{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$  полигона  $_S A$ .

Конгруэнцией Риса полигона  $sA$ , задаваемой подполигоном  $sB \leq sA$ , называется конгруэнция  $\rho \in Con(sA)$ , определяемая следующим образом:

$$a \rho b \iff a, b \in B \text{ или } a = b.$$

Конгруэнцию Риса, задаваемую подполигоном  $sB \leq sA$ , обозначим как  $\mathcal{R}(sB)$ .

Будем говорить, что конгруэнция  $\rho \in Con(sA)$  порождается множеством  $X \subseteq A^2$ , если  $\rho$  — наименьшая относительно включения конгруэнция  $sA$ , содержащая  $X$ . Такую конгруэнцию будем обозначать через  $\langle X \rangle$ .

Произведением бинарных отношений  $\rho_1$  и  $\rho_2$  на  $A$  называется бинарное отношение  $\rho_1\rho_2$ , которое определяется следующим образом:

$$\langle a, b \rangle \in \rho_1\rho_2 \iff \exists c \in A : \langle a, c \rangle \in \rho_1 \text{ и } \langle c, b \rangle \in \rho_2.$$

Полигон  $sA$  называется конгруэнц-перестановочным, если для любых  $\rho_1, \rho_2 \in Con(sA)$  верно  $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$ .

Любой подполигон конгруэнц-перестановочного полигона конгруэнц-перестановчен.

Под копроизведением полигонов  $sA_i$  ( $i \in I$ ) будем понимать их дизъюнктное объединение и обозначать его через  $\bigsqcup_{i \in I} sA_i$ .

В работе [7] авторами получен следующий результат: любой конгруэнц-перестановочный полигон упорядочен относительно  $\leq$ .

Перейдем к результатам, полученным в рамках исследования строения конгруэнц-перестановочных полигонов над коммутативным моноидом. Для связных полигонов был получен следующий результат:

**Теорема 1.** Пусть  $S$  — коммутативный моноид. Связный полигон  $sA$  конгруэнц-перестановчен тогда и только тогда, когда  $sA$  — линейно упорядоченный полигон и для любой конгруэнции  $\rho \in Con(sA)$  и любых  $a, b \in A$

$$sSb <_s Sa \quad \text{и} \quad \langle a, b \rangle \in \rho \implies \rho \supseteq \mathcal{R}(sSa).$$

Однако данный критерий вынуждает проверять свойства множества конгруэнций полигона, что не всегда удобно. Следующей целью исследования было конкретизировать полученный результат, получив алгебраическое описание конгруэнц-перестановочных полигонов.

Пусть  $sSa$  — конгруэнц-перестановочный полигон,  $\rho \in Con(sSa)$ . Тогда  $sSa/\rho$  — конгруэнц-перестановочный полигон.

Заметим, что бинарное отношение  $\bar{\rho} = \{\langle x, y \rangle \mid sSx = sSy\}$  является конгруэнцией любого полигона  $sA$ .

Согласно теореме 1, конгруэнц-перестановочные полигоны над коммутативным моноидом прежде всего линейно упорядочены. Поэтому следующие результаты приводятся для связных циклических полигонов  $sSa$  над коммутативным моноидом  $S$ .

Если  $sSa$  — связный конгруэнц-перестановочный полигон, то для любого  $t \in S$  существует  $b \in Sa$  такой, что  $tb/\bar{\rho} = b/\bar{\rho}$ .

Если  $S$  — конечно-порожденный коммутативный моноид, то у любого конгруэнц-перестановочного полигона  $sSa$  существует наименьший относительно включения подполигон.

Класс алгебраических систем  $\mathcal{K}$  сигнатуры  $\Sigma$  называется аксиоматизируемым, если существует такое множество предложений  $Z$  сигнатуры  $\Sigma$ , что для любой алгебраической системы  $\mathcal{A}$  сигнатуры  $\Sigma$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \vDash \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z.$$

Класс всех конгруэнц-перестановочных полигонов над конечно-порожденным коммутативным моноидом аксиоматизируем.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степанова А. А. *Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов*. Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 5. С. 583–594.
2. Степанова А. А. *Аксиоматизируемость и полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой*. Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 3. С. 650–662.
3. Ефремов Е. Л., Степанова А. А. *Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов*. Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 4. С. 785–795.
4. Ефремов Е. Л., Степанова А. А. *Аксиоматизируемость класса подпрямо неразложимых полигонов над коммутативным моноидом*. Алгебра и логика (в печати).
5. Степанова А. А., Птахов Д. О. *Аксиоматизируемость класса подпрямо неразложимых полигонов над абелевой группой*. Алгебра и логика. 2020. Т. 59. № 5. С. 582–593.
6. Gould V. *Axiomatisability problems for S-systems*. J. London Math. Soc. 1987. V. 35. P. 193–201.
7. Степанова А. А., Чеканов С. Г. *Конгруэнц-перестановочные полигоны*. Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63. № 1. С. 202–208.
8. Шамич Н. И. *Решетки конгруэнций конгруэнц-перестановочных унаров* Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам, Владивосток, 15 апреля – 10 мая 2023 г. [Электронный ресурс]. Отв. ред. В. Ю. Ермаченко. С. 232.
9. Егорова Д. П. *Структура конгруэнций унарной алгебры*. Упорядоченные множества и решетки: межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1978. Вып. 5. С. 11–44.
10. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. *Математическая логика: учеб. пособие для вузов*. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 336 с.
11. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. *Теория моделей*. М.: Мир, 1977. 614 с.
12. Мальцев А. И. *Алгебраические системы* М.: Наука, 1970.
13. Пинус А. Г. *Основы универсальной алгебры: учеб. пособие*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. 137 с.

# ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В СТРУКТУРЕ СЛОВ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ С ОТНОШЕНИЕМ ВЛОЖИМОСТИ

Л. М. Михайлов, В. Л. Селиванов

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматриваются вопросы определимости в структуре  $(W; \leq)$  – слов, в которых любые два соседних символа различны, а  $\leq$  – отношение вложимости (как подпоследовательность).

Для  $|\Sigma| = 2$  структура похожа на  $(\mathbb{N}; \leq)$ , а при  $|\Sigma| = 1$ , множество  $W$  одноэлементно. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай  $|\Sigma| \geq 3$ .

Дается полное описание автоморфизмов структуры, и показывается определимость одноэлементных множеств (при обогащении сигнатуры именами всех однобуквенных и одного двухбуквенного слова, обогащенную структуру назовем  $(W; \leq, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ).

Для случая  $|\Sigma| \geq 4$  докажем не только интерпретируемость арифметики  $(\mathbb{N}; +, *)$ , но и в  $(W; \leq, c_1, c_2, \dots, c_n)$  – биинтерпретируемость.

Рассматриваемая структура и результаты об определимости похожи на таковые для  $(\Sigma^*; \leq)$ , рассматриваемой в [1], однако некоторые доказательства проводятся другими методами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кудинов О. В., Селиванов В. Л., Ярцева Л. В. *Определимость в структуре слов с отношением включения*. Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 3. С. 575–583.

# ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД КАК ОСНОВА ДОСТИЖЕНИЯ СИЛЬНОГО ИИ: ГИБРИДНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ С LLM, ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ И МУЛЬТИБЛОКЧЕЙНОМ

*A. B. Нечесов*

*Новосибирский государственный университет*

В работе предлагается новая методология построения интеллектуальных систем на основе LLM, логико-вероятностной системы обучения и мультиблокчейнов. В основе этой комбинации лежит задачный подход, который позволяет любой запрос к LLM рассматривать как некоторую формализованную задачу, решение которой предстоит найти. Данная комбинация позволяет хранить задачи и их решения в базе знаний, которая распределена по элементам мультиблокчейн-структуры и обрабатывается набором смарт-контрактов. Сами же задачи могут решаться как с помощью логической интеллектуальной системы, которая работает с иерархично расположеннымми вероятностными знаниями, так и с LLM, которые итеративно пытаются решить задачу, используя базу знаний как внешний источник памяти. В силу того, что знания постоянно накапливаются, обрабатываются и выкристаллизовываются, то данная интеллектуальная система по своим когнитивным способностям имеет гораздо больший потенциал, чем обычные LLM системы.

## Введение

Современные большие языковые модели (LLM), такие как GPT-4, демонстрируют впечатляющие способности к обработке языка и генерации гипотез, но сталкиваются с фундаментальными ограничениями: галлюцинациями, черным ящиком и статичностью знаний. Для преодоления этих барьеров предлагается гибридная система, объединяющая три компонента:

- LLM (быстрая интуитивная система),
- символьная логика (медленная, но строгая система проверки гипотез),
- мультиблокчейн (децентрализованное хранилище знаний).

Эта интеграция позволяет сохранить творческий потенциал LLM, устранить неопределенность через формальные доказательства и обеспечить непрерывное обучение через децентрализованную память.

### 1. Задачный подход: формализация и иерархия знаний

Любой запрос к системе рассматривается как формальная задача вида [1]:

$$\forall x \exists y \Phi(x) \rightarrow \Psi(x, y), \quad (1)$$

где необходимо найти самое эффективное решение  $y = t(x)$ . Вводится понятие вероятностного знания вида [2]:

$$K : < F(x, y), y = t(x), p >. \quad (2)$$

Далее можем определить иерархию знаний следующим образом:

$$K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow (\Phi_1(x) \subseteq \Phi_2(x)) \& (\Psi_1(x) \subseteq \Psi_2(x)) \& (p_1 \leq p_2) \quad (3)$$

## 2. Мультиблокчейн архитектура — иерархическое хранение знаний

### 2.1. Индуктивное определение мультиблокчейна

1. База индукции: Если  $B$  — блокчейн, тогда  $\langle B \rangle$  — мультиблокчейн.
2. Шаг индукции: Если  $M_1, M_2, \dots, M_k$  — мультиблокчейны и  $B$  — блокчейн, тогда  $\langle B, \langle M_1, M_2, \dots, M_k \rangle \rangle$  — мультиблокчейн.

### 2.2. Определение высоты и уровня

1. База индукции: Для  $\langle B \rangle$ :  $\text{level}(B) = 1$ ,  $h(\langle B \rangle) = 1$ .
2. Шаг индукции: Для  $\langle B, \langle M_1, \dots, M_k \rangle \rangle = M^*$ :

$$h(M^*) = \text{level}(B) = \max\{h(M_1), \dots, h(M_k)\} + 1.$$

### 2.3. Мастер блокчейн

*Мастер блокчейн* мультиблокчейна  $M$  — это такой блокчейн  $B$  что

$$\text{level}(B) = h(M).$$

### 2.4. Предикат Multi

$\text{Multi}(X)$  истинен тогда и только тогда, когда  $X$  — мультиблокчейн.

**Лемма.** Если  $h(M) > 1$ , тогда для всех  $x \in \text{head}(M)$

$$\text{Multi}(X) \wedge h(x) \in [1, h(M) - 1] \quad (4)$$

## 3. Метавселенная как полигон для AGI

Метавселенная представляет собой некоторую глобальную виртуальную площадку, объединяющую передовые сетевые технологии, виртуальную/дополненную реальность и искусственный интеллект. В нашем контексте она служит богатой тестовой средой для AGI (искусственного общего интеллекта): открытая многоагентная экосистема, где физические и виртуальные сущности существуют и взаимодействуют. Формально метавселенная трактуется как многоагентная система (MAS) [4], где каждый из агентов, может осуществлять различные действия и запоминать и обрабатывать информацию.

В такой социальной среде агенты могут формировать команды, конкурировать или сотрудничать, имитируя сложность человеческого общества [3]. Классическое взаимодействие «агент–среда» расширяется до многоагентного сценария, где агенты действуют одновременно. Многоагентная метавселенная порождает эмерджентные явления (рынки, культуры, конфликты), недоступные изолированным агентам. В этой среде разнородные агенты взаимодействуют с логической и блокчейн-инфраструктурой.

### Заключение

Представлена новая гибридная платформа для сильного искусственного интеллекта, которая объединяет логический вывод на основе LLM, символическую логику рассуждений и децентрализованную память блокчейна. Структурируя знания в иерархическую вероятностную логику и сохраняя их в многоуровневых блокчейнах, наша система обеспечивает непрерывное обучение, поддающееся проверке: агенты могут получать новую информацию по цепочке, тщательно проверять ее и со временем надежно расширять свои возможности. Этот дизайн преодолевает классические недостатки LLM (галлюцинации, устаревшие факты), всегда сверяя результаты с формально проверяемыми знаниями. На

примере метавселенной, построенной в соответствии с нашей методологией, показано, как агенты могут взаимодействовать друг с другом и как их когнитивные способности могут расти при решении задач с фиксированным бюджетом вычислительных ресурсов, что подчеркивает потенциал подхода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Goncharov S., Nechesov A. *AI-Driven Digital Twins for Smart Cities*. Eng. Proc. 2023. V. 58. P. 94.
2. Nechesov A. *Learning Theory and Knowledge Hierarchy for Artificial Intelligence Systems*. In: IEEE. Novosibirsk. 2024. P. 299-302.
3. Nechesov A., Ruponen J. *Empowering Government Efficiency Through Civic Intelligence: Merging Artificial Intelligence and Blockchain for Smart Citizen Proposals*. Technologies. 2024. V. 12. P. 271.
4. Nechesov A., Dorokhov I., Ruponen J. *Virtual Cities: From Digital Twins to Autonomous AI Societies* . In: IEEE Access. 2025. V. 13. P. 13866–13903.

# О ЛОГИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ КЛАССИФИКАЦИЯХ РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОРДИНАЛЬНЫХ СЛОВАХ

*B. N. Ореховский, V. L. Селиванов*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

В работе рассматриваются логический и топологический подходы к классификации  $\alpha$ -языков (где  $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$ ). Наиболее хорошо изучены  $\omega$ -языки. Важным техническим инструментом работы является тонкая иерархия [4].

Пусть  $\mathbb{B} = (B, \cup, \cap, \bar{\phantom{x}}, 0, 1)$  – булева алгебра. Сокращение  $ab = a \cap b$  будет часто использоваться. Пусть  $L$  – подрешетка  $(B, \cup, \cap, 0, 1)$ . Для любого  $k$  будем обозначать  $L(k)$  множество элементов вида  $\cup_i (a_{2i} \cap \bar{a}_{2i+1})$ , где  $a_0 \supseteq a_1 \supseteq \dots$  и  $a_k = 0$ . Последовательность  $\{L(k)\}_{k \in \omega}$  называется *разностной иерархией над  $L$* .

Под *базой* в  $\mathbb{B}$  будем понимать последовательность  $L = \{L_n\}_{n < \omega}$  подрешеток  $(B, \cup, \cap, 0, 1)$  такую, что  $L_n \cup \check{L}_n \subseteq L_{n+1}$  для каждого  $n < \omega$ , где  $\check{L}_n = \{\bar{a} \mid a \in L_n\}$ . База  $L$  *редуцируема*, если любой  $L_n$  обладает свойством редукции (т. е. для любых  $x_0, x_1 \in L_n$  найдутся непересекающиеся  $y_0, y_1 \in L_n$  (т. е.  $y_0 y_1 = 0$ ) такие, что  $y_i \subseteq x_i$  и  $x_0 \cup x_1 = y_0 \cup y_1$ .

Тонкая иерархия определяется в терминах (довольно экзотических) операций на подмножествах  $B$  – *bisep* и *Bisep*. Эти операции являются финитарными версиями соответствующих инфинитарных операторов, популярных в теории Вэджа:

$$\textit{bisep}(X, Y_0, Y_1, Y_2) = \{x_0 y_0 \cup x_1 y_1 \cup \bar{x}_0 \bar{x}_1 y_2 \mid x_i \in X, y_j \in Y_j, x_0 x_1 = 0\},$$

$$\textit{Bisep}(X, Y_0, Y_1, Y_2) = \{x_0 y_0 \cup x_1 y_1 \cup \bar{x}_0 \bar{x}_1 y_2 \mid x_i \in X, y_j \in Y_j, x_0 x_1 y_0 = x_0 x_1 y_1\}.$$

Операция *Bisep* более общая и относится к тонкой иерархии над произвольной базой, операция *bisep* приводит к эквивалентному, более простому определению тонкой иерархии над редуцируемой базой.

Тонкой иерархией над базой  $L$  называется последовательность  $\{S_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ , где  $S_\alpha = S_\alpha^0$  и классы  $S_\alpha^n (n < \omega)$  определяются индукцией по  $\alpha$ :

1.  $S_0^n = \{0\}; S_{\omega^\gamma}^n = S_\gamma^{n+1}$  for  $\gamma > 0$ ;
2.  $S_{\beta+1}^n = \textit{Bisep}(L_n, S_\beta^n, \check{S}_\beta^n, S_0^n)$  для каждого  $\beta < \varepsilon_0$ ;
3.  $S_{\beta+\omega^\gamma}^n = \textit{Bisep}(L_n, S_\beta^n, \check{S}_\beta^n, S_{\omega^\gamma}^n)$  для  $\gamma > 0$  и  $\beta$  вида  $\beta = \omega^\gamma \cdot \beta_1 > 0$ .

Пусть  $X$  – конечный алфавит, содержащий хотя бы 2 символа. Будем обозначать  $X^n$  – множество всех слов длины  $n$  над алфавитом  $X$ ,  $X^* = \bigcup_{n \in \omega} X^n$  – множество всех конечных слов и  $X^\alpha$  – множество всех  $\alpha$ -слов (где  $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$ ) над этим алфавитом.

Сопоставим алфавиту  $X = \{a, \dots\}$  сигнатуру  $\sigma_X = \{\leq\} \cup \{Q_a \mid a \in X\}$ , где  $\leq$  и  $Q_a$  (для любого  $a \in X$ ) – бинарные символы отношения. Будем также рассматривать расширение сигнатуры  $\sigma_X$  – сигнатуру  $\tau_X = \sigma_X \cup \{p, s\}$ , где  $p, s$  – унарные функциональные символы.

Для любой сигнатуры  $\rho \in \{\sigma_X, \tau_X\}$  любое  $\alpha$ -слово  $x \in X^\alpha$  можно рассматривать как  $\rho$ -строктуру  $\mathbf{x} = (\alpha; \leq, Q_a, \dots)$ , где  $\leq$  понимается в обычном смысле, для любого символа  $a \in X$   $Q_a(i) \leftrightarrow x(i) = a$ ,  $s$  – функция следования и  $p$  – функция предшествования (полагаем  $p(0) = 0$ ).

Пусть  $\varphi$  – предложение логики первого порядка одной из указанных сигнатур. Обозначим  $L(\varphi) = \{x \mid x \models \varphi\}$ . Также будем обозначать  $\Sigma_n^\rho$  – класс всех языков вида  $L(\varphi)$ , где  $\varphi$  принадлежит уровню  $\Sigma_n$  иерархии по числу перемен кванторов  $\rho$ -предложений.

Последовательность  $\mathcal{L} = \{\Sigma_{1+n}^\rho\}_{n \in \omega}$  является базой, следовательно, можно рассмотреть соответствующую тонкую иерархию  $\{\mathcal{S}_\alpha^\rho\}_{\alpha < \varepsilon_0}$  над ней. Эту тонкую иерархию будем называть логической. В работе [7] было показано, что для  $\omega$ -языков ни один из уровней  $\Sigma_{1+n}^\rho, \Pi_{1+n}^\rho, n \leq \omega$  не обладает свойством редукции при  $\rho \in \{\sigma_A, \tau_A\}$ . Следовательно, в определении  $\mathcal{S}_\alpha^\rho$  не можем использовать операцию *bisep* вместо *Bisep*. В этом заключается определенная техническая сложность доказательств некоторых свойств логических тонких иерархий  $\{\mathcal{S}_\alpha^\rho\}$ , приведенных ниже.

В работе построено множество языков  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \varepsilon_0}$  такое, что любой язык  $N_\alpha$  задается предложением логики первого порядка сигнатуры  $\sigma$  и принадлежит уровню  $\mathcal{S}_\alpha^\sigma$ . Отметим, что по построению  $N_\alpha$  – язык над алфавитом, зависящим от  $\alpha$ . Возникает естественный вопрос: можно ли построить языки с теми же свойствами, но над фиксированным алфавитом? На данный момент ответ для сигнатуры  $\sigma_A$  остается неизвестным, но можно сделать это для сигнатуры  $\tau_A$ , для произвольного фиксированного алфавита, в частности, для бинарного алфавита  $A = \{0, 1\}$ . С помощью достаточно прямолинейной техники кодирования можно закодировать (используя также функции  $p$  и  $s$ ) языки  $N_\alpha$  в языки  $N_\alpha^\tau$  сигнатуры  $\tau_{\{0,1\}}$  с тем же свойством.

Пусть  $X$  – конечный алфавит, содержащий не менее двух символов. Снабдим множество  $X$  дискретной топологией, получившееся пространство будет польским. Будем работать с топологией произведения на множествах  $X^\alpha = \prod_{i \in \alpha} X$ , где  $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$ . Эти пространства тоже будут польскими, поскольку каждое является счетным произведением польских пространств.

Пространство  $2^\omega$  – канторовское. Открытые множества в канторовской топологии имеют вид  $YX^\omega$ , где  $Y \subseteq X^*$ . Это топологическое пространство компактно, любое счетное произведение канторовских пространств гомеоморфно канторовскому пространству и для любых двух конечных неунарных алфавитов  $X_1, X_2$  соответствующие пространства  $X_1^\omega, X_2^\omega$  гомеоморфны.

Для топологического пространства  $T$  определим последовательность  $\{\Sigma_\alpha^0(T)\}_{\alpha \in \omega_1}$  – борелевскую иерархию. Также обозначим  $\Pi_\alpha^0(T) = \{\bar{U} \mid U \in \Sigma_\alpha^0(T)\}$  и  $\Delta_\alpha^0(T) = \Sigma_\alpha^0(T) \cap \Pi_\alpha^0(T)$ . Положим  $\Sigma_1^0(T) = \{U \subseteq T \mid U \text{ – открытое}\}$ ,  $\Sigma_\alpha^0(T) = \{\bigcup_{n \in \omega} U_n \mid U_n \in \Pi_{\xi_n}^0(T)$ , где  $\xi_n < \alpha\}$ . Если пространство  $T$  понятно из контекста, то будем опускать его в обозначениях и писать  $\Sigma_\alpha^0$  вместо  $\Sigma_\alpha^0(T)$ . В основном, будем работать с некоторым фиксированным алфавитом  $A$ .

Конечная борелевская иерархия  $\{\Sigma_{1+n}^0\}_{n \in \omega}$  является редуцируемой базой. Следовательно, можно построить соответствующую (топологическую) тонкую иерархию  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$  над  $\{\Sigma_{1+n}^0\}_{n \in \omega}$ , причем в силу свойств тонкой иерархии можно использовать операцию *bisep* вместо *Bisep*. Этот факт необходим для доказательства важного свойства языков  $N_\alpha$ , которое будет приведено ниже.

Эта тонкая иерархия является небольшим, но важным фрагментом иерархии Вэджа в  $A^\omega$ , которая определяется в терминах сводимости Вэджа ( $m$ -сводимости непрерывными функциями). Пусть  $A_1, A_2$  – алфавиты и  $L_1 \subseteq A_1^\omega, L_2 \subseteq A_2^\omega$ . Будем говорить, что язык  $L_1$  сводится по Вэджсу к языку  $L_2$  (будем использовать обозначение  $L_1 \leq_W L_2$ ), если существует непрерывная функция  $f : A_1^\omega \rightarrow A_2^\omega$  такая, что  $L_1 = f^{-1}(L_2)$ . Иерархия Вэджа в  $A^\omega$  совпадает со структурой степеней борелевских подмножеств  $A^\omega$  относительно сводимости Вэджа на  $A^\omega$  (при  $A = A_1 = A_2$ ). Эта структура фундирована и не содержит

антицепей длины 3. Известно, что любой несамодвойственный уровень  $\mathcal{C}$  иерархии Вэджа (в том числе и уровни  $\Sigma_\alpha$ , определенные выше) обладает следующим свойством: язык  $L$  принадлежит классу  $\mathcal{C} \setminus \check{\mathcal{C}}$  тогда и только тогда, когда  $L$  – полный по Вэджу в  $\mathcal{C}$ .

В работе показано, что для любого  $\alpha \in \varepsilon_0$  язык  $N_\alpha$  является  $\Sigma_\alpha$ -трудным. Имеем, что для любого  $\alpha \in \varepsilon_0$  также верно соотношение  $\mathcal{S}_\alpha^\tau \subseteq \Sigma_\alpha$ . Следовательно, для любого  $\alpha \in \varepsilon_0$  язык  $N_\alpha$  также является  $\Sigma_\alpha$ -полным.

Из работы [1] известно, что любой  $\alpha$ -язык, задаваемый предложением логики первого порядка сигнатуры  $\tau$ , является  $\alpha$ -регулярным. На множество регулярных  $\omega$ -языков топологическая тонкая иерархия совпадает с иерархией Вагнера [6]. Из полученного результата, в частности, следует, что топологическая иерархия регулярных  $\alpha$ -языков намного сложнее иерархии Вагнера (иерархия Вагнера имеет длину  $\omega^\omega$ ).

Также установлено точное соотношение между уровнями логической и топологической иерархий регулярных  $\alpha$ -языков, аналогичный результату, полученному для регулярных  $\omega$ -языков в работе [3], то есть, для любого  $\alpha \in \varepsilon_0$  верно  $\mathcal{S}_\alpha^\tau \subseteq \Sigma_\alpha$  и  $\mathcal{S}_\alpha^\tau \not\subseteq \dot{\Sigma}_\alpha$ . Из этого результата также следует, что иерархия  $\{\mathcal{S}_\alpha^\tau\}_{\alpha < \varepsilon_0}$  не схлопывается.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-71-30002).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bedon N. *Logic over Words on Denumerable Ordinals*. Journal Of Computer And System Sciences. 2001. V. 63. P. 394–431.
2. Landweber L. *Decision Problems for  $\omega$ -Automata*. Mathematical Systems Theory. 1969. V. 3. P. 376–384.
3. Orekhovskii V., Selivanov V. *Logic vs Topology on Regular  $\omega$ -Languages*. Unity Of Logic And Computation. 2023. **13967**. P. 141–153.
4. Selivanov V. *Fine Hierarchies and Boolean Terms*. Journal Of Symbolic Logic. 1995. V. 60. P. 289–317.
5. Selivanov V. *Fine Hierarchy of Regular  $\omega$ -Languages*. Theoretical Computer Science. 1998. V. 191. P. 37–59.
6. Wagner K. *On  $\omega$ -Regular Sets*. Information And Control. 1979. V. 43. P. 123–177.
7. Селиванов В. Л., Щукин А. Г. *Об иерархиях регулярных беззвездных языков*. Препринт № 69 Института систем информатики СО РАН им. А. П. Ершова, 2000.

# МУЛЬТИАГЕНТНАЯ ИНТЕРВАЛЬНАЯ ЛОГИКА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ И ДИНАМИЧЕСКИМ ОБНОВЛЕНИЕМ ОЦЕНКИ НА ОСНОВЕ RAFT

*H. A. Проценко, B. B. Рыбаков*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

На данный момент активно изучается приложения нестандартных логик и математической логики в целом в CS.

В качестве примеров могут служить разработка аксиоматизаций блокчейн [1] или инструментов для анализа византийских систем [2, 3].

Нами предлагается некоторая новая формализация работы  $N + 1$  сервера в интервалах времени с изменяющимся сервером-лидером. При этом смотрим несколько иначе на концепцию моделей с мультиозначиваниями, которая ранее исследовалась, например в работах [4–6]. А также продолжаем исследование систем с интервальными структурами, как в нашей предыдущей работе [7].

Здесь будет предложена семантика логической системы, которая в некотором смысле формализует работу  $N + 1$  сервера, у каждого из которых имеется свой журнал с возможностью обновления. При этом внутри каждого сервера возможно  $N$  вычислительных потоков, которые моделируются посредством интервалов. Для максимального упрощения этого представления исследуются слегка измененные модели Крипке, а также вместо обновления модели при определении выполнимости некоторых новых формул будем говорить о новой модели измененными журналами и означиваниями сервера-лидера, но той же структурой относительно серверов. Обновление означиваний будем стараться максимально приблизить к [8].

Фиксируем счетное число пропозициональных переменных  $Prop = \{p, q, \dots\}$ . Определяем язык логики:

$$\mathcal{L} = \langle \wedge^2, \vee^2, A^2, \neg^1, \Box_i^1, K_i^1, M_i^1, Syn^1 \rangle.$$

Запишем правила построения формул:

$$\varphi ::= p|\varphi \wedge \varphi|\varphi \vee \varphi|\neg\varphi|\Box_i\varphi|K_i\varphi|Syn\varphi|M_i p|pA\varphi.$$

Опишем кратко семантику.

Пусть  $In_i = [a_0^i; b_0^i] \cup [a_1^i; b_1^i] \cup \dots = \bigcup_{j \in \omega} [a_j^i; b_j^i] \subset \omega$ , где  $a_j^i \leq b_j^i$  и  $b_j^i < b_{j+1}^i$  и  $b_j^i \leq a_{j+1}^i$  (интервалы могут пересекаться не более чем в одной точке), и  $EIn_i = \{[a_0^i; b_0^i], [a_1^i; b_1^i], \dots\}$  – множество всех интервалов из  $In_i$ ). Пусть  $\leq$  – линейный порядок на  $\omega$ .

Определим:

бинарные отношения

$$R_{\Box_0}, \dots, R_{\Box_N}: xR_{\Box_i}y \iff (\exists I \in EIn_i)(x \in I \wedge y \in I \wedge x \leq y);$$

$$R_{K_0}, \dots, R_{K_N}: xR_{K_i}y \iff (x \in In_i \wedge y \in In_i \wedge x \leq y);$$

реляционную структуру

$$\mathcal{F} = \langle \omega, R_{\Box_0}, \dots, R_{\Box_N}, R_{K_0}, \dots, R_{K_N} \rangle;$$

структурой, на которой будет вводиться понятие выполнимости:

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \langle Follower_0, Log_0 \rangle, \langle Follower_1, Log_1 \rangle, \dots, \langle Follower_N, Log_N \rangle \rangle,$$

где  $Follower_i : Prop \mapsto 2^\omega$  и  $Log_i$ -кортеж, элементы которого пропозициональные переменные, где  $i \in [0, N]$ .

Пусть  $status_i$  – это пропозиция «Сервер  $i$  доступен». При наличии  $N + 1$  сервера этот статус можно интерпретировать это как «Сервер  $i$  доступен с точки зрения сервера  $j$ ». А именно,  $x \in Follower_1(status_3)$  – «в момент времени  $x$  Сервер 3 доступен для Сервера 1». Причем условимся, что для выделенных пропозиций всегда будет верно следующее свойство:

$$x \in Follower_i(status_j) \iff x \in Follower_j(status_i).$$

Введем следующую функцию:

$$Maj_j(x) = \|\{i | i \in [1, N] \wedge x \in Follower_j(status_i) \wedge Log_i = Log_j\}\|.$$

Ее интерпретация следующая – это число доступных серверов относительно сервера  $j$  в момент времени  $x$  с таким же журналом, как и у  $j$ .

Введем понятие выполнимости индуктивно, следующим образом:

$$\langle \mathcal{M}, x \rangle \models p \iff x \in Follower_0(p);$$

$\langle \mathcal{M}, x \rangle \models p A \varphi \iff$  существует модель  $\mathcal{M}'$ , в нулевом состоянии (момент времени  $x' = 0$ ) которой выполнима формула  $\varphi$ , при этом число серверов одинаково и для каждого сервера из  $\mathcal{M}$  существует сервер в  $\mathcal{M}'$  такой, что они одинаковы в плане оценок, но отличны не более чем на одну единицу записи в журналах (одна пропозиция). При этом сервер-лидер у них различен и в  $\mathcal{M}'$ , в лидерах сервер с максимальным  $Maj_j(x)$  по всем  $j$  доступным из 0 относительно исходной модели серверам (т. е. по значению  $status_i$  можно построить неориентированный граф и по нему определить такой сервер) в том числе не непосредственно. То есть могут быть случаи изолированного сервера или случаи, когда серверы делятся на непересекающиеся классы.

$\langle \mathcal{M}, x \rangle \models Syn \varphi \iff$  существует модель  $\mathcal{M}'$ , в которой все серверы, доступные относительно сервера-лидера (это серверы, находящиеся в той же компоненте связности, что и текущий лидер, как в графе доступности, описанном ранее), имеют одинаковый журнал и в нулевом состоянии модели формула  $\varphi$  выполнима. Если изначально журналы совпадают, то выполнимость смотрится на исходной модели.

- $\langle \mathcal{M}, x \rangle \models M_i(p) \iff x \in Follower_i(p) \text{ И } \langle \mathcal{M}, x \rangle \models status_i;$
- $\langle \mathcal{M}, x \rangle \models K_i \varphi \iff (\forall y)(x R_{K_i} y \rightarrow \langle \mathcal{M}, y \rangle \models \varphi);$
- $\langle \mathcal{M}, x \rangle \models \Box_i \varphi \iff (\forall y)(x R_{\Box_i} y \rightarrow \langle \mathcal{M}, y \rangle \models \varphi);$
- $\langle \mathcal{M}, x \rangle \models \varphi \wedge \psi \iff \langle \mathcal{M}, x \rangle \models \varphi \text{ И } \langle \mathcal{M}, x \rangle \models \psi;$
- $\langle \mathcal{M}, x \rangle \models \varphi \vee \psi \iff \langle \mathcal{M}, x \rangle \models \varphi \text{ ИЛИ } \langle \mathcal{M}, x \rangle \models \psi;$
- $\langle \mathcal{M}, x \rangle \models \neg \varphi \iff \langle \mathcal{M}, x \rangle \not\models \varphi.$

Пусть  $\mathcal{K}$  – это класс всех моделей, описанных выше. Определим логику следующим образом:

$$L := \{\varphi \in Form_\varphi | \forall \mathcal{M} \in \mathcal{K} \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

Исследуется проблема разрешимости для этой логики, а также возможные подходы, которые бы позволили перейти к рассмотрению одной модели вместо построения новых.

Кроме того, ставится задача формализовать случай разделения серверов с их последующим объединением в рамках предложенной логики.

*Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Goncharov S., Nechesov A. *Axiomatization of Blockchain Theory*. Mathematics. 2023. T. 11. № 13. C. 2966.
2. Kuznets R. [et al.]. *Epistemic reasoning with byzantine-faulty agents*. Frontiers of Combining Systems: 12th International Symposium, FroCoS. 2019. London, UK, September 4-6, 2019. Proceedings 12. Springer International Publishing. 2019. C. 259–276.
3. Van Ditmarsch H., Fruzsa K., Kuznets R. *A new hope*. In D. Fernandez-Duque, A. PALMIGIANO, S. Pinchinat (Eds.). *Advances in Modal Logic*. 2022. V. 14. P. 349–369.
4. Rybakov V. V. *Multiagent temporal logics with multivaluations*. Siberian Mathematical Journal. 2018. T. 59. C. 710–720.
5. Protsenko N. A., Rybakov V. V. *The satisfiability problem in linear multi-agent knowledge logic based on N*. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2024. T. 49. C. 124–134.
6. Grekovich K. V., Rybakov V. V., Rimatskiy V. V. *Intransitive Temporal Multi-agent Logic with Agents' Multi-valuations. Decidability*. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2025. V. 51. P. 141–150.
7. Protsenko N. A., Rybakov V. V., Rimatskiy V. V. *Satisfiability Problem in Interval FP-logic*. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. V. 44. P. 98–107.
8. Ongaro D., Ousterhout J. *In search of an understandable consensus algorithm*. USENIX annual technical conference (USENIX ATC 14). 2014. P. 305–319.

# РАЗРЕШИМОСТЬ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В ЛОГИКЕ $Grz$ ( $GL$ )

*B. B. Римацкий, B. B. Рыбаков*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

В начале 2000-х для большинства базовых неклассических логик ключевые вопросы теории допустимых правил (разрешимость по допустимости, наличие базиса) были решены. Одним из направлений дальнейшего изучения допустимых правил вывода неклассических логик стали глобально допустимые правила вывода (введенные в 2005 г. в [1]), т. е. правила, допустимые не только в заданной модальной логике  $L$  или  $S4$ , а в целом классе ее финитно аппроксимируемых расширений. Такие правила развиваются и обобщают понятие допустимого правила вывода. Как и для допустимых правил заданной индивидуальной логики, для глобально допустимых правил также возникает проблема разрешимости (проблема Фридмана), наличия конечного или явного базиса (проблема Кузнецова) и т. д.

Вероятно, практическое применение глобально допустимых правил может быть основано на следующем наблюдении. Известно, что в компьютерных науках объекты или явления часто могут быть описаны с точки зрения различных неклассических логик (модальных, временных и т. д.). Наличие правил вывода, допустимых сразу во всех логиках (достаточно широком классе таких логик), позволит по-новому взглянуть на исследуемый объект или явление, получить новые следствия из имеющихся данных.

Представленная работа продолжает изучение глобально допустимых правил модальных логик и развивает результаты, полученные в [2, 3]. В указанных статьях были описаны свойства этой модели (условия), наличие которых гарантировало глобальную допустимость или недопустимость заданного правила в логике  $S4$ . Их описание позволило существенно сузить множество правил (моделей для правил), где вопрос глобальной допустимости оставался открытым (см. свойства (1)–(4) в теореме 2).

Для правил в редуцированной форме, модель которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам (свойства (1)–(4)), получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике  $Grz$  ( $GL$ ). На основе полученного критерия построен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в  $Grz$  ( $GL$ ) разрешима.

В данном исследовании используется редуцированная форма модальных правил вывода. Говорим, что правило  $r$  имеет редуцированную форму, если  $r := \{\bigvee_{1 \leq j \leq m} \phi_j / x_0\}$ , где

$$\phi_j := \bigwedge_{0 \leq i \leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0 \leq i \leq k} \Diamond x_i^{b_i}, \quad a_i, b_i \in \{0, 1\}; \quad x^0 := x, \quad x^1 := \neg x.$$

Для каждого члена  $\phi_j$  посылки правила в редуцированной форме определим также множества

$$\theta_1(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, a_j = 0\}; \quad \theta_2(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, b_j = 0\};$$

$$\theta_3(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, a_j = 1\}; \quad \theta_4(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, b_j = 1\}.$$

Для правила  $r$  в редуцированной форме множество всех формул  $\phi_j$  в посылке обозначим как  $Pr(r)$ .

**Утверждение 1** [4, гл. 3.1]. Для любого модального правила вывода  $R$  существует правило  $rf(R)$  в редуцированной форме, эквивалентное  $R$  относительно истинности на  $S4$ -алгебрах и  $S4$ -фреймах;  $R$  и  $rf(R)$  одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей  $S4$ .

Напомним определение глобально допустимого правила вывода, введенное в [1]. Правило вывода  $r$  глобально допустимо в логике  $L$ , если  $r$  допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих логику  $L$ . Набор правил вывода  $\mathcal{R}$  называется базисом глобально допустимых правил логики  $L$ , если: 1) каждое правило из  $\mathcal{R}$  глобально допустимо в  $L$ ; 2) любое глобально допустимое в  $L$  правило выводится из  $\mathcal{R}$  во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих  $L$ .

Основным результатом [1] была редукция глобальной допустимости правила в логике  $S4$  ( $Int$ ) к допустимости во всех табличных расширениях этой логики:

**Теорема 1** [1, теорема 3]. Правило вывода  $r$  допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих  $S4$  ( $Int$ )  $\iff r$  допустимо во всех табличных логиках (в том числе порожденных конечными корневыми  $S4$ -фреймами), расширяющих  $S4$  ( $Int$ ).

Определим модель  $\mathfrak{M}(r, X)$  для правила  $r$  в редуцированной форме (см. [4, гл. 3.1]). Пусть задано правило вывода  $r$  в редуцированной форме. И пусть множество  $X \subseteq Pr(r)$  состоит из всех членов посылки правила, таких, что  $\forall \phi_j \in X (\theta_1(\phi_j) \subseteq \theta_2(\phi_j))$ . Модель  $\mathfrak{M}(r, X)$  построена на множестве  $X$  с отношением  $R$  и означанием  $V : \forall \phi_j, \phi_k \in X (\phi_j R \phi_k \iff \theta_2(\phi_k) \subseteq \theta_2(\phi_j)); \forall \phi_j \in X, \forall p \in Var(r) (\phi_j \in V(p) \iff p \in \theta_1(\phi_j))$ . Понятно, что отношение  $R$  рефлексивно и транзитивно на множестве  $X$ . Модель  $\mathfrak{M}(r, X)$  для правила  $r$  в логике  $Grz$  ( $GL$ ) определяется аналогично.

Пусть  $G$  – произвольный конечный  $S4$ -фрейм (модель), первый слой которого содержит одноэлементный сгусток  $e_1$ . Для произвольного элемента  $y \in G$  определим локальную компоненту  $K_c(y)$  следующим образом. Пусть  $\mathcal{F}_0 := y^R \sqcup \{e_1\}$ . На каждом шаге построения  $i > 0$  для каждой нетривиальной антицепи  $\mathcal{A}_j \subseteq S_{\leq i+1}(\mathcal{F}_i)$ , имеющей одноэлементное ко-накрытие в  $G$ , добавляем одно из них к  $\mathcal{F}_{i+1}$  (в случае, когда антицепь имеет строго больше одного ко-накрытия, выбираем одно из них). Через конечное число шагов процесс построения оборвется в силу конечности  $G$ . Полученный в результате фрейм и есть локальная компонента  $K(y)$ .

Пусть задано правило  $r$  в редуцированной форме и модель  $\mathfrak{M}(r, X)$  для этого правила. Используя результаты, полученные в [2], рассмотрим сначала следующие случаи:

### Лемма 1.

(1) Если  $\forall \phi \in S_1(\mathfrak{M}(r, X))$  выполняется  $\theta_1(\phi) \neq \theta_2(\phi)$ , то правило  $r$  глобально допустимо в логике  $S4$ .

(2) Если  $\forall \phi \in \mathfrak{M}(r, X)$  выполняется  $x_0 \in \theta_1(\phi)$ , то правило  $r$  глобально допустимо в  $S4$ . Если существует  $\phi_0 \in Pr(r) : x_0 \notin \theta_1(\phi_0)$  и при этом выполняется также  $\theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0)$ , то правило  $r$  не допустимо глобально в логике  $S4$ .

(3) Если в модели  $\mathfrak{M}(r, X)$  выполняется:  $\exists \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) : \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$ ,  $\exists \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) : x_0 \notin \theta_1(\phi_0) \& \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0)$ , и при этом локальная компонента

$$K_c(\phi_0) = \phi_0^R \cup \phi^1 \cup \bigcup \{\phi \in \mathfrak{M}(r, X) : \exists z \in \phi_0^R \cup \phi^1 (\phi R z)\} \subseteq \mathfrak{M}(r, X)$$

насыщена по ко-накрытиям до глубины  $d(\phi_0)$  элемента  $\phi_0$  (т. е. каждая антицепь элементов из  $K_c(\phi_0)$  глубины не более  $d(\phi_0)$  имеет ко-накрытие), то правило  $r$  не допустимо глобально в логике  $S4$ .

(4) Если  $\exists \phi \in K_c(\phi_0) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X) : \phi \not\models_V \phi$ , то правило  $r$  глобально допустимо в логике  $S4$ .

(5) Пусть задано подмножество  $Z \subseteq X$  такое, что  $\mathfrak{M}(r, Z) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)$ . Если  $|Z| \leq 3$  и правило  $r$  опровергается на подмодели  $\mathfrak{M}(r, Z)$ , то правило  $r$  не допустимо глобально в логике  $S4$ .

При выполнении этих условий (свойств модели  $\mathfrak{M}(r, X)$ ), вопрос глобальной допустимости или недопустимости правила уже решен. Поэтому далее рассматриваем правила вывода в редуцированной форме, модель  $\mathfrak{M}(r, X)$  для которых удовлетворяет свойствам:

- (1)  $\exists \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) : \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$ ,
- (2)  $\exists \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) : x_0 \notin \theta_1(\phi_0) \& \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0)$ ,
- (3) локальная компонента  $K_c(\phi_0)$  не насыщена по ко-накрытиям,
- (4) правило  $r$  опровергается на  $K_c(\phi_0)$  (т. е.  $\forall \phi \in K_c(\phi_0) (\phi \models_V \phi), \exists \phi_0 \in K_c(\phi_0) (\phi_0 \not\models_V x_0))$ .

Оказалось, что при выполнении этих условий (1)–(4) правило может быть как глобально допустимым, так и нет. Однако множество правил вывода, для которых вопрос о глобальной допустимости оставался открыт, стало существенно меньше и проще. Это позволило доказать следующую теорему:

**Теорема 2.** Пусть Grz (GL)-модель  $\mathfrak{M}(r, X)$  для правила  $r$  в редуцированной форме удовлетворяет условиям: (1)  $\exists \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) : \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$ , (2)  $\exists \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) : x_0 \notin \theta_1(\phi_0) \& \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0)$ , (3) локальная компонента  $K_c(\phi_0)$  не насыщена по ко-накрытиям, (4) правило  $r$  опровергается на  $K_c(\phi_0)$  (т. е.  $\forall \phi \in K_c(\phi_0) (\phi \models_V \phi), \exists \phi_0 \in K_c(\phi_0) (\phi_0 \not\models_V x_0))$ .

Правило  $r$  глобально допустимо в логике Grz (GL) если и только если для любого непустого множества дизъюнктоов  $Z \subseteq X$  существует нетривиальная антицепь  $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$  такая, что:

- (1)  $\exists \mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0) : f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R \& f - p\text{-морфизм};$
- (2)  $\exists \phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0)$  – ко-накрытие для  $\mathcal{Y}$  в  $K_c(\phi_0)$ ; т. е.  $\theta_2(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_1(\phi_{\mathcal{Y}}) \cup \bigcup_{\mathcal{Y}} \{\theta_2(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\} \& \theta_4(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_3(\phi_{\mathcal{Y}}) \cap \bigcap_{\mathcal{Y}} \{\theta_4(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$
- (3) антицепь  $\mathcal{A}$  не имеет ко-накрытия в  $\mathfrak{M}(r, X)$ , т. е. выполняется:  $\forall \phi_a \in \mathfrak{M}(r, Z)$

$$\theta_2(\phi_a) \neq \theta_1(\phi_a) \cup \bigcup_{\mathcal{A}} \theta_2(\phi_i) \& \theta_4(\phi_a) \neq \theta_3(\phi_a) \cap \bigcap_{\mathcal{A}} \theta_4(\phi_i).$$

На основе результатов, полученных в лемме 1 и теореме 2, был разработан алгоритм проверки глобальной допустимости в логике Grz (GL) заданного правила  $r$  в редуцированной форме. Таким образом, доказано следующее утверждение:

**Теорема 3.** Проблема глобальной допустимости в логике Grz (GL) разрешима.

Исследование было поддержано Российским научным фондом (проект № 23-21-00213, 25-21-20011) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rybakov V. V., Rimatski V. V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics. Bulletin of the Section of Logic. 2005. V. 34. № 2. P. 1–7.
2. Римацкий В. В. Глобально допустимые правила вывода. Известия Иркутского госуниверситета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 138–160.

3. Римацкий В. В. *Базис глобально допустимые правила логики S4*. Известия Иркутского госуниверситета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 152–169.
4. Rybakov V. V. *Admissibility of logical inference rules*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. New-York, Amsterdam : Elsevier Sci. Publ., 1997. V. 136. 611 p.

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ИНТРАНЗИТИВНОЙ ВРЕМЕННОЙ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ ЛОГИКИ

*B. B. Рыбаков, B. P. Кияткин*

*Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск*

В этой работе изучается интранзитивная временная мультиагентная логика. Эта логика семантически определяется как множество формул, истинных на линейных моделях с мультиозначиванием переменных для агентов на кластерах состояний. Доказывается, что исследуемая логика разрешима и финитно аппроксимируема.

Логическая концепция знания возникла в ходе анализа распределенных систем и привела к развитию мультиагентных и мультиозначиваемых логических систем. В последнее время в исследованиях по концепции знания применяются временные логики [1–3]. В статье изучается интранзитивная временная мультиагентная логика с мультиозначиванием для каждого агента. Моделирование концепции знания развивается с помощью моделей Крипке. Это линейные временные модели, состояния в которых представлены обычными кластерами с отношениями достижимости для агентов, где время интранзитивно и действует только для связи кластеров. Доказывается, что исследуемая логика разрешима и финитно аппроксимируема.

## 1. Определения и предварительные результаты

Под логикой понимается множество формул, истинных на моделях из некоторого класса моделей. Напомним некоторые определения.

Фреймом  $\mathcal{F}$  называется пара  $\langle W, R \rangle$ , где  $W$  – произвольное непустое множество, а  $R$  – бинарное отношение на  $W$ . Непустое подмножество  $C \subseteq W$  называется кластером, если: (1) для любых  $x, y$ ,  $x \neq y$  имеет место  $xRy$ , (2) для любого  $x \in C$ ,  $y \in W$  и  $(xRy \& yRx)$  следует  $y \in C$ . Фрейм  $\mathcal{F}$  называется интранзитивным, если отношение достижимости  $R$  на  $W$  интранзитивно.

Логика  $\lambda$  называется разрешимой, если существует алгоритм, который для произвольной формулы может установить, принадлежит ли она логике  $\lambda$ . Логика  $\lambda$  обладает свойством финитной аппроксимируемости, если для любой формулы  $\alpha \notin \lambda$  существует конечная  $\lambda$ -модель, на которой опровергается формула  $\alpha$ .

## 2. Логика NML, финитная аппроксимируемость и разрешимость

NML-фрейм – это набор  $\mathcal{F}_{NML} = \langle W, Next, R_1, \dots, R_n \rangle$ , где  $W = \bigcup_{i \in J} C_i$ , и  $J = [0, 1, \dots, m] \vee (J = N)$  и любое  $C_i$  – кластер, то есть  $R_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  – отношение эквивалентности на  $C_i$  такое, что  $xR_jy \Leftrightarrow \exists i \in J : (x \in C_i \& y \in C_i)$ . Временное бинарное отношение  $Next$  определяется следующим образом:  $(x \text{ Next } y) \Leftrightarrow \exists i \in J : (x \in C_i \& y \in C_{i+1})$ . В случае когда  $J = [0, \dots, m]$ , полагаем  $\forall x, y \in C_m (x \text{ Next } y)$ .

NML-модель – это набор  $\mathcal{M}_{NML} = \langle \mathcal{F}, V_1, V_2, \dots, V_n, V_{av} \rangle$ , где  $\mathcal{F}$  есть NML-фрейм,  $V_j \subseteq 2^W$  – означивание  $j$ -го агента. Если  $a \in \mathcal{M}_{NML}$  и  $a \in V_j(p)$ , то пишем  $(\mathcal{M}_{NML}, a) \models_{V_j} p$  и говорим, что  $p$  истинно на элементе  $a$  относительно означивания  $j$ -го агента  $V_j$ .

Язык логики NML состоит из:

- 1)  $P := \{p_1, p_2, \dots\}$  – множество пропозициональных переменных;
- 2)  $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$  – булевые операторы;
- 3)  $K_j$  – оператор знания  $j$ -го агента,  $1 \leq j \leq n$ ;
- 4)  $\mathcal{N}$  – оператор времени;
- 5)  $Stl_j$  – оператор информационной стабильности для  $j$ -го агента;

- 6)  $AV$  – оператор авторитетного мнения;
- 7)  $Rel_j$  – оператор информационной надежности для  $j$ -го агента;
- 8)  $\{( , )\}$  – вспомогательные символы (скобки).

Формула в  $NML$ -языке определяется стандартным образом. Любое означивание агентов  $V_j$  на шкале  $\mathcal{F}_{NML}$  модели  $\mathcal{M}_{NML}$  может быть распространено на формулы следующим образом:

- (1) Истинность булевых логических связок  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  определяется стандартно;
- (2)  $(\mathcal{F}_{NML}, x) \models_{V_j} K_j(\alpha) \iff \forall y \in W((xR_jy) \implies (\mathcal{F}_{NML}, y) \models_{V_j} \alpha);$
- (3)  $(\mathcal{M}_{NML}, x) \models \mathcal{N}(\alpha) \iff \exists k \in N : x \in C_k \wedge \forall y \in C_{k+1},$  то есть  $(x \text{ Next } y)$  и  $(\mathcal{M}_{NML}, y) \models \alpha;$
- (4)  $(\mathcal{F}_{NML}, x) \models_{V_j} Stl_j(\alpha) \iff |\{y \in W : (xR_jy) \wedge (\mathcal{F}_{NML}, y) \models_{V_j} \alpha\}| \geq |\{y \in W : (xR_jy) \wedge (\mathcal{F}_{NML}, y) \models_{V_j} \neg \alpha\}|;$
- (5)  $(\mathcal{F}_{NML}, x) \models_{V_{av}} AV(\alpha) \iff V_{av}(\alpha)$  (истинность формулы  $AV(\alpha)$  совпадает с означиванием  $V_{av}(\alpha)$  на  $x$ );
- (6)  $(\mathcal{F}_{NML}, x) \models_{V_j} Rel_j(\alpha) \iff (\mathcal{M}_{NML}, x) \models_{V_j} Stl_j(\alpha) \wedge AV(\alpha) \wedge \alpha.$

Каждый элемент  $NML$ -шкалы  $\mathcal{F}_{NML}$  считаем информационной точкой (пунктом). Все информационные точки, потенциально доступные в один и тот же момент времени, образуют кластеры  $C_0, C_1, C_2, \dots$ . Отношения  $R_j$  соединяют друг с другом те точки кластера, которые доступны  $j$ -ому агенту в данный момент  $\forall x, y \in W$ :

$$xR_jy \iff \forall \varphi \in L [(\mathcal{F}_{NML}, x) \models_{V_j} K_j(\varphi) \iff \models_{V_j} (\mathcal{F}_{NML}, y) \models_{V_j} K_j(\varphi)],$$

где  $L$  – язык логики  $NML$ .

Временное отношение  $Next$  связывает информационные точки в единый линейный и дискретный временной поток, то есть  $xNexty$  означает, что  $y$  будет доступно в следующий момент времени относительно  $x$ . Время полагаем дискретным, то есть между двумя моментами времени  $C_n$  и  $C_{n+1}$  нет других моментов времени. При этом цепь кластеров имеет начало  $C_0$ :  $C_0 \xrightarrow{\text{Next}} C_1 \xrightarrow{\text{Next}} C_2 \xrightarrow{\text{Next}} C_3 \xrightarrow{\text{Next}} \dots$  Линейность течения времени – это отсутствие ветвления, то есть после каждого момента  $n$  может идти только один момент, так что  $C_n \xrightarrow{\text{Next}} C_{n+1}$ .

Возьмем произвольную формулу  $\alpha$ . Временная степень  $td(\alpha)$  формулы  $\alpha$  определяется следующим образом:

$$td(p) = td(\top) = td(\perp) = 0, \quad td(\neg \alpha) = td(\alpha), \quad td(\mathcal{N}(\alpha)) = td(\alpha) + 1,$$

$$td(\alpha \wedge \beta) = td(\alpha \rightarrow \beta) = td(\alpha \vee \beta) = \max\{td(\alpha), td(\beta)\}.$$

Модальная степень формулы  $md(\alpha)$  определяется аналогично, с той лишь разницей, что  $md(K_j(\alpha)) = md(\alpha) + 1$ .

**Теорема.** *Логика  $NML$  разрешима и финитно аппроксимируема.*

**Доказательство.** Пусть дана формула  $\alpha$ , не являющаяся теоремой нашей логики. Тогда она ложна на нашей определяющей модели:  $(\mathcal{M}_{NML}, x) \not\models \alpha$ . Пусть  $\alpha$  имеет временную степень  $td(\alpha) = k$ . Без ограничения общности можем считать, что точка  $x$  принадлежит кластеру  $C_0$  модели  $\mathcal{M}_{NML}$ .

Сначала производим фильтрацию каждого кластера по отдельности следующим образом. Пусть  $Sub(\alpha)$  – множество всех подформул формулы  $\alpha$ . Определим отношение  $\sim$ :

$$x \sim y \iff \exists i : x, y \in C_i \wedge \forall A \in Sub(\alpha)[(\mathcal{M}_{NML}, x) \models A \iff (\mathcal{M}_{NML}, y) \models A].$$

Затем полагаем

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{M}_{NML}, \quad [x] &:= \{t : x \sim t\}; \quad W^f = \{[x] : x \in W\} \\ \forall x, y \in \mathcal{M}_{NML} \quad (x \text{ Next } y) &\iff [x] \text{Next}^f[y]; \\ \forall x, y \in \mathcal{M}_{NML} \quad \forall j \leq n \quad (x R_j y) &\implies [x] R_j^f [y]; \\ [x] R_j^f [y] &\Leftrightarrow K_j(A) \in Sub(\alpha), \quad ([\mathcal{F}_{NML}, x] \models_{V_j} K_j(A) \implies (\mathcal{F}_{NML}, y) \models_{V_j} A); \\ \forall p \in Sub(\alpha) \quad (V_j^f(p) &:= \{[x] : x \in V_j(p)\}); \\ \forall p \in Sub(\alpha) \quad (V_{av}^f(p) &:= \{[x] : x \in V_{av}(p)\}). \end{aligned}$$

Обозначим полученный фрейм и модель следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{NML}^F &= \langle W^f, \text{Next}^f, R_1^f, \dots, R_n^f \rangle, \\ \mathcal{M}^F &= \langle W^f, \text{Next}^f, R_1^f, \dots, R_n^f; V_1^f, \dots, V_n^f, V_{av}^f \rangle. \end{aligned}$$

Все кластеры модели оказались отфильтрованы по отдельности,

$$C_0^f \xrightarrow{\text{Next}} C_1^f \xrightarrow{\text{Next}} C_2^f \xrightarrow{\text{Next}} C_3^f \xrightarrow{\text{Next}} \dots$$

Мощность каждого кластера отфильтрованной модели не превосходит  $2^{|Sub(\alpha)|}$ . По известной лемме о фильтрации имеет место следующее утверждение:

$$\forall A \in Sub(\alpha) \quad [(\mathcal{M}_{NML}, x) \models A \iff (\mathcal{M}^F, [x]) \models A].$$

Таким образом, доказано

**Утверждение 1.**  $(\mathcal{M}^F, [x]) \not\models_{V_j} \alpha$ .

Рассмотрим модель

$$\mathcal{M}^F = \langle \bigcup_{i \in J} C_i^f, \text{Next}^f, R_1^f, \dots, R_n^f; V_1^f, \dots, V_n^f, V_{av}^f \rangle$$

и подмодель

$$\mathcal{M}_k^F = \langle (C_0^f \cup C_1^f \cup \dots \cup C_k^f), \text{Next}^f, R_1^f, \dots, R_n^f; V_1^f, \dots, V_n^f, V_{av}^f \rangle,$$

и пусть означивание на кластерах  $C_0^f, C_1^f, \dots, C_k^f$  совпадает на обеих моделях.

**Утверждение 2.** Предположим, что  $td(\alpha) = k$ , тогда

$$\forall x \in C_0^f \quad [(\mathcal{M}^F, x) \models \alpha \iff (\mathcal{M}_k^F, x) \models \alpha]. \quad (*)$$

Это значит, что истинность формулы  $\alpha$  на любом элементе  $x \in C_0^f$  единственным образом определяется истинностными значениями пропозициональных переменных на элементах кластеров  $C_0^f, C_1^f, \dots, C_k^f$  из модели  $\mathcal{M}^F$ .

**Доказательство.** Индукцией по временной степени формулы  $\alpha$ .

**Утверждение 3.** Базис. Если  $td(\alpha) = 0$  то

$$\forall x \in C_i^f \quad [(\mathcal{M}^F, x) \models \alpha \iff (\mathcal{M}_k^F, x) \models \alpha], \quad 0 \leq i \leq k.$$

**Доказательство.** (I) Индукцией по модальной степени  $md(\alpha)$ .

Если  $md(\alpha) = 0$ , то формула  $\alpha$  построена только из пропозициональных переменных с помощью булевых логических связок. В этом случае свойство (\*) имеет место очевидным образом. Предположим, что для формулы  $\alpha$  при  $md(\alpha) \leq \ell$  утверждение верно. Покажем, что при  $md(\alpha) = \ell + 1$  наше утверждение (\*) также верно.

Пусть  $\alpha = K_j(\beta)$  и если  $(\mathcal{M}^F, x) \models K_j(\beta)$ , то  $\forall y \in C_i^f, xR_j^f y : (\mathcal{M}^F, y) \models \beta$  и  $md(\beta) \leq \ell$ .

Согласно гипотезе имеет место  $(\mathcal{M}_k^F, x) \models \beta$ . Таким образом, заключаем:  $\forall x \in C_i^f [(\mathcal{M}^F, x) \models \alpha \implies (\mathcal{M}_k^F, x) \models \alpha]$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Доказательство в обратную сторону проводится аналогично. Утверждение 3 доказано.

(II) Гипотеза. Предположим, что для формулы  $\alpha$  при  $md(\alpha) \leq k - 1$  утверждение теоремы верно. Покажем, что для формулы  $\alpha$  при  $md(\alpha) = k$  утверждение теоремы также верно. Без ограничения общности можем рассмотреть формулу

$$\alpha = \underbrace{\mathcal{N}(\mathcal{N}(\dots(\mathcal{N}(\beta))))\dots}_k,$$

где  $td(\beta) = 0$ .

Предположим, что  $x \in C_0^f \subseteq \mathcal{M}^F$  и  $(\mathcal{M}^F, x) \models \alpha$ , тогда

$$\forall y \in C_1^f \subseteq \mathcal{M}^F, (x \text{ Next } y) : (\mathcal{M}^F, y) \models \underbrace{\mathcal{N}(\mathcal{N}(\dots(\mathcal{N}(\beta))))\dots}_{k-1}$$

и временная степень этой формулы —  $k - 1$ . Если возьмем  $C_1^f$  в качестве начального кластера, то по гипотезе:  $\forall z \in C_k^f \subseteq \mathcal{M}^F (\mathcal{M}^F, z) \models \beta$ . Поскольку все кластеры  $C_0^f, C_1^f \dots C_k^f$  образуют начальный интервал шкалы  $\mathcal{F}_{NML}^F$  и принадлежат модели  $\mathcal{M}_k^F$ , получаем

$$\forall x \in C_0^f [( \mathcal{M}^F, x ) \models \alpha \implies (\mathcal{M}_k^F, x) \models \alpha].$$

Доказательство в обратную сторону проводится аналогично.

Окончательно с помощью контрапозиции получаем:  $(\mathcal{M}_{NML}, x) \not\models \alpha \iff (\mathcal{M}_k^F, x) \not\models_{V_j^s} \alpha$ . Мощность модели  $\mathcal{M}_k^F$  при этом не превосходит  $k2^{|Sub(\alpha)|}$ . Теорема доказана.

*Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rybakov V. V. *Refined common knowledge logics or logics of common information*. Archive for Mathematical Logic. 2003. V. 42. P. 179–200.
2. Babenyshev S., Rybakov V. *Decidability of Hybrid Logic with Local Common Knowledge Based on Linear Temporal Logic LTL*. Lecture Notes in Computer Science. 2008. V. 5028. P. 32–41.
3. Babenyshev S., Rybakov V. *Logic of Discovery and Knowledge: Decision Algorithm*. Lecture Notes in Computer Science. 2008. V. 5178. P. 711–718.

# МОДАЛЬНЫЕ ПРЕДИКАТНЫЕ ЛОГИКИ ДЕДЕКИНДОВЫХ ПОРЯДКОВ: НЕВОЗМОЖНОСТЬ АКСИОМАТИЗАЦИИ ПРИ УСЛОВИИ ПОСТОЯНСТВА ПРЕДМЕТНЫХ ОБЛАСТЕЙ

*M. N. Рыбаков<sup>1,2,3</sup>, Д. П. Шкатов<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>*ВШИМ МФТИ, Москва*

<sup>2</sup>*НИУ ВШЭ, Москва*

<sup>3</sup>*Тверской государственный университет*

<sup>4</sup>*University of the Witwatersrand, Johannesburg*

**Контекст и обозначения.** Ниже речь пойдет о предикатных логиках (модальных и суперинтуионистских), определяемых шкалами Крипке с постоянными или расширяющимися предметными областями [1]. Шкала с расширяющимися предметными областями — это пара  $\mathfrak{F}_D = \langle \mathfrak{F}, D \rangle$ , где  $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$  — шкала Крипке, а  $D$  — функция, приписывающая каждому миру  $w \in W$  непустую предметную область  $D_w$ , причем  $wRv$  влечет  $D_w \subseteq D_v$ ; если при этом  $D_w = \mathcal{D}$  для каждого  $w \in W$ , то такую шкалу называют шкалой с постоянной областью  $\mathcal{D}$  и обозначают  $\mathfrak{F} \odot \mathcal{D}$ . Будем писать  $W^R$  вместо  $\langle W, R \rangle$  и  $W_{\mathcal{D}}^R$  вместо  $\langle W, R \rangle \odot \mathcal{D}$ , а шкалу Крипке  $W^R$  будем понимать как класс всех шкал с расширяющимися областями, определенными на этой шкале Крипке. Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathcal{C}$  — шкала с предметными областями и класс шкал Крипке. Определим модальные логики  $ML\mathfrak{F}$ ,  $ML\mathcal{C}$  и  $ML_c\mathcal{C}$  как множества модальных формул, истинных, соответственно, в  $\mathfrak{F}$ , в  $\mathcal{C}$  и в классе шкал из  $\mathcal{C}$ , области которых постоянны; аналогично определим суперинтуионистские логики  $IL\mathfrak{F}$ ,  $IL\mathcal{C}$  и  $IL_c\mathcal{C}$ .

**Введение.** Ситуация с предикатными логиками линейных порядков сильно отличается от ситуации, которую наблюдаем в классе пропозициональных логик. Рассмотрим следующие шкалы:  $\mathbb{N}^\leq$ ,  $\mathbb{Q}^\leq$ ,  $\mathbb{R}^\leq$ , а также  $\alpha^\leq$  и  $\alpha^\geq$ , где  $\alpha$  — бесконечный ординал; пусть также  $\mathcal{L}^\leq$  — класс всех нестрогих линейных порядков. Суперинтуионистская пропозициональная логика, определяемая хоть классом  $\mathcal{L}^\leq$ , хоть каждой отдельной шкалой из приведенного списка шкал, одна и та же, и это **LC**; в модальном случае каждый раз будем получать одну из двух логик — **S4.3** или **Grz.3**; см. [2]. В отношении класса предикатных логик известно, как минимум, следующее:  $IL\mathcal{L}^\leq = QLC$ ,  $ML\mathcal{L}^\leq = QS4.3$ ,  $IL_c\mathcal{L}^\leq = QLC.cd$ , при этом  $IL\mathbb{Q}^\leq = QLC$  [3] (см. также [1]),  $ML\mathbb{Q}^\leq = QS4.3$  [4],  $IL\mathbb{R}^\leq = IL\mathbb{Q}^\leq$  [5],  $IL_c\mathbb{Q}^\leq = QLC.cd$  [6],  $IL_c\mathbb{R}^\leq \neq IL_c\mathbb{Q}^\leq$  [6] (а значит,  $ML_c\mathbb{R}^\leq \neq ML_c\mathbb{Q}^\leq$ ). Кроме того,  $IL_c\mathbb{R}^\leq$  конечно аксиоматизируема [6], а  $IL_c\mathbb{R}^\leq$  рекурсивно аксиоматизируема [5], монадические фрагменты модальных логик нетеровых линейных порядков сильно неразрешимы даже при двух переменных в языке (см., например, [7]), то же справедливо для  $ML\alpha^\leq$  и  $ML_c\alpha^\leq$ , где  $\omega \leq \alpha < \omega^2$  [8, 9] (в частности, для  $ML\mathbb{N}^\leq$  и  $ML_c\mathbb{N}^\leq$ ), и близкие результаты получены для всех логик между  $IL\mathbb{N}^\leq$  и  $IL\mathbb{N}_{\mathbb{N}}^\leq$ , но с использованием бинарных предикатных букв [10–12].

Некоторое время назад В. Б. Шехтман сообщил авторам о следующих вопросах в контексте логик линейных порядков, ответы на которые пока неизвестны. Верно ли, что  $ML\mathbb{R}^\leq = ML\mathbb{Q}^\leq$ ? Верно ли, что  $ML_c\mathcal{L}^\leq = S4.3.bf$ ? Верно ли, что логика  $ML_c\mathbb{R}^\leq$  конечно аксиоматизируема?

Здесь дадим отрицательный ответ на последний из этих вопросов. Фактически, исследование этого вопроса привело нас к довольно общему результату, и мы опишем бесконеч-

ный класс линейных порядков, логики которых  $\Pi_1^1$  – трудны в случае, когда рассматриваем только шкалы с постоянными областями.

**Полученный результат.** Порядок  $\preccurlyeq$  в линейной шкале  $W^\preccurlyeq$  называем *дедекиндовым*, если каждое непустое  $\preccurlyeq$ -ограниченное подмножество множества  $W$  имеет в  $W$  точную верхнюю грань. Пусть  $\mathcal{D}$  – класс всех шкал Кripке с линейным дедекиндовым порядком. Используя методы, предложенные в [13, 14] для произведений логик, нам удалось свести к проблеме выполнимости в шкалах из  $\mathcal{D}$ , при условии постоянства предметных областей,  $\Sigma_1^1$ -полную проблему укладки домино [15], благодаря чему был получен следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $R$  – отношение на множестве  $\mathbb{N}$ , лежащее между отношениями  $<$  и  $\leq$  на  $\mathbb{N}$ . Если  $ML_c\mathcal{D} \subseteq L \subseteq ML\mathbb{N}_\mathbb{N}^R$ , то  $L$  является  $\Pi_1^1$ -трудной в языке с унарными предикатными буквами и двумя предметными переменными.

Как следствие, все такие логики не являются рекурсивно аксиоматизируемыми, в частности, конечно аксиоматизируемыми. Например, к ним относятся  $ML_c\mathbb{R}^\leq$ ,  $ML_c\mathbb{R}^<$ ,  $ML\mathbb{R}_\mathbb{N}^\leq$ ,  $ML\mathbb{R}_\mathbb{N}^<$ ,  $ML\mathbb{R}_\mathbb{R}^\leq$  и  $ML\mathbb{R}_\mathbb{R}^<$ , а также  $ML_c\alpha^\leq$ ,  $ML_c\alpha^<$ ,  $ML_c\alpha_\mathcal{D}^\leq$  и  $ML_c\alpha_\mathcal{D}^<$ , где  $\alpha$  – бесконечный ординал, а  $\mathcal{D}$  – бесконечное множество. В частности, получаем отрицательный ответ на третий из упомянутых выше вопросов.

**Обсуждение.** Доказательство представленного результата существенно использует не только то, что линейный порядок в рассматриваемых шкалах Кripке является дедекиндовым, но и то, что предметные области миров этих шкал, во-первых, бесконечны, а во-вторых, одинаковы. По этой причине неясно, можно ли перенести возникшую в доказательстве конструкцию на логики тех же классов шкал, но без требования постоянства областей. Косвенным аргументом в пользу возможности такого переноса является то, что для некоторых из таких логик аналогичный результат удалось получить, но другими методами [7–9, 12, 16], хоть и близкими. Тем не менее использованные методы и полученные результаты не позволили нам получить ответ ни на вопрос о равенстве логик  $ML\mathbb{R}^\leq$  и  $ML\mathbb{Q}^\leq$ , ни на вопрос о равенстве логик  $ML_c\mathcal{L}^\leq$  и **S4.3.bf**. Завершая обсуждение, отметим, что требование линейности порядка кажется нам несущественным в возникших в доказательстве построениях, и мы ожидаем, что похожие результаты можно будет получить для логик, не содержащих аксиому линейности; это тематика возможных будущих исследований.

Работа первого автора выполнена в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D. *Quantification in Nonclassical Logic. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, 2009. V. 153.
2. Chagrov A., Zakharyashev M. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997.
3. Corsi G. *Completeness theorem for Dummett's LC quantified and some of its extensions*. Studia Logica. 1992. V. 51. P. 317–335.
4. Corsi G. *Quantified modal logics of positive rational numbers and some related systems*. Notre Dame Journal of Formal Logic. 1993. V. 34. № 2. P. 263–283.
5. Skvortsov D. *A remark on superintuitionistic predicate logics of Kripke frames with constant and with nested domains*. Journal of Logic and Computation. 2009. V. 21. № 4. P. 697–713.

6. Takano M. *Ordered sets  $R$  and  $Q$  as bases of Kripke models.* Studia Logica. 1987. V. 46. P. 137–148.
7. Rybakov M. *Predicate counterparts of modal logics of provability: High undecidability and Kripke incompleteness.* Logic Journal of the IGPL. 2024. V. 32. № 3. P. 465–492.
8. Rybakov M., Shkatov D. *Algorithmic properties of first-order modal logics of the natural number line in restricted languages.* Advances in Modal Logic. College Publications, 2020. V. 13. P. 523–539.
9. Rybakov M., Shkatov D. *Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages.* Journal of Logic and Computation. 2021. V. 31. № 5. P. 1266–1288.
10. Рыбаков М. Н. *Неразрешимость логики QLC в языке с двумя предметными переменными.* IV Конференция математических центров России. Сборник тезисов. 2024. С. 151–152.
11. Рыбаков М. Н., Серова Д. А. *Неразрешимые фрагменты расширений предикатной логики Геделя – Дамметта.* Международная конференция Мальцевские чтения. Тезисы докладов. Новосибирск, 2024. С. 45.
12. Rybakov M. *Superintuitionistic predicate logics of linear frames: undecidability with two individual variables.* 2025. arXiv:2505.00531.
13. Marx M., Reynolds M. *Undecidability of compass logic.* Journal of Logic and Computation. 1999. V. 9. № 6. P. 897–914.
14. Reynolds M., Zakharyaschev M. *On the products of linear modal logics.* Journal of Logic and Computation. 2001. V. 11. № 6. P. 909–931.
15. Harel D. *Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness.* Journal of the ACM. 1986. V. 33. P. 224–248.
16. Рыбаков М. Н. *Перечислимость модальных предикатных логик и условия обрыва возрастающих цепей.* Логические исследования. 2001. Т. 8. С. 155–167.

# О ЗАМКНУТЫХ МОНОИДАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ НА КАТЕГОРИЯХ ПРОСТРАНСТВ ЧУ

*B. K. Симаков*

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

Конструкция Чу [1] позволяет по произвольной автономной замкнутой симметричной моноидальной категории построить ее расширение, называемое категорией пространств Чу. В терминах пространств Чу выражаются различные понятия и свойства математических объектов из различных областей математики и естествознания. К общим свойствам категории пространств Чу над замкнутой симметрической моноидальной категорией относится возможность задать на ней произведение, относительно которого она становится замкнутой моноидальной категорией [1].

В работе [2] определяется расширение категории пространств Чу, а в работах [2–4] и ряде других доказываются ее общие свойства. Однако мультиплексивная структура не вводилась и не рассматривалась. В докладе представляется конструкция произведения на расширенной категории пространств Чу. Доказывается, что существует экспоненциал, или внутренний hom, что делает категорию замкнутой.

Пусть  $(C, \otimes, \multimap)$  — замкнутая симметричная моноидальная категория. Определим категорию  $Chu(C)$  пространств Чу (с переменным алфавитом) над категорией  $C$  следующим образом:

- объекты  $Chu(C)$  — это всевозможные морфизмы  $r : A \otimes X \rightarrow D$  категории  $C$ ;
- морфизмы между объектами  $r_1 : A_1 \otimes X_1 \rightarrow D_1$  и  $r_2 : A_2 \otimes X_2 \rightarrow D_2$  категории  $Chu(C)$  — это всевозможные тройки  $f = (f^+, f^-, f^0)$ , где  $f^+ : A_1 \rightarrow A_2$ ,  $f^- : X_2 \rightarrow X_1$ ,  $f^0 : D_1 \rightarrow D_2$  такие, что

$$f^0 \circ r_1 \circ (A_1 \otimes f^-) = r_2 \circ (f^+ \otimes X_2);$$

- композиция морфизмов  $f = (f^+, f^-, f^0) : r_1 \rightarrow r_2$  и  $g = (g^+, g^-, g^0) : r_2 \rightarrow r_3$  — это тройка  $g \circ f = (g^+ \circ f^+, f^- \circ g^-, g^0 \circ f^0) : r_1 \rightarrow r_3$ ;
- тождественный морфизм объекта  $r$  — это, очевидно, тройка  $id_r = (id_A, id_X, id_D)$ .

**Теорема.** Категория  $(Chu(C), \otimes, T, \multimap)$  является левозамкнутой левомоноидальной категорией с левой единицей  $T : I \otimes \star \rightarrow \star$ , где функторы  $\otimes$  и  $\multimap$  определены следующим образом:  $r_1 \otimes r_2 : (a_1 \otimes a_2) \otimes ((a_1 \multimap a_2) \times (a_2 \multimap a_1)) \rightarrow d_2$ ,

$$\begin{aligned} r_1 \otimes r_2 &= r_2 \circ (1_{a_2} \otimes eval) \circ \alpha \circ (s \otimes pr_{a_1 \multimap a_2}), \\ (f \otimes g)^+ &= f^+ \otimes g^+, \quad (f \otimes g)^- = (f^+ \multimap g^-) \times (g^+ \multimap f^-), \quad (f \otimes g)^0 = g^0, \end{aligned}$$

$$r_1 \multimap r_2 : ((a_1 \multimap a_2) \times (a_2 \multimap a_1)) \otimes (a_1 \otimes a_2) \rightarrow d_2,$$

$$\begin{aligned} (r_1 \multimap r_2) &= r_2 \circ ((eval \circ s) \otimes 1_{a_2}) \circ \alpha \circ (pr_{a_1 \multimap a_2} \otimes 1_{a_1 \otimes a_2}), \\ (f' \multimap g)^+ &= (f'^+ \multimap g^+) \times (g^- \multimap f'^-), \quad (f' \multimap g)^- = f'^+ \otimes g^-, \quad (f' \multimap g)^0 = g^0, \end{aligned}$$

где  $r_1, r_2, r'_1, r'_2$  — пространства Чу,  $f : r_1 \rightarrow r'_1$ ,  $g : r_2 \rightarrow r'_2$ ;  $f' : r'_1 \rightarrow r_1$ ,  $g : r_2 \rightarrow r'_2$ ,  $pr_{a_1 \multimap x_2} : (a_1 \multimap x_2) \times (a_2 \multimap x_1) \rightarrow (a_1 \multimap x_2)$ ,  $pr_{a_1 \multimap a_2} : (a_1 \multimap a_2) \times (x_2 \multimap x_1) \rightarrow a_1 \multimap a_2$  — проекции.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Barr M. *\*-Autonomous categories and linear logic*. Math. Structures Comp. Sci. 1991. V. 1(2). P. 159–178.
2. Степанова А. А., Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. *Категории пространств Чу над категорией полигонов*. Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 1220–1237.
3. Степанова А. А., Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. *О пространствах Чу над категорией SS-Act*. Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2023. Т. 44. С. 116–135.
4. Симаков В. К. *Полнота категории отделимых пространств Чу*. Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 2. С. 252–263.

## ДИСТРИБУТИВНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЕМАНТИКИ МОНТЕГО

B. B. Стрепетова<sup>1</sup>, A. И. Стукачев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работе [1] предложено расширение модели дистрибутивной семантики естественных языков DisCoCat [2] до модели HO-DisCoCat. В этом расширении, в частности, определен класс строковых диаграмм, допускающих вложенность, и построен алгоритм, обеспечивающий равномерное конструктивное преобразование вложенных строковых диаграмм в объекты дистрибутивной семантики (векторы, матрицы, тензоры).

В данной работе с использованием результатов [1] определен алгоритм, обеспечивающий равномерное конструктивное преобразование синтаксических выражений фрагмента интенсиональной логики Монтею во вложенные строковые диаграммы модели HO-DisCoCat. Этот фрагмент замкнут относительно логических связок конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, Лямбда-абстракции и аппликации, и обладает выразительными возможностями, позволяющими формализовать достаточно сложные предложения естественного языка (например, содержащими наречия).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Toumi A., De Felice G. *Higher-Order DisCoCat (Peirce-Lambek-Montague Semantics)*. 2023. ArXiv.
2. Coecke B., Sadrzadeh M., Clark S. *Mathematical foundations for a compositional distributional model of meaning*. Linguistic Analysis. 2010. V. 36(1-4). P. 345–384.
3. Dowty D. [et al.]. *Introduction to Montague Semantics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. 1989.

## ПРОБЛЕМА ПОЛНОТЫ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ ПРЕДИКАТОВ

B. B. Шехтман<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,  
Москва

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт

В докладе дается обзор современных исследований семантик модальных предикатных логик и, главным образом, проблемы полноты. На сегодняшний день предложено достаточно много таких семантик — реляционных, топологических, алгебраических, категориальных; из них лучше всего изучена семантика Кripке.

Некоторые общие результаты о полноте были доказаны в конце прошлого века, но они не охватывают всех логик. С тех пор был получен ряд новых результатов о полноте конкретных логик и о сохранении полноты при различных операциях над логиками; см, например, [1].

С другой стороны, получены результаты о неполноте больших семейств логик в семантике Кripке и близких к ней семантиках; некоторые примеры также имеются в [1].

Наконец, в докладе формулируются некоторые гипотезы и открытые проблемы в данной области.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Shehtman V. *On Kripke completeness of modal predicate logics around quantified K5*. Annals of Pure and Applied Logic. 2023. V. 174(2). P. 103202.
2. Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D. *Quantification in nonclassical logic*. Elsevier. 2009. V. 1. 640 p.

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**ПОДХОДЫ К ПОВЫШЕНИЮ ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ  
ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

*P. A. Голубев, В. В. Шайдуров, Л. В. Гилева*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1], \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (3)$$

Для численного решения этой задачи введем равномерные разностные сетки по пространству и времени

$$\omega_x = \{x_i = ih : i = 0, \dots, N\}, \quad \omega_t = \{t_k = k\tau : k = 0, \dots, M\}$$

с шагами  $h$  и  $\tau$ .

Для применения первого подхода рассмотрим неявную разностную схему (с опережением  $[1, 2]$ ):

$$\frac{1}{\tau} (u_{k,i}^{\bar{\tau}} - u_{k-1,i}^{\bar{\tau}}) + \frac{\sigma}{h^2} (-u_{k,i-1}^{\bar{\tau}} + 2u_{k,i}^{\bar{\tau}} - u_{k,i+1}^{\bar{\tau}}) = f_{k,i}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

с краевыми условиями

$$u_{k,0}^{\bar{\tau}} = u_{k,N}^{\bar{\tau}} = 0 \quad (4)$$

и начальным условием

$$u_{0,i}^{\bar{\tau}} = u(0, x_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Более компактно эта схема выглядит в сеточно-операторном виде с учетом краевых условий (4):

$$\left( \frac{1}{\tau} I + \sigma A \right) U_k^{\bar{\tau}} = \frac{1}{\tau} U_{k-1}^{\bar{\tau}} + F_k, \quad (5)$$

где  $I$  – единичная матрица,  $U_k^{\bar{\tau}} = (u_{k,1}^{\bar{\tau}}, \dots, u_{k,N-1}^{\bar{\tau}})^T$ ,  $F_k = (f_{k,1}, \dots, f_{k,N-1})^T$ ,  $f_{k,i} = f(t_k, x_i)$ , а матрица  $A$  имеет трехдиагональный вид:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Разностная схема (5) аппроксимирует поставленную задачу с порядком  $O(\tau + h^2)$ . Теперь представим алгоритм для достижения второго порядка аппроксимации по времени путем двукратного использования разностной схемы (5) на одном временном интервале. Начнем с приближенного решения  $U_{k-1}^\tau$  на временном слое  $t = t_{k-1}$  сетки  $\omega_t$  и решим две системы линейных алгебраических уравнений

$$\left( \frac{1}{\tau} I + \sigma A \right) U_k^{\tau_1} = \frac{1}{\tau} U_{k-1}^\tau + F_k^{\tau_1}, \quad (6)$$

$$\left( \frac{1}{\tau} I + \sigma A \right) U_k^{\tau_2} = \frac{1}{\tau} U_{k-1}^\tau + F_k^{\tau_2} \quad (7)$$

с временными шагами

$$0 < \tau_1(1 + c_0) \leq \tau_2 \leq 2\tau_1,$$

с положительной константой  $c_0$ , не зависящей от  $\tau$  и  $h$ . Правые части в (6) и (7) вычисляются по формулам  $F_k^{\tau_1} = (f_{k,1}^{\tau_1}, \dots, f_{k,N-1}^{\tau_1})^T$  с соответствующей заменой  $\tau_1$  на  $\tau_2$  для  $F_k^{\tau_2}$ . Возьмем два параметра:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad \text{и} \quad 1 - \alpha = \frac{\tau_2 - \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Они являются решением алгебраических уравнений

$$\tau = \alpha\tau_1 + (1 - \alpha)\tau_2 = \tau_1 + \tau_2 - \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} > 0,$$

$$\alpha\tau_1^2 + (1 - \alpha)\tau_2^2 = \tau^2/2.$$

С помощью этих параметров вычислим комбинированное решение

$$U_k^{\bar{\tau}} = \alpha U_k^{\tau_1} + (1 - \alpha) U_k^{\tau_2},$$

аппроксимирующее точное решение  $u(t_k, x_i)$  со вторым порядком точности по времени и пространству,  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Второй подход представляет собой повышение порядка точности исходной схемы Кранка – Николсона со второго до четвертого порядка по времениному шагу путем коррекции правой части без изменения оператора сеточной задачи и его первого дифференциального приближения [3, 4]. Для формирования исходной разностной задачи используем схему Кранка – Николсона [5]:

$$\frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\tau} + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{-y_{i-1}^k + 2y_i^k - y_{i+1}^k}{h^2} + \frac{-y_{i-1}^{k-1} + 2y_i^{k-1} - y_{i+1}^{k-1}}{h^2} \right) = f_i^{k-1/2}, \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$y_i^0 = u_0, \quad (x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (9)$$

$$y_0^k = y_N^k = 0, \quad k = 0, \dots, M, \quad (10)$$

где  $y_i^k = y(t_k, x_i)$  – значение сеточной функции  $y$ , определенной на сетке  $\omega_\tau \times \omega_h$ ,  $f_i^{k-1/2} = f(t_{k-1/2}, x_i)$ ,  $t_{k-1/2} = t_k - \tau/2$ . Эта схема имеет второй порядок точности по

времени и пространству. Теперь предположим, что на сетке  $\omega_\tau \times \omega_h$  получили решение  $y_i^k$  задачи (8)–(10). Рассмотрим новую разностную схему для задачи (1)–(3):

$$\begin{aligned} & \frac{w_i^1 - w_i^0}{\tau} + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{-w_{i-1}^1 + 2w_i^1 - w_{i+1}^1}{h^2} + \frac{-w_{i-1}^0 + 2w_i^0 - w_{i+1}^0}{h^2} \right) = \\ &= f_i^{k-1/2} - \frac{-2y_i^0 + 7y_i^1 - 9y_i^2 + 5y_i^3 - y_i^4}{12\tau} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 f_i^{1/2}}{\partial t^2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ & \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{\tau} + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{-w_{i-1}^k + 2w_i^k - w_{i+1}^k}{h^2} + \frac{-w_{i-1}^{k-1} + 2w_i^{k-1} - w_{i+1}^{k-1}}{h^2} \right) = \\ &= f_i^{k-1/2} - \frac{y_i^{k+1} - 3y_i^k + 3y_i^{k-1} - y_i^{k-2}}{12\tau} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 f_i^{k-1/2}}{\partial t^2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad k = 2, \dots, M, \\ & w_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \\ & w_0^k = w_N^k = 0, \quad k = 0, \dots, M, \end{aligned}$$

которая аппроксимирует задачу (1)–(3) с четвертым порядком по времени и вторым по пространству.

Для представленных методов проведено теоретическое обоснование порядка точности и вычислительные эксперименты.

*Работа поддержанна Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2025-1606).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977.
2. Вабищевич П. Н. *Численные методы решения нестационарных задач*. М.: ЛЕНАНД, 2021.
3. Шокин Ю. И. *Метод дифференциального приближения*. Новосибирск: Наука, 1979.
4. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. *О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений*. Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10. № 5. С. 1173–1187.
5. Crank J., Nicolson P. *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1947. V. 43. № 1. P. 50–67.

# ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ТЕРМОШКАФЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА

*Е. И. Гурина, И. В. Тренбач*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

## Введение

В последние годы значительно расширились исследования в области теплообмена, играющие ключевую роль в развитии техники и промышленности. В данной работе рассматривается задача математического и численного моделирования температурных характеристик термошкафа типа *РизурБокс-С-Т7* с пассивным обогревом за счет тепла нефтегазоводяной смеси в трубопроводе. Такие термошкафы применяются для защиты оборудования от низких температур в условиях работы в северных регионах, влаги, осадков, пыли и механических повреждений [1]. Исследование связано с актуальным направлением цифровизации нефтегазовой отрасли, в частности – использованием беспроводных технологий автоматизации в условиях отсутствия стабильного энергоснабжения. Разработанная цифровая модель термошкафа позволяет оптимизировать тепловой режим в термошкафе, что в ряде случаев исключает необходимость дополнительного электрообогрева и снижает капитальные затраты.

## 1. Физическая постановка задачи

Численное моделирование теплообмена в конструкции термошкафа *РизурБокс-С-Т7* выполнено методом конечных разностей для семислойной пластины [2] (1 – теплоизоляционный материал, 20 мм; 2 – воздух, 159.5 мм; 3 – сталь класса прочности К48, 5 мм; 4 – нефтегазоводяная смесь, 111 мм; 5 – сталь класса прочности К48, 5 мм; 6 – воздух, 503.3 мм; 7 – теплоизоляционный материал, 25 мм).

В начальный момент времени все семь частей термошкафа имеют одинаковую температуру  $T_0 = -51^{\circ}\text{C}$ . В 4-м слое конструкции поддерживается постоянная температура среды  $T_{oil}$ , температура окружающей среды  $T_{out} = -51^{\circ}\text{C}$  (рис. 1).

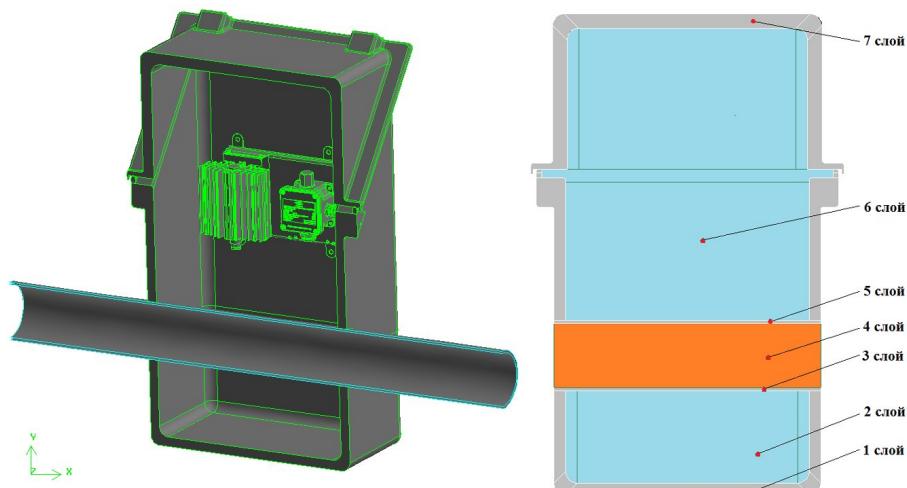


Рис. 1. Семислойная конструкция расчетного домена

В первом приближении к решению сопряженной задачи естественно-конвективного течения внутри расчетного домена рассматривается распространение тепла только за счет теплопроводности. Для каждого из слоев конструкции используется свое уравнение теплопроводности:

$$\rho_i C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \left( \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \right), \quad L_{i-1} < x < L_i, \quad i \in \overline{1, 7}.$$

Начально-краевые условия, используемые для замыкания задачи:

$$t = 0 : T_0(t, x) = -51^\circ\text{C}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad x = 0 : T(t, x) = -51^\circ\text{C}, \quad t > 0.$$

В зонах контакта различных слоев пластины рассматриваются ГУ IV рода:

$$\begin{cases} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=L_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=L_{i+1}}, & i \in \overline{1, 2, 5, 6} \\ T_i(t, x_i) = T_{i+1}(t, x_{i+1}) \end{cases}$$

Температуру рабочей среды в слое 4 считаем постоянной:

$$t > 0 : T_4(t, x) = 54^\circ\text{C}, \quad L_3 \leq x \leq L_4, \quad x = L : -\lambda_7 \left( \frac{\partial T_7}{\partial x} \right) = k(T_7 - T_{out}), \quad t > 0,$$

где  $\rho$  – плотность материала, ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $C_\rho$  – удельная теплоемкость материала, ( $\text{Дж}/\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}$ );  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала, ( $\text{Вт}/\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}$ );  $T(t, x)$  – температура,  ${}^\circ\text{C}$ ;  $L$  – граница рассматриваемой области, м;  $k$  – коэффициент теплообмена между термоскафом и окружающей средой,  $L_i$  – координаты границы раздела сред,  $T_i$  – температура соприкасающихся частей пластины,  $T_{cp}$  – температура окружающей среды.

## 2. Результаты численного моделирования и верификация

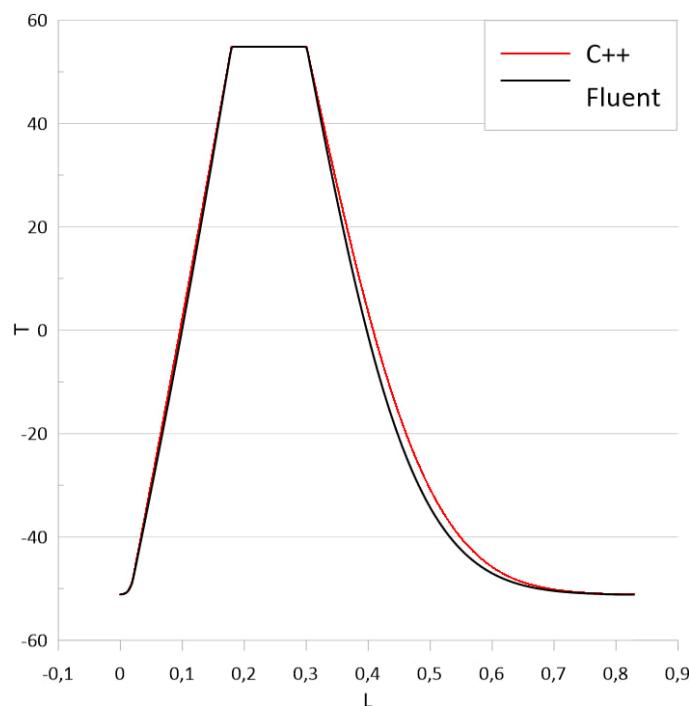


Рис. 2. Сравнение результатов расчета (МКР и AnsysFluent)

Численное решение поставленной задачи реализовано на C++ на основе метода конечных разностей с использованием неявной разностной схемы. На рис. 2 представлены графики распределения температуры по толщине пластины спустя 10 минут, полученные с использованием MKP и Ansys Fluent.

Для решения кейса индустриального партнера была рассмотрена сопряженная задача, учитывающая турбулентное, неизотермическое, сжимаемое установившееся течение воздуха в термошкафе в 3D постановке. Построена детальная геометрия и качественная конечно-объемная сетка в ПО Gambit (2 877 892 элементов).

Для исследования закономерностей теплопереноса внутри термошкафа проведен ряд расчетов в ПО AnsysFluent при значениях температур  $T_{out} = -60^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{oil} = 5^{\circ}\text{C}$ , а также для теплоизоляционных материалов с различными теплофизическими параметрами (рис. 3).

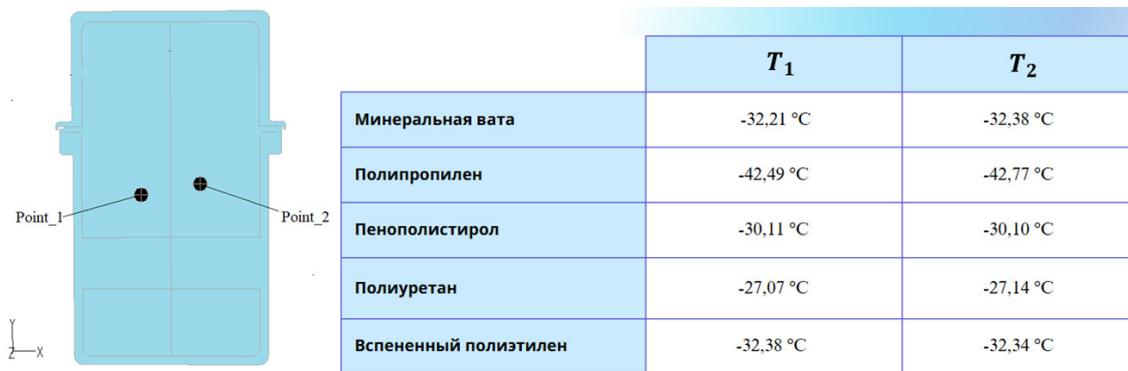


Рис. 3. Значения температуры в точках контроля в зависимости от материала уплотнителя ( $T_1$ ,  $T_2$  – температура в точках Point \_ 1 и Point \_ 2 соответственно)

### Заключение

Полиуретан в качестве теплоизоляционного материала показал наилучшие результаты по температурному режиму внутри термошкафа. При  $T_{out} = -60^{\circ}\text{C}$ ,  $T_1 = 5^{\circ}\text{C}$ , температура в точках контроля имеет значение:  $T_1 = -27.07^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{oil} = -27.14^{\circ}\text{C}$ . При  $T_{out} = -51^{\circ}\text{C}$ ,  $T_1 = 15^{\circ}\text{C}$ , температура в точках контроля:  $T_1 = -22.6^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{oil} = -22.6^{\circ}\text{C}$ .

Разработанная цифровая модель термошкафа *RizurBox-C-T7* решает актуальную задачу оптимизации теплового режима оборудования в условиях отсутствия гарантированного энергоснабжения, что особенно важно для северных месторождений. Применение цифровой модели *RizurBox-C-T7* позволило создать эффективный инструмент для отказа от электрообогрева за счет использования тепла трубопровода и оптимального материала теплоизолятора.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Термошкафы стеклопластиковые *RizurBox-C-T* (*RizurBox-C-T*) диагонального раскрытия с поддоном.
2. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. *Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие*. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 172с.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ КРИСТАЛЛОВ МЕТОДОМ ЧОХРАЛЬСКОГО С ЖИДКОСТНОЙ ГЕРМЕТИЗАЦИЕЙ РАСПЛАВА

*A. O. Гусев, O. C. Мажорова*

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва*

В работе рассматривается процесс получения полупроводниковых монокристаллов методом Чохральского с жидкостной герметизацией расплава. Эта техника выращивания является одним из вариантов метода направленной кристаллизации и состоит в следующем. Тигель, заполненный расплавом кристаллизующегося материала, помещается в неоднородное поле температуры, создаваемое системой нагревателей. Свободная поверхность расплава покрыта флюсом, который препятствует испарению компонентов из жидкой фазы. На начальной стадии процесса затравочный кристалл малого радиуса приводится в контакт со свободной поверхностью расплава. После контролируемого расплавления небольшого объема затравки начинается процесс роста кристалла. Образующийся монокристалл медленно вытягивается из жидкой фазы, при этом кристалл и тигель вращаются в противоположные стороны. За счет изменения температуры теплового узла радиус кристалла увеличивается до необходимого. На развитой стадии процесса в ростовой камере требуется поддерживать условия, обеспечивающие рост кристалла практически постоянного радиуса, с низкой плотностью дислокаций. Численное изучение тепловых полей, возникающих внутри установки, позволяет сократить количество натурных экспериментов, направленных на подбор оптимальных условий выращивания.

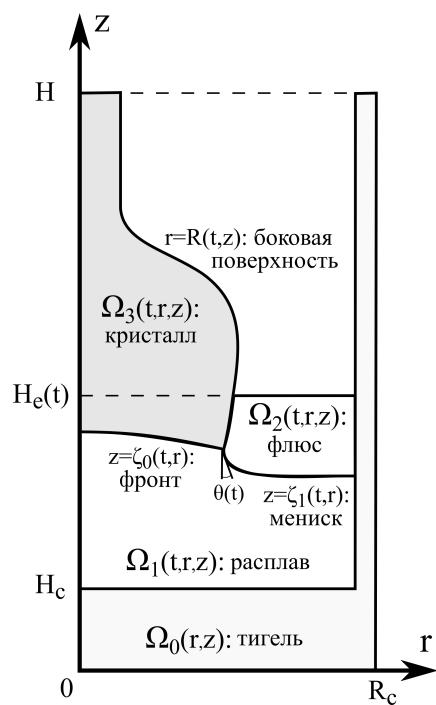


Рис. 1. Расчетная область

**Постановка задачи.** Для описания переноса энергии в ростовой камере используется термокапиллярная математическая модель процесса кристаллизации [1], дополненная уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости в переменных «функция тока, за- вихренность, момент вращения» [2]. Поля температуры и скорости являются осесимметричными; зависимость плотности расплава от температуры описывается в рамках приближения Обербека – Буссинеска. Расчет ведется в области  $\Omega(t, r, z)$ , расположенной в плоскости  $(r, z)$  (см. рис. 1). В ходе моделирования предполагается, что перенос тепла в тигле  $\Omega_0(r, z)$ , флюсе  $\Omega_2(t, r, z)$  и кристалле  $\Omega_3(t, r, z)$  осуществляется механизмом теплопроводности, в расплаве  $\Omega_1(t, r, z)$  учитывается конвективный теплообмен. В задаче присутствуют три подвижные границы, положение которых определяется процессами теплопереноса внутри камеры и поверхностными процессами на боковой поверхности кристалла (кривая  $r = R_s(t, z)$ ), фронте кристаллизации ( $z = \zeta_0(t, r)$ ) и границе между расплавом и флюсом (мениск  $z = \zeta_1(t, r)$ ). Точку, в которой сходятся кривые  $r - R_s(t, z) = 0$ ,  $z - \zeta_0(t, r) = 0$  и  $z - \zeta_1(t, r) = 0$ , назовем тройной. Контактный угол, образующийся при смачивании кристалла расплавом, равен  $\theta(t)$ . Изменение объема кристалла и расплава происходит в соответствии с законом сохранения массы. На межфазной границе  $z = \zeta_0(t, r)$  выполнен закон сохранения внутренней энергии, форма фронта кристаллизации определяется положением изотермы, соответствующей температуре фазового перехода. Форма мениска описывается уравнением Юнга – Лапласа для капиллярного давления. Форма боковой поверхности  $r = R_s(t, z)$  определяется из условия, связывающего изменение положения тройной точки с отклонением реального контактного угла  $\theta(t)$  от своего равновесного значения  $\theta_e$ . Температура боковой стенки тигля  $T_c(t)$  изменяется с течением времени, дно тигля – теплоизолированное. Теплообмен между поверхностью кристалла, флюса и тигля осуществляется механизмом излучения.

**Метод решения.** Для решения задачи с внутренними подвижными границами разработан численный алгоритм, в основе которого лежит метод выпрямления фронта и геометрически консервативная разностная схема, обеспечивающая выполнение законов сохранения массы, внутренней и кинетической энергии [3].

Алгоритм решения системы нелинейных сеточных уравнений, полученной в ходе аппроксимации задачи, основан на специальной схеме расщепления по физическим процессам. На каждом шаге по времени сначала проводится расчет теплопереноса в системе тигель–флюс–расплав–кристалл в области с неподвижными границами, положение которых получено на предыдущем шаге по времени. На этом этапе из разностных аналогов уравнений Навье – Стокса вычисляется поле скоростей жидкости; с помощью метода Ньютона определяется распределение температуры в области и скорость движения фронта кристаллизации. Затем по найденному полю температуры и скорости фронта вычисляется новое положение тройной точки, форма мениска, боковой поверхности кристалла и границы расплав/кристалл.

**Результаты расчетов.** Вычислительный алгоритм применялся для изучения влияния естественной и вынужденной конвекции на теплообмен в системе и форму фронта кристаллизации на различных стадиях процесса. Предполагалось, что в начальный момент времени затравочный кристалл приводится в контакт с жидкой фазой. Расчет заканчивался, когда в тигле оставалось менее 10 % от первоначального объема расплава. Уменьшение объема жидкой фазы в ходе выращивания существенным образом влияет на перенос энергии в ростовой камере. Рост кристалла постоянного радиуса обеспечивается динамическим управлением температурой нагревателя. В расчетах температура боковой

стенки тигля изменялась по закону

$$\frac{dT_c}{dt} = g_P \frac{dR}{dt} + g_l(R - R_{\text{set}}), \quad (1)$$

где  $R - R_{\text{set}}$  — отклонение радиуса тройной точки от заданного значения. Значения параметров  $g_P$ ,  $g_l$ , обеспечивающие устойчивость процесса управления, были определены экспериментально в ходе серии расчетов.

На рис. 2 представлена форма кристаллов, полученных в рамках расчетов, в которых движение жидкости не учитывалось (слева), рассматривалась естественная конвекция в расплаве (в центре), рассматривалось взаимодействие тепловой и вынужденной конвекции, вызванной вращением кристалла и тигля в противоположные стороны (справа).

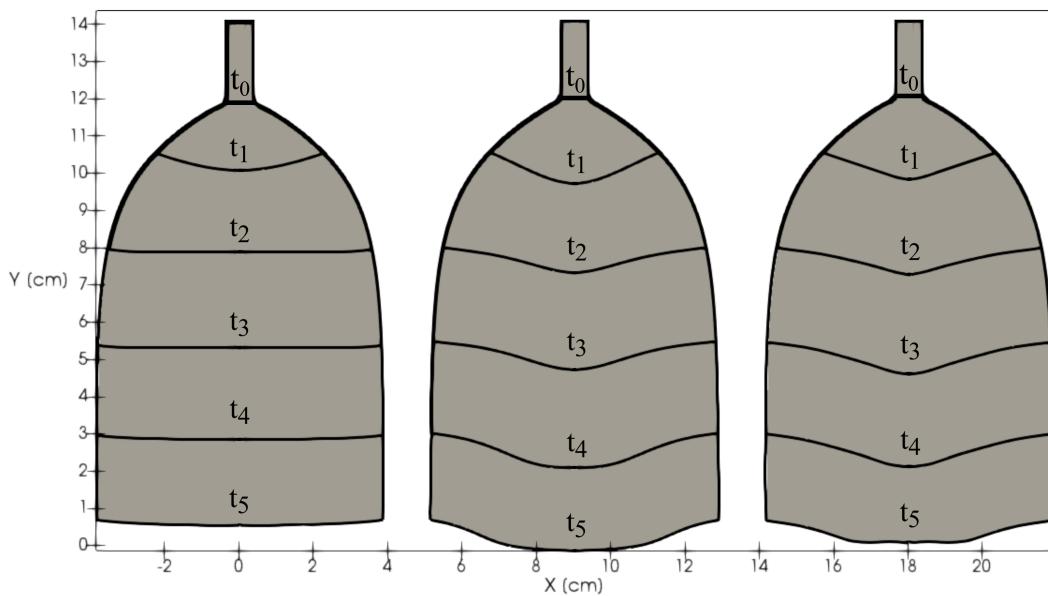


Рис. 2. Влияние движения жидкости на форму кристалла в различные моменты времени  $t_i$ : конвекция в расплаве отсутствует (слева), естественная конвекция в расплаве (в центре), естественная и вынужденная конвекция (справа)

Во всех расчетах управление процессом с помощью пропорционально-интегрального регулятора температуры (1) было устойчивым: радиус кристалла монотонно увеличивался в начале процесса ( $t_0 < t < t_2$ ) и в дальнейшем оставался практически постоянным ( $t_2 < t < t_5$ ). Расчеты показывают, что если перенос энергии в расплаве осуществляется механизмом теплопроводности, то на развитой стадии процесса фронт кристаллизации практически не искривляется (рис. 2, слева). При наличии тепловой конвекции течение в расплаве состоит из крупного тороидального вихря, в котором жидкость поднимается у «горячей» боковой стенки тигля и опускается в его центр. Дополнительный отвод теплоты от фронта кристаллизации за счет движения жидкости приводит к тому, что граница расплав/кристалл становится выпуклой в жидкую fazu (рис. 2, в центре). Вращение тигля и кристалла приводит к тому, что структура течения в расплаве усложняется, при этом влияние тепловой конвекции существенно ослабевает (см. рис. 3). На протяжении всего процесса конвективный перенос в окрестности фронта кристаллизации определяется вихрем, который порождается вращением кристалла. Расчеты показали, что в этом

случае при  $t = t_5$  фронт кристаллизации имеет характерную для натурных экспериментов W-образную форму (рис. 3, справа).

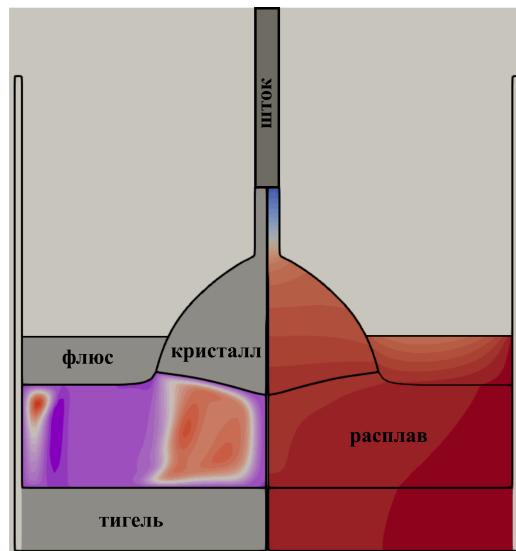


Рис. 3. Результаты моделирования начальной стадии процесса выращивания ( $t = t_1$ ) кристалла в случае, когда тигль и кристалл врачаются в противоположные стороны: функция тока в расплаве (слева) и распределение температуры в расчетной области (справа)

Результаты численного моделирования отражают качественные особенности рассматриваемого процесса. Зависимость температуры нагревателя от времени и соответствующая ей форма кристалла согласуются с доступными теоретическими и экспериментальными данными [4, 5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Derby J. J., Brown R. A. *On the dynamics of Czochralski crystal growth*. Journal of crystal growth. 1987. V. 83. P. 137–151.
2. Фрязинов И. В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в криволинейных ортогональных координатах. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1982. Т. 22. № 5. С. 1195–1207.
3. Гусев А. О., Мажорова О. С. Геометрическая консервативность разностных методов решения задачи Стефана на подвижных и фиксированных сетках. Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 7. С. 911–927.
4. Thomas P., Derby J., Atherton L., Brown R., Wargo M. *Dynamics of liquid-encapsulated czochralski growth of gallium arsenide: Comparing model with experiment*. Journal of crystal growth. 1989. V. 96. № 1. P. 135–152.
5. Smirnova O. V., Kalaev V. V., Makarov Yu. N., Frank-Rotsch Ch., Neubert M., Rudolph P. *3D computations of melt convection and crystallization front geometry during VCz GaAs growth*. Journal of crystal growth. 2004. V. 266. P. 67–73.

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБЕРБЕКА–БУССИНЕСКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ ЖИДКОСТЕЙ

*M. B. Ефимова**Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

В работе рассматривается задача возникновения конвективного течения в горизонтальном слое двухслойной системе жидкых сред с общей поверхностью раздела в поле массовых сил. Пусть система состоит из двух слоев жидких сред:

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} = (x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -l_1 < z < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{x} = (x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < l_2\}.$$

Границы слоя  $z = -l_1, z = l_2$  суть твердые неподвижные стенки, а  $z = 0$  – неподвижная поверхность раздела между несмешивающимися жидкостями. Движение в слоях описывается уравнениями Обербека–Буссинеска [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{jt} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j &= -\frac{1}{\rho_j} \nabla \bar{p}_j + \nu_j \Delta \mathbf{u}_j - \mathbf{g}(\beta_j \theta_j + \beta_3 \varepsilon_j c), \\ \theta_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \theta_j &= \chi_j \Delta \theta_j, \\ c_t + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla c &= D \Delta c + \alpha D \Delta \theta_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_j &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{1}$$

В системе (1) индекс  $j = 1$  относится к жидкости, а  $j = 2$  – к бинарной смеси;  $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$ ,  $\bar{p}_j$ ,  $\theta_j$ ,  $c_j$  – искомые вектора скорости, модифицированные давления, температуры и концентрации в слоях;  $\rho_j > 0$ ,  $\nu_j = \mu_j / \rho_j > 0$ ,  $\beta_j > 0$ ,  $\beta_3 > 0$ ,  $\chi_j > 0$ ,  $D > 0$ ,  $\alpha$  – постоянные плотности, кинематической вязкости, коэффициенты теплового и концентрационного расширения жидкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  – ускорение силы тяжести,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ .

Система уравнений дополнена граничными условиями. Одна из границ считается теплоизолированной, а на второй – задано радиальное распределение температуры, на стенах выполнены условия прилипания. На поверхности раздела  $z = 0$  выполнены условия непрерывности, динамическое условие, равенство потоков тепла, а также отсутствует поток вещества.

Температура и концентрация в жидкостях квадратично зависят от горизонтальных координат, а поле скоростей имеет специальный вид:

$$\mathbf{u}_j(x, y, z, t) = \left( (F_j(z, t) + H_j(z, t))x, (F_j(z, t) - H_j(z, t))y, -2 \int_{z_0}^z F_j(z_1, t) dz_1 \right),$$

$$\theta_j = a_j(z, t)x^2 + b_j(z, t)y^2 + q_j(z, t), \quad c = m_1(z, t)x^2 + m_2(z, t)y^2 + n(z, t).$$

После подстановки исследуемого решения в уравнения система может быть редуцирована к 10 нелинейным интегродифференциальным уравнениям. В предположении что

течение в слоях является ползущим (значение числа Марангони мало), получено точное решение, описывающее стационарное течение в слоях. Это позволяет получить явные зависимости между параметрами системы и описать особенности термоконцентрационного движения.

Показано влияние силы тяжести на структуру течения в слое с бинарной смесью, а также влияние геометрии системы на формирование возвратных течений. Так, в условиях полной невесомости в каждом слое формируется вихревое течение, причем в слое с вязкой жидкостью имеет место возвратное течение (жидкость движется в направлении, обратном оси  $z$  из области с большей температурой). В условиях нормальной гравитации в слое с бинарной смесью формируется возвратное течение вблизи твердой стенки и при этом в слое вязкой теплопроводной жидкости структура течения качественно не меняется. В случае пониженной гравитации изменение толщины слоев не оказывает влияния на структуру течения. Однако в поле действия массовых сил с увеличением толщины слоя бинарной смеси у теплоизолированной границы начинает формироваться третий вихрь с противоположным направлением циркуляции. В данной конфигурации движение в пристенном слое порождается массовыми силами и влияние термоконцентрационных сил сохраняется лишь у поверхности раздела.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМ СО РАН (проект № FWES-2024-0025).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. *Термокапиллярная неустойчивость*. Новосибирск : Наука, 2000. 280 с.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

*М. Б. Зверева, М. Ш. Бурлуцкая*

*Воронежский государственный университет*

В последнее время особое внимание уделяется математическим моделям струнных систем в связи с их востребованностью во многих отраслях естествознания и техники. Уравнением деформации струны можно описывать процессы в строительной механике (расчет мостов, антенн, тросовых конструкций), робототехнике (гибкие манипуляторы, тросовые передачи), приборостроении, машиностроении, проектировании современных композитных материалов и других областях естествознания.

На основе вариационных методов проведено исследование моделей деформаций системы стилтьесовских струн, расположенной вдоль геометрического графа–звезды, а также цепочки из стилтьесовских струн, соединенных между собой пружинами. Стилтьесовской струной называем упругую нить, к которой в произвольном множестве точек (не более чем счетном) могут быть прикреплены упругие опоры, могут прикладываться сосредоточенные силы. Кроме того, предполагалось, что в одной из точек расположен ограничитель на перемещение струны под действием внешней нагрузки. Это порождает нелинейное условие, поскольку в зависимости от приложенной силы соответствующий конец струны либо остается свободным, либо достигает границы ограничителя. В работах [1–4] в явном виде найдены точные решения этих моделей. Поскольку точные решения выражаются через функции, удовлетворяющие интегродифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами и интегралом Стилтьеса, что существенно усложняет их непосредственное вычисление, то возникает вопрос о нахождении приближенных решений. Для этой цели был адаптирован метод конечных элементов. Установлена оценка разности между точным и приближенным решениями, написаны программы на языке Python для нахождения приближенных решений указанных моделей, проведены численные эксперименты.

Приведем подробное описание для модели деформаций струнной системы на графе–звезде. Пусть точки  $O, A_1, A_2, \dots, A_n$  принадлежат горизонтальной плоскости  $\pi$ . Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  стилтьесовских струн, соединенных между собой в одной точке, которые в положении равновесия совпадают с отрезками  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ . Под действием внешней силы, направленной перпендикулярно плоскости  $\pi$ , струны отклоняются от равновесного положения. При этом предполагается, что отклонение всех точек струн параллельно прямой, перпендикулярной плоскости  $\pi$ . Введем систему координат, чтобы описать процесс деформаций. Ось  $Ox$  для  $i$ -й струны ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) содержит отрезок  $OA_i$  и направлена от  $O$  к  $A_i$ . Ось  $Oy$  направлена перпендикулярно к плоскости  $\pi$  и проходит через точку  $O$ . Таким образом, точке  $O$  соответствует начало координат. Точка  $A_i$  имеет на оси  $Ox$  координату  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Граф–звезда  $\Gamma$ , вдоль которого в положении равновесия расположена струнная система, ориентирован от узла и состоит из ребер–интервалов  $\gamma_i = (0, l_i)$  и внутренней вершины 0 (узла). Через  $\partial\Gamma$  обозначим множество граничных вершин графа  $\Gamma$ ;  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ ;  $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ .

Обозначим через  $u(x)$  определенную на  $\bar{\Gamma}$  функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия под действием внешней силы, определяемой с помощью функции ограниченной вариации  $F(x)$ , где  $x \in \bar{\Gamma}$ . Будем предполагать, что система струн жестко закреплена в граничных вершинах, что означает выполнение условий

$u(a) = 0, a \in \partial\Gamma$ . Сужения  $u_i(x)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , функции  $u(x)$  на ребра определяют деформации каждой из струн. В точки  $l_i$  функции  $u_i$  доопределим предельными значениями. Обозначим через  $F_i(x)$  сужение функции  $F(x)$  на ребро  $\gamma_i$ . Физический смысл  $F_i(x)$  – сила, приложенная на участок  $(0, x]$  соответствующего ребра. Заметим, что функции  $F_i$  имеют разрывы первого рода в точках  $\xi \in (0, l_i)$ , в которых приложены сосредоточенные силы. Причем скачки  $\Delta F_i(\xi) = F_i(\xi + 0) - F_i(\xi - 0)$  совпадают со значениями этих сил.

Дополнительно предположим, что в узле, вдоль оси  $Oy$  установлен ограничитель на перемещение струн, представленный отрезком  $[-m, m]$ . Таким образом, имеется условие  $|u(0)| \leq m$ . В зависимости от приложенной внешней силы, узловая точка струнной системы либо остается внутри интервала  $(-m, m)$ , либо достигнет границы ограничителя.

Обозначим через  $p(x)$  функцию ограниченной вариации на  $\bar{\Gamma}$ , характеризующую локальное натяжение струн. Будем предполагать, что  $\inf_{R(\Gamma)} p > 0$ . Пусть функция  $Q(x)$  описывает распределение упругой реакции внешней среды, где  $x \in \bar{\Gamma}$ . Будем предполагать, что функция  $Q(x)$  не убывает на каждом ребре и обозначим через  $Q_i(x)$  сужение функции  $Q(x)$  на ребро  $\gamma_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Точки  $\xi \in (0, l_i)$ , в которых струны опираются на пружины, являются точками разрыва функции  $Q_i(x)$ , и скачки  $\Delta Q_i(\xi)$  в этих точках совпадают с жесткостями соответствующих пружин. Кроме того, в настоящей работе предполагается, что функции  $p(x)$ ,  $F(x)$ ,  $Q(x)$  непрерывны в точках из  $\partial\Gamma$ ;

$$\sum_{i=1}^n [Q_i(0+0) - Q_i(0)] = 0, \quad \sum_{i=1}^n [F_i(0+0) - F_i(0)] = 0.$$

Потенциальная энергия  $\Phi$  струнной системы равна работе, которую нужно совершить, чтобы система струн перешла из положения равновесия в положение  $u(x)$ . Таким образом, функционал потенциальной энергии имеет вид

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} udF. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое описывает работу силы натяжения струн, второе слагаемое характеризует работу силы упругости внешней среды, а третье слагаемое совпадает с работой внешней силы. Интеграл по графу равняется сумме интегралов по ребрам.

Обозначим через  $E$  множество абсолютно непрерывных на  $\bar{\Gamma}$  функций  $u(x)$ , производные которых  $u'(x)$  являются функциями ограниченной вариации на каждом ребре. Согласно принципу Лагранжа – Гамильтона, искомая форма (деформация), принятая струнной системой, минимизирует функционал (1). При этом рассматриваем случай, когда выполняются условия

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma; \quad |u(0)| \leq m. \quad (2)$$

Обозначим через  $K$  множество функций  $u \in E$ , удовлетворяющих условиям (2).

**Теорема 1.** *Функция  $u_0$  минимизирует функционал (1) на множестве  $K$  тогда и только тогда, когда  $u_0$  является решением вариационного неравенства*

$$\int_{\Gamma} pu'v'dx - \int_{\Gamma} pu'^2 dx + \int_{\Gamma} uvdQ - \int_{\Gamma} u^2 dQ - \int_{\Gamma} vdF + \int_{\Gamma} udf \geq 0, \quad (3)$$

где  $v$  – произвольная функция, принадлежащая  $K$ .

**Теорема 2.** Решение вариационного неравенства (3) существует и единствено.

Приведем алгоритм нахождения приближенного решения модели деформаций струнной системы на графе–звездце. Пусть все ребра графа имеют длину  $l$ . Выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого рассмотрим разбиение  $\bar{\Gamma}$  на равные части точками  $0 = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{n_i}^i = l$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим  $h = x_{j+1}^i - x_j^i$ . Отметим, что граничные вершины и узел будем обязательно включать в разбиение.

Для  $i$ -го ребра  $k$ -ю базисную функцию  $\varphi_{k,i}$  ( $k = 1, 2, \dots, n_i - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) зададим формулой

$$\varphi_{k,i}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}^i}{h}, & x \in [x_{k-1}^i, x_k^i], \\ \frac{x_{k+1}^i - x}{h}, & x \in [x_k^i, x_{k+1}^i], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Заметим, что базисные функции  $\varphi_{k,i}$  равны нулю везде на  $\bar{\Gamma}$ , кроме промежутка  $(x_{k-1}^i, x_{k+1}^i)$  соответствующего ребра с номером  $i$ . При этом  $\varphi_{k,i}(x_k^i) = 1$ . Также определим базисную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x_1^i - x}{x_1^i}, & x \in [0, x_1^i], \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Обозначим через  $E_h$  пространство, натянутое на данные базисные функции. Заметим, что любая функция из  $E_h$  обращается в ноль при  $x = l$ . Через  $K_h$  обозначим множество функций  $v_h \in E_h$ , удовлетворяющих условию  $|v_h(0)| \leq m$ . Вопрос о поиске приближенного решения модели деформаций струнной системы на графе сводится к вопросу о поиске функции  $u_h \in K_h$  такой, что для всех  $v_h \in K_h$  верно

$$\int_{\Gamma} p u'_h v'_h dx - \int_{\Gamma} p u'_h {}^2 dx + \int_{\Gamma} u_h v_h dQ - \int_{\Gamma} u_h {}^2 dQ - \int_{\Gamma} v_h dF + \int_{\Gamma} u_h dF \geq 0.$$

Введем билинейный функционал  $\langle \varphi, \psi \rangle$  следующим образом:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} p \varphi' \psi' dx + \int_{\Gamma} \varphi \psi dQ.$$

В силу положительности  $p(x)$  и неубывания  $Q(x)$  на каждом ребре данный билинейный симметричный функционал может служить скалярным произведением. Таким образом, требуется найти функцию  $u_h \in K_h$  такую, что для всех  $v_h \in K_h$  верно неравенство

$$\langle u_h, v_h - u_h \rangle - \int_{\Gamma} (v_h - u_h) dF \geq 0. \quad (4)$$

Решение (4) будем строить, опираясь на решения двух вспомогательных задач. Вопрос о минимизации функционала энергии (1) на множестве функций  $u \in E$ , удовлетворяющих условию  $u(\partial\Gamma) = 0$ , приводит к задаче

$$\begin{cases} \mathcal{D}s - (p_i u'_i)(x) + \int_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(0) - (p_i u'_i)(+0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n p_i (+0) u'_i (+0) = 0, \\ u_i(l_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим через  $u_p$  приближенное решение задачи (5), найденное как линейная комбинация тех же самых базисных функций, т. е.  $u_p(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} c_j^i \varphi_{j,i}(x) + c\varphi(x)$ . Выпишем алгоритм для нахождения коэффициентов  $c_j^i, c$ .

Из уравнения в (5) следует, что для любой функции  $v \in E$ , удовлетворяющей условию  $v(\partial\Gamma) = 0$ , справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} pu'v'dx + \int_{\Gamma} vudQ = \int_{\Gamma} vdF.$$

Таким образом, если  $u$  — точное решение задачи (5), то верно равенство

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} vdF. \quad (6)$$

Подставим в (6) вместо  $u$  функцию  $u_p$ , и пусть  $v = v_h$  — произвольные функции из  $E_h$ . Тогда (6) перепишем в виде

$$\langle u_p, v_h \rangle = \int_{\Gamma} v_h dF.$$

Подставив в это представление вместо  $v_h$  базисные функции, получим следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов  $c_j^i, c$  в представлении  $u_p(x)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} c_j^i \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + c \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'(x) dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} c_j^i \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + \\ & + c \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) dF, \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} c_j^i \int_{\Gamma} p(x) \varphi'(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + c \int_{\Gamma} p(x) \varphi'^2(x) dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} c_j^i \int_{\Gamma} \varphi(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + \\ & + c \int_{\Gamma} \varphi^2(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi(x) dF. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты этой системы уравнений образуют матрицу Грамма для линейно независимых функций  $\varphi_{k,i}, \varphi$ . Значит, определитель матрицы системы отличен от нуля, откуда следует, что полученная система имеет единственное решение.

Рассмотрим вторую вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \mathcal{D}s - (p_i \omega'_i)(x) + \int_0^x \omega_i dQ_i + (p_i \omega'_i)(+0) = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n p_i (+0) \omega'_i (+0) = -1, \\ \omega_i(l_i) = 0, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что для всех  $v \in E$ , удовлетворяющих условию  $v(\partial\Gamma) = 0$ , верно равенство

$$\int_{\Gamma} pw'v'dx + \int_{\Gamma} vwdQ = v(0).$$

Будем искать приближенное решение  $w_p$  задачи (7) в виде

$$w_p(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} d_j^i \varphi_{j,i}(x) + d\varphi(x).$$

Аналогично предыдущей задаче, для всех  $v_h \in E_h$  получаем равенство

$$\langle w_p, v_h \rangle = v_h(0),$$

и коэффициенты  $d_j^i, d$  могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} d_j^i \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + d \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'(x) dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} d_j^i \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + \\ & + d \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi(x) dQ = 0 \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} d_j^i \int_{\Gamma} p(x) \varphi'(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + d \int_{\Gamma} p(x) \varphi'^2 dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} d_j^i \int_{\Gamma} \varphi(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + \\ & + d \int_{\Gamma} \varphi^2(x) dQ = 1. \end{aligned}$$

Для нахождения приближенного решения  $u_h$  задачи о деформациях струнной системы на графе–звездце будем применять следующий алгоритм.

1. Находим описанным выше способом приближенное решение  $u_p$  задачи (5). Если окажется, что  $|u_p(0)| < m$ , то полагаем, что  $u_h = u_p$ .

2. Если  $u_p(0) \geq m$ , то полагаем  $u_h = \frac{m - u_p(0)}{w_p(0)} w_p + u_p$ .
3. Если  $u_p(0) \leq -m$ , то полагаем  $u_h = \frac{-m - u_p(0)}{w_p(0)} w_p + u_p$ .

**Теорема 3.** Функция  $u_h$ , построенная по описанному выше алгоритму, является решением вариационного неравенства (4).

**Теорема 4.** Пусть  $u(x)$  — точное решение (3),  $u_h(x)$  — приближенное решение, найденное по указанному выше алгоритму. Тогда

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leq Ch,$$

где константа  $C$  не зависит от  $h$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Raynaud de Fitte P., Kamenskii M., Wong N.-Ch., Zvereva M. *A model of deformations of a discontinuous Stieltjes string with a nonlinear boundary condition.* Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2021. V. 5. № 5. P. 737–759.
2. Burlutskaya M. Sh., Zvereva M. B., Kamenskii M. I. *Boundary value problem on a geometric star-graph with a nonlinear condition at a node.* Math. Notes. 2023. V. 114. № 2. P. 275–279.
3. Zvereva M., Kamenskii M., Raynaud de Fitte P., Wen Ch. F. *The deformations problem for the Stieltjes strings system with a nonlinear condition.* Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2023. V. 7. № 2. P. 291–308.
4. Zvereva M. *A model of string system deformations on a star graph with nonlinear condition at the node.* Journal of Mathematical Sciences. 2024. V. 283. № 1. P. 76–92.

# О ПОКРЫТИИ ЭЛЛИПСОИДА РАВНЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ КРУГАМИ

*А. Л. Казаков<sup>1</sup>, А. А. Лемперт<sup>1</sup>, Д. М. Нгуен<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,  
Иркутск*

<sup>2</sup>*Иркутский национальный исследовательский технический университет*

В работе рассматривается задача построения оптимального покрытия эллипсоида геодезическими кругами. Данная задача возникает при построении высокоточных геодезических сетей, что требует оптимального размещения опорных точек [1], при создании карт в различных проекциях [2], а также в системах типа GPS и ГЛОНАСС, где требуется обеспечить эффективное покрытие земной поверхности зонами видимости спутников [3]. Частным случаем является задача покрытия сферы [4]. Для эллипсоида она существенно усложняется из-за непостоянства его гауссовой кривизны, которая изменяется от полюсов ( $K = b^2/a^4$ ) до экватора ( $K = a/b^2$ ).

Под *геодезической окружностью* будем понимать совокупность точек, расположенных на равном геодезическом расстоянии  $R$  до заданной точки  $O_i$ , называемой центром геодезической окружности, а *геодезический круг*  $C_i$  представляет собой область на поверхности, ограниченную геодезической окружностью.

Задачу построения оптимального (тончайшего) покрытия можно сформулировать следующим образом. Необходимо разместить  $n$  геодезических кругов  $C_i$  так, чтобы поверхность  $S$  принадлежала объединению объектов, и радиус  $R$  был минимальным:

$$R \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\forall p \in S \quad \exists i: \sigma(O_i, p) \leq R, \quad (2)$$

$$O_i \in S, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Целевая функция (1) минимизирует радиус покрытия. Условие (2) гарантирует, что любая точка поверхности  $S$  принадлежит по крайней мере одному покрывающему объекту, а (3) означает, что все центры объектов располагаются на поверхности  $S$ .

Решение задачи о покрытии включает два этапа:

1. Поверхность  $S$  разбивается на  $n$  областей с помощью геодезической диаграммы Вороного, которая строится по произвольному набору начальных точек.
2. Для каждой области диаграммы Вороного строится один покрывающий объект минимального радиуса, его центр находится с помощью чебышевского центра множества и оптико-геометрического подхода [5]. Далее строится новая диаграмма Вороного относительно найденных центров. Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия останова.

Отметим, что задача вычисления геодезического расстояния на эллипсоиде является нетривиальной.

Рассмотрим эллипсоид  $S$  с центром в начале координат, заданный в параметрическом виде:

$$x = a \cos \mu \cos \theta, \quad y = b \cos \mu \sin \theta, \quad z = c \sin \mu, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \mu \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

где  $a, b, c$  — полуоси эллипсоида,  $\theta$  — долгота,  $\mu$  — широта.

Геодезическое расстояние  $ds$  определяется из решения уравнения

$$ds^2 = H d\mu^2 + G d\theta^2, \quad (4)$$

где  $s$  — искомая функция,  $\theta$  — независимая переменная,  $\mu = \mu(\theta)$ .

Для трехосного эллипсоида с полуосами  $a > b > c$  параметры  $H$  и  $G$  определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} H &= \frac{b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu}{h_x^2 - h_y^2 \sin^2 \mu} (h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \theta), \\ G &= \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{h_x^2 - h_z^2 \sin^2 \theta} (h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \theta), \\ h_x &= \sqrt{a^2 - c^2}, \quad h_y = \sqrt{b^2 - c^2}, \quad h_z = \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Уравнение в дифференциалах (4) преобразуется в нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$2HG\mu'' + HH_\theta(\mu')^3 - (2HG_\mu - H_\mu G)(\mu')^2 + (2H_\theta G - HG_\theta)\mu' - GG_\mu = 0$$

с краевыми условиями

$$\mu(\theta_0) = \mu_0, \quad \mu(\theta_1) = \mu_1$$

и решается численно.

Для оценки качества покрытия реализован численный метод расчета плотности покрытия. Проведены вычислительные эксперименты для различных эллипсоидов, найденные покрытия сравнивались с аналогичными покрытиями для сфер, имеющих ту же площадь.

*Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Теоретические основы, методы и высокопроизводительные алгоритмы непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований”, № гос. регистрации: 121041300065-9.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. *Physical Geodesy*. Berlin : Springer, 2006.
2. Pearson, F. *Map Projections: Theory and Applications*. Boca Raton : CRC Press, 1990.
3. Kaplan E. D., Hegarty C. J. *Understanding GPS/GNSS: Principles and Applications*. London : Artech House, 2017.
4. Fodor F., Vigh V., Zarnocz T. *Covering the sphere by equal zones*. Acta Math. Hungar. 2016. V. 149. № 2. P. 478–489.
5. Казаков А. Л., Лемперт А. А. *Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике*. Автомат. и телемех. 2011. Т. 72. № 7. С. 50–57.

# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*A. A. Ломов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\alpha_n x_{k+n} + \alpha_{n-1} x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 x_k = -\beta_n u_{k+n} - \beta_{n-1} u_{k+n-1} - \dots - \beta_0 u_k, \quad k = \overline{1, N-n},$$

$x_k \in \mathbb{R}^r$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ , описываемую матричным уравнением  $A^\top x + B^\top u = 0$  с клеточно-теплицевыми матрицами

$$A^\top = A^\top(\alpha) \doteq \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-n)r \times Nr},$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B^\top \doteq A^\top(\beta)$ ,  $\beta_i \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $x \doteq [x_1; \dots; x_N]$ ,  $u \doteq [u_1; \dots; u_N]$ :

$$G^\top z = 0, \quad G^\top \doteq [A^\top, B^\top] \quad z \doteq \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N(r+m)}. \quad (1)$$

Подобного рода системы (в некотором смысле простейшие) используются для построения линейных фильтров наблюдения в системах управления. Характерным примером является задача фильтрации наблюдений  $\check{z} \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$  на основе решений уравнения (1), исследованная в [1, 2]:

$$J \doteq \|\check{z} - z\|^2 \rightarrow \min_{G^\top z = 0}. \quad (2)$$

При известной матрице  $G$ ,  $\ker G = 0$ , результатом фильтрации является точка

$$\hat{z} \doteq \arg \min_z J = [I - GCG^\top] \check{z}, \quad C \doteq (G^\top G)^{-1}; \quad (3)$$

отсюда при рекуррентном вычислении  $\hat{z}_{k+1} \doteq \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{u}_{k+1} \end{bmatrix}$  по наблюдениям  $\check{x}_1, \dots, \check{x}_k, \check{u}_1, \dots, \check{u}_k$  с рекурсией вычисления матрицы  $C$  в проекторе (3) получаются уравнения [2] типа уравнений известного фильтра Калмана [3].

Существенной особенностью предложенного [1, 2] подхода к фильтрации является совместное решение двух задач: 1) вычисление проектора (2) и 2) адаптация (идентификация) коэффициентов  $\alpha = \alpha(\theta)$ ,  $\beta = \beta(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^v$  фильтра «в пространстве траекторий» (3) по критерию минимума целевой функции  $J(\theta) \doteq \|\check{z} - \hat{z}(\theta)\|^2$  (2). В отличие от других методов адаптации (расширенный фильтр Калмана [3], настраиваемые рекуррентные фильтры [4]), в фильтре Егоршина [1, 2] решение задачи идентификации параметров осуществляется без рекурсии по  $k$ , с использованием траекторий  $\check{z}$ ,  $\hat{z}$  «в целом», что приводит к алгоритмам [1] типа обратных итераций с малой чувствительностью к начальному приближению [5]. В определенном смысле подход [1, 2] к фильтрации и идентификации «в пространстве траекторий» оказался предвестником ставшего широкоизвестным «поведенческого» («бихевиористического») подхода в теории систем [6, 7].

Необходимым условием единственности решения задачи идентификации  $J(\theta) \rightarrow \min_{\theta}$  является идентифицируемость параметров  $\theta$  в смысле однозначности отображения  $\ker G^{\top}(\theta) \rightarrow \theta$ . Для систем (1) идентифицируемость равносильна неразрешимости матричного уравнения  $G(\theta') - G(\theta) = G(\theta)P$  относительно квадратной матрицы  $P \neq I$  и вектора параметров  $\theta' \neq \theta$ . Это является следствием общего подхода к исследованию идентифицируемости на основе равносильных преобразований уравнений системы [8]. В локальном случае уравнение неидентифицируемости имеет вид  $dG(\theta, d\theta) = G(\theta) dP$ . Задача исследования идентифицируемости становится нетривиальной в многомерных системах (1) с  $r > 1$ ; ранговые критерии в терминах «малых» матриц  $\alpha_i, \beta_i$  были получены в [9].

Условия идентифицируемости параметров нескольких систем вида (1), соединенных параллельно, изучались в [10].

В настоящей работе рассмотрен случай последовательного соединения двух систем вида (1). Этот случай сложен тем, что «внутренние» траектории системы (являющиеся выходом первой системы и одновременно входом второй системы) не наблюдаются напрямую. Показано, что данная задача сводится к случаю системы с возмущениями из линейного многообразия, представленного базисной матрицей, зависящей от параметров. При постоянной базисной матрице эта задача изучалась в [11, 12], ввиду чего здесь среди новых утверждений формулируются и модификации теорем [11, 12].

Пусть даны две системы вида (1) с матрицами  $[A_2^{\top}, B_e^{\top}]$  и  $[A_e^{\top}, B_1^{\top}]$ . Последовательным соединением назовем систему уравнений

$$\begin{bmatrix} A_2^{\top} & B_e^{\top} & 0 \\ 0 & A_e^{\top} & B_1^{\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ u \end{bmatrix} = 0; \quad (4)$$

здесь  $u$  является входом,  $x$  — выходом, а  $e$  — внутренними переменными последовательного соединения. Решением задачи фильтрации при известных матрицах  $A_2, B_e, A_e, B_1$  будет значение переменных  $x, u, e$ , минимизирующих целевую функцию

$$J = \|\ddot{x} - x\|^2 + \|\ddot{u} - u\|^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

При замене

$$S \doteq GCF, \quad F \doteq G^{\top}S, \quad G^{\top} \doteq \begin{bmatrix} A_2^{\top} & 0 \\ 0 & B_1^{\top} \end{bmatrix}, \quad F \doteq \begin{bmatrix} B_e^{\top} \\ A_e^{\top} \end{bmatrix}, \quad z \doteq [x; u] \quad (6)$$

задача (4), (5) принимает вид  $J(z, e) = \|\ddot{z} - z\|^2 \rightarrow \min_{G^{\top}z=-Fe}$  и становится эквивалентной задаче

$$J(z, \pi) = \|\ddot{z} - z - S\pi\|^2 \rightarrow \min_{G^{\top}z=0}, \quad (7)$$

которая исследовалась в [11, 12]; (7) можно трактовать как задачу (2) с дополнительными возмущениями  $S\pi$  из линейного многообразия  $\text{im } S$ , представленного базисной матрицей  $S$ . В отличие от [11, 12], здесь матрица  $S = GCF = S(\theta)$  зависит от параметров  $\theta$ .

Пусть  $H = H(\theta)$  — базисная матрица для  $\ker G^{\top} = \text{im } H$ . Как и в [11, 12], под идентифицируемостью параметра  $\theta$  понимаем взаимную однозначность отображения

$$\theta \mapsto \text{im } H(\theta) + \text{im } S(\theta) \quad (8)$$

в некоторой области  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^v$ . Если  $\Theta$  — малая окрестность точки  $\theta$ , то говорится о локальной идентифицируемости.

**Предложение 1.** Параметр  $\theta$  идентифицируем в области  $\Theta$  тогда и только тогда, когда система уравнений

$$[\Delta H \quad \Delta S] = [H \quad S] \begin{bmatrix} \Delta P_{HH} & \Delta P_{HS} \\ \Delta P_{SH} & \Delta P_{SS} \end{bmatrix} \quad (9)$$

относительно матриц  $\Delta H \doteq H(\theta + \Delta\theta) - H(\theta)$ ,  $\Delta S \doteq S(\theta + \Delta\theta) - S(\theta)$ ,  $\Delta P_{HH}$ ,  $\Delta P_{HS}$ ,  $\Delta P_{SH}$ ,  $\Delta P_{SS}$  при  $\theta + \Delta\theta \in \Theta$  имеет единственное решение  $[\Delta H \quad \Delta S] = 0$ . Ввиду линейной независимости столбцов объединенной матрицы  $[H \quad S]$  последнее равенство равносильно условию  $\begin{bmatrix} \Delta P_{HH} & \Delta P_{HS} \\ \Delta P_{SH} & \Delta P_{SS} \end{bmatrix} = 0$ .

В силу условия  $S = GCF$  имеем  $\text{im } S \subseteq \text{im } G$ , тогда верен следующий вариант предложения 1.

**Предложение 2.** Параметр  $\theta$  идентифицируем в области  $\Theta$  тогда и только тогда, когда система уравнений

$$G^\top [\Delta H \quad \Delta S] = F [\Delta P_{SH} \quad \Delta P_{SS}] \quad (10)$$

имеет единственное решение  $[\Delta H \quad \Delta S] = 0$ . Ввиду линейной независимости столбцов матрицы  $F$  последнее равенство равносильно условию  $[\Delta P_{SH} \quad \Delta P_{SS}] = 0$ .

При малых отклонениях  $dG$ ,  $dH$  верно равенство  $G^\top dH + dG^\top \cdot H = d(G^\top H) = 0$ , в силу чего имеет место следующий критерий локальной идентифицируемости.

**Предложение 3.** Параметр  $\theta$  локально идентифицируем тогда и только тогда, когда система уравнений

$$dG^\top \cdot [H, \quad GCF] = [F dQ, \quad dF + F dP] \quad (11)$$

относительно матриц  $dG \doteq G(\theta + d\theta) - G(\theta)$ ,  $dF \doteq F(\theta + d\theta) - F(\theta)$ ,  $dQ$ ,  $dP$  имеет единственное решение  $dG = 0$ ,  $dF = 0$ ,  $dQ = 0$ ,  $dP = 0$ .

Далее привлекаем определения (6).

**Теорема.** Для матриц  $G = G(\theta)$ ,  $F = F(\theta)$  вида (6) параметр  $\theta$  локально идентифицируем тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} dA_2 = A_2 dP_2, \\ dB_1 = B_1 dP_1, \\ dA_e = A_e dP_1 + dP \cdot A_e, \\ dB_e = B_e dP_2 + dP \cdot B_e \end{cases}$$

имеет единственное решение  $dP_1 = 0$ ,  $dP_2 = 0$ ,  $dP = 0$ .

Теорема является обобщением случая  $S = 0$ , при котором исследуемая задача имеет вид (2) с уравнением неидентифицируемости  $dG^\top \cdot H = 0$  или  $G_{\theta+d\theta} = G_\theta(I + dP)$  или  $dG = G dP$ ; как отмечено выше, для этого случая ранговые критерии получены в [9].

Заметим, что если бы сигнал  $e$  был наблюдаем, то условие идентифицируемости принял бы вид (см. (4))

$$\begin{cases} dA_2 = A_2 dP_2, \\ dB_1 = B_1 dP_1, \\ dA_e = A_e dP_1, \\ dB_e = B_e dP_2 \end{cases} \Rightarrow dP_{1,2} = 0.$$

Таким образом, при наличии ненаблюдаемых напрямую внутренних переменных  $e$  в системе уравнений неидентифицируемости в условии теоремы появляются дополнительные слагаемые.

**Схема доказательства теоремы.**

Приведем ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** Пусть  $A \doteq \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ a_{n_A} & a_0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & a_{n_A} \end{bmatrix} \neq 0$  и  $B \doteq \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ b_{n_B} & b_0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & b_{n_B} \end{bmatrix} \neq 0$  — клеточно-теплицевые матрицы клеточной размерности соответственно  $N \times (N - n_A)$  и  $N \times (N - n_B)$  ( $N$  — число клеточных строк,  $N - n_A, N - n_B$  — числа клеточных столбцов), и пусть  $N \geq n_A + n_B \geq 1$ . Все клетки в  $A$  имеют размерность  $m \times r_A$ , все клетки в  $B$  имеют размерность  $m \times r_B$ . Утверждается, что матричное уравнение  $B = \bar{A}X$ , в котором  $\bar{A}$  обозначает матрицу, столбцы которой образуют базис линейного подпространства  $\ker A^\top \subset \mathbb{R}^{Nm}$ , неразрешимо относительно матрицы  $X$ . Или (равносильно)  $A^\top B \neq 0$ .

**Лемма 2.** Пусть  $A, B$  — клеточно-теплицевые матрицы из условия леммы 1. Тогда уравнение  $AQ + \bar{A}P = B$  относительно матриц  $P, Q$  подходящей размерности (с одинаковым количеством столбцов, равным количеству столбцов  $B$ ) влечет  $P = 0, AQ = B$ .

**Лемма 3.** Уравнение  $dG^\top \cdot H = F dQ$  равносильно уравнению

$$dG = G dP + H dX^\top \cdot F^\top \quad (12)$$

с некоторыми матрицами  $dP, dX$  подходящей размерности.

**Лемма 4.** При последовательном соединении (6) уравнение (12):

$$dG = G dP + H dX^\top \cdot F^\top -$$

равносильно системе уравнений

$$\begin{bmatrix} dA_2 & 0 \\ 0 & dB_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dP_2 & 0 \\ 0 & dP_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & \bar{B}_1 \end{bmatrix} dX^\top \cdot [B_e \ A_e] \quad (13)$$

для некоторых матриц  $dP_{1,2}, dX$  подходящей размерности.

**Лемма 5.** Система уравнений (13) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} dA_2 = A_2 dP_2 + \bar{A}_2 dY_1 \cdot \bar{A}_e^\top B_e, \\ dB_1 = B_1 dP_1 + \bar{B}_1 dY_2 \cdot \bar{B}_e^\top A_e \end{cases} \quad (14)$$

для некоторых матриц  $dY_{1,2}$  подходящей размерности.

Для лучшего понимания уравнений (14) можно иметь ввиду, что следующие три условия равносильны:

$$\ker A_e^\top \cap \ker B_e^\top = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} \bar{A}_e^\top B_e = \max \Leftrightarrow \operatorname{rank} \bar{B}_e^\top A_e = \max.$$

Нетрудно увидеть, что эти условия есть необходимое условие восстановимости сигнала  $e$  при последовательном соединении (4).

**Лемма 6.** При последовательном соединении (6) первое уравнение системы (11):  $dG^\top \cdot H = F dQ$  — равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} dA_2 = A_2 dP_2, \\ dB_1 = B_1 dP_1 \end{cases}$$

для некоторых матриц  $dP_{1,2}$  подходящей размерности.

Из лемм 3–6 следует, что матричное уравнение (11) в условии предложения 3 равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} dA_2 = A_2 dP_2, \\ dB_1 = B_1 dP_1, \\ dG^\top \cdot GCF = dF + F dP. \end{cases}$$

Ввиду выражений (6) для матриц  $G, F$  можем переписать эту систему уравнений в равносильном виде

$$\begin{cases} dA_2 = A_2 dP_2, \\ dB_1 = B_1 dP_1, \\ dA_e = A_e dP_1 + dP \cdot A_e, \\ dB_e = B_e dP_2 + dP \cdot B_e, \end{cases} \quad (15)$$

переобозначив  $-dP^\top$  как  $dP$ .

Заменив матричное уравнение (11) в условии предложения 3 на равносильную систему уравнений (15), придем к утверждению теоремы.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).*

## ЛИТЕРАТУРА

- Егоршин А. О., Будянов В. П. *Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ*. Автометрия. 1973. № 1. С. 78–82.
- Егоршин А. О. *Метод наименьших квадратов и «быстрые» алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ)*. Автометрия. 1988. № 1. С. 30–42.
- Эйкхофф П. *Основы идентификации систем управления*. М.: Мир, 1975.
- Цыганова Ю. В., Куликова М. В. *Об эффективных методах параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем*. Автоматика и телемеханика. 2012. № 6. С. 34–51.
- Ломов А. А. *О сходимости вычислительных алгоритмов в вариационной задаче идентификации коэффициентов разностных уравнений*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 83. № 3. С. 77–90.
- Willems J. C. *From time series to linear system - I, II*. Automatica. 1986. V. 22. P. 561–580, 675–694.
- Русанов В. А., Антонова Л. В., Данеев А. В. *К обратным задачам нелинейного системного анализа. Бихевиористический подход*. Проблемы управления. 2011. № 5. С. 14–21.

8. Walter E. *Identifiability of State Space Models*. New York: Springer-Verlag, 1982.
9. Ломов А. А. *О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 60–66.
10. Ломов А. А. *Совместная идентифицируемость коэффициентов линейных разностных уравнений объекта и аддитивных возмущений*. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15. Вып. 4. С. 63–78.
11. Ломов А. А. *К идентификации разностных уравнений по наблюдениям решений с возмущениями из заданного линейного многообразия*. Математические труды. 2024. Т. 27. № 2. С. 111–130.
12. Ломов А. А. *Дополнение к статье: К идентификации разностных уравнений по наблюдениям решений с возмущениями из заданного линейного многообразия*. Математические труды. 2025. Т. 28. № 1. С. 151–153.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ В ПРОТАИВАЮЩЕМ СНЕГЕ И ГРУНТЕ

*Т. А. Пекарская<sup>1,2</sup>, А. Н. Сибин<sup>1,2,3</sup>*

<sup>1</sup>Алтайский государственный университет, Барнаул ,

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

<sup>3</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Фильтрация раствора солей в протаивающем снеге и верхнем слое грунта оказывает значительное влияние на формирование весеннего речного водотока, особенно в северных регионах. Талая вода, образующаяся в результате снеготаяния, не только пополняет водоемы, но и переносит с собой различные химические примеси и соли, накопленные в снежном покрове за зимний период [1]. Динамика жидкости в снежном покрове определяет количество и скорость вымывания этих загрязняющих веществ, что подчеркивает важность глубокого понимания процессов фильтрации.

Интенсивное использование технической соли для борьбы с гололедом приводит к экологическим проблемам, так как соль легко смывается талой водой и попадает в почву и водоемы. В работе [2] исследуется эффективность дорожных смесей с различным содержанием соли. Существующие эмпирические модели часто не учитывают пористую структуру снега и неравномерное распределение загрязняющих веществ [3], что затрудняет точную оценку их воздействия.

В работе [4] рассматривается процесс замерзания и оттаивания грунта с учетом влияния растворенной соли, но игнорируются фильтрационные свойства грунта. В работах [5,6] учитывают капиллярные силы и движение воды и воздуха, но не рассматриваются изменяющиеся фильтрационные свойства грунта при замерзании воды и изменении пористости грунта. Для оценки подземного стока в работах [7, 8] проведены экспериментальные исследования влияния различных химических растворов на коэффициент фильтрации глинистых грунтов. Коэффициент фильтрации в них увеличивается с ростом концентрации водных растворов солей. Это создает необходимость разработки более сложных многомерных моделей, которые будут учитывать взаимодействие между снегом и грунтом одновременно.

В докладе рассматривается математическая модель, в которой протаивающий грунт и снег на его поверхности считается четырехфазной средой, состоящей из воды, воздуха, льда и грунта. Для описания процесса фильтрации воды с динамически нейтральной примесью и воздуха в пористом скелете используется уравнение сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнение двухфазной фильтрации, учитывающее взаимодействие между водой и воздухом, уравнение теплового баланса, которое позволяет учитывать изменения температуры в системе, движение растворенной примеси описывается уравнением конвективной диффузии из работы [9] с коэффициентом диффузии из работы [10]. Пористость талого грунта задана как постоянная величина. Частицы грунта и льда образуют твердый пористый скелет грунта, который считается неподвижным. Интенсивность фазового перехода «вода–лед» считается заданной функцией, зависящей от температуры и опирается на идеи из работ [11, 12].

На основании этих предположений была получена замкнутая система дифференциальных уравнений для определения пористости, водонасыщенности, температуры, переноса растворенной в воде примеси и выведены соотношения для определения скоростей фильтрации воды и воздуха.

В рамках предложенной модели разработана разностная схема. При аппроксимации нелинейного вырождающегося решения уравнения водонасыщенности, уравнения для температуры и уравнения для концентрации примеси использована разностная схема для модели Маскета – Леверетта с направленной разностью для конвективного слагаемого. Уравнение для пористости аппроксимируется разностной схемой Рунге – Кутты второго порядка точности. Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом простой итерации по нелинейности: значения искомых функций подставляются из предыдущей итерации, что позволяет свести систему к линейному виду.

Для численного решения одномерной задачи фильтрации растворенной в воде примеси на начальном этапе задаются значения водонасыщенности, температуры и пористости. На верхней границе задаются температура и давление воздуха при условии отсутствия ветра на поверхности. На нижней границе устанавливаются температура и условия непротекания для всех фаз. Нижняя граница выбирается на такой глубине, чтобы фильтрационный поток не доходил до нее.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российской научного фонда (проект № 24-71-00058).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Papina T. S., Eirikh A. N., Malygina N. S., Eyrikh S. S., Ostanin O. V., Yashina T. V. *Microelement and stable isotopic composition of snowpack in the Katunsky Biosphere Reserve (Altai Republic)*. Ice and Snow. 2018. V. 58. № 1. P. 41–55.
2. Wang Z., Zhang T., Shao M., Ai T., Zhao P. *Investigation on snow-melting performance of asphalt mixtures incorporating with salt-storage aggregates*. Construction and Building Materials. 2017. V. 142. P. 187–198.
3. Meyer T., Wania F. *Modeling the elution of organic chemicals from a melting homogeneous snow pack*. Water Research. 2011. V. 45. P. 3627–3637.
4. Васильев В. И., Попов В. В. Численное решение задачи промерзания грунта. Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 7. С. 119–128.
5. Цыпкин Г. Г. *Математическая модель промерзания ненасыщенного грунта при наличии капиллярных сил*. Математические заметки СВФУ. 2017. Т. 24. № 2. С. 96–107.
6. Цыпкин Г. Г. *Фазовый переход вода–лед в ненасыщенном грунте при наличии капиллярного давления*. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 93–101.
7. Павилонский В. М. *Изменения проницаемости суглинка при длительной фильтрации растворов ёдкого натра*. Труды ВОДГЕО. 1977. Вып. 68. С. 6–9.
8. Шестаков В. Н., Семашкин К. В. *Изменение коэффициента фильтрации глинистых грунтов после их обработки растворами паоп*. Вестник СибАДИ. 2012. № 2. Т. 24. С. 73–77.
9. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. *Физико-математические основы фильтрации воды*. М.: Мир, 1971.
10. Angeli C., Leonardi E. *A one-dimensional numerical study of the salt diffusion in a salinity-gradient solar pond*. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2004. V. 47. P. 1–10.
11. Сибин А. Н., Папин А. А. *Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге*. Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 65. № 1. С. 58–69.
12. Сибин А. Н., Пекарская Т. А. *Исследование фазового перехода в промерзающем грунте*. Известия Алтайского государственного университета. 2025. Т. 141. № 1. С. 135–140.

# ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ГЛУБОКОВОДНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

C. K. Тарасов

Новосибирский государственный университет

Развитие сдвиговой неустойчивости в гравитационных придонных течениях, приводящее к турбулентному перемешиванию и формированию слоев смешения, является важной составляющей в динамике гравитационных течений. Для моделирования сдвиговых течений с учетом турбулентного перемешивания используются математические модели, обобщающие классическую теорию мелкой воды. Модели трехслойного гидростатического течения с массообменом в приближении Буссинеска построены, исследованы и верифицированы в [1]. Метод построения длинноволновых моделей, основанный на слоистом представлении течения с массообменом между слоями, предложен в [2]. Равновесная модель слоя смешения предложена в работе [3]. Приведенный в [4] учет негидростатичности распределения давления во внешних слоях позволяет применить трехслойную модель для описания процессов перемешивания при обрушении уединенных внутренних волн.

В работе рассматривается упрощенный вариант моделей трехслойного сдвигового течения стратифицированной жидкости, предложенных для описания развития слоев смешения [2] и обрушения внутренних волн большой амплитуды [4]. Упрощение состоит в том, что верхний слой жидкости считается пассивным (бесконечно толстым и покоящимся). В рамках рассматриваемой модели для гидростатических течений определены понятия сверхкритического (докритического) течения и решена задача о формировании стационарного слоя смешения. Показано, что в зависимости от числа Фруда набегающего потока реализуется монотонный или осциллирующий слой смешения. Построены решения с сильным разрывом, моделирующие внутренние гидравлические прыжки. Учет негидростатичности распределения давления в нижнем слое позволяет получить стационарные решения в форме уединенных волн второй моды, примыкающих к заданному постоянному потоку. Проведены нестационарные расчеты, иллюстрирующие формирование и эволюцию уединенных волн большой амплитуды, индуцирующих сдвиг скорости в слоях и вовлечение жидкости в промежуточную прослойку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. *Слой смешения в двухслойных спутных течениях стратифицированной жидкости*. ПМТФ. 2022. Т. 63. № 6. С. 122–134.
2. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.
3. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. *Равновесная модель слоя смешения в сдвиговом течении стратифицированной жидкости*. ПМТФ. 2024. Т. 65. № 3. С. 43–55.
4. Chesnokov A., Shmakova N., Zhao B., Zhang T., Wang Z., Duan W. *Large-amplitude internal waves and turbulent mixing in three-layer flows under a rigid lid*. Phys. Fluids. 2024. V. 36. 072104.

# ПРОЕКЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

*H. B. Трачева<sup>1,2</sup>, С. А. Ухинов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

## 1. Вводная информация

В данной статье рассматриваются проекционные статистические оценки, используемые в методе Монте-Карло для решения задач переноса поляризованного излучения в рассеивающих и поглощающих средах. Такие задачи имеют важное значение при моделировании световых потоков в атмосфере, биологических тканях и других оптически активных средах, где учитываются сложные угловые и временные характеристики излучения.

Математическая модель основывается на стационарном интегродифференциальном векторном уравнении переноса, в которое включен вектор Стокса и фазовая матрица рассеяния [1]. Компоненты вектора Стокса —  $I, Q, U, V$ , — описывают интенсивность, степень линейной и круговой поляризации [2]. Вектор-функция  $\Phi(r, \omega) = (\Phi^{(1)}(r, \omega), \Phi^{(2)}(r, \omega), \Phi^{(3)}(r, \omega), \Phi^{(4)}(r, \omega))^T$  описывает распределение этих величин в пространстве и по направлениям. Здесь  $r$  — точка в пространстве  $R^3$ ,  $\omega$  — единичный вектор направлений. Учет поляризационных эффектов достигается введением фазовой матрицы рассеяния  $R(\omega', \omega, r)$ , состоящей из 16 элементов, каждый из которых может зависеть от углов и координат.

Рассмотрим стационарное интегродифференциальное векторное уравнение переноса поляризованного излучения (см., например, [1]):

$$\omega \nabla \Phi(r, \omega) + \sigma(r) \Phi(r, \omega) = \int_{\Omega} \sigma_s(r) P(\omega', \omega, r) \Phi(r, \omega') d\omega' + \mathbf{I}_0(r, \omega),$$

или в коротком операторном представлении  $\mathbf{L}\Phi + \sigma\Phi = \mathbf{S}\Phi + \mathbf{I}_0$ . Здесь  $\sigma_s$  — коэффициент рассеяния,  $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$  — коэффициент ослабления,  $\sigma_c$  — коэффициент поглощения;  $P(\omega', \omega, r) = L(\pi - i_2)R(\omega', \omega, r)L(-i_1)$ ,  $R(\omega', \omega, r)$  — фазовая матрица рассеяния,  $L(i)$  — матрица поворота, явный вид которой можно найти, например, в работе [1];  $i_1$  — угол между плоскостью рассеяния  $\omega', \omega$  и плоскостью  $\omega', s$ ;  $i_2$  — угол между плоскостью  $\omega', \omega$  и плоскостью  $\omega, s$ ;  $s$  — единичный вектор оси OZ локальной системы координат,  $\mathbf{I}_0$  — вектор-функция распределения источника излучения.

Матрица  $R$  нормируется следующим образом:  $\int_{-1}^1 r_{11}(\mu) d\mu = 1$ . Новое направление  $\omega$  после рассеяния фотона определяется зенитным углом  $\theta$  и азимутальным углом  $\varphi$ . Косинус  $\mu$  угла  $\theta$  моделируется по индикаторисе  $r_{11}$ . После выбора нового направления углы  $i_1$  и  $i_2$  можно найти, используя формулы сферической тригонометрии.

В предположении изотропности среды получаем наиболее простую “феноменологическую” марковскую модель переноса поляризованного излучения. Единственное различие со стандартной скалярной моделью состоит в том, что индикаториса рассеяния заменяется на матрицу рассеяния, которая преобразует вектор Стокса, ассоциированный с некоторым “фотоном”, в точке рассеяния [1] по формуле  $\Phi(r, \omega) = P(\omega', \omega, r) \cdot \Phi(r, \omega')$ . Формулы для пересчета вектора Стокса после рассеяния можно найти, например, в работе [1].

## 2. Параметры временной асимптотики поляризованного излучения

Одним из ключевых результатов данной работы является анализ временных характеристик интенсивности излучения. Для скалярной модели неполяризованного излучения известно [3], что временная асимптотика потока частиц описывается экспонентой  $\Phi^{(1)}(r, \omega, t) \sim C(r, \omega, t)e^{\lambda^* t}$  с параметром, являющимся ведущим характеристическим числом однородного стационарного уравнения переноса излучения

$$L\Phi^{(1)} + (\sigma + \lambda/v)\Phi^{(1)} = S\Phi^{(1)},$$

со стандартными граничными условиями [3]. Здесь  $v$  — скорость частиц.

В поляризованном случае аналогичный результат подтвержден численно и частично аналитически ([5, 6]). Показано, что в пространственно однородной среде (бесконечной или полубесконечной) независимо от типа поляризации  $\lambda^* = \lambda_\infty^* = -\sigma_c v$ , в ограниченных слоях наблюдается различие между скалярной и векторной асимптотикой  $\lambda_S^* \neq \lambda_V^*$ , т. е. де-поляризация потока частиц несколько запаздывает относительно выхода на асимптотику. Здесь  $\lambda_S^*$  и  $\lambda_V^*$  — значения параметра асимптотики для скалярного (без учета поляризации) и векторного (с учетом поляризации) случаев соответственно ([7, 8]).

Для более точного описания временной динамики предлагается разложение вектора интенсивности по базису, ортонормированному с весом  $e^{-\sigma_c vt}$  на  $(0, \infty)$ :

$$\Phi(r, \omega, t) = C(r, \omega)e^{-\sigma_c vt} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i \Psi_i(t), \quad \text{где} \quad \int_0^{\infty} e^{-\sigma_c vt} \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = \delta_{ij}.$$

Выбор полиномов Лагерра позволяет аналитически выразить коэффициенты разложения и использовать их в численном моделировании

$$\mathbf{a}_i = C^{-1}(r, \omega) \int_0^{\infty} \Phi(t) \Psi_i(t) dt.$$

## 3. Двумерная рандомизированная проекционная оценка метода Монте-Карло в пространстве угловых переменных

Понятие “сферической гармоники” хорошо известно среди специалистов и часто применяется при решении задач, связанных с процессом переноса излучения в плоско-параллельных средах [1, 9]. При данном подходе решение задачи ищется в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам, построенным на основе присоединенных функций Лежандра. В работе [10] для задачи переноса излучения с поверхности или на поверхность, когда излучение оценивается на поверхности в пределах телесного угла  $2\pi$ , был предложен новый класс функций, названный “полусферическими гармониками”, основанный на присоединенных полиномах Якоби с параметрами  $(0, 1)$ . Предложенная система “гармоник” ортогональна на полусфере с весом  $\mu = \cos(\theta)$ , где  $\theta$  — зенитный угол. Данный вид “гармоник” можно рассматривать как обобщение классических “сферических гармоник”. Затем в работе [11] была доказана полнота системы “полусферических гармоник” и выведен аналитический вид квадрата их нормы. Используя эти теоретические результаты, в работе [12] был построен двумерный рандомизированный проекционный метод и проведены расчеты двунаправленных угловых характеристик поляризованного излучения. Дальнейшего исследования свойств “полусферических гармоник” на основе полиномов Якоби с параметрами  $(0, 1)$  не проводилось.

Будем рассматривать перенос частиц через плоский слой  $0 < z < H$  от расположенного в точке  $(0, 0, -1)$  источника вида  $\Phi_0(\omega) = \delta(\omega - \omega_i)\Phi_0$ , где  $\omega_i$  — направление падения начального излучения. При этом выполняются следующие соотношения:  $\Phi_0 = (\Phi_0^{(1)}, \Phi_0^{(2)}, \Phi_0^{(3)}, \Phi_0^{(4)})^T$ ,  $\Phi_0^{(1)} \geq 0$ ,  $\Phi_0^{(1)2} \geq \Phi_0^{(2)2} + \Phi_0^{(3)2} + \Phi_0^{(4)2}$ . Пусть  $\omega_i$  — направление падающего излучения,  $\omega_r$  — направление отраженного излучения,  $\omega_t$  — направление прошедшего через слой излучения. Нас интересует, как распределены направления рассеянного слоем излучения.

На внешней границе  $z = H$  слоя плотность полного потока излучения (освещенность границы слоя) равна

$$P_H(\omega_i) = \int_{\Omega_+} \Phi^{(1)}(\omega_i, \omega_r) \mu_r d\omega_r = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu_r \Phi^{(1)}(\omega_i, \mu_r, \varphi_r) d\mu_r d\varphi_r,$$

где  $\mu_r = (\omega_r, n)$ ,  $\omega_r$  — зенитный угол,  $\varphi_r$  — азимутальный угол.

Угловая плотность  $\Phi_s^{(1)}(r, \mu, \varphi)$  распределения по  $\mu$  и  $\varphi$  потока излучения в точке  $r$  на границе слоя равна

$$\Phi_s^{(1)}(r, \omega_i, \mu_r, \varphi_r) = |\mu_r| \Phi^{(1)}(r, \omega, \mu_r, \varphi_r). \quad (1)$$

Угловое распределение интенсивности отраженного излучения (при интегрировании по полусфере направлений  $\Omega_+$  на верхней границе среды  $z = H$ )

$$IRR(\omega_i, \mu_r, \varphi_r) = \Phi_s^{(1)}(\omega_i, \mu_r, \varphi_r) / P_H(\omega_i), \quad \mu_r \in (0, 1), \quad \varphi_r \in (0, 2\pi), \quad (2)$$

или проходящего излучения (при интегрировании по полусфере направлений  $\Omega_-$  на нижней границе среды  $z = 0$ ) находится из соотношения

$$ITR(\omega_i, \mu_t, \varphi_t) = \Phi_s^{(1)}(\omega_i, \mu_t, \varphi_t) / P_H(\omega_i), \quad \mu_t \in (-1, 0), \quad \varphi_t \in (0, 2\pi). \quad (3)$$

Описанную функцию плотности можно рассматривать как двунаправленную функцию отражательной способности с учетом подповерхностного переноса поляризованного излучения (в англоязычной литературе — Bidirectional Scattering-Surface Reflectance Distribution Function). Для получения BSSRDF необходимо насчитать массив плотностей вида (2),(3) для некоторого набора начальных направлений  $\{\omega_i^k, k = 1, 2, \dots, K\}$ .

По аналогии с (1) рассмотрим вектор-функцию  $\Phi_s(h, \mu, \varphi)$  углового распределения по  $\mu$  и  $\varphi$  потока рассеянного излучения на поверхности  $z = h$ ,  $0 \leq h \leq H$  вида  $\Phi_s(h, \mu, \varphi) = |\mu| \Phi(h, \mu, \varphi)$ , где  $\mu = \omega_z$ ,  $\varphi$  — азимутальный угол, причем  $\mu \in (0, 1)$  соответствует выходящему вверх из слоя  $0 < z < h$  излучению, а  $\mu \in (0, -1)$  — рассеянному обратно излучению.

“Векторный” полный поток равен

$$\mathbf{P}_H = \int_{\Omega_+} \Phi(h, \omega) |\mu| d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\mu| \Phi(\mu, \varphi) d\mu d\varphi.$$

Таким образом, можно оценить не только угловые характеристики интенсивности поляризованного излучения  $\Phi^{(1)}$ , но и другие компоненты вектора Стокса  $\Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)}$ . Это позволяет оценить угловые распределения такой важной для исследователей характеристик частично поляризованного излучения как степень поляризации. В работе [12] для оценки

данных функционалов был построен метод Монте-Карло, основанный на ортогональном разложении функции  $\Phi(h, \mu, \varphi)$  по ортонормированному базису  $\{H_{i,j}(x, y), i = 0, \dots, \infty, j = -i, \dots, i\}$ , в  $\mathcal{L}_{2,\mu}(\Omega)$ , такому что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu H_{i,k}(\mu, \varphi) H_{j,l}(\mu, \varphi) d\mu d\varphi = \begin{cases} 1, & i = j, k = l \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В качестве базисных полиномов рассматривались преобразованные “полусферические гармоники” с заменой переменных  $x = 2\mu - 1$  и перенормировкой для сохранения ортогональности относительно новой переменной:

Коэффициенты полученного разложения

$$\Phi_s(\mu, \varphi) = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \mathbf{a}_{i,j} H_{i,j}(\mu, \varphi), \quad \text{где} \quad \mathbf{a}_{i,j} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi_s(\mu, \varphi) H_{i,j}(\mu, \varphi) d\mu d\varphi$$

находятся с помощью оценок метода Монте-Карло [12].

#### 4. Численные результаты

Пусть полупространство  $y > 0$  заполнено рассеивающим и поглощающим веществом, а источник излучения расположен в точке  $r_s = (0, -1, 0)$  и испускает фотоны вдоль единичного вектора нормали  $n_s = (0, 1, 0)$ . Для простоты рассмотрим  $v = 1$ . Алгоритм моделирования переноса поляризованного излучения, использованный в наших расчетах методом Монте-Карло, можно найти, например, в работе [13]. Вычисления проводились для  $N = 10^8$  траекторий.

Для задачи оценки временного распределения векторной интенсивности излучения на границе полупространства коэффициенты разложения в ряд и их стандартные отклонения приведены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты временного распределения интенсивности излучения  $\alpha_i$  и соответствующие стандартные отклонения  $\sigma_N$

$i$	$\sigma_c = 0.2$		$\sigma_c = 0.1$		$\sigma_c = 0.05$	
	$\alpha_i$	$\sigma_N, \%$	$\alpha_i$	$\sigma_N, \%$	$\alpha_i$	$\sigma_N, \%$
<b>Аэрозольное рассеяние</b>						
0	0.4472136	0.0000005	0.3162277	0.0000007	0.2236068	0.0000005
1	0.0294755	0.1402072	0.0482726	0.0547818	0.0602943	0.0284492
2	-0.0053623	0.7177656	0.0054198	0.4636213	0.0215079	0.0756294
3	-0.0074681	0.4921465	-0.0055536	0.4273886	0.0057120	0.2685246
4	-0.0053438	0.7476046	-0.0078197	0.2815259	-0.0015857	0.9053434
5	-0.0034303	1.7386488	-0.0073554	0.2684813	-0.0049757	0.2764703
<b>Молекулярное рассеяние</b>						
0	0.4472136	0.0000005	0.3162277	0.0000007	0.2236068	0.0000005
1	0.1038617	0.0335651	0.1190196	0.0185948	0.1141121	0.0121771
2	0.0294893	0.1119991	0.0610704	0.0351335	0.0757140	0.0185280
3	0.0018840	1.7184295	0.0320395	0.0638317	0.0534029	0.0253844
4	-0.0093916	0.3947262	0.0151790	0.1270447	0.0384428	0.0337756
5	-0.0137471	0.4277478	0.0047505	0.3720200	0.0277165	0.0445280

Первый коэффициент здесь представляет собой  $\sqrt{\sigma_c}$ , по построению метода. Можно заметить, что коэффициенты  $\alpha_i$  довольно быстро убывают с ростом номера  $i$ . Это означает, что для аппроксимации интенсивности излучения можно использовать относительно небольшое количество членов ряда.

Для пространственно-угловой задачи, описанной в разделе 3, коэффициенты соответствующего разложения приведены в таблице 2. Аналогично, можно заметить убывание коэффициентов, однако оно не монотонно, более того коэффициенты разложения знако-произвольны.

Таблица 2. Коэффициенты углового распределения интенсивности излучения  $a_i$

$i$	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$
<b>Молекулярное рассеяние, <math>45^\downarrow H=1</math></b>						
0	0.56418958					
1	-0.09666714	-0.05311955				
2	0.00671478	-0.00399171	0.2101993			
3	0.00511568	0.00187376	-0.00989916	0		
4	-0.00303621	-0.00068508	0.00530712	0	0	
5	0.00089704	0	-0.00301011	0	0	0
<b>Аэрозольное рассеяние, <math>45^\uparrow H=1</math></b>						
0	0.56418958					
1	-0.00474036	0.43962412				
2	-0.06920229	0.0461520	0.20712773			
3	-0.01868589	-0.01474585	0.03685193	0.09415937		
4	-0.00329801	-0.02239394	0.00320044	0.02376149	0.04383586	
5	0.00533368	-0.06208675	-0.01221249	0.04695470	0.01408333	0

## 5. Заключение

Рассматриваются задачи распространения излучения из точечного источника в полу-пространстве либо слое, заполненном рассеивающей и поглощающей средой. Моделируется распространение  $10^8$  траекторий, анализируются угловые и временные распределения на границе среды. Результаты представлены в виде коэффициентов разложения.

Для оценки временных характеристик поляризованного излучения в рассеивающей среде используется базис на основе полиномов Лагерра, что позволяет получить аппроксимацию на всей временной прямой, включая доасимптотические времена.

Для оценки пространственно-угловых характеристик используются преобразованные “полусферические гармоники”, обладающие свойствами ортогональности на полусфере с весом  $\mu$ . Доказана полнота данной системы, приведен аналитический вид ее элементов и нормы. Такие “гармоники” применяются для оценки плотностей отраженного и прошедшего через слой излучения, что позволяет восстановить функцию двунаправленной отражательной способности (BSSRDF).

*Работа выполнена в рамках госзадания ИВМиМГ СО РАН (проект FWNM-2025-0002).*

## ЛИТЕРАТУРА

- Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A. [et al.]. *The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- Chandrasekhar S. *Radiative Transfer*. Dover Publications, New York, 1960.
- Davison B. *Neutron Transport Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1957.
- Суетин П. К. *Классические ортогональные многочлены*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- Mikhailov G. A., Tracheva N. V., Ukhinov S. A. *A study of the asymptotic behavior of the intensity of a polarized radiation by the Monte Carlo method*. Doklady mathematics. 2007. V. 75. № 3. P. 431–435.

6. Mikhailov G. A., Tracheva N. V., Ukhinov S. A. *Time asymptotics of the intensity of polarized radiation*. Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling. 2007. V. 22. № 5. P. 487–503.
7. Mikhailov G. A., Tracheva N. V., Ukhinov S. A. *Monte Carlo study of time asymptotics of the polarized radiation intnsity*. Computational mathematics and mathematical physics. 2007. V. 47. № 7. P. 1213–1223.
8. Mikhailov G. A., Tracheva N. V., Ukhinov S. A. *The Monte Carlo method and analytic averaging for estimation of polarized radiation asymptotics*. Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling. 2008. V. 23. № 3. P. 239–250.
9. Сушкевич Т. А. *Математические модели переноса излучения*. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005.
10. Machotkin O. A. *Analysis of radiative transfer between surfaces by hemispherical harmonics*. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1996. V. 56, № 6, P. 869–879.
11. Смелов В. В. *О полноте системы полусферических гармоник*. Сиб.журн. вычисл. матем. 1998. Т. 1. № 4. С. 391–395.
12. Tracheva N. V., Ukhinov S. A. *On the evaluation of spatial-angular distributions of polarization characteristics of scattered radiation*. Statistical Papers. 2018. V. 59. № 4. P. 1541–1557.
13. Mikhailov G. A., Tracheva N. V., Ukhinov S. A. *Monte Carlo estimate of backscattering noise asymptotics parameters with allowance for polarization*. Atmospheric and oceanic optics. 2011. V. 24. № 2. P. 109–118.

# МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ ФУЛЛЕРЕНОВ В ГАЗОВОЙ СМЕСИ

*A. C. Челнокова*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Наноструктуры на основе углерода, такие как фуллерены, привлекли широкое внимание исследователей по всему миру благодаря своим уникальным свойствам. В наномасштабе одним из устоявшихся подходов к изучению пористых структур является молекулярно-динамическое (МД) моделирование. Оно особенно полезно для количественной оценки основных взаимодействий и динамических процессов. Данное исследование посвящено численному моделированию динамики фуллерен-газовой смеси в выделенном объеме.

В рамках подхода атом-атомных взаимодействий и с использованием теории сферических потенциалов рассматривается состояние гелий-ксенон и гелий-азот фуллереновой смеси в однородных условиях.

Пусть в некотором представительном объеме  $V$  газовой среды находятся  $N$  частиц газа одной компоненты,  $M - N$  частиц второй компоненты и фуллерены, состоящие из  $L - M$  атомов углерода. Тогда уравнения движения частиц первой компоненты будут иметь вид

$$m_1 \frac{dv_i^l}{dt} = - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \frac{\partial U_{11}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l} - \sum_{k=N+1}^M \frac{\partial U_{12}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l} - \sum_{k=M+1}^L \frac{\partial U_{13}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l}, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь  $v_i^l$  – проекция  $i$ -й частицы первой компоненты газа на  $l$ -ю ось координат;  $m_1$  – масса частицы газа первой компоненты;  $U_{11}$  – потенциал парных взаимодействий для частиц первой компоненты газа;  $U_{12}$  – потенциал смешанных взаимодействий частиц газа первой и второй компонент;  $U_{13}$  – потенциал смешанных взаимодействий частиц газа первой компоненты с атомами углерода в фуллеренах;  $x_i^l$  – декартовы координаты  $k$ -й частицы;  $\rho = \sqrt{\sum_{l=1}^3 (x_i^l - x_k^l)^2}$  – расстояние между  $i$ -й и  $k$ -й взаимодействующими частицами.

Аналогично можно записать уравнения движения частиц второй компоненты газа.

Каждый из упомянутых потенциалов может иметь свою функциональную зависимость от расстояния между силовыми центрами. Однако в представленных здесь расчетах используется форма потенциала Леннарда – Джонса для всех парных взаимодействий, а конкретные пары отличаются лишь параметрами выбранного потенциала.

Поскольку все потенциалы зависят от расстояний между силовыми центрами (атомами и простыми молекулами газовой фазы), а интегрирование уравнений (1) дает лишь скорости этих частиц, то для замыкания уравнений движения газовых частиц необходимо выписать следующие кинематические соотношения:

$$\frac{dx_i^l}{dt} = dv_i^l, \quad i = 1, \dots, M, \quad l = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Фуллерен является крупной углеродной молекулой, которая перемещается поступательно вместе со своим центром масс и вращается вокруг него. Центр масс движется как материальная точка, имеющая массу фуллерена и находящаяся под действием главного

вектора внешних по отношению к рассматриваемой молекуле сил. В проекциях на оси абсолютного базиса уравнения движения центра масс первого фуллерена имеют вид

$$m_f \frac{dv_c^l}{dt} = - \sum_{i=K+1}^L \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial U_{13}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l} + \sum_{k=N+1}^M \frac{\partial U_{23}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l} + \sum_{k=M+1}^K \frac{\partial U_{33}(\rho_{ik})}{\partial x_k^l} \right). \quad (3)$$

Здесь  $m_f$  – масса фуллерена;  $v_c^l$  – проекции скорости центра масс фуллерена.

Уравнения (3) также замыкаются кинематическими соотношениями:

$$\frac{dx_c^l}{dt} = v_c^l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Следует обратить внимание на то, что фуллерен достаточно крупная молекула и кинетическая энергия его вращений может превосходить кинетическую энергию его же трансляционных движений. Поэтому следует записать уравнения вращательного движения фуллерена:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 A_k^l \omega_{x^k} \right) = L_{x^l}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь  $A_k^l$  – компоненты тензора инерции, которые в процессе численных расчетов вычисляются для каждого  $k$ -го силового центра на каждом временном шаге в абсолютной системе координат;  $\omega_{x^k}$  – компоненты вектора мгновенной угловой скорости;  $L_{x^l}$  – проекции моментов сил, действующих на фуллерен.

Следуя теореме о сложении скоростей, для каждого атома фуллерена можем записать:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k, \quad k = M - N, \dots, N.$$

Тогда координаты атомов углерода в фуллеренах можно найти из кинематических соотношений:

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \mathbf{v}_k, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}_k$  – радиус вектор положения  $k$ -го атома углерода в абсолютном базисе,  $\mathbf{v}_k$  – его вектор скорости.

Уравнения (1)–(6) интегрируются при следующих начальных условиях:

$$t = 0, \quad x_k^l = x_k^{0l}, \quad v_k^l = v_k^{0l}, \quad x_c^l = x_c^{0l}, \quad v_c^l = v_c^{0l}, \quad k = 1, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь индексом ноль вверху обозначены начальные значения координат и скоростей атомов и молекул рассматриваемой системы перемещающихся частиц.

В результате расчетов находятся мгновенные значения скоростей атомов газовых частиц и центров масс крупных молекул (фуллеренов), а также проекции угловых скоростей фуллеренов. По этим данным можно определить трансляционную энергию каждой газовой частицы и трансляционную и вращательную энергии фуллеренов.

Расчеты состояния смеси газовых составляющих с различной молекулярной массой показали, что равновесие в системах частиц определенного сорта устанавливается за различное время. Для гелия и азота оно достигается за 1 нс, для ксенона – за 10 нс.

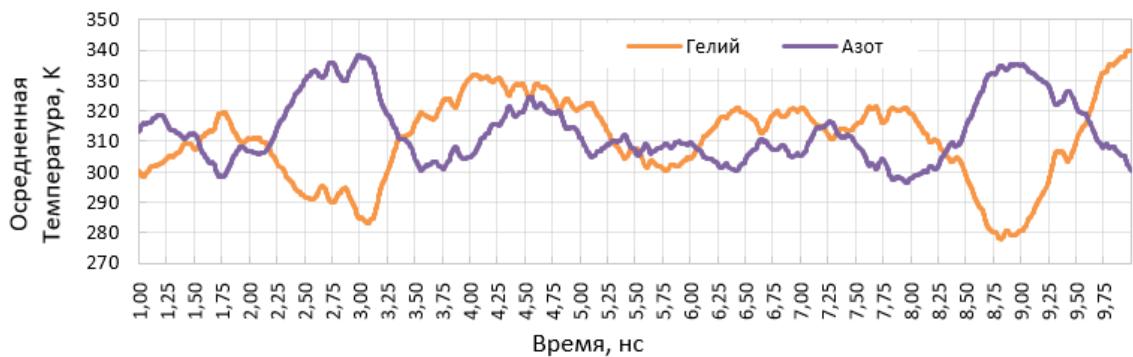


Рис. 1. Осредненные по ансамблю частиц газа и по интервалу в 1 нс значения энергии для атомов гелия и молекул азота за время расчета 10 нс

Используются три интервала осреднения: 1, 10 и 30 нс; расчеты показали, что ни один из них не обеспечивает равенство необходимых энергий в отношении фракции фуллеренов. Энергия вращения фуллеренов существенно отличается от энергии их трансляционных движений. Каждая из этих характеристик испытывает долгопериодические возмущения. При этом их среднеарифметическая величина приближается к энергии, отвечающей заданной температуре системы лишь на интервале осреднения, существенно превышающем 30 нс.



Рис. 2. Мгновенные значения средней по ансамблю из 8 фуллеренов  $C_{60}$  энергии трансляционного и вращательного движения за время расчета 10 нс

*Работа поддержанна Региональным научно-образовательным математическим центром Томского государственного университета, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1728/2).*

# ОЦЕНКИ ЁМКОСТЕЙ ПОДМОЖЕСТВ ДЕРЕВЬЕВ

Г. А. Юдин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Лаборатория «Вероятностные методы в анализе», Санкт-Петербург

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

Идея использования дискретных моделей для работы с энергиями и потенциалами, введенная в начале девяностых годов Ю. Пересом и Р. Пемантлом (см. [1, 2]) и затем развитая Н. Аркоцци и др. (см. [3]), оказалась очень полезной даже в случае классических потенциалов Бесселя и Рисса. В частности, это мощный инструмент для доказательства различных теорем и неравенств о вложении, причем удивительно большое число таких утверждений можно интерпретировать на дискретном языке, что значительно облегчает их глубокий анализ (например, можно переформулировать описание мер Карлесона для различных пространств – см. [4]).

В докладе будет рассказано об обобщении известного результата о сравнимости «непрерывной» бесселевской емкости на единичном квадрате и дискретной емкости на дереве (см. [3]) на мультипараметрический случай емкостей на квадрате и полидереве. Также будет рассказано о соответствующей мультипараметрической версии неравенства Макенхаупта – Уидена – Вольффа, полученной при доказательстве основного результата.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта (Соглашение № 075-15-2025-013).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pemantle R., Peres Y. «*Galton-Watson trees with the same mean have the same polar sets*». Ann. Probab. 1995. № 23. P. 1102–1124.
2. Lyons R., Peres Y. «*Probability on trees and networks*». Cambridge. 2016. 716 p.
3. Arcozzi N., Rochberg R., Sawyer E. T., Wick B. D. *Potential theory on trees, graphs and Ahlfors-regular metric spaces*. Potential Anal. 2014. V. 41. P. 317–366.
4. Arcozzi N., Mozolyako P., Perfekt K.-L., Sarfatti G. *Bi-Parameter Potential Theory and Carleson Measures for the Dirichlet Space on the Bidisc*. Discrete Analysis. December 2023.

# СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

## РЕШЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРОБЛЕМА ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ

*Д. Е. Афанасьев<sup>1</sup>, М. О. Катанаев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Московский авиационный институт

<sup>2</sup>Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

### 1. Введение

Точные решения уравнений Эйнштейна всегда привлекали большое внимание математиков и физиков. Хотя их известно довольно много [1, 2], это направление исследований остается одним из самых востребованных.

Недавно найдено новое точное решение (решение Лиувилля) в общей теории относительности со скалярным полем с экспоненциальным потенциалом [3]. При этом было сделано два предположения: 1) метрика имеет лиувиллевский вид, т. е. является конформно плоской, а конформный множитель равен сумме четырех произвольных функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, и 2) скалярное поле зависит от координат только через конформный множитель. В этих предположениях найдено общее решение уравнений Эйнштейна, которое оказалось удивительно простым.

Полученное решение описывает, в частности, голую сингулярность и представляет интерес в космологии. Его можно преобразовать к виду метрики Фридмана только внутри светового конуса с вершиной в начале глобальной системы координат, где оно описывает ускоренное расширение однородной и изотропной Вселенной с пространственными сечениями постоянной отрицательной кривизны (открытая Вселенная). Масштабный множитель обращается в ноль на световом конусе, который является геодезически неполным, а тензор кривизны не имеет никаких особенностей. Таким образом, решение Лиувилля является примером гладкого продолжения космологических решений через ноль масштабного множителя.

Метрика Лиувилля допускает полное разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби для геодезических. Это означает, что уравнения геодезических имеют четыре независимых закона сохранения, находящихся в инволюции. Уравнения геодезических проинтегрированы в явном виде. Их анализ показал, что решения является глобальными: каждая геодезическая либо продолжается до бесконечного значения канонического параметра, либо при конечном значении попадает в сингулярную точку.

### 2. Обозначения и решение

Рассмотрим четырехмерное пространство-время (гладкое многообразие)  $\mathbb{M}$  с локальной системой координат  $x = (x^\alpha)$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . Допустим, что задана метрика Лиувилля

$$g_{\alpha\beta} := \Phi(x)\eta_{\alpha\beta}, \quad \eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (1)$$

где конформный множитель является суммой четырех достаточно гладких функций от одного аргумента

$$\Phi(x) := \phi_0(x^0) + \phi_1(x^1) + \phi_2(x^2) + \phi_3(x^3), \quad \Phi \neq 0.$$

Это – метрика Лиувилля [4], хорошо известная в механике, потому что допускает полное разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби для геодезических при произвольных функциях. При некоторых функциях  $\phi$  метрика (1) обладает симметрией, но в общем случае векторные поля Киллинга отсутствуют. Более того, переменные делятся также в волновом уравнении, уравнениях Шрёдингера и Дирака (с небольшими поправками).

Метрика Лиувилля определяет символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} := \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\delta} + \partial_{\beta}g_{\alpha\delta} - \partial_{\delta}g_{\alpha\beta})g^{\delta\gamma} = \frac{1}{2\Phi}(\phi'_{\alpha}\delta_{\beta}^{\gamma} + \phi'_{\beta}\delta_{\alpha}^{\gamma} - \phi'^{\gamma}\eta_{\alpha\beta}).$$

Здесь и далее подъем и опускание индексов производится с помощью метрики Лоренца  $\eta_{\alpha\beta}$ , а штрих обозначает производную по соответствующему аргументу. Кривизна, тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} &:= \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon}\Gamma_{\beta\epsilon}^{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon}\Gamma_{\alpha\epsilon}^{\delta} = \frac{1}{2\Phi}(\Phi''_{\alpha\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} - \Phi''_{\beta\gamma}\delta_{\alpha}^{\delta} - \Phi''^{\delta}\eta_{\beta\gamma} + \Phi''^{\delta}\eta_{\alpha\gamma}) + \\ &+ \frac{3}{4\Phi^2}(-\phi'_{\alpha}\phi'_{\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} + \phi'_{\beta}\phi'_{\gamma}\delta_{\alpha}^{\delta} + \phi'_{\alpha}\phi'^{\delta}\eta_{\beta\gamma} - \phi'_{\beta}\phi'^{\delta}\eta_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{4\Phi^2}\phi'_{\epsilon}\phi'^{\epsilon}(\eta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} - \eta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha}^{\delta}), \\ R_{\alpha\gamma} &:= R_{\alpha\beta\gamma}^{\beta} = \frac{1}{2\Phi}(2\Phi''_{\alpha\gamma} + \Phi''^{\epsilon}\eta_{\alpha\gamma}) - \frac{3}{2\Phi^2}\phi'_{\alpha}\phi'_{\gamma}, \\ R &:= g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\gamma} = \frac{3}{\Phi^2}\Phi''^{\alpha} - \frac{3}{2\Phi^3}\phi'_{\alpha}\phi'^{\alpha}. \end{aligned}$$

Рассмотрим действие

$$S := \int dx \sqrt{|g|} \left[ R - 2\Lambda + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi\partial_{\beta}\varphi - V(\varphi) \right], \quad g := \det g_{\alpha\beta},$$

где потенциал имеет вид

$$V = -2\Lambda + 12C^2\Lambda^{\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi}, \quad C = \text{const.}$$

Вариация этого действия по компонентам метрики  $g_{\alpha\beta}$  и скалярному полю  $\varphi(x)$  дает уравнения Эйлера–Лагранжа. Для метрики Лиувилля (1) они имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\varphi\partial_{\beta}\varphi + \frac{1}{2}\Phi\eta_{\alpha\beta}(V + 2\Lambda), \\ \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}^2\varphi + \frac{1}{\Phi}\phi'^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi + \Phi V' &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что скалярное поле зависит от координат только через конформный множитель  $\varphi(x) := \Psi(\Phi(x))$ , где  $\Psi(\Phi)$  – произвольная функция. Опуская выкладки [5], выпишем сразу общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа при сделанных предположениях с точностью до сдвига и растяжки координат:

$$\Phi = s + c,$$

где  $c \in \mathbb{R}$  – постоянная интегрирования и

$$s := \eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}.$$

Таким образом, метрика Лиувилля в рассматриваемом случае принимает вид

$$g_{\alpha\beta} = (s + c)\eta_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Она определена в области  $s + c > 0$ . Очевидно, что эта метрика инвариантна относительно глобальных лоренцевых вращений вокруг начала координат  $(x^\alpha)$ . Следовательно, имеется шесть векторов Киллинга, существование которых не предполагалось изначально. Это явление было названо “спонтанным появлением симметрии” в статьях [6, 7]. Метрика (2) также является сферически симметричной, потому что группа вращений является подгруппой группы Лоренца.

Скалярное поле расходится при  $s \rightarrow -c$  и  $s \rightarrow \pm\infty$ . Оно постоянно на двуполостном,  $s = \text{const} > 0$ , и однополостном гиперболоиде,  $-c < s = \text{const} < 0$ . Оно также постоянно на световом конусе при  $s = 0$ .

Уравнение Гамильтона–Якоби для геодезических для метрики (2) допускает полное разделение переменных и принадлежит классу  $[0, 4, 0]_2$  по классификации, предложенной в [8,9]. Уравнения геодезических линий имеют четыре квадратичных по импульсам первых интегралов, которые находятся в инволюции.

Простейшие инварианты тензора кривизны равны

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12}{\Phi^4} \left( 9 - 6\frac{c}{\Phi} + 5\frac{c^2}{\Phi^2} \right), \quad R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \frac{36}{\Phi^4} \left( 3 + \frac{c^2}{\Phi^2} \right), \quad R = \frac{6}{\Phi^2} \left( 3 + \frac{c}{\Phi} \right).$$

Видно, что кривизна имеет особенность только при  $\Phi = 0$ .

На рис. 1 показана область определения метрики Лиувилля на плоскости  $x^0, x^1$  для  $\Phi > 0$  и  $c > 0$ . Эту картинку нужно вращать (в двух дополнительных пространственных измерениях вокруг оси  $x^0$ ). Поэтому запрещенной областью (показана серым цветом) является однополостный гиперболоид, границей которого является голая сингулярность. Пробные частицы из бесконечности прошлого могут либо упасть на голую сингулярность при конечном собственном времени, либо пройти сквозь горловину и жить вечно. Пространственные бесконечности для этого решения отсутствуют.

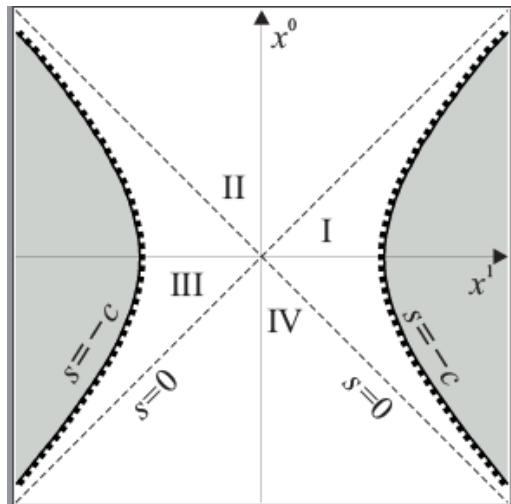


Рис. 1. Область определения метрики Лиувилля для голой сингулярности  $\Phi > 0$ ,  $c > 0$ . Запрещенная область показана серым цветом

### 3. Метрика Лиувилля в форме Фридмана

Введем псевдосферические координаты в квадранте II, который вращается в двух дополнительных пространственных измерениях:

$$\begin{aligned}x^0 &:= t \cosh \chi, & x^1 &:= t \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi, \\x^2 &:= t \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi, & x^3 &:= t \sinh \chi \cos \theta,\end{aligned}$$

где  $t > 0$ ,  $\chi \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Затем введем новую временную координату, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{t^2 + c}, \quad t^2 + c > 0.$$

Тогда метрика Лиувилля примет вид метрики Фридмана

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) d\Omega,$$

где масштабный множитель принимает вид

$$a(\tau) = t\sqrt{t^2 + c}.$$

Его производные по космическому времени равны

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{2t^2 + c}{t^2 + c}, \quad \frac{d^2a}{d\tau^2} = \frac{2ct}{(t^2 + c)^{5/2}}.$$

Видим, что однородная и изотропная Вселенная в квадранте II расширяется с ускорением при  $c > 0$ .

В квадрантах I и III метрику Лиувилля невозможно записать в виде метрики Фридмана, потому что гиперповерхности  $\Phi = \text{const}$  времениподобны. В квадранте IV Вселенная расширяется, но с замедлением.

Таким образом, расширение Вселенной с ускорением происходит только в квадранте II для голой сингулярности при  $\Phi > 0$  и  $c > 0$  внутри светового конуса. Однородная и изотропная Вселенная появляется и начинает расширяться с ускорением на “горизонте”  $t = 0$  (световой конус будущего), где масштабный множитель равен нулю. Идя вспять по времени, однородность и изотропия Вселенной пропадает, и наблюдатель оказывается в горловине голой сингулярности. Он видит сигналы, исходящие из голой сингулярности  $s = -c$  и дыру в центре. Времениподобные геодезические продолжаются сквозь эту дыру до бесконечного значения канонического параметра.

### 4. Заключение

Найдено новое однопараметрическое семейство глобальных решений уравнений Эйнштейна со скалярным полем. Решения являются асимптотически плоскими в пространственных и временных бесконечностях. Они инвариантны относительно глобальных лоренцевых вращений. Решение, описывающее голую сингулярность, представляет большой интерес для космологии, поскольку описывает гладкое продолжение решения Фридмана через ноль масштабного множителя.

В качестве исходной подстановки выбрана метрика Лиувилля, зависящая от четырех произвольных функций, каждая от одной координаты. В общем случае метрика не имеет ни одного вектора Киллинга, но допускает полное разделение переменных в уравнении

Гамильтона – Якоби для геодезических. Все геодезические линии найдены в явном виде. Доказано, что найденные решения являются глобальными: каждая геодезическая линия либо продолжается до бесконечного значения канонического параметра, либо при конечном значении попадает в сингулярную точку.

Решение, описывающее голую сингулярность, представляет особый интерес в космологии. Оно может быть приведено к метрике Фридмана только внутри светового конуса, причем ноль масштабного множителя соответствует всему световому конусу, а не точке. Внутри светового конуса метрика описывает однородную и изотропную открытую Вселенную, которая расширяется с ускорением. Анализ геодезических линий показывает, что голая сингулярность, расположенная вне светового конуса, притягивает материю внутри светового конуса, тем самым являясь причиной ускоренного расширения вселенной. В этом сценарии понятие “Большого взрыва” отсутствует.

Наивное предположение, что решение Лиувилля можно было бы получить в рамках начальной подстановки метрики Фридмана в уравнения Эйнштейна, является неверным. Если искать решения в форме Фридмана, то получится только локальное решение внутри светового конуса, которое является геодезически неполным и требует продолжения. Задача о продолжении решения вдоль геодезических является сложной, и конструктивный метод продолжения в настоящее время отсутствует. Использование метрики Лиувилля в качестве начальной подстановки сразу привело к глобальному решению.

Большинство точных решений уравнений Эйнштейна получено в предположении о наличии симметрии у метрики, что существенно ограничивает количество независимых компонент. Данное предположение заменили требованием полного разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби для экстремалей. Это также существенно уменьшает число независимых компонент и, что более важно, сводит систему уравнений Эйнштейна к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, потому что компоненты сепарабельной метрики зависят только от функций одного аргумента. Это требование показало свою эффективность на примере метрики Лиувилля. Недавно было доказано, что существует только десять классов сепарабельных метрик в четырех измерениях [8, 9], при этом метрика Лиувилля принадлежит одному из этих классов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stephani Y., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., Hertl E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
2. Griffiths J. B., Podolský J. *Exact Space-times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
3. Afanasev D. E., Katanaev M. O. *Liouville solution in General Relativity with a scalar field*. Phys. Lett. B. 2025. V. 864:139439.
4. Liouville L. *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels*. J. Math. Pures Appl. 1849. V. 14. P. 257–299.
5. Afanasev D. E., Katanaev M. O. 2024. *Geodesics and Global Properties of the Liouville Solution in General Relativity with a Scalar Field*. 2024. arXiv:2410.03799.
6. Afanasev D. E., Katanaev M. O. *Global properties of warped solutions in general relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant*. Phys. Rev. D. 2019. V. 100(2):024052.

7. Afanasev D. E., Katanaev M. O. *Global properties of warped solutions in general relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. II.* Phys. Rev. D. 2020. V. 101(12):124025.
8. Katanaev M. O. *Complete separation of variables in the geodesic Hamilton-Jacobi equation.* ArXiv:2305.02222 [gr-qc], 2023.
9. Katanaev M. O. *Complete separation of variables in the geodesic Hamilton-Jacobi equation in four dimensions.* Phys. Scr. 2023. V. 98(10):104001.

# О РАВНОМЕРНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И СДВИГОМ В СВОБОДНОМ ЧЛЕНЕ

*Д. И. Борисов<sup>1,2</sup>, Д. М. Поляков<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup>Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа

<sup>2</sup>Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

<sup>3</sup>Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

В работе рассматривается нелокальный оператор Шрёдингера  $\mathcal{H}(a)$  в  $L_2(0, 2\pi)$  с дифференциальным выражением

$$(\hat{\mathcal{H}}(a)u)(x) := -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + V(x)u(x-a), \quad a \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

периодическими краевыми условиями

$$u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi). \quad (2)$$

Здесь  $u(x-a)$  понимается в смысле  $2\pi$ -периодического продолжения функции  $u$  на всю вещественную ось, а  $V = V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , —  $2\pi$ -периодическая комплекснозначная функция со свойствами

$$V \in W_2^3(0, 2\pi), \quad V^{(j)}(0) = V^{(j)}(2\pi), \quad j = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Предполагается, что функция  $V$  не равна тождественно нулю. Через  $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$  обозначаем норму ограниченного оператора, действующего из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ . Наш первый результат следующий.

**Теорема 1.** *Оператор  $\mathcal{H}(a)$  является  $t$ -секториальным для всех  $a \in [0, 2\pi]$ . Существует фиксированное  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , не зависящее от  $a$  такое, что полуплоскость  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leqslant \lambda_0\}$  вложена в резольвентное множество оператора  $\mathcal{H}(a)$  для всех  $a \in [0, 2\pi]$ . Для каждого  $\lambda$  в этой полуплоскости резольвента  $(\mathcal{H}(a) - \lambda)^{-1}$  непрерывна по  $a \in [0, 2\pi]$  и для всех  $a, b \in [0, 2\pi]$ ,  $a \leqslant b$ , выполнена оценка*

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{H}(a) - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}(b) - \lambda)^{-1}\|_{L_2(0, 2\pi) \rightarrow W_2^3(0, 2\pi)} &\leq C(d(a, b))^{\frac{1}{2}}, \\ d(a, b) &:= \min \{b - a, 2\pi - b + a\}, \end{aligned} \quad (4)$$

с некоторой константой  $C$ , не зависящей от  $a$  и  $b$ . Для каждого  $a \in [0, 2\pi]$  спектр оператора  $\mathcal{H}(a)$  — из счетного числа собственных значений, которые накапливаются только к бесконечности.

Собственные значения оператора  $\mathcal{H}(a)$  упорядочены в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом алгебраических кратностей.

**Теорема 2.** *Собственные значения оператора  $\mathcal{H}(a)$  — непрерывные по  $a \in [0, 2\pi]$  функции, и для каждого собственного значения выполнено  $\lambda(0) = \lambda(2\pi)$ . Все собственные значения расположены в полуучастке*

$$\Pi := \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geqslant -\alpha_0, |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \alpha_0\}, \quad \alpha_0 := \max_{[0, 2\pi]} |V|. \quad (5)$$

Существуют фиксированные  $R_0 > 0$  и  $n_0 > 0$ , не зависящие от  $a \in [0, 2\pi]$ , такие, что совокупная алгебраическая кратность собственных значений, удовлетворяющих  $\operatorname{Re} \lambda \leq R_0$ , ограничена равномерно по  $a \in [0, 2\pi]$ , а во множестве  $\Pi \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > R_0\}$  все собственные значения оператора  $\mathcal{H}(a)$ , обозначаемые через  $\lambda_n^\pm(a)$ ,  $n \geq n_0$ , обладают следующими свойствами. Совокупная алгебраическая кратность собственных значений  $\lambda_n^+(a)$  и  $\lambda_n^-(a)$  в точности равна двум, и верны представления

$$\begin{aligned}\lambda_n^\pm(a) &= n^2 + \Lambda_{n,0}^\pm(a) + \frac{\Lambda_{n,1}^\pm(a)}{n} + \frac{\Lambda_{n,2}^\pm(a)}{n^2} + \frac{\eta_n^\pm(a)}{n^3}, \\ \Lambda_{n,0}^\pm(a) &:= V_0 e^{\mp \text{i}na}, \quad \Lambda_{n,1}^\pm(a) := \mp \frac{e^{\mp 2\text{i}na}}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{V_p V_{-p}}{p} e^{-\text{i}pa}, \\ \Lambda_{n,1}^\pm(a) &:= \frac{1}{4} \left( e^{\mp 3\text{i}na} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{-p\}} \frac{V_p V_q V_{-p-q}}{p(p+q)} e^{-\text{i}(q+2p)a} + \right. \\ &\quad \left. + V_0 e^{\mp 3\text{i}na} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{V_p V_{-p}}{p^2} e^{-\text{i}pa} - e^{\mp 2\text{i}na} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} V_p V_{-p} e^{-\text{i}pa} \right),\end{aligned}$$

где  $\eta_n^\pm(a)$  и  $\Lambda_{n,j}^\pm(a)$  ограничены равномерно по  $n$  и  $a$ .

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства просвещения РФ (Соглашение № 073-03-2025-039 от 16.01.2025).

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Д. А. Закора*

*Физико-технический институт ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», Симферополь*

Пусть  $H, H_l$  ( $l = 1, 2$ ) — гильбертовы пространства,  $\mathcal{L}(H, H_l)$  — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $H$  в  $H_l$ ,  $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$ . Пусть  $G_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ ,  $A, G_2, C_l$  — плотно определенные замкнутые операторы:  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ ,  $G_2 : \mathcal{D}(G_2) \subset H_2 \rightarrow H_2$ ,  $C_l : \mathcal{D}(C_l) \subset H \rightarrow H_l$ , причем  $A, G_l$  — самосопряженные положительно определенные операторы. Будем считать, что введенные операторы удовлетворяют следующей гипотезе:

*A)* оператор-функции  $C_l^* \exp(-tG_l)C_l A^{-1}$  ( $l = 1, 2$ ) сильно непрерывны на  $\mathbb{R}_+$ .

Здесь и далее  $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$ . Из гипотезы *A*) при  $t = 0$  и полярного разложения замкнутого оператора следует, что  $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C_l)$ . Обозначим  $\omega_{G_l} := \inf\{\lambda \in \sigma(G_l)\}$  — нижнюю грань оператора  $G_l$ ,  $\sigma(G_l)$  — спектр оператора  $G_l$ , и предположим, что выполнена вторая гипотеза:

*B)* существуют  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_2 > 0$  такие, что

$$\sum_{l=1}^2 \frac{1}{\omega_{G_l}} \|C_l u\|^2 \leq a_1 \|A^{1/2} u\|^2, \quad \|C_1 u\|^2 \geq a_2 \|A^{1/2} u\|^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_1).$$

Отметим, что гипотеза *B*) призвана обеспечить положительную определенность некоторого оператора и в конкретной ситуации может быть ослаблена.

В гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим задачу Коши для неполного интегродифференциального операторного уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -Au + \int_0^t \sum_{l=1}^2 C_l^* \exp(-G_l(t-s)) C_l u(s) ds + f(t), \\ u(0) &= u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{aligned} \tag{1}$$

**Определение.** Решением задачи Коши (1) назовем функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$  такую, что 1)  $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ ,  $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$  для любого  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $Au, A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ , 2) в (1) выполнено уравнение для любого  $t \in \mathbb{R}_+$  и начальные условия.

**Теорема. 1.** Если  $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ ,  $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ , то задача Коши (1) имеет единственное решение.

2. Будем считать дополнительно, что

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Если  $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$  ( $k = \overline{0, n}$ ), то существуют константы  $\omega > 0$ ,  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$  такие, что для решения задачи Коши (1) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left( \left\| A^{1/2} \left( u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ & \leqslant M_1 e^{-\omega t} \left( \|A^{1/2} u^0\|_H^2 + \|u^1\|_H^2 + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H^2 \right) + M_2 \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left( \|g(s)\|_H + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds, \\ & M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^2 (C_l A^{-1/2})^* (G_l - \lambda I)^{-1} (C_l A^{-1/2}). \end{aligned}$$

3. В частности,

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2} \left( u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \\ & + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

если  $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$ ,  $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$  ( $k = \overline{0, n}$ ) при  $t \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим пример реализации операторного ядра в интегральном слагаемом из (1). Пусть  $H_{k,l}$  ( $k = \overline{1, m}$ ,  $l = 1, 2$ ) — гильбертовы пространства. Введем  $m$  гильбертовых пространств  $l_2(H_{k,l})$  со скалярными произведениями и нормами:

$$\begin{aligned} l_2(H_{k,l}) &:= \left\{ X_k = \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} : x_p \in H_{k,l}, \sum_{p \in \mathbb{N}} \|x_p\|_{H_{k,l}}^2 < +\infty \right\}, \\ (X_k, Y_k)_{l_2(H_{k,l})} &:= \sum_{p \in \mathbb{N}} (x_p, y_p)_{H_{k,l}}, \quad \|X_k\|_{l_2(H_{k,l})}^2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} \|x_p\|_{H_{k,l}}^2 \quad (k = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Определим гильбертово пространство  $H_l$  со скалярным произведением и нормой:

$$\begin{aligned} H_l &:= \bigoplus_{k=1}^m l_2(H_{k,l}) = \left\{ X = (X_1; X_2; \dots; X_m)^\tau : X_k \in l_2(H_{k,l}) \quad (k = \overline{1, m}) \right\}, \\ (X, Y)_{H_l} &:= \sum_{k=1}^m (X_k, Y_k)_{l_2(H_{k,l})}, \quad \|X\|_{H_l}^2 = \sum_{k=1}^m \|X_k\|_{l_2(H_{k,l})}^2. \end{aligned}$$

Пусть  $C_{k,\alpha,l}$  — плотно определенные замкнутые операторы, действующие из  $H$  в  $H_{k,l}$ :  $C_{k,\alpha,l} : \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}) \subset H \rightarrow H_{k,l}$ ,  $\{\alpha_{kp}^{(l)}\}_{p \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\gamma_{kp}^{(l)}\}_{p \in \mathbb{N}}$  ( $k = \overline{1, m}$ ,  $l = 1, 2$ ) — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &\subset \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}^* C_{k,\alpha,l}), \quad \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp}^{(l)} < +\infty \quad (k = \overline{1, m}, l = 1, 2), \\ \inf_{p \in \mathbb{N}} \gamma_{kp}^{(1)} &> 0, \quad \sup_{p \in \mathbb{N}} \gamma_{kp}^{(1)} < +\infty, \quad \inf_{p \in \mathbb{N}} \gamma_{kp}^{(2)} > 0 \quad (k = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Определим операторы  $C_{k,l}$ ,  $G_{k,l}$  ( $k = \overline{1, m}$ ,  $l = 1, 2$ ),  $C_l$  и  $G_l$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} C_{k,l}u &:= \left\{ \sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}} C_{k,\alpha,l}u \right\}_{p \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(C_{k,l}) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}), \quad C_{k,l} : \mathcal{D}(C_{k,l}) \subset H \rightarrow l_2(H_{k,l}), \\ G_{k,l}X_k &:= \left\{ \gamma_{kp}^{(l)} x_p \right\}_{p \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(G_{k,l}) := \left\{ X_k \in l_2(H_{k,l}) : \sum_{p \in \mathbb{N}} \|\gamma_{kp}^{(l)} x_p\|_{H_{k,l}}^2 < +\infty \right\} \subset l_2(H_{k,l}), \\ C_l &:= (C_{1,l}; C_{2,l}; \dots; C_{m,l})^\tau, \quad G_l := \text{diag}(G_{1,l}, G_{2,l}, \dots, G_{m,l}), \end{aligned}$$

тогда

$$C_l^* e^{-tG_l} C_l = \sum_{k=1}^m C_{k,l}^* e^{-tG_{k,l}} C_{k,l} = \sum_{k=1}^m \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp}^{(l)} e^{-\gamma_{kp}^{(l)} t} C_{k,\alpha,l}^* C_{k,\alpha,l} \quad (l = 1, 2). \quad (2)$$

**Лемма.** Оператор-функции  $C_l^* e^{-tG_l} C_l A^{-1}$ ,  $l = 1, 2$ , сильно непрерывны на  $\mathbb{R}_+$ .

Таким образом, для оператор-функции (2) выполнена гипотеза A). Гипотеза B), связывающая введенные операторы и числовые коэффициенты, принимает вид

$B'$ ) существуют  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_2 > 0$  такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^m \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{kp}^{(l)}}{\gamma_{kp}^{(l)}} \right) \|C_{k,\alpha,l}u\|_{H_{k,l}}^2 &\leq a_1 \|A^{1/2}u\|_H^2, \\ \|C_{k,\alpha,1}u\|^2 &\geq a_2 \|A^{1/2}u\|^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha,1}) \quad (k = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Интегродифференциальные уравнения с операторными ядрами вида (2) систематически изучались в [1]. Для полного интегродифференциального операторного уравнения вопрос асимптотического поведения решений исследован в [2].

*Работа поддержанна Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2025-1543).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016.
2. Закора Д. А. Асимптотическое поведение решений полного интегродифференциального уравнения второго порядка. Современная математика. Фундаментальные направления. 2022. Т. 68. № 3. С. 451–466.

# КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБР ЛИ С ОРБИТАМИ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ЧЕТЫРЕ, СЛУЧАЙ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ПОЛУПРЯМЫХ СУММ

*Ф. И. Лобзин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Важнейшим примером пуассонова многообразия является аффинное пространство  $\Pi$  с заданным на нем тензорным полем  $\pi^{ij}$ , удовлетворяющим свойствам

$$\begin{aligned} \pi^{jk}(x) &= -\pi^{kj}(x), \\ \pi^{jk}\partial_k\pi^{lm} + \pi^{lk}\partial_k\pi^{mj} + \pi^{mk}\partial_k\pi^{jl} &= 0. \end{aligned}$$

Простейшим примером такого тензора является тензор, не зависящий от координат, однако изучение свойств подобного пуассонова многообразия сводится к простым задачам линейной алгебры. Следующим по сложности и важным примером является тензор, линейно зависящий от  $x^k$  — координат на  $\Pi$ :

$$\pi^{ij} = c_k^{ij}x^k. \quad (1)$$

Тогда для тензора  $c_k^{ij}$  условия, выписанные ранее, переписываются в виде

$$c_k^{ij} = -c_k^{ji}, \quad c_e^{ad}c_d^{bc} + c_e^{bd}c_d^{ca} + c_e^{cd}c_d^{ab} = 0.$$

Отсюда видно, что любую линейную пуассонову структуру можно интерпретировать как тензорное поле на  $\mathfrak{g}^*$  — пространстве, сопряженном некоторой алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , со структурными константами из формулы (1).

Такой подход рассмотрен, например, в книге В. И. Арнольда [1]. Симплектические слои такого пуассонова многообразия совпадают с орбитами коприсоединенного представления. Иными словами, механическая система с  $n$  степенями свободы при таком подходе описывается алгеброй Ли, у которой орбиты коприсоединенного представления общего положения имеют размерность  $2n$ . Этот факт вызывает интерес к построению алгебр Ли с орбитами определенных размерностей, их классификации и изучению свойств получившихся интегрируемых систем.

Простейший случай среди интегрируемых систем — это системы с одной степенью свободы. Они моделируются алгебрами Ли, у которых орбиты коприсоединенного представления общего положения двумерные. Полная классификация таких алгебр Ли проведена в [2], где также приводятся ссылки на работы, посвященные конкретным интегрируемым системам, соответствующим этим алгебрами. В работе [3] изучена топология орбит общего положения в алгебрах из списка из основной теоремы [2].

Тема доклада посвящена следующему по сложности и важному случаю интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Такие системы моделируются алгебрами Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения. Полная классификация таких алгебр Ли может быть полезна для решения различных задач теории

интегрируемых систем, например, для построения полных бинволютивных наборов многочленов и проверки обобщенной гипотезы Мищенко – Фоменко, сформулированной в [4], или для построения геодезических потоков на орбитах коприсоединенного представления с использованием конструкции, предложенной в [5]. В частности, в работе [6] рассматриваются примеры алгебр Ли с двумерными и четырехмерными орбитами коприсоединенного представления с рациональными инвариантами в контексте конструкции из [5].

Результаты о классификации алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения, полученные автором, основаны на известной теореме Леви, согласно которой любая алгебра изоморфна полуправильной сумме полуправильной алгебры и разрешимого идеала. В докладе рассматривается случай полуправильной суммы нетривиальной полуправильной алгебры с некоторым разрешимым идеалом. Для завершения классификации остается рассмотреть случай разрешимых алгебр Ли, который будет разобран в последующих работах автора.

Основной результат, который будет представлен, заключается в следующей теореме:

**Теорема 1.** Пусть у некоторой вещественной алгебры, представимой в виде полуправильной суммы  $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$ , где  $\mathfrak{s}$  – нетривиальная полуправильная алгебра Ли, а  $\mathfrak{h}$  – разрешимый идеал, орбиты общего положения коприсоединенного представления четырехмерны. Тогда с точностью до прямой суммы с идеалом, лежащим в центре, она изоморфна одной из алгебр:

- прямая сумма полуправильной и разрешимой алгебры с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения;
- полуправильная сумма  $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$  по стандартному представлению;
- полуправильная сумма  $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$  по присоединенному представлению;
- полуправильная сумма  $so(3, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$  по стандартному трехмерному представлению.

Интересным вопросом является топология орбит коприсоединенного представления. Оказывается, что в алгебрах, разобранных в данной статье, топология орбит не оказывается очень богатой.

**Теорема 2.** Пусть вещественная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  изоморфна полуправильной сумме  $\mathfrak{s} +_{\varphi} V$  нетривиальной полуправильной алгебры Ли  $\mathfrak{s}$  и коммутативного идеала  $V$ . Пусть у алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  орбиты общего положения коприсоединенного представления имеют размерность 4. Тогда возможны следующие случаи:

- орбиты общего положения коприсоединенного представления прямой суммы полуправильной и разрешимой алгебры с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения гомеоморфны прямому произведению пары, где каждый множитель либо плоскость, либо цилиндр, либо сфера;
- орбиты общего положения коприсоединенного представления  $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$  по стандартному представлению гомеоморфны прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость;
- орбиты общего положения коприсоединенного представления  $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$  по присоединенному представлению гомеоморфны прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость;
- орбиты общего положения коприсоединенного представления полуправильной суммы  $so(3, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$  по стандартному трехмерному представлению гомеоморфны касательному расслоению сферы.

В различных задачах важную роль играют размеры жордановых и кронекеровых блоков в разложении пучков:  $(\mathcal{A}_x - \lambda \mathcal{A}_a)_{ij} = (c_{ij}^k x_k - \lambda c_{ij}^k a_k)$ , где  $c_{ij}^k$  — структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , а  $(x_k), (a_k) \in \mathfrak{g}^*$ . Подробнее о разложении Жордана–Кронекера и его роли в построении полных бинволютивных наборов многочленов можно прочитать в работе [4]. Отдельно интересно, какие именно наборы различных инвариантов Жордана–Кронекера могут реализовываться на различных алгебрах Ли. Последнему вопросу посвящена следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть некоторая алгебра изоморфна полуправмой сумме нетриицальной полуправной алгебры Ли и разрешимого идеала. Пусть размерность орбит общего положения коприсоединенного представления у этой алгебры равна 4. Тогда с точностью до произвольного числа кронекеровых блоков размерности 1 возможны следующие наборы инвариантов Жордана–Кронекера:*

- один жорданов блок размерности 2 и один кронекеров блок размерности 3,
- два кронекерова блока размерности 3,
- один кронекеров блок размерности 5.

Пусть  $\mathfrak{g}$  — некоторая алгебра Ли со структурными константами  $c_{ij}^k$  и

$$\{f, g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \{f, g\}_a = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} -$$

скобка Пуассона–Ли и скобка с замороженным аргументом  $a \in \mathfrak{g}^*$  соответственно. Полным бикоммутативным относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом набором многочленов будем называть функционально независимый почти всюду набор многочленов, попарно коммутирующих относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом, состоящий из  $(\dim g + \text{ind } g)/2$  функций. Построим полные бикоммутативные наборы многочленов для всех алгебр из списка в теореме 1. Подробнее про эту задачу можно прочитать в [4] (см. также [7, conjecture 5.5]).

В докладе будет представлен результат о полном решении этой задачи для произвольного  $a \in \mathfrak{g}^*$  для алгебр из списка в теореме 1. В работе [8] сформулировано усиление обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко (см. “argument shift conjecture” в [4]):

**Сильная обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко.** *Для любой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , для всех (необязательно регулярных) элементов  $a \in \mathfrak{g}^*$  существует полный набор многочленов в бинволюции, то есть набор, функции из которого попарно коммутируют относительно скобки  $\{\cdot, \cdot\}$  и скобки  $\{\cdot, \cdot\}_a$ .*

**Теорема 4.** *Сильная обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко верна для любой алгебры, представимой в виде полуправмой суммы нетриицальной полуправной алгебры Ли и разрешимого идеала, у которой орбита коприсоединенного представления общего положения размерности 4.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики. Издание 5.* 2023. М.: УРСС. 416 с.
2. Коняев А. Ю. *Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2.* Матем. сб. 2014. Т. 205. С. 47–66.
3. Fomenko A. T., Konyaev A. Y. *Geometry, dynamics and different types of orbits.* J. Fixed Point Theory Appl. 2014. V. 15. P. 49–66.

4. Bolsinov A. V., Zhang P. *Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras*. Transformation Groups. 2016. V. 21. P. 51–86.
5. Galinski A. *Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation*. Physics Letters B. 2021. V. 820. P. 634050.
6. Agapov S., Shubin V. *Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples*. Journal of Geometry and Physics. 2021. V. 170. P. 104389.
7. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. *Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems*. Phil. Trans. R. 2018. V. 376.
8. Лобзин Ф. И. *Построение многочленов в бинволюции для сингулярных элементов пространства сопряженного этой алгебре Ли*. Матем. сб. 2025.

# КРИТЕРИЙ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*H. A. Люлько<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

## 1. Введение

Линейная система

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t), \quad x(t) \in X, \quad (0 \leq t \leq \infty), \quad (1)$$

рассматриваемая в банаховом пространстве  $X$ , называется *экспоненциально устойчивой*, если существуют положительные числа  $\gamma$  и  $M = M(\gamma)$  такие, что любое решение  $x(t)$  удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\gamma t}\|x(0)\|, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где  $\|\cdot\|$  обозначает норму в  $X$ .

В статьях [1–3] (конец 20 – начало 21 в.) для автономной системы (1), т. е. где линейный оператор  $A(t) = A$  не зависит от  $t$ , рассматривается более сильное свойство экспоненциально устойчивых систем, известное как сверхустойчивость (*superstability*). Система (1) называется *сверхустойчивой*, если оценка (2) справедлива для любого  $\gamma > 0$  с соответствующим  $M = M(\gamma)$ . Пусть  $T(t)$  обозначает  $C_0$ -полугруппу, инфинитезимальным оператором которой является оператор  $A$ , тогда резольвента  $R(\lambda; A)$  оператора  $A$  определяется по формуле

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt, \quad x \in X. \quad (3)$$

Так как  $\|T(t)x\| \leq M(\gamma)e^{-\gamma t}\|x\|$ , то отсюда видно, что для сверхустойчивых систем резольвента  $R(\lambda; A)$  есть целая функция комплексного параметра  $\lambda$ , и спектр  $\sigma(A)$  оператора  $A$  пустой.

Свойство сверхустойчивости имеет смысл только для систем в бесконечномерных банаховых пространствах, так как линейный оператор  $A : X \rightarrow X$  в конечномерном пространстве  $X$  имеет непустой точечный спектр и число  $\gamma$  в (2) не может быть меньше максимума из реальных частей собственных значений оператора  $A$ . У линейных непрерывных операторов  $A$ , определенных на всем ненулевом банаховом пространстве  $X$ , всегда существует непустой компактный спектр, поэтому соответствующие автономные системы (1) также не могут обладать свойством сверхустойчивости.

Важный класс сверхустойчивых систем, которые рассматриваются в этой работе, составляют системы, чьи решения стабилизируются к нулю за конечное время. Простейший пример дается начально-краевой задачей [4]

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0, & (x, t) &\in (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in [0, 1], \\ u(0, t) &= 0, & t &\in (0, \infty). \end{aligned}$$

Легко видеть, что все решения задачи стабилизируются к нулю за время  $t > 1$ . Заметим, что в общем случае сверхустойчивые системы не обязательно обладают конечным временем стабилизации [3].

В последние десятилетия, начиная с работы Д. Рассела [5], многочисленные исследования посвящены свойству стабилизации к нулю решений в смешанных задачах для линейных и квазилинейных гиперболических систем первого порядка с двумя переменными. Это связано, в частности, с использованием этого свойства в теории управления и обратных задачах. Здесь рассмотрим сверхустойчивые начально краевые задачи с конечным временем стабилизации для линейных автономных и неавтономных гиперболических систем.

В работе [6] было установлено свойство стабилизации к нулю в линейных строго гиперболических автономных системах с распавшимися граничными условиями. Рассмотрим критерий стабилизации в линейных неавтономных смешанных задачах для распавшихся гиперболических систем с граничными условиями отражения, обладающей свойством устойчивости относительно изменения коэффициентов в дифференциальной системе. Данний критерий был доказан в [7] и сформулирован в терминах граничных условий, порождающих класс сверхустойчивых гиперболических систем. Эти граничные условия называли граничными условиями, повышающими гладкость (*smoothing boundary conditions* [8]), так как они приводят к эффекту повышения гладкости решений с течением времени в смешанных задачах для нераспавшихся линейных гиперболических систем. Работа [8] посвящена асимптотическим свойствам решений у возмущенных сверхустойчивых линейных неавтономных гиперболических систем. В [9] доказывается, что выделенные граничные условия приводят также к эффекту стабилизации к нулю за конечное время, не зависящее от начальных данных, всех гладких решений соответствующей смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы.

## 2. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим в полуполосе  $\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty\}$  смешанную задачу для неавтономной распавшейся гиперболической системы первого порядка:

$$\partial_t u + A(x, t) \partial_x u + B(x, t) u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u_{out}(t) = P u_{in}(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (6)$$

Неизвестная функция  $u = (u_1, \dots, n)$  и заданная начальная функция  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  – векторы вещественнонозначных функций.  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ ,  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_n)$  – диагональные матрицы, при этом для всех  $(x, t) \in \Pi$

$$A_j(x, t, ) \geq \Lambda_0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad A_j(x, t, ) \leq -\Lambda_0, \quad m + 1 \leq j \leq n, \quad (7)$$

где  $\Lambda_0 > 0$  – некоторое фиксированное число;  $n \geq 2$  и  $0 \leq m \leq n$  – фиксированные целые числа. Условие  $m = n$  ( $m = 0$ ) означает, что в гиперболической системе (4) присутствуют только характеристики с положительным (отрицательным) наклоном, а условие (7) – что эта система не вырождена и длины всех характеристик равномерно ограничены в  $\Pi$ . Матрица  $P$  с постоянными коэффициентами  $p_{jk}$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ) задает граничные условия отражения (5), в которых

$$u_{out}(t) = (u_1(0, t), \dots, u_m(0, t), u_{m+1}(1, t), \dots, u_n(1, t)),$$

$$u_{in}(t) = (u_1(1, t), \dots, u_m(1, t), u_{m+1}(0, t), \dots, u_n(0, t)).$$

На каждой из границ  $x = 0$  и  $x = 1$  полуполосы  $\Pi$  задаются значения неизвестных функций, характеристики которых выходят с данной границы, через значения тех функций, характеристики которых приходят на данную границу.

Корректность постановки задачи (4)–(6) в классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций доказывается интегрированием вдоль характеристик системы (4). В [8] доказывается существование  $L^2$ -обобщенного решения этой задачи.

**Определение 1.** (см. [8, Def. 4.3]). Пусть  $\varphi \in L^2(0, 1)$ . Функция  $u \in C([0, \infty), L^2(0, 1))$  называется  $L^2$ -обобщенным решением задачи (4)–(6), если для любой последовательности  $\varphi^l \in C_0^\infty[0, 1]$ , сходящейся к  $\varphi$  в  $L^2(0, 1)$ , соответствующая последовательность классических решений  $u^l$  задачи (4)–(6), в которой  $\varphi$  заменено на  $\varphi^l$ , удовлетворяет сходимости

$$\|u(\cdot, t) - u^l(\cdot, t)\|_{L^2(0, 1)} \rightarrow_{l \rightarrow \infty} 0,$$

равномерно по  $t$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , для каждого  $T > 0$ .

**Определение 2.** (см. в [7, Def. 1.3]). Задача (4)–(6) обладает свойством стабилизации за конечное время, если существует число  $T_s > 0$  такое, что для любой функции  $\varphi \in L^2(0, 1)$   $L^2$ -обобщенное решение задачи (4)–(6) становится тождественно равным нулю для всех  $t > T_s$ . Значение  $T_s$  называется конечным временем стабилизации. Инфимум значений всех  $T_s$  с вышеупомянутым свойством называется оптимальным временем стабилизации и обозначается через  $T_{opt}$ .

**Определение 3.** (см. в [7, Def. 1.4]). Задача (4)–(6) обладает свойством робаст стабилизации за конечное время, если она обладает свойством стабилизации за конечное время для любых гладких и ограниченных в  $\Pi$  функций  $A_j, B_j$ , удовлетворяющих (7).

Имеет место следующая теорема (см. в [7, Theorem 1.10, Corollary 1.9]).

**Теорема 1.** Пусть  $P = (p_{jk})$  —  $n \times n$  постоянная матрица и  $P_{abs}$  — матрица с элементами  $|p_{jk}|$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) задача (4)–(6) обладает свойством робаст стабилизации за конечное время тогда и только тогда, когда матрица  $P_{abs}$  нильпотентна, т. е.  $(P_{abs})^n = 0$ ;

(ii) задача (4)–(6) обладает свойством робаст стабилизации за конечное время тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы  $P$  равны нулю;

(iii) задача (4)–(6) обладает свойством робаст стабилизации за конечное время тогда и только тогда, когда всевозможные произведения  $p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_n i_{n+1}}$  равны нулю, если  $i_k$  принимают любые значения  $1, 2, \dots, n$  ( $1 \leq k \leq n$ );

(iv) пусть  $a_0 = \inf \{|A_j(x, t)| : (x, t) \in \Pi, j \leq n\} > 0$ ,  $k_0$  — минимальное значение среди  $k \leq n$  таких, что  $(P_{abs})^k = 0$ . Тогда оптимальное время стабилизации задачи (4)–(6) удовлетворяет неравенству  $T_{opt} \leq k_0/a_0$ .

### 3. Спектральный критерий сверхстойчивости

Рассмотрим автономную систему (4)–(6), т. е.  $A(x, t) \equiv A(x)$ ,  $B(x, t) \equiv B(x)$  и введем в рассмотрение оператор  $L_{A,B} : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  такой, что

$$(L_{A,B}v)(x) = \left( -A(x) \frac{d}{dx} - B(x) \right) v,$$

и область определения которого имеет вид

$$D(L_{A,B}) = \left\{ v \in L^2(0, 1) : \frac{dv}{dx} \in L^2(0, 1), v_{out} = Pv_{in} \right\}.$$

Здесь  $v_{out} = (v_1(0), \dots, v_m(0), v_{m+1}(1), \dots, v_n(1))$ ,  $v_{in} = (v_1(1), \dots, v_m(1), v_{m+1}(0), \dots, v_n(0))$ .

Исследуем спектральную задачу, соответствующую автономной системе (4)–(6), т. е.

$$\lambda w = L_{A,B}w, \quad w_{out} = Pw_{in}. \quad (8)$$

Известно, что оператор  $L_{A,B}$  замкнут и его спектр  $\sigma(L_{A,B})$  состоит из не более чем счетного числа собственных значений конечной кратности, причем собственные значения не имеют конечной предельной точки. Обозначим

$$\beta_j(x) = \int_0^x \frac{B_j(\xi)}{A_j(\xi)} d\xi, \quad \beta_j = \beta_j(1), \quad \alpha_j(x) = - \int_0^x \frac{1}{A_j(\xi)} d\xi, \quad \tau_j = |\alpha_j(1)|, \quad j \leq n,$$

тогда общее решение дифференциальной системы в (8) – вектор-функция  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , где  $w_i(x, \lambda) = C_i e^{\lambda \alpha_j(x) - \beta_j(x)}$ , а  $C_i$  – произвольные константы,  $i = 1, \dots, n$ . При подстановке  $w$  в граничные условия в (8) нетрудно убедиться, что ненулевое решение спектральной задачи (8) существует тогда и только тогда, когда  $\lambda$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\Delta(\lambda) = \det (I_n - \text{diag}(e^{-\lambda \tau_1}, \dots, e^{-\lambda \tau_n}) P_1), \quad (10)$$

где  $I_n$  – тождественная  $n \times n$ -матрица, а

$$P_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_m, e^{\beta_{m+1}}, \dots, e^{\beta_n}) P \text{diag}(e^{-\beta_1}, \dots, e^{-\beta_m}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}).$$

Итак,  $\lambda \in \sigma(L_{A,B})$  тогда и только тогда, когда  $\lambda$  удовлетворяет уравнению (9). Функция  $\Delta(\lambda)$  в (10) есть полином Дирихле, который можно записать как

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^M E_k e^{-\lambda r_k},$$

где  $M \geq 1$  – целое число,  $r_1 < r_2 < \dots < r_M$  – числа, представляющие собой линейные комбинации  $\tau_k$ , а  $E_k$  – числа, зависящие от элементов матрицы  $P_1$ . Известно [10], что если хоть один из коэффициентов  $E_k$  ненулевой, то  $\Delta(\lambda)$  имеет счетное число нулей. Поэтому уравнение  $\Delta(\lambda) = 0$  не имеет решений в комплексной плоскости тогда и только тогда, когда  $\Delta(\lambda) \equiv 1$ .

**Теорема 2.** (см. в [7, Theorem 1.5]). *Автономная задача (4)–(6) обладает свойством стабилизации за конечное время тогда и только тогда, когда спектр оператора  $L_{A,B}$  пустой.* Теорема 5 доказывается с помощью применения преобразования Лапласа к гладкому решению исходной системы (4)–(6). В случае отсутствия спектра  $\sigma(L_{A,B})$  резольвента оператора  $L_{A,B}$  является целой функцией параметра  $\lambda$ , обратное преобразование Лапласа которой есть гладкая функция с финитным носителем относительно  $t$ , что и означает свойство конечной стабилизации исходной задачи.

Из теоремы 2 и (3) вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Автономная задача (4)–(6) обладает свойством сверхустойчивости тогда и только тогда, когда она обладает свойством стабилизации за конечное время.*

**Примеры, показывающие неустойчивость спектрального критерия по отношению к возмущению коэффициентов задачи (4)–(6).**

Рассмотрим систему из 2-х уравнений

$$\partial_t u_1 + \partial_x u_1 = 0, \quad \partial_t u_2 - \partial_x u_2 = 0 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) - u_2(0, t), \quad u_2(1, t) = u_1(1, t) - u_2(0, t) \quad (12)$$

и начальными данными

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x, 0) = \varphi_2(x). \quad (13)$$

Так как

$$\det(I_2 - \text{diag}(e^{-\lambda}, e^{-\lambda})P) = 1 - e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda},$$

то характеристическое уравнение (9) для соответствующего оператора  $L_{A,B}$ , порождаемого задачей (11)–(13), читается как  $1 = 0$ . Это означает, что оператор  $L_{A,B}$  имеет пустой спектр, следовательно, по теореме 2 задача (11)–(13) обладает конечным временем стабилизации.

1. Рассмотрим теперь возмущенную задачу с  $\varepsilon$ -возмущением в коэффициенте перед производной у оператора  $L_{A,B}$ . Для системы

$$\partial_t u_1 + (1 + \varepsilon) \partial_x u_1 = 0, \quad \partial_t u_2 - \partial_x u_2 = 0 \quad (14)$$

зададим граничные условия (12) и начальные данные (13). В этом случае

$$\det(I_2 - \text{diag}(e^{\frac{-\lambda}{1+\varepsilon}}, e^{-\lambda})P) = 1 + e^{-\lambda} - e^{\frac{-\lambda}{1+\varepsilon}},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$1 + e^{-\lambda} - e^{\frac{-\lambda}{1+\varepsilon}} = 0.$$

Следовательно, оператор  $L_{A,B}$ , порождаемый возмущенной системой, имеет бесконечно много собственных значений, поэтому задача (14), (12), (13) не обладает свойством конечной стабилизации.

2. Рассмотрим  $\varepsilon$ -возмущение в коэффициентах перед младшими членами оператора  $L_{A,B}$ . Для системы

$$\partial_t u_1 + (1 + \varepsilon) \partial_x u_1 + \varepsilon u_1 = 0, \quad \partial_t u_2 - \partial_x u_2 = 0, \quad (15)$$

зададим граничные условия (12) и начальные данные (13). В этом случае характеристическое уравнение имеет вид  $1 + e^{-\lambda} - e^{-(\lambda+\varepsilon)} = 0$ . Поэтому оператор  $L_{A,B}$ , порождаемый возмущенной системой, имеет бесконечно много собственных значений, следовательно, задача (15), (12), (13) не обладает свойством конечной стабилизации (даже при очень малых возмущениях коэффициентов  $A_j$  или  $B_j$ ).

Заметим, что матрица  $P$  в граничных условиях (12) не удовлетворяет условиям теоремы 1 о робастной стабилизации. Действительно,  $(P_{abs})^2 \neq 0$ , поскольку

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{abs} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.** (см. в [7, Cor. 3.4]). *Если автономная задача (4)–(6) обладает свойством стабилизации для любых матриц  $A$  и  $B$ , то все главные миноры матрицы  $P$  нулевые. Как показывает теорема 1, это условие является и достаточным для свойства стабилизации за конечное время уже неавтономной системы (4)–(6).*

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Balakrishnan A. V. *On superstability of semigroups. Systems modelling and optimization.* in: M.P. Polis et al. (Eds.), Proceedings of the 18th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization, CRC, Research Notes in Mathematics, Chapman and Hall. 1999. P. 12–19.
2. Balakrishnan A. V. *Superstability of systems.* Applied Mathematics and Computation. 2005. V. 164. № 2. P. 321–326.
3. Creutz D., Mazo Jr. M., Preda C. *Superstability and finite time extinction for  $C_0$ -semigroups.* 2013. E-print: <https://arxiv.org/abs/0907.4812>.
4. Хилле Э., Филиппс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: Изд-во иностр. литер., 1962.
5. Russell D. *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions.* SIAM Review. 1978. V. 20. P. 639–739.
6. Елтышева Н. А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости.* Мат. сборник. 1988. Т. 135. № 2. С. 186–209.
7. Kmit I. Y., Lyul'ko N. A. *Finite time stabilization of nonautonomous first-order hyperbolic systems.* SIAM J. Control and Opt. 2021. V. 59. № 5. P. 3179–3202.
8. Kmit I. Y., Lyul'ko N. A. *Perturbations of superstable linear hyperbolic system.* JMAA. 2018. V. 460. № 2. P. 838–862.
9. Люлько Н. А. *Стабилизация к нулю за конечное время и экспоненциальная устойчивость квазилинейных гиперболических систем.* СМЖ. 2023. V. 64. № 6. С. 1229–1247.
10. Левин В. Я *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.

## СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕФЛЕКТОРА

*M. E. Марчук<sup>1,2</sup>, С. И. Сенашов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет им. М. Ф. Решетнева, Красноярск

<sup>2</sup>АО «Решетнев», Железногорск

Рассматривается решение задачи определения собственных частот оболочечного элемента по типу твердотельного рефлектора космического аппарата. Предложен аналитический способ определения собственных частот оболочки. Приведен результат расчета собственных частот оболочки с помощью конечно-элементного моделирования.

Для конструкций, подверженных динамическим воздействиям, определение собственных частот элементов космического аппарата является основной задачей при проектировании космического аппарата. При проектировании необходимо убедиться в отсутствии резонансов конструкции на определенном диапазоне частот. Явление резонанса – нежелательное явление для обеспечения прочности изделия. В данной работе предложено решение задачи определения собственных частот оболочечного элемента по типу рефлектора космического аппарата.

В стартовом положении рефлектор крепится к его корпусу в точках зачековки. Существуют требования по собственной частоте для закрепленного рефлектора.

Рефлектор проектируется из композиционных материалов, имеющих свойства анизотропии. Для упрощения в данной работе рассматривается рефлектор (оболочка) из алюминия, являющегося изотропным материалом. Исследуется система уравнений [1], описывающая колебания параболического рефлектора космического аппарата

$$\begin{aligned} K \Delta \Delta u - \frac{1}{R} \Delta F &= -\rho \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E \delta} \Delta \Delta F + \frac{1}{R} \Delta u &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u$  – отклонение от срединной поверхности,  $F$  – напряжения, возникающие на рефлекторе,  $\delta$ ,  $R$ ,  $\rho$ ,  $K$  – постоянные характеризующие рефлектор.

В работе построены точные решения уравнений (1), которые позволили найти собственные частоты рефлектора.

В таблице 1 приведены собственные частоты рефлектора

Таблица 1. Собственные частоты рефлектора

Номер тона	Частота, Гц
1	164,7
2	193,22
3	262,36
4	332,05
5	419,13
6	532,81
7	560,12
8	896,61
9	901,14
10	1012,15

Определение собственных частот позволит спроектировать рефлектор, который не сломается при колебаниях, возникающих на активном участке выведения космического аппарата.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Flugge W. *Stresses in shells*. Berlin–Heidenberg–New York : Springer–Verlag. 1973. 552 p.
2. Wijker J. *Random vibrations in spacecraft structures design*. Dordrecht–Heidelberg–London–New York : Springer–Verlag. 2009. 517 p.
3. Wijker J. *Mechanical Vibrations in Spacecraft Design*. Berlin–Heidelberg–New York : Springer–Verlag, 2004. 443 p.
4. William A. *Imbriale Space Antenna Handbook*. S.I. : John Wiley & Sons Limited. 2012. 774p.

# PROPERTIES OF NON-COMMUTATIVE MICHELSON CONTRAST AND ITS RELATION TO HOLEVO BOUND.

*A. A. Novikov<sup>1</sup>, I. A. Nikolaeva<sup>2</sup>, S.A. Abed<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>*Novikov Labs, Kazan*

<sup>2</sup>*Lean technologies lab, Kazan,*

<sup>3</sup>*Diyala University, Baquba*

We consider the generalization of the Michelson contrast for positive operators of countably decomposable  $W^*$ -algebras and prove its properties. In addition, we study how the inequalities characterizing traces interplay with the Michelson contrasts of operator variables.

## 1. Introduction

The article was first composed under the inner motivation of functional analysis, defining and describing interesting properties of the "centrality measure" since from various points of view, central and tracial elements are in some sense "better" than arbitrary elements of the algebra and functionals, respectively. A vast majority of articles dedicated to the characterization of tracial functionals by inequalities can be found in this overview [1].

The main inspiration was found in the 2019 article by Bikchentaev and Abed [2].

Surprisingly for us, after we had written the first version of the text we discovered that the "centrality measure" that we have defined in this paper from purely algebraic motivation, eventually coincided in its form with the so-called Michelson contrast (also called visibility measure), that is widely applied in image processing [3, 4], optics [5], vision [6, 7] and quantum computing [8].

## 2. Notations and Preliminaries

Let  $\mathcal{A}$  denote some Banach  $*$ -algebras; then,  $\mathcal{A}^{\text{sa}}$ ,  $\mathcal{A}^+$  are its self-adjoint and positive parts, respectively.  $\mathcal{A}^*$  is the conjugate space of continuous linear functionals. If  $\mathcal{A}$  is von Neumann algebra, then  $\mathcal{A}_*$  denotes its predual space. Additionally,  $\mathcal{A}_*^+$ ,  $\mathcal{A}^{*+}$  are the positive cones in  $\mathcal{A}_*$  and  $\mathcal{A}^*$ , respectively.  $\text{Tr}$  denotes the canonical trace of  $M_n(\mathbb{C})$ . By  $C(H)$  and  $B(H)$  we denote the ideal of compact operators and the algebra of bounded operators, respectively.

## 3. Centrality and invertibility in $B(H)^+$

Let  $\mathcal{A} = B(H)$ , then the center  $\mathfrak{C}(B(H))$  of  $B(H)$  is equal to  $\mathbb{C}\mathbf{1}$ . Let us consider the function

$$\Delta(x) = \inf_{A \in \mathbb{R}^+} \left\{ \left\| \mathbf{1} - \frac{x}{A} \right\| \right\} \text{ for } x \in B(H)^+,$$

which illustrates how far the element  $x$  is from the central elements.

We see, that if  $x = \mathbf{1}$ , then  $\Delta(\mathbf{1}) = 0$  ( $A = 1$ ) and  $\Delta(\mathbf{0}) = 1$ .

**Proposition 1.** Let  $x$  be positive operator ( $x \in B(H)^+$ ), then  $\Delta(x) \leq 1$ .

**Proposition 2.** Let  $x$  be positive non-invertible (singular) operator, then

$$\Delta(x) = 1.$$

**Corollary 1.** Let  $x$  be positive compact operator, then  $\Delta(x) = 1$ .

The corollary characterizes compact operators as the kind of most non-central positive elements in the sense of the function  $\Delta$  in  $B(H)$ .

**Theorem 1.** Let  $x$  be invertible positive operator ( $x \in B(H)^+$ ), with the inverse  $x^{-1}$ , then

$$\Delta(x) = \frac{\|x\|\|x^{-1}\| - 1}{\|x\|\|x^{-1}\| + 1}. \quad (1)$$

**Remark 1.** Note, that from the latter theorem it follows, that for any invertible  $x \in B(H)^+$  the equality  $\Delta(x) = \Delta(x^{-1})$  holds.

**Remark 2.** Note, that  $\Delta(x) = 0$  for the invertible operator, only if  $\|x^{-1}\| = \frac{1}{\|x\|}$ , which would mean  $\sigma(x) = [\|x\|, \|x\|]$ , thus  $x = \|x\|\mathbf{1}$ .

**Corollary 2.** Let  $x \in B(H)^+$  be invertible element with the inverse element  $x^{-1} \in B(H)$ , then  $\Delta(x) < 1$ .

**Corollary 3.** Let the sequence  $x_n$  from  $B(H)^+$  that converges to element  $\mathbf{0} \neq x \in B(H)^+$  in terms of norm,

$$\lim_n \Delta(x_n) = \Delta(x),$$

i.e.  $\Delta : (B(H)^+ \setminus \{\mathbf{0}\}, \|\cdot\|) \mapsto [0, 1]$  is a continuous function.

From the latter two corollaries, we obtain the following.

**Corollary 4.** If the sequence of operators is converging to a non-singular (invertible) operator, then the sequence contains not more than a finite quantity of non-invertible operators.

**Corollary 5.** For any  $x$  in  $B(H)^+$  the following properties

1)

$$\Delta(x) = \frac{\sup(\sigma(x)) - \inf(\sigma(x))}{\sup(\sigma(x)) + \inf(\sigma(x))};$$

2)

$$\Delta(x) = \frac{\sup \sigma(x)}{\sup \sigma(x) + \inf \sigma(x)} \left\| 1 - \frac{x}{\|x\|} \right\|.$$

hold.

**Corollary 6.** Let  $x \in B(H)^+$ , then

1)

$$\frac{1}{2} \left\| 1 - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \Delta(x) \leq \left\| 1 - \frac{x}{\|x\|} \right\|;$$

2)  $\Delta(x) = 0$  only if  $x = \|x\|\mathbf{1}$ .

**Remark 3.** Note, that the algebra of compact operators  $C(H)$  is dense in  $B(H)$  in the weak operator topology (and  $C(H)^+$  in  $B(H)^+$ , respectively), thus  $\Delta$  cannot be continuous in weak operator topology.

Now let us describe some properties of  $\Delta$ .

**Theorem 2.** Let  $x, y \in B(H)^+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  then

1)  $\Delta(\lambda x) = \Delta(x)$ ;

2) if  $x, y$  are invertible, then

$$\left( \|x + y\| + \frac{1}{\|(x + y)^{-1}\|} \right) \Delta(x + y) \leq \left( \|x\| + \frac{1}{\|x^{-1}\|} \right) \Delta(x) + \left( \|y\| + \frac{1}{\|y^{-1}\|} \right) \Delta(y).$$

The inequality becomes an equality if  $x = \lambda y$ .

**Theorem 3.** Let  $x, y \in B(H)^+$ , then  $\Delta(x + y) \leq \max\{\Delta(x), \Delta(y)\}$ .

One can ask when equality holds. We do not have a comprehensive answer for that, but we assume that the following example would be interesting under these considerations.

**Remark 4.** Note, that  $\Delta$  does not hold monotonicity.

For example, take  $x = 2p + 4p^\perp$  and  $y = 3p + 9p^\perp$  with  $(\mathbf{0}, \mathbf{1} \neq)p \in B(H)^{\text{pr}}$ , then  $x \leq y$ , but

$$\Delta(x) = \frac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3} \text{ and } \Delta(y) = \frac{9-3}{9+3} = \frac{1}{2} \text{ and } \Delta(x) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} = \Delta(y).$$

As another example take  $x = p + 2p^\perp$  and  $y = 2p + 3p^\perp$ , then  $x \leq y$  and

$$\Delta(x) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \geq \frac{1}{5} = \frac{3-2}{3+2} = \Delta(y).$$

**Remark 5.** Note, that the inequality  $\min(\Delta(x), \Delta(y)) \leq \Delta(x+y)$  does not hold, for example if  $(\mathbf{1}, \mathbf{0} \neq)x = p \in B(H)^{\text{pr}}$  and  $y = p^\perp$ , then  $\Delta(p) = \Delta(p^\perp) = 1$  and  $0 = \Delta(\mathbf{1}) = \Delta(p+p^\perp)$ .

Based on Theorems 2 and 3 for  $B(H)$  we can define a cone

$$K_c = \{x \in B(H)^+ | \Delta(x) \leq c\},$$

which would be a closed subcone with the property, that if  $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$ , then

$$\mathbb{R}^+ \mathbf{1} \subset K_0 \subset K_{c_1} \subset K_{c_2} \subset K_1 = \mathcal{B}^+(H).$$

The latter implies, that the cone of positive elements without a zero element has a fibration into the sets  $K_c \setminus \bigcup_{0 \leq b < c} K_b$  parametrized by interval  $[0, 1]$ .

**Remark 6.** Let  $x, y \in B(H)^+$  and  $xy \in B(H)^+$ , then  $xy = (xy)^* = y^*x^* = yx$ , thus  $\Delta(xy) = \Delta(yx)$ .

**Theorem 4.** Let  $x, y \in B(H)^+$ , then the following inequalities

- 1) if  $xy \in B(H)^+$ , then  $\Delta(xy) \leq \max(\Delta(x^2), \Delta(y^2))$ ;
- 2)  $\Delta(x^2) \leq 2\Delta(x)$ ;
- 3)  $\Delta(x) \leq \Delta(x^2)$

hold.

## 4. Applications

### 4.1. Gardner's inequality inspired simulation

In 1979 L. T. Gardner showed the inequality  $|\varphi(X)| \leq \varphi(|X|)$  characterizes traces in  $C^*$ -algebras among all functionals, i.e.

**Theorem 5** [9, Theorem 1]. The finite traces on a  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  are precisely those (positive) linear functionals  $\varphi$  on  $\mathcal{A}$  which satisfy  $|\varphi(x)| \leq \varphi(|x|)$  for all  $x \in \mathcal{A}$ .

If  $\varphi$  is a tracial functional on the  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$ , then the Gardner exponent shows the result for all elements of  $X \in \mathcal{A}$  and, conversely, if for all  $X \in \mathcal{A}$  is a Gardner quality indicator and  $\varphi$  is a positive functional, this functional is tracial.

Let  $\mathcal{M}$  be a von Neumann algebra, the normal strongly semifinite weight  $\varphi$  ensures that for any  $\varphi$ -finite projections  $P \in \mathcal{M}$ , the Gardner equivalent ( $|\varphi(X)| \leq \varphi(|X|)$ ) result for all  $X = PX_0P$ , where  $X_0 \in \mathcal{M}$ , then the weight is a trace.

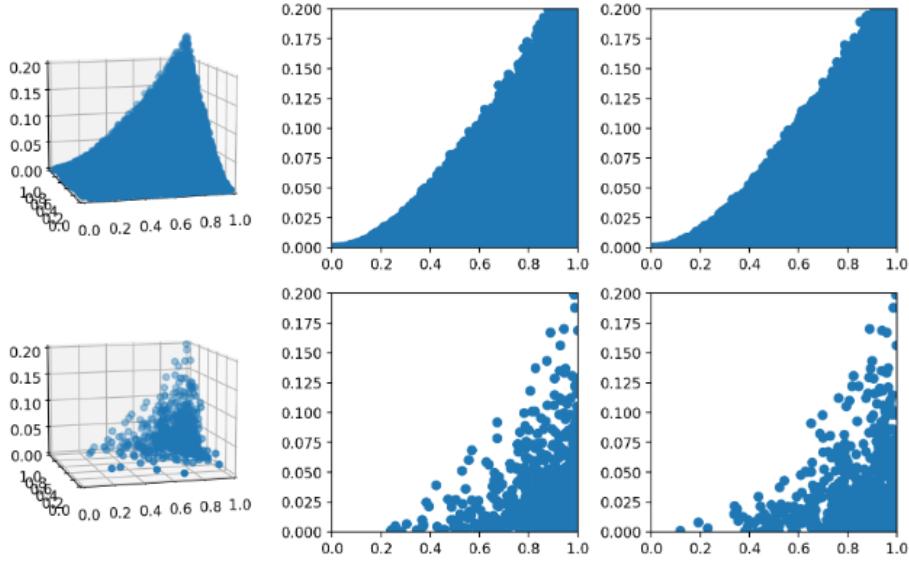


Fig. 1.  $x = \Delta(X)$ ,  $y = \Delta(Y)$ , with  $X \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|X\| = \|Y\| = 1$  and  $z = |\text{Tr}(XY)| - \text{Tr}(X|Y|)$ . The left column is a 3D scatter plot, the middle column is a plot of  $z$  vs.  $x$  and the right column is  $z$  vs.  $y$ , the upper row is for  $n = 2$  and the lower row is for  $n = 3$

In case if  $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , we have that for  $\varphi := \text{Tr}(A \cdot)$  the inequality must be violated for some  $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , i.r. exists  $X \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$  such that  $|\text{Tr}(AX)| - \text{Tr}(A|X|) > 0$ .

We made the Monte-Carlo simulations and got the following scatter plots for  $n = \overline{2, 3}$ .

Another simulation involves  $\text{Tr}(|XY|) - \text{Tr}(|X||Y|)$ .

#### 4.2. Quantum Jensen-Shannon Divergence

Let  $X, Y \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  and  $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(Y) = 1$ .

We call  $S(X) := -\text{Tr}(X \log_2(X))$  the von Neumann entropy, where  $\log_2(X)$  is understood in the terms of functional calculus.

We define

$$QJSD(X, Y) := S\left(\frac{1}{2}(X + Y)\right) - \frac{1}{2}(S(X) + S(Y))$$

following the [10–12].

In the following computational experiment we compare the Michelson Contrast  $\Delta(XY)$  of the product of density matrices  $X$  and  $Y$  with the  $\sqrt{QJSD(X, Y)}$ .

We see the tendency that if we increase the dimension it seems that the following type inequalities

$$A \times \Delta(|XY|) \leq \sqrt{QJSD(X, Y)} \leq B \times \Delta(|XY|)$$

occur. It seems logical since we know [13] where authors state the equivalence between Jensen–Shannon divergence and Michelson contrast for a continuous commutative distributions.

#### 4.3. $L_1$ equality violation

From [14] we now that if  $A \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  and  $\text{Tr}(|AXA|) = \text{Tr}(A|X|A)$  for all  $X \in \mathbb{M}_n^{sa}(\mathbb{R})$  then  $A$  is central.

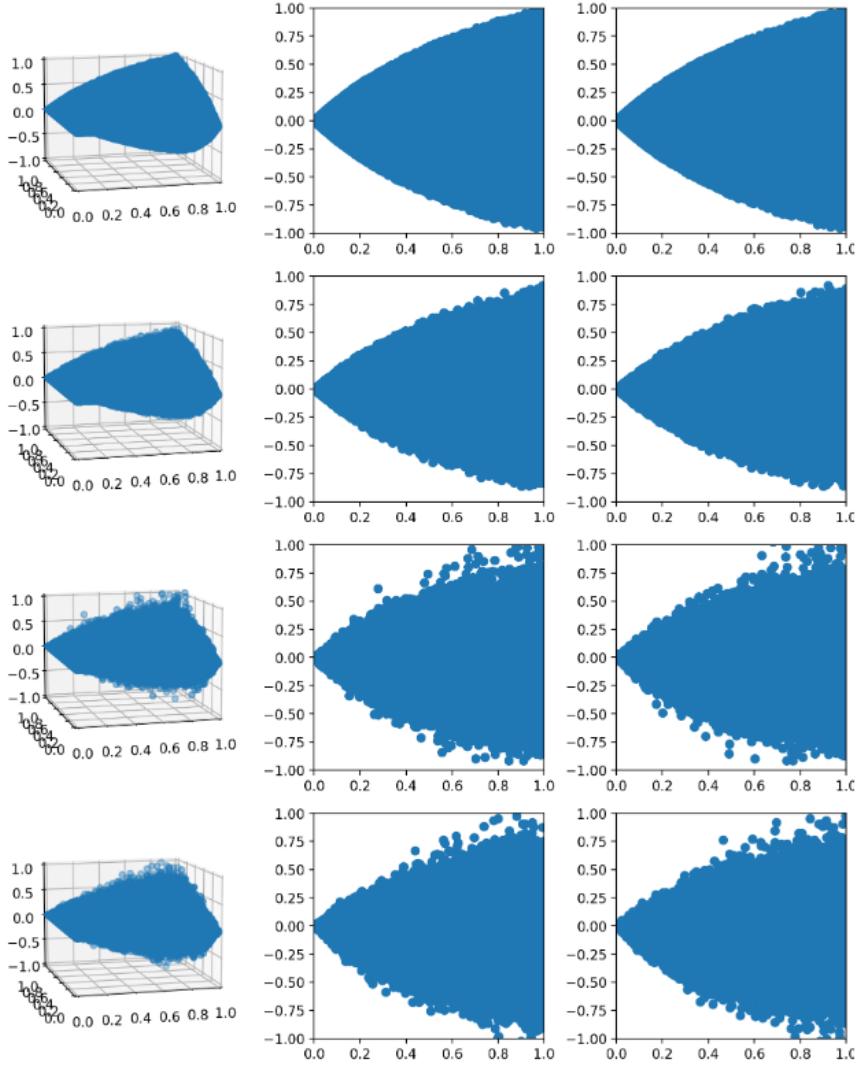


Fig. 2. The scatter plots above are visualising results of simulations with  $x = \Delta(X)$ ,  $y = \Delta(Y)$ , with  $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|X\| = \|Y\| = 1$  and  $z = |\text{Tr}(XY)| - \text{Tr}(|X||Y|)$ . The left column is a 3D scatter plot, the middle column is a plot of  $z$  vs.  $x$  and the right column is  $z$  vs.  $y$ . The rows correspond for 2, 3, 4 and 5-dimensional simulations respectively

## 5. Data Availability Statement

All of the code for simulations is available by the following link  
<https://www.kaggle.com/code/andreinovikov90/computations-for-michelson-contrast>,  
<https://www.kaggle.com/code/andreinovikov90/computations-for-michelson-contras>  
along with the outputs of the simulations. The code alone is also available on GitHub:  
[https://github.com/AHHobukob/michelson\\_contrasts\\_simulation\\_2024](https://github.com/AHHobukob/michelson_contrasts_simulation_2024),  
[https://github.com/AHHobukob/michelson\\_contrasts\\_simulation\\_2024](https://github.com/AHHobukob/michelson_contrasts_simulation_2024).

## 6. Discussion

It appears that the proven properties of the Michelson contrast were previously unknown, or at least not proven. A brief overview of the applications gives us a clear idea that these results can be used both theoretically and practically.

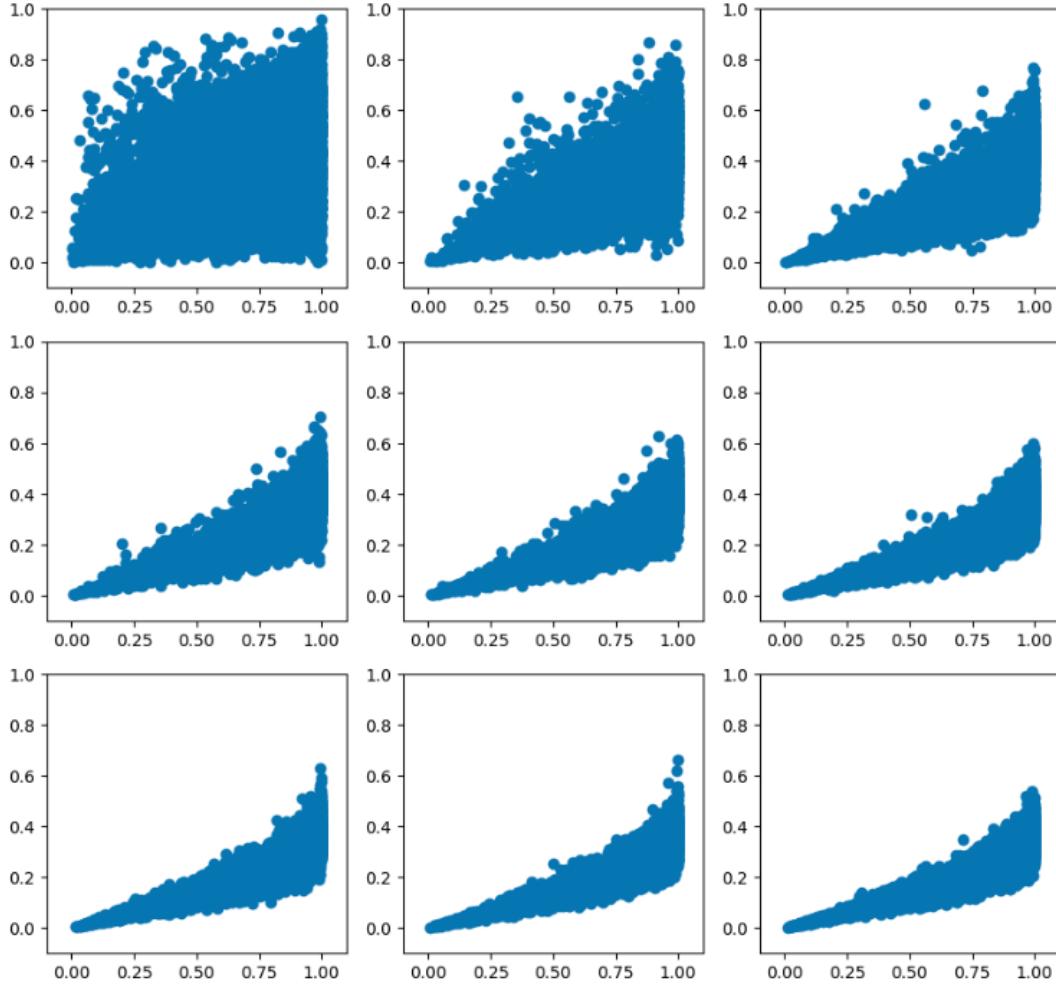


Fig. 3. The scatter plots above are visualising results of simulations with  $x = \Delta(|XY|)$ ,  $y = \sqrt{QJDS(X, Y)}$ , with  $X, Y \in M_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\text{Tr}X = \text{Tr}Y = 1$ . The upper row corresponds to 2, 3 and 4-dimensional simulations, the middle row corresponds to 5, 6 and 7-dimensional simulations and the last row corresponds to 8, 9 and 10-dimensional simulations

From the simulations, it seems that the inequalities that characterize traces and central elements are violated for an amount that can have upper bounds dependent on Michelson contrasts. Also, we think that these properties can be generalized for the general case of  $C^*$ -algebras and for the weights on  $W^*$ -algebras.

It is notable that from the Dixmier characterization of positive operators we obtained a Michelson contrast for operators.

Also, it is interesting to find out how does the Michelson contrast of the components affect the inequalities characterizing the traces, for instance the monotonicity inequalities [15–18], subadditivity [19, 20], Young's inequality [21] and other characterizations of traces [22–26]. You can take a look at the survey [1].

Also, it seems that we can try to prove limit theorems for  $\Delta'(n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k)$  considering the sequences  $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$  of random sample elements from the population from the quantum probability space  $(\mathcal{N}, \mathcal{N}^{pr}, \varphi)$ , where  $\mathcal{N}$  is a countably decomposable von Neumann algebra, yet it seems to work in simulations for random matrices when  $\mathcal{N} = M_n(\mathbb{R})$ .

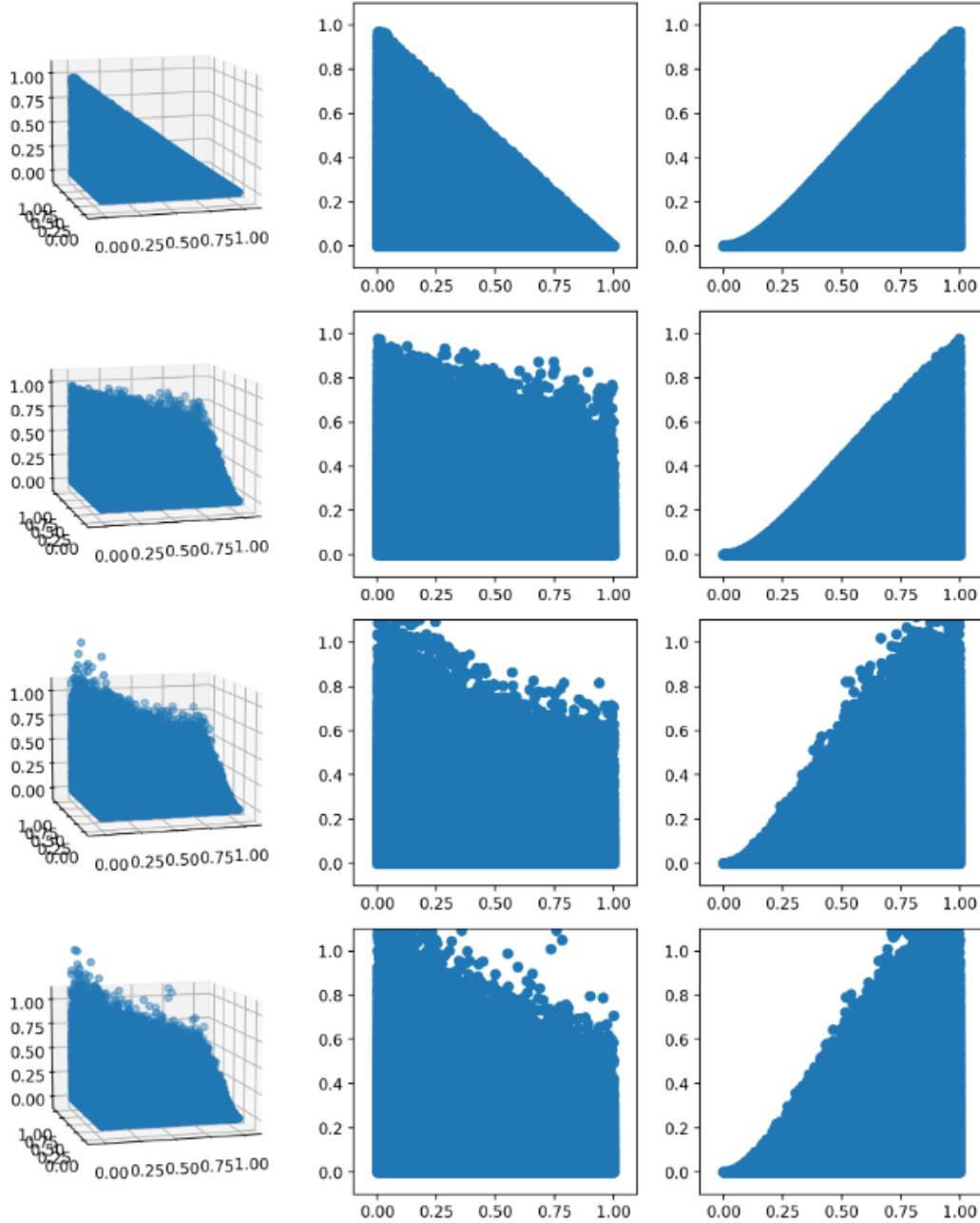


Fig. 4. The scatter plots above are visualising results of simulations with  $x = \Delta(|X|)$ ,  $y = \Delta(Y)$ , with  $X \in \mathbb{M}_n^{sa}(\mathbb{R})$ ,  $Y \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\|X\| = \|Y\| = 1$  and  $z = \text{Tr}(Y|X|Y) - \text{Tr}(|YXY|)$ . The left column is a 3D scatter plot, the middle column is a plot of  $z$  vs.  $x$  and the right column is  $z$  vs.  $y$ . The rows correspond for 2, 3, 4 and 5-dimensional simulations respectively

Another application seems to be found in optics and vision theory. We can think of the raster graphical image as a matrix in  $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{Z}_d)$  for monochromatic image of  $d$  pixel depth or  $\bigoplus_{i=1}^c \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{Z}_d)$ , where  $c$  is a number of channels and  $d$  is a channel depth of an image (respectively, 3 and 256 for the RGB color space), which can be embedded into  $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  and  $\bigoplus_{i=1}^c \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ , respectively.

From here we may move in different directions, first is to consider a simple assumption that the image is described as a function  $f(x, y) \geq 0$  and we consider a multiplication operator  $M_f : g \in L_2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) \mapsto fg \in L_2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$  we have that Michelson distance is just equal to  $\Delta(M_f)$ .

Another direction is to extend the Michelson contrast for the rectangular matrices through the singular values framework.

We know, that since  $\Delta$  and  $\Delta'$  are dependant on the spectrum, then it is not changing under unitary transformations, however, we have nonlinear transformations between color schemes such as RGB and CMYK, which can give us a raise of contrast, that could help in computer vision to highlight some specific objects. Also, it can be interesting how the activation functions affect the Michelson contrast values, that could bring the light upto fundamentals of neural networks.

## REFERENCE

1. Bikchentaev A. M. *Characterization of traces on  $C^*$ -algebras: a survey*. Gaspar D. (eds.) [et al.]. An operator theory summer. Proc. 23rd Internat. Conf. Operator Theory. Timisoara, Romania, June 29 July 4, 2010. Bucharest: The Theta Foundation. Theta Series in Advanced Math. 2012. V. 13. P. 1–12.
2. Bikchentaev A. M., Abed S. A. *Projections and Traces on von Neumann Algebras*. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. № 9. P. 1260–1267.
3. Kukkonen H., Rovamo J., Tiippana K., Näsänen R. *Michelson contrast, RMS contrast and energy of various spatial stimuli at threshold*. Vision Research. 1993. V. 33. № 10. P. 1431–1436.
4. Prince J. L., Links J. M. *Medical Imaging Signals and Systems*. Pearson. 2006. 519 p.
5. Michelson A. *Studies in Optics*. U. of Chicago Press. 1927. 176 p.
6. Haun A., Peli E. *Perceived Contrast of Complex Images*. Journal of Vision. 2013. № 13. P. 3.
7. Wiebel C. B., Singh M., Maertens M. *Testing the role of Michelson contrast for the perception of surface lightness*. Journal of Vision. 2013. № 16. P. 17.
8. Oliveira D., Giusto E. [et al.] *A Systematic Methodology to Compute the Quantum Vulnerability Factors for Quantum Circuits*. 2021.
9. Gardner L. T. *An inequality characterizes the trace*. Canad. J. Math. 1979. V. 31. № 6. P. 1322–1328.
10. Holevo A. S. *Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication channel*. Probl. Inf. Transm. 1975. № 9. P. 177–183.
11. Majtey A., Lamberti P., Prato D. *Jensen-Shannon divergence as a measure of distinguishability between mixed quantum states*. Physical Review A. 2005. V. 72. № 5. P. 052310.
12. Briet J., Harremoes P. *Properties of classical and quantum Jensen-Shannon divergence*. Physical Review A. 2009. V. 79. № 5. P. 052311.
13. Bruni V., Rossi E., Vitulano D. *On the Equivalence Between Jensen–Shannon Divergence and Michelson Contrast*. IEEE Transactions on Information Theory. 2012. V. 58. № 7. P. 4278–4288.
14. Novikov A.  *$L_1$ -space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra*. Positivity. 2017. V. 21. № 1. P. 359–375.

15. Bikchentaev A., Tikhonov O. E. *Characterization of the trace by monotonicity inequalities*. Linear Algebra and its Applications. 2007. V. 422. № 1. P. 27–278.
16. Bikchentaev A. M., Tikhonov O. E. *Characterization of the trace by Young's inequality*. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 2005. V. 6. № 2. Article 49.
17. Bikchentaev A. M., Tikhonov O. E. *Characterization of the trace by monotonicity inequalities*. Linear Algebra Appl. 2007. V. 422. № 1. P. 274–278.
18. Virosztek D. *Connections between centrality and local monotonicity of certain functions on  $C^*$ -algebras*. J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 453. № 1. P. 221–226.
19. Tikhonov O. E. *Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals*. Positivity. 2005. V. 9. № 2. P. 259–264.
20. Stolyarov A. I., Tikhonov O. E., Sherstnev A. N. *Characterization of Normal Traces on Von Neumann Algebras by Inequalities for the Modulus*. Math. Notes. 2002. V. 72. P. 411–416.
21. Cho K., Sano T. *Young's inequality and trace*. Linear Algebra Appl. 2009. V. 431. P. 1218–1222.
22. Bikchentaev A. M. *Commutativity of operators and characterization of traces on  $C^*$ -algebras*. Doklady Math. 2013. V. 87. P. 79–82.
23. Bikchentaev A. M. *Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras. III*. Inter. J. Theor. Physics. 2015. V. 54. № 12. P. 4482–4493.
24. Bikchentaev A. M. *Inequalities for determinants and characterization of the trace*. Sib. Math. J. 2020. V. 61. № 2. P. 248–254.
25. Petz D., Zemánek J. *Characterizations of the trace*. Linear Algebra Appl. 1998. V. 111. P. 43–52.
26. Sano T., Yatsu T. *Characterizations of the tracial property via inequalities*. J. Inequal. Pure Appl. Math. 2006. V. 7. Article 36.

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ: СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОСОБЕННОСТЕЙ КОРАНГА 1 И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

*M. V. Онуфриенко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

<sup>2</sup>*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*

В качественной теории интегрируемых систем важную роль играют структурно устойчивые особые орбиты, т. е. такие орбиты, в малой окрестности которых топология слоения Лиувилля сохраняется при малых интегрируемых возмущениях системы. Например, невырожденные особые орбиты являются структурно устойчивыми согласно теореме Элиассона – Вея [1, 2] (см. также [3, 4]). Простейшая вырожденная особенность — параболическая орбита — является структурно устойчивой [5] и даже гладко структурно устойчивой [6]. Гладкие семейства функций, инвариантных относительно действия коммутативной компактной группы Ли, возникают при изучении бифуркаций критических орбит интегрируемых гамильтоновых систем [3]. Например, гладкие семейства четных функций с группой симметрий из двух элементов возникают в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы вблизи таких вырожденных орбит ранга 1, как «эллиптическое удвоение периода» и «гиперболическое удвоение периода» [4]. Гладкие семейства функций от четырех переменных, инвариантных относительно гамильтонова действия окружности  $G \cong SO(2)$  вырожденных орбит коранга 2, — как «интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа» [7] и ее гиперболические аналоги. Все указанные выше типы вырожденных особых орбит встречаются во многих интегрируемых системах динамики твердого тела (см., например, [3, 7, 8]), магнитных геодезических потоках, инвариантных относительно вращений [4]; они являются структурно устойчивыми относительно вещественно-аналитических интегрируемых возмущений. Семейства четных функций встречаются во многих динамических системах (не обязательно интегрируемых, см., например, [9]).

Нами изучается структурная устойчивость особенностей коранга 1 типичных интегрируемых систем на 4- и 6-мерных симплектических многообразиях. Ранее была получена классификация (с точностью до послойного диффеоморфизма) таких особенностей и доказано, что вблизи орбиты коранга 1 слоение Лиувилля интегрируемой системы диффеоморфно стандартной модели [3, 10–12]. Эти особенности в 4-мерном случае представляют собой параболические орбиты с резонансами [10], а в 6-мерном случае — бифуркации таких орбит. Доказывается структурная устойчивость этих особенностей, строятся локальные бифуркационные диаграммы, фазовые портреты и их бифуркации [13].

**Определение 1.** Интегрируемая гамильтонова система на  $2n$ -мерном симплектическом многообразии  $(M, \omega)$  задается гладким отображением  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\{f_i, f_j\} = 0$ . Возникает лагранжево слоение с особенностями на  $(M, \omega)$ , называемое *слоением Лиувилля*, слоями которого являются связные компоненты множеств  $\mathcal{F}^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Регулярные компактные слои представляют собой торы Лиувилля. Предположим, что  $M$  компактно и система вещественно-аналитическая. Тогда возникает гамильтоново  $\mathbb{R}^n$ -действие на  $M$ , порожденное отображением  $\mathcal{F}$ .

Пусть  $\mathcal{S}(M)$  — класс интегрируемых систем (называемых *полуторическими*) на  $M$ , для которых функции  $f_2, \dots, f_n$  порождают локально-свободное гамильтоново действие  $(n - 1)$ -тора на  $M$ . Такое действие существует вблизи орбит коранга 1, согласно [11].

**Определение 2.** Определим *стандартную модель* полулокальной особенности (т. е. компактной  $\mathbb{R}^n$ -орбиты) коранга 1 как систему, заданную на симплектическом многообразии

$$M_{st} = (D^2 \times D^{n-1} \times T^{n-1})/G, \quad \omega_{st} = dx \wedge dy + \sum_{i=1}^{n-1} dI_i \wedge d\varphi_i,$$

инволютивным набором функций  $\mathcal{F}_{st} = (H, I_1, \dots, I_{n-1})$ , где  $H = H_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, I)$  — функция Гамильтона,  $k = 0, 1, 2$ ,  $\mathbf{z} = (x, y)$ ,  $z = x + iy$ , действие группы  $G = \mathbb{Z}_s$  на прямом произведении  $D^2 \times D^{n-1} \times T^{n-1}$  имеет вид

$$(x, y, I, \varphi) \mapsto \left( x \cos\left(\frac{2\pi\ell}{s}\right) - y \sin\left(\frac{2\pi\ell}{s}\right), x \sin\left(\frac{2\pi\ell}{s}\right) + y \cos\left(\frac{2\pi\ell}{s}\right), I, \varphi_1 + \frac{2\pi}{s}, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \right),$$

где  $0 < \ell < s$ ,  $(\ell, s) = 1$ .

Таким образом, стандартной моделью является полуторическая интегрируемая система  $(M_{st}, \omega_{st}, \mathcal{F}_{st})$  с гамильтонианом  $H$  и компактной  $(n-1)$ -мерной орбитой  $\mathcal{O}$  вида  $x = y = I_1 = \dots = I_{n-1} = 0$ , имеющей мультипликаторы  $e^{\pm 2\pi\ell i/s} = \xi^{\pm\ell}$  (с  $\xi = e^{2\pi i/s}$ ), скручивающий резонанс  $\ell/s \bmod 1$  (см. [3] и порядок резонанса  $s = |G|$  (см. [10]).

Стандартная функция Гамильтона  $H = H_{s,k,\alpha}$  определяется следующим образом: как функция Морса  $H_{s,0}(x, y) = |z|^2 = x^2 + y^2$  (при  $k = 0$  и  $s \geq 3$ ) или  $H_{s,0}^\pm(x, y) = x^2 \pm y^2$  (при  $k = 0$  и  $s = 1, 2$ ), и как два семейства функций  $H_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, \varepsilon)$  при  $k = 1, 2$  и  $s \geq 1$ :

$$H_{s,1,\alpha}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \begin{cases} \eta x^2 + y^{s+2} & +\varepsilon y^s, \quad s = 1, 2, \\ \operatorname{Re}(z^3) & +\varepsilon |z|^2, \quad s = 3, \\ \operatorname{Re}(z^4) + \alpha |z|^4 & +\varepsilon |z|^2, \quad s = 4, \quad \alpha^2 \neq 1, \\ \operatorname{Re}(z^s) + |z|^4 & +\varepsilon |z|^2, \quad s \geq 5, \end{cases}$$

$$H_{s,2,\alpha}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \begin{cases} \eta x^2 + y^{2s+2} & +\varepsilon_2 y^{2s} + \varepsilon_1 y^s, \quad s = 1, 2, \\ \operatorname{Re}(z^4) + \eta |z|^4 + |z|^6 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, \quad s = 4, \\ \operatorname{Re}(z^5) + |z|^6 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, \quad s = 5, \\ \operatorname{Re}(z^6) + \alpha |z|^6 + |z|^8 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, \quad s = 6, \quad \alpha^2 \neq 1, \\ \operatorname{Re}(z^s) + |z|^6 + \alpha |z|^8 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, \quad s \geq 7. \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon = (\varepsilon_i) \in \mathbb{R}^k$  — малый параметр,  $\alpha \in \mathbb{R}$  — параметр (так называемый *модуль*),  $\eta = \pm 1$ ,  $z = x + iy$ .

**Определение 3.** Полулокальная особенность (компактная  $\mathbb{R}^n$ -орбита) вещественно-аналитической интегрируемой системы  $(M, \omega, \mathcal{F})$  называется *структурно устойчивой*, если существует окрестность  $U^\mathbb{C}$  в  $M^\mathbb{C}$  такая, что для любой вещественно-аналитической системы  $(\overline{U}^\mathbb{C}, \tilde{\omega}^\mathbb{C}, \tilde{\mathcal{F}}^\mathbb{C})$ , достаточно близкой к данной системе в  $U^\mathbb{C}$  относительно  $C^\infty$ -топологии, верно соотношение  $\tilde{\mathcal{F}} = \phi \circ \mathcal{F} \circ \Phi$ , где  $\Phi : U \rightarrow M$  и  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вложение и гомеоморфизм соответственно, близкие к тождественным. Если  $\Phi$  является аналитическим диффеоморфизмом на свой образ, особенность называется *гладко структурно устойчивой*.

**Теорема** [12, 13]. *Пусть  $n = \frac{1}{2} \dim M \in \{2, 3\}$  и  $\mathcal{S}_{st} \subseteq \mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$  означает класс систем, у которых все полулокальные особенности послойно диффеоморфизмы стандартным. Тогда  $\mathcal{S}_{st}$  открыт и плотен в  $\mathcal{S}$  относительно  $C^\infty$ -топологии. Любая особенность, послойно диффеоморфная стандартной модели, в которой модуль присутствует (соответственно отсутствует), структурно устойчива (соответственно гладко структурно устойчива) относительно малых интегрируемых возмущений системы.*

Первая часть теоремы 1 не следует из классификации в [14]. Строим локальные бифуркационные диаграммы и фазовые портреты всех этих особенностей и, как следствие, получаем вторую часть теоремы 1. Фазовые портреты при  $s \geq 5$  были построены в [15] для систем без предположения об интегрируемости. Для особенностей коранга 2 получена классификация, и для резонансов порядка  $\neq 4$  доказана структурная устойчивость [16].

*Автор благодарен Е. А. Кудрявцевой за постановку задачи и ценные обсуждения.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российской научного фонда (грант № 24-71-10100) в МГУ им. М. В. Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Eliasson L. H. *Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals - elliptic case*. Commentarii mathematici Helvetici. 1990. V. 65. № 1. P. 4–35.
2. Vey J. *Sur certaines systèmes dynamiques séparables*. Amer. J. Math. 1978. V. 100. № 3. P. 591–614.
3. Kudryavtseva E. A. *Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems*. European J. Math. 2022. V. 8. P. 1487–1549.
4. Кудрявцева Е. А., Ошемков А. А. *Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения*. Чебышевский сборник. 2001. Т. 21. № 2. С. 244–265.
5. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. *The structure of a Poisson action of  $\mathbb{R}^2$  on a four-dimensional symplectic manifold*. Selecta Math. Sov. 1987. V. 6. № 4. P. 365–396.
6. Kudryavtseva E. A., Martynchuk N. N. *Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori*. Regular and Chaotic Dynamics. 2021. V. 26. № 6. P. 732–741.
7. Bolsinov A. V., Kudryavtseva E. A., Guglielmi L. *Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems*. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2018. V. 376. № 2131. P. 20170424.
8. Bolsinov A. V., Richter P. H., Fomenko A. T. *The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top*. Sb. Math. 2000. V. 191. № 2. P. 151–188.
9. Kudryavtseva E. A., Lakshtanov E. L. *Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions*. Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge. 2006. P. 173–214.
10. Kalashnikov V. V. *Typical integrable Hamiltonian systems on a four-dimensional symplectic manifold*. Izv. Math. 1998. V. 62. № 2. P. 261–285.
11. Zung N. T. *A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems*. Comment. Math. Helv. 2000. V. 75. P. 271–283.
12. Kudryavtseva E. A., Onufrienko M. V. *Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group*. Russ. J. Math. Phys. 2023. V. 30. № 1. P. 76–94.
13. Ali A. Z., Kibkalo V. A., Kudryavtseva E. A., Onufrienko M. V. *Bifurcations in integrable Hamiltonian systems near corank-one singularities*. Differ. Eq. 2024. V. 60. № 10. P. 1311–1368.
14. Wassermann G. *Classification of singularities with compact Abelian symmetry*. Singularities Banach Center Publications. 1988. V. 20. P. 475–498.

15. Gelfreich V., Gelfreikh N. *Unique normal forms near a degenerate elliptic fixed point in two-parametric families of area-preserving maps*. Nonlinearity. 2014. V. 27. P. 1645–1667.
16. Kudryavtseva E. A., Lerman L. M. *Bifurcations in integrable systems with three degrees of freedom – I*. Proc. Steklov Inst. Math. 2024. V. 327.

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## ГЕНЕРАТОР СИММЕТРИЧНОГО ПРОЦЕССА ЛЕВИ С ДЕЛЬТА-ПОТЕНЦИАЛОМ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

*T. E. Абильдаев<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

**Введение.** Рассмотрим одномерный симметричный процесс Леви  $\xi(t)$ ,  $t \geq 0$ . Известно [1, гл. 2, § 2.4], что представление Леви – Хинчина характеристической функции  $\xi(t)$  имеет вид

$$\mathbf{E} e^{ip\xi(t)} = e^{-t\Psi(p)}, \quad \Psi(p) = \frac{\sigma^2 p^2}{2} + \int_{|y|>0} (1 - \cos(py)) \Pi(dy),$$

где  $\sigma^2 \geq 0$ , а  $\Pi$  – мера Леви процесса  $\xi(t)$  – симметричная  $\sigma$ -конечная мера, удовлетворяющая условию

$$\int_{|y|>0} \min(1, y^2) \Pi(dy) < \infty.$$

Напомним, что локальным временем  $L(t, x)$  до момента времени  $t$  процесса  $\xi(\tau)$  называется плотность в точке  $x$  его меры пребывания, то есть случайной меры  $\mu_t$ :  $\mu_t(\Gamma) = \text{mes} \{ \tau < t \mid \xi(\tau) \in \Gamma \}$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , относительно меры Лебега, если только эта плотность существует.

Будем предполагать, что у  $\xi(t)$  существует локальное время. Это эквивалентно ([2, гл. V, § 1], [3, гл. I, § 4.30]) условию

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{1 + \Psi(p)} < \infty. \tag{1}$$

Можно показать (как это было сделано для устойчивых процессов в [4, гл. I, § 4]), что локальное время  $L(t, x)$  процесса  $\xi(t)$  непрерывно по обеим переменным с вероятностью 1. Из этого следует, что почти наверное

$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(x - \xi(\tau)) d\tau. \tag{2}$$

Используя (2) и тот факт, что пределом последовательности  $1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(x)/(2\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  в смысле обобщенных функций является дельта-функция Дирака  $\delta(x)$ , можем формально записать

$$L(t, x) = \int_0^t \delta(x - \xi(\tau)) d\tau. \tag{3}$$

Напомним [2, гл. I], что процесс  $\xi(t)$  определяет семейство марковских процессов  $\{\xi_x(t)\}_{x \in \mathbb{R}}$ , где  $\xi_x(t) = x - \xi(t)$ , которое, в свою очередь, порождает сильно непрерывную полугруппу операторов в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$ , действующую на функциях из  $L_2(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$  по правилу

$$(T_t f)(x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t)).$$

Генератором полугруппы  $\{T_t\}$  является оператор  $\mathcal{A}$ , действующий на  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  как

$$(\mathcal{A}f)(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (f(x-y) - f(x) + yf'(x)1_{[-1,1]}(y)) \Pi(dy). \quad (4)$$

Теоретико-полугрупповой подход позволяет связать процесс  $\xi(t)$  с задачей Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = (\mathcal{A}u)(t, x) + V(x)u(t, x), \quad u(0, x) = f(x), \quad (5)$$

где  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , а  $V$  принадлежит достаточно “хорошему” классу функций (например  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ). Согласно формуле Фейнмана-Каца [5, ч. I, гл. 3] единственное решение данной задачи может быть представлено в виде

$$u(t, x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t)) e^{\int_0^t V(\xi_x(\tau)) d\tau}. \quad (6)$$

В то же время потенциал  $V$  при некоторых условиях индуцирует распределение

$$\frac{e^{\int_0^T V(\omega(\tau)) d\tau}}{\mathbf{E}e^{\int_0^T V(\omega(\tau)) d\tau}} \mathbf{P}_{T,x}(d\omega), \quad (7)$$

где  $\mathbf{P}_{T,x}$  – распределение, порожденное процессом  $\xi_x(t)$ ,  $t \leq T$ , на пространстве траекторий  $\xi_x(t)$  [5, ч. I, гл. 4]. В работе [6] было положено начало изучению предельных свойств подобных распределений, а сами они были названы штрафующими – неформально говоря, они накладывают экспоненциальный штраф, определяемый функцией  $V$ , на траектории процесса  $\xi_x(t)$ .

Заменим в задаче (5) потенциал  $V$  на  $\mu \delta(x - x_0)$ ,  $\mu > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Формально, пользуясь формулой Фейнмана–Каца, получаем, что единственным решением (5) является функция

$$u(t, x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t)) e^{\mu \int_0^t \delta(\xi_x(\tau) - x_0) d\tau},$$

или после подстановки (3)

$$u(t, x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t)) e^{\mu L(t, x - x_0)}. \quad (8)$$

Генератором же соответствующей полугруппы является оператор  $\mathcal{A} + \mu \delta(x - x_0)$ .

Далее формально распределение на пространстве траекторий  $\xi(t)$ ,  $t \leq T$ , соответствующее потенциальному  $\mu \delta(x - x_0)$ , имеет вид

$$\mathbf{Q}_{T,x}^\mu(d\omega) = \frac{e^{\mu L(T, x - x_0)}}{\mathbf{E}e^{\mu L(T, x - x_0)}} \mathbf{P}_{T,x}(d\omega). \quad (9)$$

Такая мера накладывает штраф на траектории процесса  $\xi(t)$  за непосещение точки  $x_0$ . Поэтому ее также уместно называть притягивающей – она сгущает траектории  $\xi(t)$  вокруг  $x_0$ .

В настоящей работе обобщается формула Фейнмана–Каца на случай потенциала  $\mu \delta(x - x_0)$ ,  $\mu > 0$ , а также строится и изучается распределение  $\mathbf{Q}_{T,x}^\mu$ .

Ранее генератор с дельта-потенциалом и соответствующее распределение на пространстве траекторий были построены в [7] для устойчивых процессов. А в работах [8, 9] был построен функционал вида

$$\int_0^t q(x - w(\tau)) d\tau,$$

где  $w$  – стандартный винеровский процесс, а  $q$  – удовлетворяющая некоторому условию обобщенная функция, и с его помощью обобщена формула Фейнмана–Каца на случай  $q$ -потенциала. Задача штрафования для отрицательного параметра  $\mu$  была изучена в работе [10].

**Результаты.** Обозначим через  $V_2^1(\mathbb{R})$  пространство функций из  $L_2(\mathbb{R})$ , для которых конечна норма  $|\cdot|_1$ , где

$$|\varphi|_1^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + \Psi^2(p)) |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp,$$

и положим

$$\mathcal{D}_0 = \{\varphi \in V_2^1(\mathbb{R}) : \varphi(x_0) = 0\}.$$

Пусть  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Определим функцию  $\psi_\lambda$ , полагая

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ipx}}{\Psi(p) + \lambda} dp.$$

В качестве области определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mu)$  оператора  $\mathcal{A}_\mu$  возьмем пространство

$$\mathcal{D}_0 \oplus \text{Lin}(\psi_\nu(\cdot - x_0)),$$

где константа  $\nu$  однозначно определяется соотношением

$$\mu \psi_\nu(0) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{\Psi(p) + \nu} = 1.$$

Для  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mu)$ ,  $u = \varphi + C\psi_\nu$ , положим

$$\mathcal{A}_\mu u = \mathcal{A}\varphi + \nu\psi_\nu(\cdot - x_0).$$

**Теорема 1.** *Оператор  $\mathcal{A}_\mu$  – самосопряженный.*

Спектральная теория позволяет определить [11, гл. 8, § 8.2] полугруппу операторов  $\{e^{t\mathcal{A}_\mu}\}_{t \geq 0}$  такую, что при  $f \in L_2(\mathbb{R})$  функция

$$u(t, x) = (e^{t\mathcal{A}_\mu} f)(x)$$

является единственным решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_\mu u, \quad u(0, x) = f(x), \tag{10}$$

в классе

$$\{u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid t \mapsto u(t, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R})), u(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}), u(t, \cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mu)\}.$$

Покажем, что для  $\{e^{t\mathcal{A}_\mu}\}$  справедливо вероятностное представление (6).

Пусть  $\{U_t\}_{t \geq 0}$  – семейство операторов, действующих на  $C_b(\mathbb{R})$  по формуле

$$(U_t f)(x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t))e^{\mu L(t, x - x_0)}, \quad f \in C_b(\mathbb{R}).$$

### Теорема 2.

1. Семейство  $\{U_t\}$  задает  $C_0$ -полугруппу в  $L_2(\mathbb{R})$  с генератором  $\mathcal{A}_\mu$ .

2. Для любой  $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$  справедлива формула

$$(e^{t\mathcal{A}_\mu} f)(x) = \mathbf{E}f(\xi_x(t))e^{\mu L(t, x - x_0)}.$$

Обозначим через  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  фильтрацию, порожденную процессом  $\xi(t)$ . Используя собственную функцию  $\mathcal{A}_\mu$ , построим  $\mathcal{F}_t$ -martингал. Пусть

$$\eta_\nu(t, x) = e^{-\nu t} \psi_\nu(\xi_x(t) - x_0) e^{\mu L(t, x - x_0)}.$$

**Теорема 3.** Процесс  $\eta_\nu(t, x)$  является  $\mathcal{F}_t$ -martингалом.

Следующее утверждение является одним из следствий мартингальности процесса  $\eta_\nu(t, x)$ .

**Теорема 4.** Для любой  $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$L_2 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\nu t} \mathbf{E}f(\xi_x(t))e^{\mu L(t, x - x_0)} = \frac{(f, \psi_\nu(\cdot - x_0))}{\|\psi_\nu\|_2^2} \psi_\nu(x - x_0).$$

Напомним, что мера  $\mathbf{P}_{T,x}$  процесса  $\xi_x(t)$ ,  $t \leq T$ , есть мера на пространстве траекторий  $\Omega_{T,x} = \{\omega \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}) \mid \omega(0) = x\}$ , где  $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R})$  – пространство Скорохода, то есть снабженное метрикой Скорохода множество непрерывных справа и имеющих пределы слева вещественнонезначимых функций на  $[0, T]$ .

Обозначим через  $p_\mu(t, x, y)$  ядро оператора  $e^{t\mathcal{A}_\mu}$ . Введем также нормализующую функцию  $Z_\mu(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , положив

$$Z_\mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t, x, y) dy.$$

Теперь введем на  $\Omega_{T,x}$  меру  $\mathbf{Q}_{T,x}^\mu$ , задаваемую на цилиндрических множествах формулой

$$\mathbf{Q}_{T,x}^\mu\{\omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_n) \in B_n\} =$$

$$= \frac{1}{Z_\mu(T, x)} \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} p_\mu(t_1, x, x_1) \prod_{k=2}^n p_\mu(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) Z_\mu(T - t_n, x_n) d\mathbf{x},$$

где  $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Для семейства распределений  $\{\mathbf{Q}_{T,x}^\mu\}_{T \geq 0}$  справедлива следующая предельная теорема.

**Теорема 5.** Плотности конечномерных распределений  $\{\mathbf{Q}_{T,x}^\mu\}$  при  $T \rightarrow \infty$  сходятся поточечно и в метрике  $L_1$  к плотностям соответствующих конечномерных распределений  $\mathbf{P}_x^\mu$  марковского процесса  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$ , с переходной плотностью

$$\rho_\mu(t, x, y) = e^{-\nu t} \frac{p_\mu(t, x, y)\psi_\nu(y - x_0)}{\psi_\nu(x - x_0)}$$

и инвариантным распределением

$$\frac{\psi_\nu^2(x' - x_0)}{\|\psi_\nu\|_2^2} dx'.$$

Кроме того, последовательность  $\{\mathbf{Q}_{T,x}^\mu\}$  при  $T \rightarrow \infty$  слабо сходится к  $\mathbf{P}_x^\mu$ .

**Следствие 1.** Конечномерные распределения  $\mathbf{Q}_{T,x}^\mu$  при  $T \rightarrow \infty$  сходятся по полной вариации к соответствующим конечномерным распределениям  $\mathbf{P}_x^\mu$ .

Рассмотрим распределение  $\mathbf{R}_{T,x}^\mu$  случайной величины  $\omega(T)$ . Это распределение имеет смысл распределения точки, в которую перешла испытывающая притяжение траектория процесса  $\xi_x(t)$  за время  $T$ .

**Теорема 6.** Плотность  $\mathbf{r}_{T,x}^\mu$  распределения  $\mathbf{R}_{T,x}^\mu$  при  $T \rightarrow \infty$  сходится поточечно и в  $L_1(\mathbb{R})$  к плотности  $\nu\psi_\nu(\cdot - x_0)$ . При этом справедливо неравенство

$$\|\mathbf{r}_{T,x}^\mu - \nu\psi_\nu(\cdot - x_0)\|_1 \leq \frac{2(1 + z_\mu(T, x))}{Z_\mu(T, x)},$$

где

$$z_\mu(T, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda T} \frac{\psi_\lambda(x - x_0)\psi_\lambda(x' - x_0)}{(\lambda - \nu)(\psi_\nu, \psi_\lambda)} d\lambda dx'.$$

**Следствие 2.** Распределение  $\mathbf{R}_{T,x}^\mu$  сходится по полной вариации к распределению

$$\nu\psi_\nu(y - x_0) dy.$$

Автор выражает глубокую признательность Н. В. Смородиной за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского международного математического центра им. Леонарда Эйлера (Соглашение № 075-15-2022-289 от 06.04.2022).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Applebaum D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2009.
2. Bertoin J. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.
3. Rogers L. C. G., Williams D. *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 1: Foundations*. Cambridge University Press, 2000.
4. Бородин А. Н., Ибрагимов И. А. *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*. Тр. МИАН СССР. 1994. Т. 195. С. 3–285.
5. Lorinczi J., Hiroshima F., Betz V. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space: With Applications to Rigorous Quantum Field Theory*. De Gruyter, 2011.

6. Roynette B., Vallois P., Yor M. *Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights, I.* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 2005. T. 43. № 2. C. 171–246.
7. Cranston M., Molchanov S., Squartini N. *Point potential for the generator of a stable process.* J. of Functional Analysis. 2014. T. 3. № 1. C. 1238–1256.
8. Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. *О некоторых свойствах дробной производной броуновского локального времени.* Труды МИАН. 2024. Т. 324. С. 109–123.
9. Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. *Одно замечание к формуле Ито.* Теория вероятн. и ее примен. 2024. Т. 69. № 2. С. 285–304.
10. Takeda S., Yano K. *Local time penalizations with various clocks for Levy processes.* Electronic J. Probability. 2023. T. 28. C. 1–35.
11. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Лань, 2010.

# МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КРИТЕРИЙ ХЕЛЛЕР–ХЕЛЛЕРА–ГОРФИН ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ

*A. P. Бузин*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

В работе [1] Кресси и Рид ввели общий критерий, обобщающий критерий хи-квадрат. Однако при применении подобного подхода к данным общего вида существенным аспектом, влияющим на качество критерия, является выбор отрезков разбиения. Эта проблема остается актуальной для всех видов модификаций критериев Кресси–Рида, но нас она будет интересовать применительно к задаче однородности.

Один из вариантов решения данной проблемы, значительно повышающих мощность, для критериев проверки однородности и независимости приведен в работе [2]; будем называть данный подход ННГ. В этом подходе было предложено рассматривать всевозможные разбиения и суммировать или брать максимум у соответствующих разбиениям статистик критериев Кресси–Рида (в оригинальной работе рассматривались лишь два частных случаев: критерий отношения правдоподобий и хи-квадрат).

Однако в подходе ННГ не удается описать предельное распределение статистики, что приводит к большим вычислительным затратам. В настоящей работе приводится модификация критерия, в которой удается найти предельное распределение статистики для гипотезы однородности.

Пусть  $F_1, \dots, F_m$  – непрерывные функции распределения, при каждом  $j = 1, \dots, m$ ,  $X_{j,1}, \dots, X_{j,n_j} \sim F_j$ , – наборы независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин, независимые между собой.

Рассматривается гипотеза

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_m$$

с общей альтернативой  $H_1$ .

Положим  $n := n_1 + n_2 + \dots + n_m$ , везде далее будем считать что  $n_j/n =: \alpha_{j,n} \rightarrow \alpha_j$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Обозначим эмпирические функции распределения (ЭФР) для  $X_{j,i}$ ,  $i = 1, \dots, n_j$ , через  $\hat{F}_{j,n_j}$ , а эмпирическую функцию распределения объединенной выборки –  $\hat{H}_n$ :

$$\hat{H}_n := \alpha_{1,n} \hat{F}_{1,n_1} + \alpha_{2,n} \hat{F}_{2,n_2} + \dots + \alpha_{m,n} \hat{F}_{m,n_m}.$$

Пусть  $T$  – некоторое разбиение  $\mathbb{R}$  на непересекающиеся интервалы  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Обозначим

$$\chi^2(T) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{\left( \nu_{i,j} - n_j \frac{\nu_{i,1} + \dots + \nu_{i,k}}{n} \right)^2}{n_j \frac{\nu_{i,1} + \dots + \nu_{i,k}}{n}} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{\left( \hat{F}_{j,n_j}(\Delta_i) - \hat{H}_n(\Delta_i) \right)^2 n_j}{\hat{H}_n(\Delta_i)},$$

где  $\nu_{i,j}$  – число точек  $X_{j,i}$  в интервале  $\Delta_i$ ;  $\mathcal{T}_{\varepsilon,n}$  – множество таких разбиений  $T$ , что  $\hat{H}_n(\Delta_i(T)) > \varepsilon$ . Будем рассматривать статистики

$$D_\varepsilon := \sup_{T \in \mathcal{T}_{\varepsilon,n}} \chi^2(T).$$

Иными словами, в отличие от подхода Хеллер, Хеллера и Горфин рассматриваем лишь разбиения на те множества, которые содержат достаточное суммарное количество наблюдений.

Основная цель настоящей работы – исследовать предельное поведение статистики  $D_\varepsilon$  при  $n_1, n_2$ , стремящихся к бесконечности.

Введем некоторые обозначения:  $H(x) := \sum_{j=1}^m \alpha_j F_j(x)$ ;  $G(\Delta) := G(b) - G(a)$  – приращение функции  $G$  на полуинтервале  $\Delta = (a, b]$ .

Для положительных последовательностей  $\varepsilon_n$  стремящихся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , так что  $\sqrt{n}\varepsilon_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , будем рассматривать статистику

$$D_0 := \sup_{T \in \mathcal{T}_{\varepsilon_n, n}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{(\widehat{F}_{j,n_j}(\Delta_i) - \widehat{H}_n(\Delta_i))^2 n_j}{\widehat{H}_n(\Delta_i) \ln^2(|\Delta_i|/2)}.$$

**Теорема 1.** Справедлива следующая сходимость:

$$\frac{D_\varepsilon}{n} \xrightarrow{P} \sup_{T: H(\Delta_i(T)) > \varepsilon} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{(F_j(\Delta_i) - H(\Delta_i))^2 \alpha_j}{H(\Delta_i)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 2.** При верной гипотезе  $H_0$  распределение  $D_\varepsilon$  не зависит от  $F = F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Теорема 3.** При гипотезе выполнена следующая сходимость:

$$D_\varepsilon \xrightarrow{d} \sup_{\tilde{T}: |\Delta_i| > \varepsilon} \left( \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^k \frac{(\widetilde{W}_j^0(\Delta_i))^2}{|\Delta_i|} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\widetilde{W}_j^0$ ,  $j \leq m-1$ , –  $(m-1)$ -мерный броуновский мост.

**Теорема 4.** Пусть набор  $\sqrt{n}|\alpha_{j,n} - \alpha_j|$  ограничен при всех  $j = 1, 2, \dots, m$  и при всех  $n \in \mathbb{N}$ , тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sqrt{n} \left| \frac{D_\varepsilon}{n} - \sup_{T: H(\Delta_i(T)) > \varepsilon} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{(F_j(\Delta_i) - H(\Delta_i))^2 \alpha_j}{H(\Delta_i)} \right| > x \right) \leq 1 - G_\varepsilon(x),$$

где  $G_\varepsilon$  – некоторая функция распределения.

**Теорема 5.** Справедлива следующая сходимость:

$$\frac{D_0}{n} \xrightarrow{d} \sup_{T: H(\Delta_i(T)) > 0} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{(F_j(\Delta_i) - H(\Delta_i))^2 \alpha_j}{H(\Delta_i) \ln^2(H(\Delta_i)/2)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 6.** При верной гипотезе  $H_0$  распределение случайной величины  $D_0$  не зависит от  $F = F_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Теорема 7.** При гипотезе выполнена следующая сходимость:

$$D_0 \xrightarrow{d} \sup_{\tilde{T}: |\Delta_i| > 0} \left( \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^k \frac{(\widetilde{W}_j^0(\Delta_i))^2}{|\Delta_i| \ln^2(|\Delta_i|/2)} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\widetilde{W}_j^0$ ,  $j \leq m - 1$ , —  $(m - 1)$ -мерный броуновский мост.

**Теорема 8.** Пусть набор  $\sqrt{n}|\alpha_{j,n} - \alpha_j|$  ограничен при всех  $j = 1, 2, \dots, m$  и при всех  $n \in \mathbb{N}$ , тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sqrt{n} \left| \frac{D_0}{n} - \sup_{T: H(\Delta_i(T)) > \varepsilon} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{(F_j(\Delta_i) - H(\Delta_i))^2 \alpha_j}{H(\Delta_i) \ln^2(H(\Delta_i)/2)} \right| > x \right) \leq 1 - G_0(x),$$

где  $G$  — некоторая функция распределения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cressie N., Read T. R. C. *Multinomial goodness-of-fit tests*. J. Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 1984. V. 46. № 3. C. 440–464.
2. Heller R. [et al.]. *Consistent distribution-free K-sample and independence tests for univariate random variables*. J. Machine Learning Research. 2016. V. 17. № 29. C. 1–54.

# СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПО МЕТРИКЕ КОЛМОГОРОВА–СМИРНОВА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ СОШНИКОВА ДЛЯ СИНУС-ПРОЦЕССА

*A. I. Буфетов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

Скорость сходимости к гауссову распределению по метрике Колмогорова–Смирнова для аддитивных функционалов синус-процесса, отвечающих функциям, подвергнутым гомотетии с коэффициентом  $R > 1$ , оценивается сверху величиной  $c/\log R$  в случае гладких функций и величиной  $c/R$  в случае функций, голоморфных в полосе.

Пусть  $\mathsf{P}_{\mathcal{S}}$  — синус-процесс, то есть детерминантная мера на пространстве  $\text{Conf}(\mathbb{R})$  конфигураций на  $\mathbb{R}$ , отвечающая синус-ядру

$$\mathcal{S}(x, y) = \frac{\sin \pi(x - y)}{\pi(x - y)}.$$

Для борелевской функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем символом

$$S_f(X) = \sum_{x \in X} f(x)$$

обозначим аддитивный функционал на  $\text{Conf}(\mathbb{R})$ , отвечающий функции  $f$ . Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $S_f \in L_1(\text{Conf}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_{\mathcal{S}})$ , причем

$$\mathbb{E}_{\mathsf{P}_{\mathcal{S}}} S_f = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Положим  $\bar{S}_f = S_f - \mathbb{E}_{\mathsf{P}_{\mathcal{S}}} S_f$  и напомним, что

$$\mathbb{E} |\bar{S}_f|^2 = \frac{1}{2} \iint |f(x) - f(y)|^2 \cdot |\mathcal{S}(x, y)|^2 dx dy. \quad (1)$$

Равенство (1) позволяет по непрерывности определить  $\bar{S}_f$  для всех  $f$  таких, что интеграл в правой части (1) сходится. Символом  $f(\cdot/R)$  обозначим функцию, значение которой в точке  $t$  равно  $f(t/R)$ . Определим пространство  $\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$  как пополнение семейства гладких функций с компактным носителем на  $\mathbb{R}$  по отношению к норме  $\|f\|_{\dot{H}_{1/2}}$ , заданной формулой

$$\|f\|_{\dot{H}_{1/2}}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\xi| \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Функции  $f \in \dot{H}_{1/2}$  сопоставим функции  $f_+, f_-$ , определенные формулами  $\widehat{f_+} = \widehat{f} \cdot \chi_{[0, +\infty)}$ ,  $\widehat{f_-} = \widehat{f} \cdot \chi_{(-\infty, 0)}$ . Положим  $\mathring{f} = f_- - f_+$ .

**Теорема 1.** *Если  $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$ , а  $\mathring{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$ , то семейство аддитивных функционалов  $\bar{S}_{f(\cdot/R)}$  сходится по распределению к нормальному закону  $\mathcal{N}(0, \|f\|_{\dot{H}_{1/2}}^2 / 4\pi^2)$ .*

Теорема 1 доказана А. Б. Сошниковым [1] в несколько более стеснительных условиях на функцию  $f$ . Наша следующая цель — установить скорость сходимости в теореме 1. Напомним, что расстояние Колмогорова–Смирнова  $d_{KS}$  между двумя функциями распределения на  $\mathbb{R}$  есть по определению супремум разности наших функций распределения. Далее, под  $d_{KS}(Y, \mathcal{N}(0, 1))$  будем понимать расстояние Колмогорова–Смирнова от распределения случайной величины  $Y$  до стандартного нормального закона.

Определим пространство  $\dot{H}_1(\mathbb{R})$  как пополнение семейства гладких функций с компактным носителем по норме  $\|f\|_{\dot{H}_1}$ , заданной формулой

$$\|f\|_{\dot{H}_{1/2}}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt.$$

**Теорема 2** [2]. *Пусть  $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R}) \cap \dot{H}_1(\mathbb{R})$ , причем  $\widehat{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$ . Найдется константа  $c(f)$ , зависящая лишь от  $\|f\|_{\dot{H}_{1/2}}$ ,  $\|f\|_{\dot{H}_1}$ ,  $\|\widehat{f}\|_{L_\infty}$ , такая, что при всех  $R > 1$  имеем*

$$d_{KS}\left(\overline{S}_{f(\cdot/R)}, \mathcal{N}(0, \|f\|_{\dot{H}_{1/2}}^2 / 4\pi^2)\right) \leq \frac{c(f)}{\log R}.$$

Сходимость быстрее, если  $\widehat{f}$  голоморфна в полосе. Для  $\delta > 0$  символом  $\mathcal{HL}(\delta)$  обозначим пространство функций  $f$ , ограниченных и голоморфных в полосе  $\{|\operatorname{Im} z| < \delta\}$  и таких, что

$$\sup_{|\delta_1| < \delta} \int_{\mathbb{R}} |f'(t + i\delta_1)|^2 dt < +\infty.$$

Нормируем пространство  $\mathcal{HL}(\delta)$ , положив

$$\|f\|_{\mathcal{HL}(\delta)} = \sup_{|\operatorname{Im} z| < \delta} |f(z)| + \sup_{|\delta_1| < \delta} \left( \int_{\mathbb{R}} |f'(t + i\delta_1)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

**Теорема 3.** *Пусть  $\delta > 0$ . Для  $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$  такой, что  $\widehat{f} \in \mathcal{HL}(\delta)$ , найдется константа  $c(f)$ , зависящая лишь от  $\delta$ ,  $\|\widehat{f}\|_{\mathcal{HL}(\delta)}$ , такая, что при всех  $R > 1$  имеем*

$$d_{KS}\left(\overline{S}_{f(\cdot/R)}, \mathcal{N}(0, \|f\|_{\dot{H}_{1/2}}^2 / 4\pi^2)\right) \leq \frac{c(f)}{R}.$$

Ключевую роль в доказательстве теорем 2, 3 играет скейлинговый предел теоремы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса [2–6]. Напомним, что оператор Ганкеля  $\mathfrak{H}(h)$ , отвечающий функции  $h$ , задается формулой

$$\mathfrak{H}(h)\varphi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{h}(s+t)\varphi(t) dt.$$

Обозначим

$$V_f(\lambda) = \det \left( 1 - \chi_{(1, +\infty)} \mathfrak{H} \left( \exp \left( \lambda \widehat{f} \left( \frac{\cdot}{2\pi} \right) \right) \right) \right) \mathfrak{H} \left( \exp \left( -\lambda \widehat{f} \left( \frac{\cdot}{2\pi} \right) \right) \right) \chi_{(1, +\infty)}.$$

*Предложение 1* [2, 6]. Если  $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$  такова, что  $\mathring{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$ , то

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}_S} \exp(\lambda \overline{S}_f) = \exp\left(\frac{\lambda^2 \|f\|_{\dot{H}_{1/2}}^2}{4\pi^2}\right) \cdot V_f(\lambda).$$

Имеем оценку

$$V_f(\lambda) \leq \exp\left(\left\|\chi_{(1,+\infty)} \mathfrak{H}\left(\exp\left(\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\right)\right\|_{HS} \cdot \left\|\mathfrak{H}\left(\exp\left(-\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\right) \chi_{(1,+\infty)}\right\|_{HS}\right).$$

Для  $R \geq 1$  введем на пространстве  $\dot{H}_{1/2}$  полуформу  $\|h\|_{\mathcal{H}(R)}$  формулой

$$\|h\|_{\mathcal{H}(R)}^2 = \int_1^{+\infty} \xi |\widehat{h}(\xi + R)|^2 d\xi.$$

Имеем

$$\|\chi_{(1,+\infty)} \mathfrak{H}(h)\|_{HS} = \|h\|_{\mathcal{H}(1)}, \quad \|h\|_{\mathcal{H}(R)} = \|h(\cdot/R)\|_{\mathcal{H}(1)}, \quad (2)$$

$$|V_f(\cdot/R)(\lambda)| \leq \exp\left(\left\|\exp\left(\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}(R)} \cdot \left\|\exp\left(-\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}(R)}\right).$$

Из (2) видно, что  $\chi_{(1,+\infty)} \mathfrak{H}(\exp(\lambda \mathring{f})) \in HS$ , коль скоро  $\exp(\lambda \mathring{f}) \in \dot{H}_{1/2}$ , что, в свою очередь, имеет место при  $\mathring{f} \in \dot{H}_{1/2} \cap L_\infty$ ; видно также, что

$$\left\|\chi_{(1,+\infty)} \mathfrak{H}\left(\exp\left(\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right)\right)\right\|_{HS} \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow +\infty$ , если  $\mathring{f} \in \dot{H}_{1/2} \cap L_\infty$ . Теорема 1 доказана. Переходим к доказательству теорем 2 и 3. Сглаживающее неравенство Эссеена в форме Феллера [7, 8] дает

*Следствие 1.* Пусть  $\varkappa_1, \varkappa_0, T \in \mathbb{R}_+$ , а  $X$  — случайная величина, чья характеристическая функция  $f_X(\xi) = \mathbb{E} \exp(i\xi X)$  имеет вид  $f_X(\xi) = \exp(-\xi^2/2)W(\xi)$ , причем:

$$\sup_{|\xi| \leq 1} |W'(\xi)| = \varkappa_1, \quad \sup_{|\xi| \leq T} |W(\xi) - 1| = \varkappa_0.$$

Тогда

$$d_{KS}(X, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \varkappa_0 + \varkappa_1 + \frac{4}{T}.$$

Оценки на скорость сходимости сводятся к оценкам норм

$$\left\|\chi_{(1,+\infty)} \mathfrak{H}\left(\exp\left(\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\right)\right\|_{HS}, \quad \left\|\mathfrak{H}\left(\exp\left(-\lambda \mathring{f}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\right) \chi_{(1,+\infty)}\right\|_{HS}.$$

*Доказательство теоремы 2.* На пересечении  $\dot{H}_1 \cap L_\infty$  зададим норму формулой  $\|f\|_{\dot{H}_1 \cap L_\infty} = \|f\|_{\dot{H}_1} + \|f\|_{L_\infty}$ . Если  $f \in \dot{H}_1 \cap L_\infty$ , то и  $\exp(f) \in \dot{H}_1 \cap L_\infty$  причем

$$\|\exp(f)\|_{\dot{H}_1 \cap L_\infty} \leq (1 + \|f\|_{\dot{H}_1 \cap L_\infty}) \cdot \exp(\|f\|_{\dot{H}_1 \cap L_\infty}).$$

Далее, из определений ясно, что  $\|f\|_{\mathcal{H}(R)} \leq \|f\|_{\dot{H}_1}/\sqrt{R}$ , откуда, в свою очередь, видно неравенство

$$\|\exp(\lambda \dot{f}(\cdot/R))\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{(1 + |\lambda| \cdot \|\dot{f}\|_{\dot{H}_1 \cap L_\infty}) \exp(\lambda \|\dot{f}\|_{\dot{H}_1 \cap L_\infty})}{\sqrt{R}}.$$

Для оценки производной  $(d/d\lambda)V_f(\lambda)$  при  $\lambda \in [-1, 1]$  воспользуемся формулой Коши

$$\frac{d}{d\lambda} V_f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-\lambda|=1} \frac{V_f(\xi)}{(\xi - \lambda)^2} d\xi.$$

Из следствия 1 вытекает теперь теорема 2.

*Доказательство теоремы 3.* Из определения ясны такие свойства пространства  $\mathcal{HL}(\delta)$ :

1) если  $f \in \mathcal{HL}(\delta)$ , то и  $\exp(f) \in \mathcal{HL}(\delta)$ , причем

$$\|\exp(f)\|_{\mathcal{HL}(\delta)} \leq \exp(\|f\|_{\mathcal{HL}(\delta)}) \cdot (1 + \|f\|_{\mathcal{HL}(\delta)});$$

2) для любого  $\delta_1 < \delta$  и любой  $f \in \mathcal{HL}(\delta)$  имеем:

$$\|f\|_{\mathcal{H}(R)} \leq \exp(-\delta_1 R) \|f\|_{\mathcal{HL}(\delta)};$$

3) таким образом, если  $\dot{f} \in \mathcal{HL}(\delta)$ , то для любого  $\delta_1 < \delta$  найдется константа  $A(\dot{f})$ , зависящая лишь от  $\delta$ ,  $\|\dot{f}\|_{\mathcal{HL}(\delta)}$ , такая, что

$$\|\exp(\lambda \dot{f}(\cdot/R))\|_{\mathcal{H}} \leq \exp(A|\lambda| - \delta_1 R).$$

Производную  $(d/d\lambda)V_f(\lambda)$  при  $\lambda \in [-1, 1]$  также оцениваем с помощью формулы Коши. Из следствия 1 вытекает теперь теорема 3.

Для детерминантного процесса с ядром Бесселя скорость сходимости в Центральной предельной теореме оценил С. М. Горбунов [9].

Автор глубоко благодарен А. В. Клименко за полезные обсуждения.

Автор является победителем конкурса «Лидер» Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» и благодарит жюри и спонсоров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта (Соглашение № 075-15-2024-631).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Soshnikov A. *The central limit theorem for local linear statistics in classical compact groups and related combinatorial identities*. Ann. Probab. 2000. V. 28. № 3. P. 1353–1370.
2. Bufetov A. I. *The sine-process has excess one*. arXiv:1912.13454. 57 p.
3. Borodin A., Okounkov A. *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants*. Integr. Equ. Oper. Theory. 2000. V. 37. P. 386–396.
4. Geronimo J. F., Case K. M. *Scattering theory and polynomials orthogonal on the unit circle*. J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 299–310.

5. Basor E., Chen Y. *A Note on Wiener-Hopf Determinants and the Borodin-Okounkov Identity*. arXiv:math/0202062. 9 pp.
6. Буфетов А. И. *Среднее значение мультипликативного функционала синус-процесса*. Функц. анализ и его прил. 2024. V. 58. № 2. P. 23–33.
7. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее применения. В 2 т.* М.: Мир, 1984. Т. 2. 738 с.
8. Петров В. В. *Пределевые теоремы для сумм независимых случайных величин*. М.: Наука, 1987. 320 с.
9. Горбунов С. М. *Скорость сходимости в Центральной предельной теореме для детерминантного точечного процесса с ядром Бесселя*. Матем. сб. (принято к печати). arXiv:2403.16219. 24 р.

# КРУГОВОЙ ЗАКОН ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

*Д. В. Колесников*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

В работе [1] введен класс случайных матриц, равномерно распределенных на единичных  $\ell_p^m(\ell_q^n)$ -шарах, порожденных нормой (квазинормой)

$$\|x\|_{p,q} = \left\| \left( \| (x_{i,j})_{j=1}^n \|_q \right)_{i=1}^m \right\|_p = \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}.$$

Эмпирическая спектральная мера случайной матрицы  $X_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$  с собственными значениями  $\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$  определяется как

$$\mu_{X_n} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k^{(n)}},$$

где  $\delta_z$  — точечная мера Дирака в точке  $z \in \mathbb{C}$ .

Покажем, что в случае  $m = n$  и при  $p \in (0, \infty]$ ,  $q \in (0, \infty)$ , несмотря на зависимость элементов, эмпирическая спектральная мера рассматриваемых случайных матриц асимптотически подчиняется круговому закону Гирко [2]. При этом, в отличие от нормировочной константы  $c_n = 1/\sqrt{n}$ , возникающей в классическом случае, в рассматриваемой нами ситуации нормировочная константа имеет вид

$$c_n = n^{1/p+1/q-1/2}.$$

**Теорема 1.** Пусть случайная матрица  $\mathbf{X}$  равномерно распределена на единичном шаре  $B_{p,q}^{n,n} := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \|X\|_{p,q} \leq 1\}$ , где  $p \in (0, \infty]$ ,  $q \in (0, \infty]$ . Обозначим через  $\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$  собственные значения матрицы  $c_n \mathbf{X}$ , где  $c_n = n^{1/p+1/q-1/2}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  эмпирическая спектральная мера

$$\mu_{c_n \mathbf{X}} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j^{(n)}}$$

слабо сходится по вероятности к равномерной мере Лебега на круге в  $\mathbb{C}$  радиуса  $\sqrt{\mathbb{D}(d_q)}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Juhos M., Kabluchko Z., Prochno J. *Limit theorems for mixed-norm sequence spaces with applications to volume distribution*. Electron. J. Probab. 2024. V. 29. № 1158. 42 p.
2. Girko V. L. *The circular law*. Theory of Probability and its Applications. 1984. V. 29. № 4. P. 669–679.

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ПРОЦЕССА ОЖИДАНИЯ ЛИНДЛИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МАКСИМУМОВ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

C. B. Малов<sup>1,2</sup>, M. I. Барон<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

<sup>3</sup>Американский университет, Вашингтон, США

В работе представлены некоторые свойства процесса ожидания Линдли [1] (см. также [2, гл. VI, § 9]), известного еще как процесс кумулятивных сумм (CUSUM). Помимо теории очередей следует отметить ключевую роль данного процесса в задаче распознавания разладки [3, 4], а также в некоторых задачах контроля качества [5, 6].

Пусть  $Y_1, Y_2, \dots$  – независимые и одинаково распределенные случайные величины. Процесс ожидания определяется следующим образом:

$$W_0 = 0 \quad \text{и} \quad W_n = S_n - \min_{k \leq n} S_k \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$  – последовательные суммы, определяющие процесс случайного блуждания ( $S_0 = 0$ ). Поскольку

$$W_n = \max_{k \leq n} (S_n - S_k),$$

распределение  $W_n$  совпадает с распределением последовательного максимума случайного блуждания, для которого выполняется равенство Спитцера [7]

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \phi_n(u) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \psi_n^+(u) \right], \quad (1)$$

где  $\psi_n^+(u) = \mathbb{E} e^{iuS_n^+}$ ,  $\phi_n(u) = \mathbb{E} e^{iuW_n}$  – характеристические функции случайных величин  $S_n^+ = \max(S_n, 0)$  и  $W_n$  соответственно. В контексте данной работы используем  $W_n$ , а не последовательные максимумы случайного блуждания  $M_n = \max_{k \leq n} S_k$  ввиду наличия рекурсивного представления

$$W_0 = 0, \quad W_{n+1} = \max\{W_n + Y_{n+1}, 0\}, \quad (2)$$

хотя все результаты о частных распределениях  $W_n$  остаются верными и для распределений  $M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Наиболее известным следствием равенства (1) является формула, связывающая математические ожидания  $W_n$  и  $S_n^+$

$$\mathbb{E} W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{E} S_k^+,$$

получаемое дифференцированием (1) в окрестности  $u = 0$ . Дальнейшее дифференцирование (1) позволяет получить формулу для вычисления дисперсии  $W_n$ :

$$\mathbb{V}ar W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{V}ar S_k^+ + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\mathbb{E} S_k^+)^2 - \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq n: \\ k_1 + k_2 > n}} \frac{1}{k_1 k_2} \mathbb{E} S_{k_1}^+ \mathbb{E} S_{k_2}^+,$$

а дифференцирование экспоненты с использованием формул Фаа-ди-Брюно – соответствующее представление производящей функции моментов, в случае ее существования:

$$\mathbb{E}e^{\lambda W_n} = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n): \\ \sum_{j=1}^n j k_j = n}} \prod_{r=1}^n \frac{(\mathbb{E}e^{\lambda S_r^+})^{k_r}}{r^{k_r} k_r!}.$$

Это представление и будет основным предметом изучения в данной работе.

Применение формулы Фаа-ди-Брюно для вычисления кратных производных дает представление экспоненциального момента процесса  $W_n$  в терминах полиномов Белла [8, 9]. Полные экспоненциальные полиномы Белла определяются следующим образом:

$$B_d(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^d B_{dk}(x_1, \dots, x_{d-k+1}),$$

где

$$B_{dk}(x_1, \dots, x_{d-k+1}) = d! \sum_{(m_1, \dots, m_d) \in \mathcal{D}_{dk}} \prod_{i=1}^{d-k+1} \frac{x_i^{m_i}}{(i!)^{m_i} m_i!} -$$

неполные экспоненциальные полиномы Белла. Производящая функция моментов  $W_n$  допускает следующее представление в терминах полиномов Белла:

$$M_d(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda W_d} = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_d): \\ \sum_{j=1}^d j m_j = d}} \prod_{r=1}^d \frac{(\mathbb{E}e^{\lambda S_r^+})^{m_r}}{r^{m_r} m_r!} = \frac{1}{d!} B_d(0! \mathbb{E}e^{\lambda S_1^+}, \dots, (d-1)! \mathbb{E}e^{\lambda S_d^+}).$$

Известно, что полиномы Белла могут быть получены рекурсивно (см. [10, теорема 1]):

$$B_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(y_1, \dots, y_{n-k}) y_{k+1}.$$

Отметим, что данная формула неприменима для вычисления  $\mathbb{E}e^{\lambda W_n}$  при больших  $n$ , поэтому рассмотрим нормированные специальным образом полиномы Белла

$$\tilde{B}_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} B_n(0! x_1, \dots, (n-1)! x_n),$$

напрямую связанные с производящей функцией моментов  $W_n$ :

$$\mathbb{E}e^{\lambda W_n} = \tilde{B}_n(\mathbb{E}e^{\lambda S_1^+}, \dots, \mathbb{E}e^{\lambda S_n^+}),$$

при  $d \in \mathbb{N}$ . Простая рекурсивная формула

$$\tilde{B}_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^n \tilde{B}_k(x_1, \dots, x_k) x_{n-k+1}$$

позволяет вычислять  $\mathbb{E}e^{\lambda W_n}$  на базе известных значений  $\mathbb{E}e^{\lambda S_k^+}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , даже при больших  $n$ .

Далее предположим, что существует  $\lambda_0 > 0$  (не умаляя общности будем считать, что  $\lambda_0 = 1$ ):

$$\mathbb{E}e^{\lambda_0 Y_1} = 1. \tag{3}$$

Принимая во внимание выпуклость экспоненциальной функции и неравенство Йенсена, получаем, что

$$\mathbb{E}Y_1 < 0.$$

Рассмотрим случайный процесс  $U_n = e^{W_n}$ , допускающий ввиду (2) следующее рекурсивное представление:

$$U_0 = 1, \quad U_{n+1} = \max\{1, U_n e^{Y_{n+1}}\}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\{U_{n+1} \mid U_1, \dots, U_n\} \geq U_n \mathbb{E}e^{Y_{n+1}} = U_n,$$

а следовательно,  $U_n$  – неотрицательный субмартингал по отношению к естественной фильтрации. По неравенству Дуба для субмартингалов получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\max_{[0,n]} W_t \geq h\right) = \mathbb{P}\left(\max_{[0,n]} U_t \geq e^h\right) \leq e^{-h} \mathbb{E}U_n = e^{-h} \mathbb{E}e^{W_n}. \quad (4)$$

Вычисление компенсатора субмартингала  $U_n$

$$\tilde{U}_n = \mathbb{E}e^{Y_1} + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left((1 - uZ)\mathbb{I}_{\{Z \leq 1/u\}}\right) \Big|_{u=U_{k-1}},$$

с учетом свойства неубывания функции  $Q(u) = \mathbb{E}((1 - uZ)\mathbb{I}_{\{Z \leq 1/u\}})$ , где  $Z = e^{Y_1}$ , дает верхнюю границу экспоненциального момента  $W_n$ :

$$\mathbb{E}e^{W_n} = \mathbb{E}\tilde{U}_n \leq \mathbb{E}e^{Y_1} + nQ(1) \leq 1 + n\mathbb{E}(1 - e^{Y_1})^+.$$

Кроме того, по неравенству Дуба находим, что

$$\mathbb{P}\left(\max_{[0,n]} W_t \geq h\right) \leq e^{-h} (1 + n\mathbb{E}(1 - e^{Y_1})^+) \wedge 1. \quad (5)$$

С использованием (4) легко получить простую нижнюю границу экспоненциального момента  $W_n$ :

$$\mathbb{E}e^{\lambda W_n} \geq \sup_{h>0} \left\{ e^{\lambda h} \mathbb{P}(\max_{[0,n]} W_t \geq h) \right\} \geq \sup_{h>0} \left\{ e^{\lambda h} \mathbb{P}(\max_{[0,n]} Y_k \geq h) \right\},$$

при каждом  $n \in \mathbb{N}$ . В качестве обобщения данного подхода можно разделить временной интервал  $[0, n]$  на  $[n/k]$  одинаковых интервалов  $k$  (с точностью до одного интервала), и использовать оценку

$$\mathbb{P}\left(\max_{[0,n]} W_t \geq h\right) \geq 1 - (1 - \mathbb{P}(S_k \geq h))^{[n/k]} = R(h, k).$$

Тогда

$$\mathbb{E}e^{\lambda W_n} \geq \sup_{h>0, k \leq n} \left\{ e^{\lambda h} \mathbb{P}(\max_{[0,n]} W_t \geq h) \right\},$$

однако задача выбора оптимальных значений  $h$  и  $k$  не изучалась.

В рамках данной работы проведен анализ асимптотического поведения производящей функции моментов  $W_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отметим, что при выполнении условия (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}e^{S_n^+} = 2. \quad (6)$$

Кроме того, для конечных разностей нормированных полиномов Белла  $\tilde{B}_n(x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta_0^{(r)} = B_0, \quad \Delta_n^{(k)}(x_1, \dots, x_n) = \Delta_n^{(r-1)}(x_1, \dots, x_n) - \Delta_{n-1}^{(r-1)}(x_1, \dots, x_n),$$

при  $k, n \in \mathbb{N}$ , где  $\Delta_n^{(0)}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{B}_n(x_1, \dots, x_n)$ , получено замечательное свойство

$$\Delta_n^{(r)}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{B}(x_1 - r, \dots, x_n - r),$$

позволяющее с учетом (6) установить наличие линейной асимптоты  $\mathbb{E}e^{W_n}$  при  $n \rightarrow \infty$ . В конечном итоге получены следующие утверждения об асимптотическом поведении производящей функции моментов  $M_n(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda W_n}$  при выполнении условий (3) и  $\mathbb{E}Y e^{\lambda Y} < \infty$ :

- (i) если  $\lambda < 1$ , то существуют  $c_1, c_2 > 0$ , такие что  $c_1 n^\lambda \leq M_n(\lambda) \leq c_2 n^\lambda$ ;
- (ii) если  $\lambda = 1$ , то существует линейная асимптота  $M_n(\lambda)$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- (iii) если  $\lambda > 1$ , то  $v^n \leq M_n(\lambda) \leq cv^n$ , где  $c = v/(v-1)$  и  $v = m(\lambda) > 1$ .

В математической статистике процесс кумулятивных сумм  $W_n$  применяется для обнаружения разладки. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – последовательность независимых случайных величин:

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_\nu & \sim F, \\ X_{\nu+1}, \dots, X_n & \sim G. \end{cases}$$

Иными словами, до момента времени  $\nu$  случайные величины имеют распределение  $F$ , а после этого момента времени –  $G$ . Статистика критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы отсутствия разладки

$$H_0 : X_1, \dots, X_n \sim F$$

при альтернативе

$$H_A : X_1, \dots, X_\nu \sim F; \quad X_{\nu+1}, \dots, X_n \sim G \text{ при некотором } \nu,$$

определяется как максимум процесса ожидания, построенного на базе

$$Y_i = \log \frac{g(X_i)}{f(X_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$W_n^* = \max_{k \in [0, n]} W_k = \max_{\nu \in [0, n]} \sum_{\nu+1}^n \log \frac{g(X_i)}{f(X_i)},$$

где  $f, g$  – плотности распределений  $F, G$  соответственно по отношению к некоторой доминирующей мере. Та же статистика используется для обнаружения всей совокупности временных разладок [11]. Очевидно, что условие (3) в этом случае выполнено ( $\lambda_0 = 1$ ). Для проверки значимости отклонений от основной гипотезы  $H_0$  на уровне значимости  $\alpha$  следует определить порог  $h_\alpha$ :  $\mathbb{P}_F(W_n^* > h_\alpha) \leq \alpha$ . Асимптотические свойства процесса  $W_n^*$  хорошо изучены, но, несмотря на это, оценки вероятностей вида  $\mathbb{P}_F(W_n^* > h)$  представляют определенный интерес для решения практических задач. Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_F (1 - e^Y)^+ &= \mathbb{E}_F \left( 1 - \frac{g(X)}{f(X)} \right) \mathbb{I}_{\{f(X) > g(X)\}} \\ &= \mathbb{P}_F(f(X) > g(X)) - \mathbb{P}_G(f(X) > g(X)) = D_{F,G}, \end{aligned}$$

а функция  $D_{F,G}$ , заданная на множестве всевозможных распределений, обладает всеми свойствами метрики. Тогда согласно (5) получаем, что

$$\mathbb{P}_F \left\{ \max_{[0,n]} W_t \geq h \right\} \leq e^{-h} (1 + nD_{F,G}),$$

а следовательно,

$$h_\alpha = \log \frac{1 + nD_{F,G}}{\alpha}.$$

Отдельно отметим, что  $D_{F,G} \leq 1$ . Таким образом, граница

$$h_\alpha = \log \frac{1 + n}{\alpha}$$

будет универсальной для всех пар распределений  $F$  и  $G$ .

В контексте оптимизации оценки  $\mathbb{P}_F(W_n^* > h)$  можно использовать неравенство Дуба для субмартингала  $e^{tW_n}$  при  $t \geq 1$ . В этом случае

$$\mathbb{P}_F \left( \max_{t \leq n} (W_t) \geq h \right) = \mathbb{P}_F \left( \max_{t \leq n} (e^{tW_t}) \geq e^{th} \right) \leq \mathbb{E}_F e^{tW_n} / e^{th} \quad \text{при } t \geq 1.$$

Тогда

$$\mathbb{P}_F \left( \max_{t \leq n} (W_t) \geq h \right) \leq \inf_{t \geq t_0} \mathbb{E}_F e^{tW_n} / e^{th} = \exp(-\sup_{t \geq t_0} l^*(h, t)),$$

где  $l^*(h, t) = th - \log \mathbb{E}_F e^{tW_n}$ . Таким образом, при  $h \leq t^{-1} \log \mathbb{E}_F e^{tW_n}$  оптимальной будет следующая граница:

$$\mathbb{P}_F \left( \max_{t \leq n} (W_t) \geq h \right) \leq \mathbb{E}_F e^{tW_n} / e^h.$$

В противном случае, в области  $t > 1$  существует единственный корень  $t^*$  уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} l^*(h, t) = h - \mathbb{E}_F W_n e^{tW_n} / \mathbb{E}_F e^{tW_n} = 0,$$

или, что то же самое, уравнения

$$\mathbb{E}_F W_n e^{tW_n} = h \mathbb{E}_F e^{tW_n},$$

а оптимальная граница будет иметь вид

$$\mathbb{P}_F \left( \max_{t \leq n} (W_t) \geq h \right) \leq \mathbb{E}_F e^{t^* W_n} / e^{t^* h} = \exp(-I_W(h)),$$

где  $I_W(h)$  – преобразование Крамера распределения  $W_n$ .

Некоторые детали исследования представлены в работе [12].

*Работа частично поддержанна Министерством высшего образования и науки РФ в рамках госзадания FSEG-2024-0027.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lindley D. V. *The theory of queues with a single server*. In Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. Cambridge University Press. 1952. T. 48. № 2. C. 277–289.

2. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. М.: Мир, 1984. Т. 2.
3. Basseville, M., Nikiforov, I. V. *Detection of abrupt changes: theory and application*. Englewood Cliffs : Prentice Hall. 1993.
4. Page E. S. *Continuous inspection schemes*. Biomterika. 1954. V. 41. P. 100–115.
5. Lukacs E. *Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes*. Journal of Quality Technology. 1982. T. 14. C. 51–59.
6. Woodall W. H. *The Statistical Design of Quality Control Charts*. J. Royal Stat. Soc, Ser. D. 1985. T. 34. C. 155–160.
7. Spitzer F. *A combinatorial lemma and its application to probability theory*. Trans. of the Amer. Math. Soc. 1956. T. 82. C. 323–339.
8. Bell E. T. *Partition polynomials*. Ann. Math. 1927. T. 29. C. 38–46.
9. Bell E. T. *Exponential polynomials*. Ann. Math. 1934. T. 35. C. 258–277.
10. Bulo S. R., Hancock E. R., Aziz F., Pelillo M. *Efficient computation of ihara coefficients using the bell polynomial recursion*. Lin. Alg. and Appl. 2012. T. 436. C. 1436–1441.
11. Baron M. and Malov S. V. *Detection and estimation of multiple transient changes*. Journal of Applied Statistics. 2023. T. 50. № 14. C. 2862–2888.
12. Baron M., Malov S.V. *Practical properties of the CUSUM process*. arXiv:2502.09185 [math.PR]. 2025.

# О ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЯХ

*M. B. Платонова<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова  
РАН

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на решетке  $\mathbb{Z}^d$  с источниками ветвления, расположенными в точках решетки

$$\Gamma = \{(0, n) \in \mathbb{Z}^d : 0 \in \mathbb{Z}^{d_1}, n \in \mathbb{Z}^{d_2}\}.$$

Предположим, что все источники ветвления одинаковые и имеют интенсивность  $\beta$ . Перемещение частиц в пространстве определяется марковским процессом с непрерывным временем, пространством состояний  $\mathbb{Z}^d$  и переходными вероятностями, задаваемыми матрицей переходных интенсивностей  $\{a(v, u)\}_{v, u \in \mathbb{Z}^d}$ , удовлетворяющей следующим условиям:

1)  $a(v, u) \geq 0, \quad v \neq u$  и  $a(v, v) < 0$ ;

2)  $\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) = 0$  для любого  $v \in \mathbb{Z}^d$ ;

3) условие симметричности и однородности по пространству

$$a(v, u) = a(u, v) = a(v - u, 0), \quad u, v \in \mathbb{Z}^d;$$

4) дисперсия скачков случайного блуждания конечна, то есть выполнено

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \|u\|^2 |a(v, u)| < \infty, \quad v \in \mathbb{Z}^d;$$

5) случайное блуждание неприводимо, то есть граф  $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$  с множеством вершин  $\mathbb{Z}^d$  и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \{(v, u) : a(v, u) > 0, v, u \in \mathbb{Z}^d\}$$

является связным.

Через  $M(v, u, t)$  обозначим среднее число частиц в момент времени  $t$  в точке  $u$ , если в начальный момент времени  $t = 0$  в системе была одна частица, которая находилась в точке  $v$ . Можно показать, что функция  $M(v, u, t)$  как функция аргументов  $v$  и  $t$ , является единственным решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t}(v, u, t) = (\mathcal{A}M)(v, u, t), \\ M(v, u, 0) = \delta_u(v), \end{cases}$$

$\delta_u(\cdot)$  – индикаторная функция одноточечного множества  $\{u\}$ . Оператор  $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  действует как

$$\mathcal{A}f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) f(u) + \beta \delta_\Gamma(v) f(v),$$

где  $\delta_\Gamma(v) = 1$ , если  $v \in \Gamma$ , и  $\delta_\Gamma(v) = 0$ , если  $v \notin \Gamma$ .

Через  $\mathcal{A}_0$  обозначим генератор (инфinitезимальный оператор) блуждания, лежащий в основе ветвящегося случайного блуждания:

$$\mathcal{A}_0 f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) f(u).$$

Спектр  $\mathcal{A}_0$  лежит на отрицательной полуоси. Оператор  $\mathcal{A}$  можно рассматривать как возмущение оператора  $\mathcal{A}_0$ . Покажем, что при достаточно больших  $\beta$  часть спектра оператора  $\mathcal{A}$  лежит на положительной оси, и, как следствие, получим асимптотическое равенство для  $M(v, u, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

При  $d_1 = 1$  или  $d_1 = 2$  положим  $\beta_c = 0$ , а при  $d_1 \geq 3$  –

$$\beta_c^{-1} = \int_0^\infty p(t, 0, 0) dt > 0,$$

где  $p(t, x, y)$  – переходная вероятность случайного блуждания, лежащего в основе вспомогательного ветвящегося случайного блуждания на решетке меньшей размерности. Обозначим  $\lambda(0)$  правый край спектра генератора ветвящегося случайного блуждания  $\mathcal{A}$ .

**Теорема.** *Пусть  $\beta > \beta_c$ . Тогда  $\lambda(0) > 0$  и при  $t \rightarrow +\infty$  для функции  $M(v, u, t)$  выполнено асимптотическое равенство*

$$M(v, u, t) = C e^{\lambda(0)t} t^{-d_2/2} \left(1 + o(1)\right),$$

где  $C = C(u, v, \beta, d_1, d_2) > 0$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся теорией разложения операторов в прямой интеграл. Введем необходимые обозначения. Точки  $v, u \in \mathbb{Z}^d$  будем считать эквивалентными, если  $u - v \in \Gamma$ . Соответствующее фактор-пространство обозначим через  $\Omega = \mathbb{Z}^d / \Gamma$ . Данное множество можно отождествить со счетным набором попарно неэквивалентных вершин  $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ , который будем называть фундаментальным множеством вершин и обозначать тем же символом  $\Omega$ . Введем операцию вложения вектора из  $\mathbb{R}^{d_2}$  в пространство  $\mathbb{R}^d$ : вектору  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{d_2}) \in \mathbb{R}^{d_2}$  сопоставим вектор  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^d$  по следующему правилу:

$$\tilde{z} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{d_1}, z_1, \dots, z_{d_2}).$$

Определим оператор  $A_0(\theta) : \ell^2(\Omega) \rightarrow \ell^2(\Omega)$  формулой

$$A_0(\theta) f(v) = \sum_{u \in \Omega} \widehat{a}(v, u, \theta) f(u),$$

оператор  $A(\theta) : \ell^2(\Omega) \rightarrow \ell^2(\Omega)$  –

$$A(\theta) f(v) = A_0(\theta) f(v) + \beta \delta_0(v) f(v), \quad (1)$$

где  $\widehat{a}(v, u, \theta) = \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \tilde{\theta} \rangle} a(v + g, u)$ .

Покажем, что оператор  $\mathcal{A}$  унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов  $A(\theta)$  по множеству  $[-\pi, \pi)^{d_2}$ , то есть справедливо соотношение

$$U\mathcal{A}U^{-1} = \int_{[-\pi, \pi)^{d_2}} \oplus A(\theta) d\theta. \quad (2)$$

Соотношение (2) позволяет свести изучение оператора  $\mathcal{A}$  к изучению операторов  $A(\theta)$ , которые действуют в пространстве меньшей размерности и устроены значительно проще. При каждом  $\theta \in [-\pi, \pi)^{d_2}$  оператор  $A(\theta)$ , определенный (1), является самосопряженным ограниченным оператором. Спектр оператора  $A_0(\theta)$  является подмножеством отрицательной полуоси. Оператор  $A(\theta)$  отличается от оператора  $A_0(\theta)$  одномерным положительным возмущением, и, следовательно, спектр оператора  $A(\theta)$  на положительной полуоси при всех  $\theta \in [-\pi, \pi)^{d_2}$  либо пуст, либо состоит из единственного простого собственного значения  $\lambda(\theta)$ , а его спектр на отрицательной полуоси совпадает (как множество) со спектром оператора  $A_0(\theta)$ . Покажем, что при  $\beta > \beta_c$  в спектре оператора  $A(0)$  существует единственное положительное собственное значение  $\lambda(0)$ , а соответствующая ему собственная функция может быть выбрана строго положительной. Также покажем, что  $\text{Hess } \lambda(\theta)$  не обращается в 0 при  $\theta = 0$ . Далее, используя (2) и метод Лапласа для вычисления асимптотического поведения интегралов, получаем утверждение теоремы.

# ЭНТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕГАУССОВСКИХ МЕР

*B. O. Хамзин*

Санкт-Петербургский государственный университет

Начнем нашу работу с двух определений, первое из которых общеизвестно, а второе фактически есть у Шеннона.

Пусть  $(\mathcal{X}, d)$  – метрическое пространство,  $A \subset X$  – компактное подмножество  $\mathcal{X}$ . Обозначим  $N(A, \varepsilon)$  – наименьшее число замкнутых шаров радиуса  $\varepsilon$ , необходимое для покрытия множества  $A$ . Величина

$$H(A, \varepsilon) := \ln N(A, \varepsilon)$$

называется *энтропией* компакта  $A$  (или *метрической энтропией* компакта  $A$ ).

Определение энтропии вероятностной меры, данное Шенноном [1], можно обобщить на другие объекты. Для метрического пространства с борелевской мерой  $(\mathcal{X}, d, P)$  рассмотрим понятие *tt*-энтропии:

$$N^{mm}(\varepsilon, \delta) := \min\{n : \exists x_1, x_2 \dots, x_n : P(\mathcal{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)) < \delta\},$$

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) := \ln N^{mm}(\varepsilon, \delta),$$

где  $B(x, r)$  – замкнутый шар с центром в точке  $x$  и радиуса  $r$ . Индекс «*tt*» означает «measure-metric» по аналогии с *tt*-пространствами Громова [2]. Величину  $H^{mm}(\cdot, \cdot)$  будем называть *tt*-энтропией пространства.

Интерес к изучению *tt*-энтропии связан в том числе и с тем, что она позволяет определить нетривиальный инвариант *tt*-пространств относительно изометрий, сохраняющих меру. Так, например, можно утверждать об отсутствии изоморфизма двух *tt*-пространств, если их *tt*-энтропии различны.

Одними из первых стали изучать *tt*-энтропию А. М. Вершик и М. А. Лифшиц: в совместной работе [3] они показали, что для широкого класса банаховых пространств с гауссовской мерой *tt*-энтропия тесно связана с энтропией соответствующего эллипсоида рассеивания. В продолжающейся работе были найдены точные асимптотики *tt*-энтропии конечномерных пространств с произвольной абсолютно непрерывной мерой, а также пространств траекторий сложного пуассоновского процесса.

Большой интерес представляют пространства траекторий процессов Леви, в частности, устойчивых процессов.

Рассмотрим процесс Леви  $X(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , с соответствующим ему триплетом Леви  $(a, 0, \nu)$ . Известно, что процесс с данным триплетом допускает представление

$$X(t) = at + \int_{\mathcal{R}} 1_{\{s \leq t\}} 1_{\{|u| > 1\}} u N(du, ds) + \int_{\mathcal{R}} 1_{\{s \leq t\}} 1_{\{|u| \leq 1\}} u \tilde{N}(du, ds),$$

где  $\mathcal{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ,  $N$  – пуассоновская случайная мера на  $\mathcal{R}$  с мерой интенсивности  $\mu(du, ds) = \nu(du)ds$ ,  $\tilde{N}$  – соответствующая  $N$  центрированная пуассоновская случайная мера.

Будем рассматривать такие процессы Леви, что мера интенсивности  $\nu$  удовлетворяет условию

$$\int_{|u|\leq 1} |u| \nu(du) < \infty. \quad (1)$$

При выполнении (1) функция  $f := 1_{\{s\leq t\}} 1_{\{|u|\leq 1\}} u$  интегрируема, поэтому процесс  $X(t)$  может быть представлен в виде

$$X(t) = \left( a - \int_{|u|\leq 1} u \nu(du) \right) t + \int_{\mathcal{R}} 1_{\{s\leq t\}} u N(du, ds). \quad (2)$$

Таким образом, можно считать без потери общности, что

$$\int_{|u|\leq 1} u \nu(du) = 0$$

за счет переноса математического ожидания в линейный член.

Обозначим  $G(l)$  – среднее число скачков процесса  $X(t)$  на отрезке  $[0, 1]$ , величина которых превышает  $l$ . Тогда

$$G(l) = \int_{|u|>l} \nu(du).$$

Распределение процесса  $X(t)$  обозначим через  $\mathcal{P}$ . Каждую траекторию процесса Леви будем воспринимать как элемент пространства Скорохода  $\mathbb{D}[0, 1]$ .

**Определение 1.** Функция  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  относится к классу *cadlag*, если она непрерывна справа и имеет все левые пределы, т. е. для любой точки  $t \in [0, 1]$

$$1) \lim_{s \rightarrow t+} f(s) = f(t), \quad 2) \exists \lim_{s \rightarrow t-} f(s).$$

Такие функции образуют пространство  $\mathbb{D}[0, 1]$ , называемое **пространством Скорохода**.

На  $\mathbb{D}[0, 1]$  можно завести несколько метрик. Нам будет интересна та, которая задается так называемым  $J$ -расстоянием.

**Определение 2.**  $J$ -расстояние Скорохода  $\rho_{\mathbb{D}, J}$  между двумя функциями *cadlag*  $f, g$  определяется как

$$\rho(f, g) := \inf_{u \in U_J} \left[ \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(u(t))| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |t - u(t)| \right], \quad (3)$$

где  $U_J$  – класс всех возрастающих непрерывных отображений из  $[0, 1]$  на себя.

Подробнее о пространстве Скорохода см [4, 5].

Пусть  $N_y(l)$ , где  $y \in \mathbb{D}[0, 1]$ , – количество скачков траектории  $y$ , модуль которых превышает  $l$ . Для нахождения асимптотики  $tt$ -энтропии процессов Леви понадобится лемма (стоит отметить, что она выполняется без каких-либо предположений на меру интенсивности процесса  $X(t)$ ).

**Лемма 1.** Для любого  $n \geq 0$ , произвольного  $\varepsilon > 0$  и любой траектории  $y \in \mathbb{D}[0, 1]$  выполнено

$$\mathbb{P}(\rho_{\mathbb{D}, J}(X, y) < \varepsilon, N_X(\varepsilon) = n) \leq \mathbb{P}(N_X(\varepsilon) = n) \cdot n! \cdot C_n^k \cdot (2\varepsilon)^k, \quad (4)$$

где  $k = N_y(3\varepsilon)$ .

Данная лемма позволяет получить нижнюю оценку  $mm$ -энтропии пространства траекторий некоторых процессов Леви.

**Теорема 2.** Предположим, что  $G$  – функция, медленно меняющаяся в нуле, а также выполнено условие

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln G(l)}{\ln(l^{-1})} < 1, \quad (5)$$

тогда для пространства траекторий при фиксированном  $\delta > 0$  существует такое  $c_1 > 0$ , что при достаточно малом  $\varepsilon$  выполнено неравенство

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) \geq c_1 \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) G(\varepsilon).$$

Верхняя оценка  $mm$ -энтропии строится довольно естественным образом. Каждую траекторию процесса  $X(t)$  разобьем на две части:

$$X(t) = X_l(t) + X^l(t),$$

где

$$X_l(t) := at + \int_{\mathcal{R}} 1_{\{s \leq t\}} 1_{|u| > l} u N(du, ds), \quad (6)$$

$$X^l(t) := \int_{\mathcal{R}} 1_{\{s \leq t\}} 1_{|u| \leq l} u N(du, ds). \quad (7)$$

Тем самым процесс  $X_l(t)$  представляет линейную часть и все скачки, размер которых больше  $l$ , а  $X^l(t)$  отвечает за оставшуюся часть скачков. Заметим, что процесс  $X^l(t)$  является процессом Леви с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной

$$\mathbb{D}X^l(1) = \int_{\mathcal{R}} 1_{\{s \leq 1\}} 1_{|u| \leq l} u^2 \nu(du) ds = \int_{|u| \leq l} u^2 \nu(du),$$

Если дисперсия мала по сравнению с  $l^2$ , то из неравенства Колмогорова для сумм независимых случайных величин будет следовать, что максимум процесса  $X^l$  линейно оценивается величиной  $l$ , то есть существует такое  $\lambda$ , что

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |X^l(t)| \geq \lambda l \right) \leq \frac{\delta}{2}. \quad (8)$$

Заметим, что  $J$ -расстояние Скорохода  $\rho_{\mathbb{D}, J}$  удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbb{D}, J}(f + g, h) \leq \rho_{\mathbb{D}, J}(f, h) + \|g\|_{\infty}.$$

Тем самым для произвольных траекторий  $X$  и  $Y$  выполнено

$$\rho_{\mathbb{D}, J}(X(t), Y(t)) \leq \rho_{\mathbb{D}, J}(X_l(t), Y(t)) + \sup_{t \in [0,1]} |X^l(t)|. \quad (9)$$

Если выбирается такое значение параметра  $l$ , что  $\sup_{t \in [0,1]} |X^l(t)|$  оценивается сверху через  $\varepsilon$ , то немного уменьшив радиус шаров, которыми покрывается пространство траекторий, можно отбросить маленькие скачки из рассмотрения и покрывать лишь траектории

процесса  $X_l(t)$ . Так как процесс  $X_l(t)$  имеет конечную интенсивность, то он является комбинацией сложного пуассоновского процесса и линейной части и имеет представление

$$X_l(t) = at + \sum_{i=1}^{K_l(t)} V_l^i, \quad (10)$$

где  $K_l(t)$  – пуассоновский процесс с интенсивностью, равной  $G(l)$ ,  $\{V_l^i\}_{i=1}^\infty$  – независимые случайные величины с распределением

$$\mathcal{P}_l(du) = \frac{1_{|u|>l}\nu(du)}{G(l)}.$$

Тем самым можно воспринимать пространство траекторий процесса как

$$\mathcal{T}_l = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n \times E_n,$$

где  $E_n$  –  $n$ -мерный симплекс, который задается неравенствами

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n \leq 1.$$

Элемент  $(v, t)$ , где  $v \in \mathbb{R}^n$  и  $t \in E_n$ , будет отождествлен с траекторией, имеющей скачки размера  $v_1, v_2, \dots, v_n$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  соответственно.

Взаимодействовать лишь с процессом  $X_l(t)$  намного проще, поскольку пространство его траекторий раскладывается в объединение конечномерных пространств. Опустив технические подробности покрытия данного пространства траекторий шарами малого радиуса, перейдем к конечному результату.

**Теорема 3.** *Предположим, что  $G$  – функция медленно меняющаяся в нуле, и выполнены два условия:*

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \frac{\ln G(l)}{\ln(l^{-1})} < 1 \quad (11)$$

и

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \frac{\int_{|u| \leq l} u^2 \nu(du)}{l^2} \leq C \quad (12)$$

для некоторого  $C > 0$ ; тогда для пространства траекторий при фиксированном  $\delta > 0$  существует такое  $c_2 > 0$ , что при достаточно малом  $\varepsilon$  выполнено неравенство

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) \leq c_2 \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) G(\varepsilon).$$

Условие (12) нужно для того, чтобы дисперсия процесса  $X^l(t)$  не превышала параметра  $l^2$ .

Из теорем 2 и 3 можно вывести общий результат.

**Теорема 4.** *Пусть  $X(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , – процесс Леви с триплетом  $(a, 0, \nu)$ , для которого выполнены три условия:*

функция  $G(l) := \int_{|u| < l} \nu(du)$  является медленно меняющейся функцией в нуле,

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \frac{\ln G(l)}{\ln(l^{-1})} < 1$$

*и*

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \frac{\int_{|u|<l} u^2 \nu(du)}{l^2} \leq C,$$

для некоторого  $C > 0$ . Тогда для фиксированного  $\delta > 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  верно

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) = \Theta \left[ \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) G(\varepsilon) \right]$$

Семейство мер интенсивности, удовлетворяющих условиям теоремы 4, не покрывает многие важные случаи, например класс устойчивых процессов. На данный момент для данного класса процессов получено не так много результатов, однако нетривиальные нижние оценки  $mm$ -энтропии уже известны.

Рассмотрим  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви  $Y(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , с параметром  $0 < \alpha < 1$ .

**Теорема 5.** Для пространства траекторий устойчивого процесса  $Y(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , при фиксированном  $\delta > 0$  и достаточно малом  $\varepsilon$  выполнено неравенство

$$H^{mm}(\varepsilon, \delta) \geq C(\alpha) \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^{-\alpha},$$

где  $C(\alpha)$  – константа, зависящая лишь от значения  $\alpha$ .

Данная оценка аналогична оценке, полученной в теореме 2, ведь мера интенсивности устойчивого процесса имеет асимптотику  $(|u|^{1+\alpha})^{-1}$ , поэтому функция  $G(l)$  имеет асимптотику  $l^{-\alpha}$ . Этот факт дает надежду полагать, что полученная оценка является точной, и асимптотика  $mm$ -энтропии устойчивого процесса должна иметь вид  $\varepsilon^{-\alpha}$  (с точностью до  $\log \varepsilon$  факторов).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта (Соглашение № 075-15-2025-013).

## ЛИТЕРАТУРА

- Шеннон К. *Математическая теория связи*. В кн. "Работы по теории информации и кибернетике". М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 243–332.
- Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Birkhauser Boston. 1999.
- Вершик А. М, Лифшиц М. А. *О mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой*. Теория вероятн. и ее примен. 2023. Т. 68. № 3. С. 532–543.
- Скороход А. В. *Предельные теоремы для случайных процессов*. Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. С. 289–319.
- Скороход А. В. *Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями*. Теория вероятн. и ее примен. 1957. Т. 2. С. 145–177.

# НОРМАЛЬНЫЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

*A. B. Шкляев*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Пусть  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, которые будем называть случайной средой. Фиксируем последовательность  $\boldsymbol{\eta}$  и разыграем независимые случайные величины  $X_{n,i}$  с производящими функциями  $\phi_{\eta_i}$ , где  $\{\phi_y\}$  – некоторый набор производящих функций. Тогда ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС) называют последовательность, заданную соотношениями

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i}, \quad n \geq 0.$$

Физически можно представить себе, что при фиксации среды в процессе в момент  $n$  имеется  $Z_n$  частиц, каждая из которых независимо с одинаковым распределением (зависящим от значения текущего значения среды  $\eta_{n+1}$ ) порождает  $X_{n+1,i}$  потомков, которые все вместе образуют поколение  $n+1$ . Одним из наиболее хорошо исследованных является надкритический случай, в котором случайные величины  $\xi_n := \ln \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}} X_{n,i}$  имеют положительное среднее  $\mu$ . Здесь и далее математическое ожидание с нижним индексом  $\boldsymbol{\eta}$  обозначает среднее при условии среды. В этом случае процесс  $Z_n$  не вырождается с положительной вероятностью  $p^*$ ,  $Z_n \exp(-S_n)$  представляет собой мартингал, который сходится п.н. и, при определенных условиях, в пространстве  $L^p$  известны условия, когда предельная величина  $W$  положительна с положительной вероятностью и, более того, положительна с вероятностью  $p^*$  (см. [1]). Более новым является вопрос получения для ВПСС аналогов центральной предельной теоремы (см. [2]) в форме

$$\mathbf{P} \left( \frac{\ln Z_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \middle| Z_n > 0 \right) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

В указанной работе результат получен при условии, что в процессе отсутствует гибель частиц.

Ветвящимся процессом с иммиграцией в случайной среде (ВПИСС) назовем последовательность

$$Z_0^* = 1, \quad Z_{n+1}^* = \sum_{i=1}^{Z_n^* + \chi_n} X_{n+1,i}, \quad n \geq 0,$$

где  $\chi_n = g(\eta_n)$ ,  $g$  – некоторая измеримая функция. Физически можно представлять себе, что при фиксации среды в ВПСС добавляется также случайное число иммигрантов  $\chi_n$ . Сами иммигранты не считаются частицами процесса, однако их потомки будут считаться полноправными частицами следующего поколения. Для ВПИСС также известны результаты, аналогичные описанным в предыдущем разделе (см., например, [4]), опять же при существенных ограничениях.

Ветвящийся процесс с частицами двух полов в случайной среде (для краткости будем называть его двуполым ветвящимся процессом в случайной среде (ДВПСС))  $\mathcal{N} = (N_n, n \geq 0)$  определяется как однородная марковская цепь с условными относительно среды  $\boldsymbol{\eta}$  переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}(N_{n+1} = j | N_n = i, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{P}(L(U, V, \eta_{n+1}) = j),$$

где вектор  $(U, V)$  имеет п.ф.  $f_{\eta_{n+1}}(s, t)^i, s, t \in [0, 1]$ . Здесь  $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$  – некоторая заданная функция, называемая функцией паросочетаний,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Физически можно представлять себе, что при фиксации среды в процессе в момент  $n$  имеется  $N_n$  пар, каждая из которых независимо с одинаковым распределением (зависящим от значения текущего значения среды  $\eta_{n+1}$ ) порождает мужских и женских потомков, которые затем объединяются в пары в соответствии с функцией паросочетаний.

Для ДВПСС в разрезе обсуждаемых результатов существует работа [4], однако условия там крайне ограничительны. В частности, условие (2.2) работы [4] выполняется в том и только том случае, когда  $k^{-1}\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(N_1 | N_0 = k)$  не зависит от  $k \in \mathbb{N}$  п.н. Разумного класса моделей ДВПСС, для которых такое условие выполнено, авторы не приводят.

Настоящая работа предлагает общий подход, объединяющий результаты для различных моделей с ветвлением. Пусть  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  – последовательность независимых одинаково распределенных величин, которую будем называть случайной средой.

Пусть последовательность  $Y_n$  с целыми неотрицательными значениями удовлетворяет соотношению

$$Y_{n+1} = A_{n+1}Y_n + B_{n+1}. \quad (1)$$

Здесь  $A_i = q(\eta_i)$ , где  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  – борелевская функция, а  $B_i, i \geq 1$ , – такие случайные величины, что при каждом  $n$  вектор  $(Y_0, B_1, \dots, B_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$  и последовательность  $(\eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots)$  независимы. При этом при фиксации  $\boldsymbol{\eta}$  последовательность  $\{Y_n\}$  будем предполагать неоднородной марковской цепью. Будем считать, что все состояния, кроме может быть нуля, цепи Маркова  $\{Y_n\}$  сообщаются.

Последовательность, описываемую соотношением (1), будем называть марковской рекуррентной последовательностью в случайной среде  $\boldsymbol{\eta}$  (МРПСС). Случайное блуждание  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n \geq 1$ , где  $\xi_i = \ln A_i, i \geq 1$ , будем называть сопровождающим блужданием для МРПСС  $\{Y_n\}$ . Отметим, что наша модель является частным случаем классической марковской цепи в случайной среде.

Ранее в работах автора были исследованы вероятности больших уклонений для родственной модели линейных рекуррентных последовательностей [5,6]. Затем эти результаты удалось применить для ряда процессов с ветвлением, например, ВПСС, ВПИСС (см. [7]) и ДВПСС ([8]).

Настоящая работа посвящена исследованию сходимости при фиксации  $\boldsymbol{\eta}$  последовательности  $\{Y_n \exp(-S_n)\}$  почти наверное и в  $L^1(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\eta}})$  к некоторой величине  $W$ , доказательству того, что  $\mathbf{P}(W > 0)$  совпадает с вероятностью непоглощения последовательности  $\{Y_n\}$ . Наконец, для  $\{Y_n\}$  удается установить центральную предельную теорему в форме

$$\mathbf{P}\left(\frac{\ln Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \mid Y_n > 0\right) \rightarrow 1 - \Phi(x).$$

Часть такого рода результатов была получена в [7] как следствие общей интегро-локальной теоремы при других условиях, включающих условие Крамера. В настоящей работе накладываются значительно более слабые ограничения на параметры модели.

Будем использовать обозначения  $\mathbf{P}_\eta$  и  $\mathbf{E}_\eta$  для условной вероятности и условного математического ожидания при условии  $\eta$ . Положим  $\xi_n = \ln A_n$ . Будем предполагать, что последовательность надкритическая, то есть  $\mu$  положительна. Назовем  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ,  $n \geq 1$ , сопровождающим блужданием для последовательности  $\{Y_n\}$ .

Наложим некоторые условия на модель.

LR1)  $\mathbf{E}\xi (\ln^+ \xi)^{2+\delta} < +\infty$  при некотором  $\delta > 0$ ,  $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$ .

LR2) При некотором  $a \in [1, 2]$  и правильно меняющейся последовательности  $b_n$  с показателем  $a$  выполнено соотношение

$$\frac{S_n - \mu n}{b_n} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim G,$$

где  $\mu = \mathbf{E}\xi$ ,  $G$  – невырожденное распределение.

Иными словами, величины  $\xi$  лежат в области притяжения устойчивого закона с параметром из диапазона  $(1, 2]$ . В частности, в случае конечной дисперсии  $\xi$  распределение  $G$  представляет собой нормальное распределение с нулевым средним.

LR3) Существуют такие величины  $\zeta_i, \kappa_i$ , являющиеся измеримыми функциями  $\eta_i$  (не зависящими от  $i$ ), для которых справедливы неравенства

$$\mathbf{E}_\eta \left( |B_i|^\beta \middle| Y_{i-1} \right) \leq \zeta_i e^{\xi_i} Y_{i-1},$$

где  $\beta \in (1, 2]$ , причем выполнены соотношения

$$\mathbf{E} \ln^+ \zeta_1 < +\infty, \quad \mathbf{E} \ln^+ \kappa_1 < +\infty.$$

Кроме указанных условий нам понадобится еще одно условие.

LR4) Для любого  $x_0$  найдется такое натуральное  $k$ , что выполняется неравенство  $\mathbf{P}(Y_k > x_0) > 0$ .

Сделаем несколько замечаний о наложенных ограничениях. Условия LR1 и LR2 по существу касаются лишь сопровождающего блуждания  $S_n$ , то есть регулярного поведения коэффициентов  $A_n$  рекуррентной последовательности. Условие LR3 контролирует возмущения  $B_n$ . Величина  $B_n$  в процессах с ветвлением отвечает за флюктуации относительно среднего при размножении процесса. Наше условие позволяет ограничить ее влияние по сравнению с умножением на  $e^{\xi_i}$ . По существу условие LR3 означает, что умножение на  $A_{n+1}$  при подсчете  $Y_{n+1}$  имеет более существенный порядок, чем добавление  $B_{n+1}$ . Наконец, условие LR4 позволяет последовательности достигать сколь угодно высоких уровней.

Оказывается, что справедлива следующая

**Теорема 1.** В условиях LR1–LR3 последовательность  $Y_n e^{-S_n}$  сходится в  $L^1(\mathbf{P}_\eta)$  и п.н. по мере  $\mathbf{P}_\eta$  к некоторой величине  $W$  при п.н.  $\eta$ . При выполнении условия LR4 выполнено соотношение  $\mathbf{P}(W > 0) = \mathbf{P}(Y_n > 0, n > 0) > 0$ .

Следующим естественным результатом в данном направлении, как уже обсуждалось выше, является аналог центральной предельной теоремы.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия LR1–LR4. Тогда

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geq \mu n + xb_n | Y_n > 0) \rightarrow 1 - G(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

Естественным продолжением такого рода результатов является функциональная предельная теорема. Положим

$$U_n(t) := \frac{\ln^+ Y_{[nt]} - \mu n t}{b_n}, \quad \tilde{U}_n(t) = \frac{S_{[nt]} - \mu n t}{b_n},$$

Введем меры на пространстве  $D[0, 1]$  cadlag-функций (непрерывных справа и имеющих предел слева) соотношением

$$\mathbf{Q}_n(A) = \mathbf{P}(U_n \in A | Y_n > 0), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_n(A) = \mathbf{P}(\tilde{U}_n \in A), \quad \mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(U \in A),$$

где  $U$  – процесс Леви. Известно (см., например, [9]), что при выполнении условия LR2

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n \Rightarrow \mathbf{Q}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где сходимость рассматривается в топологии Скорохода. Оказывается, что в описанных выше условиях последовательность мер  $\{\mathbf{Q}_n\}$  также сходится к мере  $\mathbf{Q}$  в том же пространстве.

**Теорема 3.** *В условиях LR1–LR4 справедливо соотношение*

$$\mathbf{Q}_n \Rightarrow \mathbf{Q}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Полученные результаты дают единообразный набор утверждений для ВПСС, ВПССИ, ДВПСС и других моделей с ветвлением. Так для ВПСС достаточными условиями для выполнения LR1–LR4 являются LR2 и два следующих условия.

BP1) При некотором положительном  $\delta$  выполнены соотношения  $\mathbf{E}\xi \ln^{2+\delta} \xi < +\infty$ ,  $\mathbf{E}\xi > 0$ , где  $\xi = \ln \mathbf{E}_\eta X$ .

BP2) При некотором положительном  $\delta$

$$\mathbf{E} \ln \mathbf{E}_\eta |X e^{-\xi} - 1|^{1+\delta} < +\infty.$$

Для ВПИСС к условиям BP1, BP2 достаточно добавить LR2 и следующее моментное ограничение на иммиграцию.

BP3) Для некоторого положительного  $\delta$  выполнено неравенство  $\mathbf{E} \ln^+ \chi < +\infty$ .

Наконец, для ДВПСС достаточными являются LR2 и следующие условия.

BVP1) При некотором положительном  $\delta$  функция паросочетаний  $L(x, y, z)$  удовлетворяет соотношению  $L(x, y, z) \leq xy$  и неравенству

$$|L(x, y, z) - g(x, y, z)| \leq c_1(z)(|x| + |y|)^{1-\delta},$$

где  $c_1(z)$  – некоторая положительная измеримая функция,  $\delta$  – некоторая положительная константа,  $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  является липшицевой функцией по первым двум переменным, константа Липшица которой не зависит от  $z$ , причем  $g(cx, cy, z) = cg(x, y, z)$ ,  $c, x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$ .

BVP2) Для величины  $\xi = g(\ln \mathbf{E}_\eta U, \ln \mathbf{E}_\eta V, \eta)$  выполнены условия  $\mathbf{E}\xi \ln^{2+\delta} \xi < \infty$ ,  $\mathbf{E}\xi > 0$  при некотором  $\xi$ .

BVP3) При некотором положительном  $\delta$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}c_1(\eta_1)(U_{1,1} + V_{1,1}) &< +\infty, & \mathbf{E}c_2(\eta_1)(U_{1,1} + V_{1,1})^{1+\delta} &< +\infty, \\ \mathbf{E}c_2(\eta_1)|U_1 - \mathbf{E}_\eta U_{1,1}|^{1+\delta} &< +\infty, & \mathbf{E}c_2(\eta_1)|V_1 - \mathbf{E}_\eta V_{1,1}|^{1+\delta} &< +\infty. \end{aligned}$$

ВВР4) для любого  $k$  найдется  $n$ , для которого  $\mathbf{P}(N_n \geq k) > 0$ .

Аналог условия ВВР1 впервые введен автором в работе [8], ему удовлетворяют наиболее популярные виды функция паросочетаний. Остальные условия задают не слишком обременительные условия моментного характера, гораздо более слабые, чем условия в работе [4].

При этом предложенные условия для ВПСС в теореме 1 несколько более ограничительны, чем наилучшие известные результаты такого рода, однако для ВПССИ и ДВПСС более слабые, чем описанные в работах [3, 4]. Аналоги теоремы 2 для ДВПСС и теоремы 3 для ВПСС, ВПССИ и ДВПСС автору неизвестны. Отметим также, что результаты без труда применяются к модели ДВПСС с иммиграцией, однако в настоящий обзор этот результат не включается.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tanny D. *A necessary and sufficient condition for a branching process in a random environment to grow like the product of its means*. Stochastic processes and their applications. 1988. V. 28. № 1. P. 123–139.
2. Huang C., Liu Q. *Moments, moderate and large deviations for a branching process in a random environment*. Stochastic Processes and their Applications. 2012. V. 122. № 2. P. 522–545.
3. Wang Y. Q., Liu Q. S. *Limit theorems for a supercritical branching process with immigration in a random environment*. Science China Mathematics. 2017. V. 60. P. 2481–2502.
4. Xiao S., Liu X., Li Y. *AS Convergence Rate and L p-Convergence of Bisexual Branching Processes in a Random Environment and Varying Environment*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. 2023. V. 39. № 2. P. 337–353.
5. Шкляев А. В. *Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I*. Дискретная математика. 2019. Т. 31. № 4. С. 102–115.
6. Шкляев А. В. *Условная функциональная предельная теорема для случайной рекуррентной последовательности при условии совершения ею большого уклонения*. Теория вероятностей и ее применения. 2024. Т. 69. № 1. С. 125–147.
7. Шкляев А. В. *Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II*. Дискретная математика. 2020. Т. 32. № 1. С. 135–156.
8. Шкляев А. В. *Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде*. Дискретная математика. 2023. Т. 35. № 3. С. 125–142.
9. Doney R. A. *Conditional limit theorems for asymptotically stable random walks*. Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1985. V. 70. № 3. P. 351–360.

# ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

## ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МЕТРИК

*E. I. Деза*

*Московский государственный педагогический университет*

Метрики и метрические пространства подробно изучаются в математической науке с начала двадцатого века и играют сегодня важную роль при решении множества фундаментальных и прикладных задач. При этом, с одной стороны, особое место с шестидесятых годов прошлого века стали занимать проблемы, имеющие отношение к конечным метрическим пространствам. С другой стороны, множество практических приложений оказались связанными с обобщенными метрическими структурами: квазиметриками (ориентированный аналог метрики),  $t$ -метриками (многомерный аналог метрики), частичными метриками и др. [1–3].

*Метрикой* на непустом множестве  $X$  называется отображение  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее для всех  $x, y, z \in X$  условиям *неотрицательности*,  $d(x, y) \geq 0$ , *положительной определенности*,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ , *симметричности*,  $d(x, y) = d(y, x)$ , и *неравенству треугольника*,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  [1].

Отказ от условия положительной определенности дает нам *полуметрику* на множестве  $X$ , позволяющую нулевые расстояния между различными элементами множества. Это понятие удобно с точки зрения построения полиэдральных конструкций: так как неотрицательная линейная комбинация двух полуметрик является полуметрикой (неотрицательная линейная комбинация двух метрик является, в общем случае, лишь полуметрикой), то множество всех полуметрик на конечном множестве  $X$  образует полиэдральный конус. Основным объектом теории (классических) конечных метрических пространств является конус  $MET_n$  всех полуметрик на  $n$  точках. С ним тесно связаны конус *разрезов*  $CUT_n$  и конус *гиперметрик*  $HYP_n$  на том же множестве точек:  $CUT_n \subset HYP_n \subset MET_n$  [3].

*Квазиметрики* (*квазиполуметрики*) могут быть получены из метрик (семиметрик) при отказе от свойства симметричности. Множество всех квазиполуметрик на конечном множестве  $X$ ,  $|X| = n$ , образует полиэдральный конус  $QMET_n$ . С ним связаны конус *ориентированных разрезов*  $OCUT_n$  и конус *ориентированных гиперметрик*  $OHYP_n$  на том же множестве точек:  $OCUT_n \subset OHYP_n \subset QMET_n$  [3].

В свою очередь, *t*-метрики (*t*-полуметрики) получаются из метрик (семиметрик) при замене неравенства треугольника неравенством симплекса. Эти многомерные аналоги метрик в случае конечного множества  $X$ ,  $|X| = n$ , также формируют полиэдральные конусы, обладающие рядом интересных свойств.

Находятся все образующие и грани указанных конусов, полностью описывая имеющиеся связи между ними, для малых значений  $n$ :  $3 \leq n \leq 7$  в неориентированном случае (см. [2]),  $3 \leq n \leq 5$  – в ориентированном случае,  $3 \leq t, n \leq 6$  – в многомерном случае (см. [3]). Доказывается ряд соотношений, имеющих место для произвольного  $n$ .

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Deza M. M., Deza E. *Encyclopedia of distances*. Springer-Verlag : Berlin, 2016. 756 p.
2. Deza M. M., Laurent M. *Geometry of cuts and metrics*. Springer-Verlag : Berlin, 1997. 625 p.
3. Deza M. M., Deza E. I., Sikirić M. D. *Generalizations of finite metrics and cuts*. World Scientific : Singapore, 2016. 304 p.
4. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М. : Наука, 1966.

# ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ХЕЙЛЬБРОННА: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

*Д. А. Долгов*

*Институт вычислительной математики и информационных технологий КФУ,  
Казань*

Классический алгоритм Евклида – наиболее известный алгоритм вычисления наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел. При помощи него можно разложить отношение чисел  $a, b$  (здесь и далее  $a > b > 1$ ) в стандартную цепную дробь

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_h}}}$$

длины  $h = h(a/b)$ , в которой число  $q_0$  – целое, а числа  $q_1, \dots, q_h$  – натуральные,  $q_i \geq 2$  при  $i \geq 1$ . Вопрос о “средней длине”  $h = h(b/a)$  стандартной цепной дроби с фиксированным знаменателем  $a$  и числителем  $b$ , принимающим значения с условиями  $1 < b \leq a - 1$ ,  $\gcd(a, b) = 1$ , впервые исследовал Г. Хейльбронн [1]. Он доказал равенство:

$$\sum_{\substack{1 < b < a, \\ \gcd(a, b) = 1}} h(b/a) = \frac{3}{2} \phi(a) + 2R(a),$$

в котором  $\phi(a)$  – функция Эйлера, а  $R(a)$  – число решений уравнения

$$a = xx' + yy'$$

в натуральных числах  $x, x', y, y'$  таких, что  $x > y, x' > y', \gcd(x, y) = \gcd(x', y') = 1$ .

К-арный алгоритм Соренсона – обобщение бинарного алгоритма вычисления НОД [2]. Позже было получено его обобщение. С помощью обобщенного к-арного алгоритма Соренсона с правым сдвигом можно разложить число  $a/b$  в цепную дробь с рациональными неполными частными (см. [3]). Один из вариантов такой дроби – дробь первого типа

$$\frac{a}{b} = \frac{y_0 \gamma_0}{x_0 \beta_0} + \cfrac{k_0}{\left( \cfrac{y_1 x_0 \beta_0 \gamma_1}{\gamma_0 x_1 \beta_1} + \cfrac{k_1}{\left( \cfrac{\ddots + \cfrac{k_{n-1}}{y_n \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ i \not\equiv n \pmod{2}}} x_i \beta_i \prod_{\substack{0 \leq t \leq n, \\ t \equiv n \pmod{2}}} \gamma_t}}{\cfrac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \equiv n \pmod{2}}} x_j \beta_j \prod_{\substack{0 \leq m < n, \\ m \not\equiv n \pmod{2}}} \gamma_m}} \right)} \right)}. \quad (1)$$

Автор, используя аналогичный комбинаторный подход, исследовал задачу оценки средней длины такой дроби [4]. Эта задача была сведена к решению трех задач:

- 1) оценке числа решений системы диофантовых уравнений с ограничениями на переменные,

- 2) оценке числа континуантов, не превосходящих заданного  $H$ ,  
 3) оценке числа решений уравнения с ограничениями на переменные.

Последняя задача выглядит следующим образом. Пусть задано уравнение

$$A = B \cdot C + k \cdot d \cdot X \cdot e \cdot D \cdot E, \quad (2)$$

где для целых чисел  $A, B, C, D, E$  и натуральных  $a, d, e, k$  выполнены условия

$$1 \leq |X| \leq \lceil \sqrt{k} \rceil; \quad 1 \leq d, e \leq k; \quad 2 < k < a, \quad a|A; \quad (3)$$

$$0 < |C|, \quad |E| < |A| \leq H; \quad (4)$$

$$0 < |B|, \quad |D| < |A|. \quad (5)$$

В уравнении (2) заданы только числа  $a, H$ . Все остальное – переменные величины, имеющие двусторонние ограничения, поэтому количество решений уравнения (2) конечно. Это уравнение соответствует разложению континуанта первого типа. Условия (4) получаются ввиду условия формирования цепной дроби первого типа, а также правила разложения континуанта первого типа. Нетрудно видеть, что в случае положительно определенных параметров континуантов первого типа  $n$  и  $n+1$  порядка будет выполняться сравнение со знаком “ $<$ ”, отсюда следует справедливость условий (5).

Рассмотрим частный случай уравнения (2), в котором величина  $k$  зафиксирована, а переменные

$$d = e = 1. \quad (6)$$

Обозначим число решений этого уравнения с учетом условий (3)–(6), как  $I(a, k, H)$ .

Введем множества

$$\mathbb{A}(a, H) = \{n : a|n, |n| \leq H, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{S}(a, H) = \{n : 0 < |n| < A, n \in \mathbb{Z}, A = \max_{A_i \in \mathbb{A}(a, H)} A_i\},$$

$$\mathbb{SQ}(k) = \{n : 1 \leq n \leq \lceil k \rceil, n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть  $r = (A, B, C, X, D, E)$  – произвольный набор целых чисел. В случае выполнения условий (3)–(6) данный набор будет являться решением уравнения (2).

Определим величину  $m = B \cdot C + k \cdot X \cdot D \cdot E - A$ . Введем функцию

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \text{ – решение уравнения (2),} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Число решений  $I(a, k, H)$  равно

$$\sum_{\substack{A \in \mathbb{A}(a, H) \\ B, C, D, E \in \mathbb{S}(a, H) \\ X \in \mathbb{SQ}(k)}} \delta(B \cdot C + k \cdot X \cdot D \cdot E - A) = \sum_{\substack{A \in \mathbb{A}(a, H) \\ B, C, D, E \in \mathbb{S}(a, H) \\ X \in \mathbb{SQ}(k)}} \int_0^1 e^{2\pi i (B \cdot C + k \cdot X \cdot D \cdot E - A)x} dx. \quad (7)$$

Все суммы конечны, интегралы берутся по конечным отрезкам, поэтому можно поменять местами порядки суммирования и интегрирования в формуле (7), интеграл сделать внешним, а сумму занести под знак интеграла и разбить ее на три части:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{\substack{A \in \mathbb{A}(a, H) \\ B, C, D, E \in \mathbb{S}(A) \\ X \in \mathbb{SQ}(k)}} e^{2\pi i(B \cdot C + k \cdot X \cdot D \cdot E - A)x} dx = \\ &= \int_0^1 \sum_{B, C \in \mathbb{S}(a, H)} e^{2\pi iBCx} \sum_{\substack{B, C, D, E \in \mathbb{S}(a, H) \\ X \in \mathbb{SQ}(k)}} e^{2\pi ikXDEx} \sum_{\substack{A \in \mathbb{A}(a, H) \\ X \in \mathbb{SQ}(k)}} e^{-2\pi iAx} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Каждую из рассматриваемых тригонометрических сумм по нескольким переменным можно представить в виде кратной тригонометрической суммы, где каждая отдельная сумма будет вестись строго по одной переменной. Обозначим

$$\begin{aligned} S_1(a, H) &= \sum_{\substack{A \in \mathbb{A}(a, H) \\ B, C \in \mathbb{S}(a, H)}} e^{2\pi iBCx} = \sum_{B \in \mathbb{S}(a, H)} \sum_{C \in \mathbb{S}(a, H)} e^{2\pi iBCx}, \\ S_2(a, k, H) &= \sum_{\substack{D, E \in \mathbb{S}(a, H) \\ X \in \mathbb{SQ}(k)}} e^{2\pi ikXDEx} = \sum_{D \in \mathbb{S}(a, H)} \sum_{E \in \mathbb{S}(a, H)} \sum_{X \in \mathbb{SQ}(k)} e^{2\pi ikXDEx}, \\ S_3(a, H) &= \sum_{A \in \mathbb{A}(a, H)} e^{-2\pi iAx}. \end{aligned}$$

Теперь формулу (8) можно записать, как

$$\int_0^1 S_1(a, H) S_2(a, k, H) S_3(a, H) dx. \quad (9)$$

В докладе будет рассказано о прогрессе в решении задачи оценки средней длины цепной дроби первого типа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Heilbronn H. *On the average length of a class of finite continued fractions*. Number Theory and Analysis. 1969. P. 86–97.
2. Sorenson J. *Two fast GCD Algorithms*. Journal of Algorithms. 1994. V. 16. P. 110–144.
3. Долгов Д. А. *О контигуантах цепных дробей с рациональными неполными частными*. Дискретная математика. 2022. Т. 34. № 3. С. 34–51.
4. Долгов Д. А. *Об аналогах теоремы Хейльбронна*. Матем. заметки. 2022. Т. 111. № 6. С. 841–854.

# ROMANOFF'S THEOREM AND SUMS OF TWO SQUARES

*A. O. Radomskii*

*HSE University, Moscow, Russia*

Given an integer  $a \geq 2$ , N. P. Romanoff [1] showed that the number of integers  $n \leq x$  that can be expressed as a sum of a prime and a power of  $a$  is at least  $c(a)x$ . Let  $f(n)$  be a polynomial of degree  $d$  with integer coefficients such that  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . In [2] we showed that the number of integers  $n \leq x$  that can be expressed as a sum of a prime and  $a^{f(m)}$  has order  $x(\log x)^{1/d-1}$ . The aim of this paper is to establish an analogous statement for the set  $\mathcal{S}$  of numbers representable as the sum of two squares (instead of the set of all primes  $\mathbb{P}$ ).

Let  $\Omega = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  be a sequence of positive integers (not necessarily distinct) and  $r$  is a positive integer. We define

$$\Omega(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : \gamma_n \leq x\}, \quad \Omega(x, r) = \#\{n \in \mathbb{N} : \gamma_n \leq x \text{ and } \gamma_n + r \in \Omega\}.$$

We reserve the letter  $p$  for primes. In particular, the sum  $\sum_{p \leq K}$  should be interpreted as being over all prime numbers not exceeding  $K$ . By  $\varphi$  we denote Euler's totient function.

We prove the following result (see [3]).

**Theorem 1.** *Let  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  and  $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  be two sequences of positive integers. Suppose that  $a_n < a_{n+1}$  for all  $n$  and  $b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , are not necessarily distinct. Let*

$$\text{ord}_B(n) = \#\{j \in \mathbb{N} : b_j = n\} < \infty$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ . Also, let

$$A(x) \asymp \frac{x}{f(x)}, \quad A(x, r) \ll \frac{r}{\varphi(r)} \frac{x}{f^2(x)}, \tag{1}$$

$$A(x/2) \gg A(x), \quad B(x/2) \gg B(x). \tag{2}$$

Let  $\alpha \in (0, 1]$  and

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{N}: \\ b_j < x}} \sum_{p \leq (\log x)^{\alpha}} \frac{\lambda(j, p) \log p}{p} \ll B(x)^2, \tag{3}$$

where

$$\lambda(j, p) = \#\{k \in \mathbb{N} : b_j < b_k \leq x \text{ and } b_k \equiv b_j \pmod{p}\}.$$

Set

$$r(n) = \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : a_i + b_j = n\} \quad \text{and} \quad \rho(x) = \max_{n \leq x} \text{ord}_B(n).$$

Then there exist positive constants  $c_1$  and  $c_2$  depending only on  $\alpha$  and the constants implied by the symbols  $\ll$ ,  $\gg$ , and  $\asymp$  in (1)–(3) such that

$$\#\left\{n \leq x : r(n) \geq c_1 \frac{B(x)}{f(x)}\right\} \geq c_2 x \frac{B(x)}{B(x) + \rho(x)f(x)}.$$

From Theorem 1 we deduce the following results.

**Theorem 2** [3]. *Let  $a \geq 2$  be an integer, and  $f(n) = \gamma_d n^d + \dots + \gamma_0$  be a polynomial with integer coefficients such that  $d \geq 2$ ,  $\gamma_d > 0$ ,  $(\gamma_d, \dots, \gamma_0) = 1$ , and  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Then there exist positive constants  $x_0$ ,  $c_1$ , and  $c_2$  depending only on  $a$  and  $f$  such that*

$$\frac{c_1 x}{(\log x)^{1/2-1/d}} \leq \#\left\{n \leq x : \text{there exist } s \in \mathcal{S} \text{ and } m \in \mathbb{N} \text{ such that } s + a^{f(m)} = n\right\} \leq \frac{c_2 x}{(\log x)^{1/2-1/d}}$$

for any  $x \geq x_0$ .

**Theorem 3** [3]. *Let  $E$  be an elliptic curve given by the equation  $y^2 = x^3 + Ax + B$ , where  $A$  and  $B$  are integers satisfying  $\Delta = 4A^3 + 27B^2 \neq 0$ . Suppose that  $E$  does not have complex multiplication. For any positive integer  $n$ , we define*

$$r(n) = \#\{(s, p) \in \mathcal{S} \times \mathbb{P} : s + \#E(\mathbb{F}_p) = n\}.$$

Then there exist positive constants  $x_0$ ,  $c_1$ , and  $c_2$  depending only on  $E$  such that

$$\#\left\{n \leq x : r(n) \geq c_1 \frac{x}{(\log x)^{3/2}}\right\} \geq c_2 x$$

for any  $x \geq x_0$ .

## REFERENCE

1. Romanoff N. P. *Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie*. Math. Ann. 1934. V. 109. P. 668–678.
2. Radomskii A. O. *Generalization of Romanoff's theorem*. Math. Notes. 2023. V. 114. № 5. P. 903–913.
3. Radomskii A. O. *Romanoff's theorem and sums of two squares*. Preprint. <https://arxiv.org/abs/2504.09954>.

# LONG STRINGS OF COMPOSITE VALUES OF POLYNOMIALS AND BASIS OF ORDER 2

*A. O. Radomskii*

*HSE University, Moscow, Russia*

Set

$$C(\rho) := \sup \left\{ \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : \frac{6 \cdot 10^{2\delta}}{\log(1/(2\delta))} < \rho \right\}.$$

Our main result [1] is the following

**Theorem 1.** *Let  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  be a polynomial of degree  $B \geq 1$  with positive leading coefficient and irreducible over  $\mathbb{Q}$ . Let  $0 < \delta < C(1/2)$ . Then for sufficiently large positive integer  $N$  there are two strings of consecutive positive integers  $I_1 = \{n_1 - m, \dots, n_1 + m\}$  and  $I_2 = \{n_2 - m, \dots, n_2 + m\}$ , where  $m = [(\log N)(\log \log N)^\delta]$ , such that  $I_1 \cup I_2 \subset [1, N]$ ,  $N = n_1 + n_2$ , and  $f(n)$  is composite for any  $n \in I_1 \cup I_2$ .*

Theorem 1 extends a result of Gabdullin and Radomskii [2] which showed the same result but with  $f(n) = n$ . We note that numerical calculations show that  $C(1/2) > 1/325565$ , and so we can take  $\delta = 1/325565$  in Theorem 1. Also, we note that the polynomial  $f$  need not have integer coefficients. Indeed, by Pólya's theorem [3],  $f$  is integer valued at integers if and only if  $f$  has the form  $f(x) = \sum_{j=0}^B a_j \binom{x}{j}$  with every  $a_j \in \mathbb{Z}$ . In particular,  $B!f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .

Recall that a set  $A \subseteq \mathbb{N}$  is called a basis of order  $k$  if every sufficiently large positive integer can be represented as a sum of  $k$  summands from  $A$ . Theorem 1 implies that the set

$$\{n \geq 3 : f(l) \text{ is composite for any } l \in [n - m, n + m], \text{ where } m = [(\log n)(\log \log n)^\delta]\}$$

is a basis of order 2 for any  $\delta < C(1/2)$ .

Let

$$\Lambda_f = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \text{ is prime}\}.$$

When  $f \in \mathbb{Z}[x]$  is irreducible over  $\mathbb{Q}$ , has degree two or greater, and the sieving system corresponding to  $f$  is non-degenerate, that is

$$\#\{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : f(n) \equiv 0 \pmod{p}\} < p$$

for any prime  $p$ , it is still an open conjecture (of Bouniakowsky [4]) that the set  $\Lambda_f$  is infinite. Moreover it is believed (see the conjecture of Bateman and Horn [5, 6]) that the number of  $n \leq N$  such that  $n \in \Lambda_f$  should have an asymptotic formula  $(\mathfrak{S}(f) + o(1))N/\log N$ , where  $\mathfrak{S}(f) > 0$  is a constant depending only on  $f$ , and so the gaps of Theorem 1 would be unusually large compared to the average gap of size  $\asymp_f \log N$ .

In [7], Ford, Konyagin, Maynard, Pomerance, and Tao showed that for any  $f$  as in Theorem 1 and for any  $0 < \delta < C(1/B)$ , for every sufficiently large  $N$ , there is a string of consecutive positive integers  $n \in [1, N]$  of length at least  $(\log N)(\log \log N)^\delta$  for which  $f(n)$  is composite. Ford and Gabdullin [8] improved the result in [7], replacing  $C(1/B)$  by  $C(1)$ . We follow the constructions in [7, 8], and [2], modifying some steps in them.

*This paper was prepared within the framework of the HSE University Basic Research Program.*

## REFERENCE

1. Radomskii A. O. *Long strings of composite values of polynomials and a basis of order 2*. Preprint. 2025. <https://arxiv.org/abs/2506.15641>.
2. Gabdullin M. R., Radomskii A. O. *Prime avoiding numbers form a basis of order 2*. Sb. Math. 2024. V. 215. № 5. P. 612–633.
3. Pólya G. *Über ganzwertige ganze Funktionen*. Rend. Circ. Mat. Palermo. 1915. V. 40. P. 1–16.
4. Bouniakowsky V. *Nouveaux théorèmes relatifs à la distinction des nombres premiers et à la d'ecomposition des entiers en facteurs*. Mém. Acad. Sc. St. Pétersbourg. 1857. V. 6. P. 305–329.
5. Bateman P. T., Horn R. A. *A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers*. Math. Comp. 1962. V. 16. P. 363–367.
6. Bateman P. T., Horn R. A. *Primes represented by irreducible polynomials in one variable*. Proc. Sympos. Pure Math. 1965. V. 8. P. 119–135.
7. Ford K., Konyagin S., Maynard J., Pomerance C., Tao T. *Long gaps in sieved sets*. J. European Math. Soc. 2021. V. 23. № 2. P. 667–700.
8. Ford K., Gabdullin M. R. *Long strings of consecutive composite values of polynomials*. Preprint. 2023. <https://arxiv.org/abs/2310.20449>.

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ТЕРНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

*И. Ю. Реброва*

*Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого*

Наша цель состоит в том, чтобы получить асимптотическую формулу для  $d_3(n)$  – количества троек натуральных чисел  $(u, k, v)$  – решений диофантова уравнения

$$uk + kv + vu = n. \quad (1)$$

Последнее является важным инструментом при изучении числа классов положительно определенных бинарных квадратичных форм элементарными методами, восходящими к Лиувиллю. В монографии Венкова Б. А. [1, с. 194, 195] по этому поводу говорится: “Далее Лиувилль в письме к Эрмиту указал, что соотношения, о которых идет речь, могут быть выведены из его числовых тождеств (§ 4, гл. V) и обрисовал в общих чертах ход рассуждения. Наконец, Успенский дал полный вывод всех соотношений Кронекера, Гирстера, Гурвица и др. при помощи методов Лиувилля; мы воспользуемся его изложением для вывода наиболее важных соотношений Кронекера”.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$(u + v)(k + v) = v^2 + n.$$

Положив  $a = u + v$ ,  $b = v$ ,  $c = k + v$ , получим систему

$$ac = b^2 + n; \quad b < a, \quad b < c, \quad (2)$$

где  $(a, b, c)$  — тройки натуральных чисел.

Обозначим через  $d_3(n; P)$  количество решений уравнения из (2) в натуральных числах  $a, b, c$  ( $0 < b \leq P$ ). Очевидно, что

$$d_3(n; P) = \sum_{0 < b \leq P} \tau(b^2 + n),$$

где  $\tau(m)$  — число всех делителей натурального  $m$ . Задача об асимптотическом поведении  $d_3(n; P)$  — одна из самых популярных в аналитической теории чисел. В работе [2] при  $P \rightarrow \infty$  впервые была доказана асимптотическая формула

$$d_3(n; P) = c(n)P \log P + O_n(P \log P)$$

с положительной константой  $c(n)$ , зависящей только от  $n$ .

Опираясь на оценки А. Вейля для сумм Клостермана, Хоули [3] доказал, что для  $\forall \varepsilon > 0$

$$d_3(n; P) = c(n)P \log P + c'(n)P + O_{n,\varepsilon}(P^{8/9+\varepsilon}).$$

Метод Хоули, опирающийся на теорию бинарных квадратичных форм Гаусса, был усовершенствован в работе [4] и привел к результату с показателем  $5/6 + \varepsilon$  в остаточном члене. Там же (см. также [5]) был предложен новый подход к этой задаче, основанный на спектральной теории автоморфных функций, с помощью которого в работе [6] показатель

$5/6 + \varepsilon$  был уменьшен до  $2/3 + \varepsilon$  — наилучший на сегодняшний день. Эти исследования были систематизированы и изложены в монографии [7].

Теперь перейдем к формулировке главного результата работы. Напомним, что (см., например, [1]), что ненулевое целое число

$$d = b^2 - 4ac \equiv 0, 1 \pmod{4} -$$

дискриминант невырожденной бинарной квадратичной формы

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

с целыми коэффициентами  $a, b, c$ .

Дискриминант  $d = D$  называется фундаментальным, если он не представляется в виде

$$D = D'l^2$$

с другим дискриминантом  $D'$  и натуральным  $l > 1$ . При этом для любого дискриминанта  $d$  имеет место однозначное разложение

$$d = Dl^2,$$

где  $D = D(d)$  — фундаментальный дискриминант, а натуральное  $l = l(d)$  — кондуктор дискриминанта  $d$ . Легко показать, что любой фундаментальный дискриминант равен либо 1, либо произведению взаимно простых множителей вида

$$-4, -8, 8, \dots, (-1)^{(p-1)/2} p, \dots,$$

где  $p$  пробегает все нечетные простые числа. Для фундаментальных дискриминантов  $D$  и натуральных  $m$  определен символ Кронекера

$$\left( \frac{D}{m} \right) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Он равен нулю в случае  $\text{НОД}(m, D) > 1$ . В частных случаях, для любого натурального  $m$

$$\left( \frac{1}{m} \right) = 1,$$

а для нечетных натуральных  $m$

$$\left( \frac{-4}{m} \right) = (-1)^{(m-1)/2}, \quad \left( \frac{8}{m} \right) = (-1)^{(m^2-1)/8}, \quad \left( \frac{-8}{m} \right) = \left( \frac{-4}{m} \right) \left( \frac{8}{m} \right).$$

Символам Кронекера соответствуют примитивные квадратичные характеристы Дирихле  $\chi(m) = \chi_D(m)$ , для которых выполняется свойство мультипликативности

$$\chi(m_1 m_2) = \chi(m_1) \chi(m_2)$$

при всех целых  $m_1$  и  $m_2$ , а для натуральных  $m$

$$\chi_D(m) = \left( \frac{D}{m} \right).$$

Напомним также, что для натурального  $n$   $\mu(n)$  — функция Мёбиуса,

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha, \quad \sigma_0(n) = \tau(n).$$

Как обычно, для комплексного  $s$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} -$$

дзета-функция Римана и  $L$  — ряды Дирихле, абсолютно сходящиеся в полуплоскости  $\operatorname{Re}s > 1$  и определяющие в ней голоморфную функцию. Они продолжаются голоморфно на всю плоскость комплексного переменного за единственным исключением дзета-функции Римана, которая имеет простой полюс в точке  $s = 1$  с вычетом

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1.$$

**Теорема.** Пусть натуральное  $n \geq 3$ ,  $a - 4n = Dl^2$  — каноническое разложение с фундаментальным дискриминантом  $D < 0$  и кондуктором  $l$ . Тогда для  $\forall \varepsilon > 0$

$$d_3(n) = \frac{12}{\pi} \sqrt{l} \left( \sum_{t|l} \left( \frac{D}{l} \right) \frac{\mu(t)}{t} \sigma_{-1} \left( \frac{l}{t} \right) L_D(1) \sqrt{n} + O_\varepsilon(n^{1/2-1/48}) \right).$$

**Замечание.** Ограничение  $n \geq 3$  связано с тем, что  $d_3(1) = d_3(2) = 0$ , а в остальных случаях  $d_3(n) > 0$ .

Автор благодарит Быковского В. А. за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Венков Б. А. *Элементарная теория чисел*. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.
2. Scourfield E. J. *The divisors of a quadratic polynomials*. Proc. Glasgow Math. Accoc. 1961. V. 5. № 1. P. 8–20.
3. Hooley C. *On the number of divisors of quadratic polynomials*. Acta Math. 1963. V. 110. № 1–2. P. 97–114 (Русский перевод: сб. Математика, 1968. Т. 12. № 5. С. 3–18.)
4. Быковский В. А. *Асимптотические свойства целых точек  $(a_1, a_2)$ , удовлетворяющих сравнению  $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$* . В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1981. Т. 112. С. 5–25.
5. Быковский В. А. *Об одной формуле суммирования в спектральной теории автоморфных функций и ее применения в аналитической теории чисел*. Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 2. С. 275–277.
6. Быковский В. А. *Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения*. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1984. С. 15–33.
7. Быковский В. А. *Арифметические средние и L-ряды автоморфных форм*. Хабаровск: Издательство ТОГУ, 2017. 68 с.

# МОДИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МЕТОДА В ЗАДАЧЕ О СЛАБОМ НАСЫЩЕНИИ

*H. A. Терехов*

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный*

Пусть дан граф  $H$  и число  $n$ . Будем говорить, что граф  $F$  на  $n$  вершинах *слабо насыщается*  $H$ , если можно так упорядочить недостающие в  $F$  ребра  $e_1, \dots, e_s$  и добавлять их по очереди, что каждое  $e_i$  образует новую копию  $H$  в графе  $F$  с уже добавленными ребрами. Числом слабого насыщения  $\text{wsat}(n, H)$  обозначим минимальное число ребер в *слабонасыщаемом*  $H$  графе на  $n$  вершинах.

Основная сложность в изучении данной величины заключается в получении низких оценок. Для этой задачи показал высокую эффективность линейно-алгебраический метод с помощью которого удалось получить значения  $\text{wsat}(n, H)$  для клик [1–3], полных двудольных графов с одинаковым размером долей [3, 4] и других графов [5].

Этот метод, введенный в общем случае Калаи [3], заключался во вложении ребер клики  $E(K_n)$  в некоторое линейное пространство так, что данное вложение удовлетворяет некоторым естественным условиям совместности с  $H$ : для любой копии  $H'$  графа  $H$  в  $K_n$  и любого ребра  $e \in E(H')$  образ данного ребра линейно выражается через образы остальных ребер  $H'$ , в этом случае числа слабого насыщения  $\text{wsat}(n, H)$  оцениваются снизу размерностью подпространства, порожденного образом  $E(K_n)$ .

С другой стороны, для получения общих оценок, оказались эффективны комбинаторные методы, с помощью которых была доказана следующая общая оценка [6]. Пусть

$$\gamma_H^m = \min \left\{ \frac{|\{e \in E(H) \mid e \cap U \neq \emptyset\}| - 1}{|U|} \mid \emptyset \neq U \subset V(H), |V(H) \setminus U| \geq m \right\},$$

тогда

$$\text{wsat}(n, H) \geq \gamma_H^1 \cdot (n - |V(H)|) + |E(H)| - 1. \quad (1)$$

Используя оценку (1), можно вывести следующую асимптотически оптимальную общую нижнюю оценку в терминах минимальной степени вершины  $\delta(H)$ :

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \text{wsat}(n, H) \geq \left( \frac{\delta}{2} - \frac{1}{\delta+1} \right) (n - |V(H)|) + |E(H)| - 1. \quad (2)$$

Помимо обобщения оценки (1) на случай гиперграфов отдельный интерес заключался в получении данной оценки с помощью линейно-алгебраического метода с целью получить некоторый общий эффективный инструмент для оценивания чисел слабого насыщения.

При исследовании линейно-алгебраического метода было обнаружено некоторое ограничение, которое не позволяло его использовать напрямую для доказательства (1).

Для описания этого ограничения обозначим через  $\text{rk-sat}(n, H)$  наилучшую оценку, которую можно получить через вложение  $E(K_n)$  в некоторый матроид (обобщение линейного пространства) так, что это вложение удовлетворяет условиям совместности с  $H$ . Было обнаружено, что  $\text{rk-sat}(n, H)$  имеет целочисленный коэффициент асимптотики, то есть существуют целочисленные константы  $N, a, C$  такие, что

$$\forall n \geq N \quad \text{rk-sat}(n, H) = a \cdot n + C. \quad (3)$$

Для доказательства (3) было замечено, что можно из вложения клики на  $n$  вершинах, получить вложение клики на  $n - 1$  вершине и, в силу наличия гибкости в выборе базиса, можно показать следующую оценку:

$$\text{rk-sat}(n - 1, H) \geq \text{rk-sat}(n, H) - \left\lfloor \frac{\text{rk-sat}(n, H)}{n - |V(H)|} \right\rfloor,$$

из которой следует требуемое.

В силу этого ограничения, чтобы получать нецелые коэффициенты, можно для графа  $H$  и произвольного положительного целого  $k$  с помощью некоторой процедуры дупликации ребер получить семейство мультиграфов  $\mathcal{H}$  такое, что

$$\text{wsat}(n, H) = \frac{1}{k} \cdot \text{wsat}(n, \mathcal{H}).$$

(Определение чисел слабого насыщения естественным образом обобщается на семейство мультиграфов.)

Далее, оценивая  $\text{wsat}(n, \mathcal{H})$  стандартным линейно-алгебраическим методом, можно получать нижнюю оценку с рациональным коэффициентом асимптотики

$$\text{wsat}(n, H) \geq \frac{1}{k} \cdot \text{rk-sat}(n, \mathcal{H}). \quad (4)$$

В качестве матроидов в  $\text{rk-sat}$  можно использовать так называемые *count* матроиды (рассмотренные, например, в [7]), где множество ребер  $G$  объявляется независимым если для любого подграфа  $F \subset G$  выполнено  $|E(F)| \leq a \cdot |V(F)| - b$  для некоторых фиксированных целочисленных параметров  $a, b$ .

Используя данные матроиды в модифицированном линейно-алгебраическом методе (4), удалось передоказать и даже несколько усилить общую оценку (1)

$$\text{wsat}(n, H) \geq \gamma_H^2 \cdot (n - |V(H)|) + |E(H)| - 1. \quad (5)$$

Данное доказательство также может быть использовано для естественного обобщения оценки (5) на случай гиперграфов, если вместо *count* матроидов использовать их обобщения на гиперграфы, введенные Пихурко [8].

Для формулировки обобщения определим для  $r$ -однородного (все ребра имеют размер  $r$ ) гиперграфа  $H$   $r - 1$  тень как

$$\partial_{r-1}(H) = \left\{ U \in \binom{V(H)}{r-1} \mid \exists e \in E(H), \ U \subset e \right\},$$

где через  $\binom{V(H)}{r-1}$  обозначается семейство  $r - 1$  элементных подмножеств  $V(H)$ .

Тогда для

$$\gamma_{r-1, H} = \min \left\{ \frac{|\{e \in E(H) \mid \binom{e}{r-1} \cap U \neq \emptyset\}| - 1}{|U|} \mid \emptyset \neq U \subset \partial_{r-1}(H), \ |\partial_{r-1}(H) \setminus U| \geq r \right\} \quad (6)$$

и любого  $n \geq |V(H)|$

$$\text{wsat}(n, H) \geq \gamma_{r-1, H} \cdot \left( \binom{n}{r-1} - |\partial_{r-1}(H)| \right) + |E(H)| - 1. \quad (7)$$

Из оценки (7) можно вывести асимптотически оптимальную общую нижнюю оценку, обобщающую (2). Определим для произвольного  $W \in \binom{V(H)}{r-1}$  его степень как

$$d_H(W) = |\{e \in E(H) \mid W \subset e\}|$$

и введем следующее обобщение минимальной степени вершины [9]:

$$\delta_{r-1}(H) = \min \{ d_H(W) \mid W \in \partial_{r-1}(H) \}.$$

Тогда для  $\delta = \delta_{r-1}(H)$  и любого  $n \geq |V(H)|$

$$\text{wsat}(n, H) \geq \left( \frac{\delta}{r} - \frac{1}{\binom{r+\delta-1}{r-1}} \right) \cdot \left( \binom{n}{r-1} - |\partial_{r-1}(H)| \right) + |E(H)| - 1.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Frankl P. *An extremal problem for two families of sets*. European Journal of Combinatorics. 1982. V. 3. P. 125–127.
2. Kalai G. *Weakly saturated graphs are rigid*. North-Holland Mathematics Studies. 1984. V. 87. P. 189–190.
3. Kalai G. *Hyperconnectivity of graphs*. Graphs and Combinatorics. 1985. V. 1. P. 65–79.
4. Kronenberg G., Martins T., Morrison N. *Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique*. Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2021. V. 178. P. 105357.
5. Pikhurko O. *Weakly saturated hypergraphs and exterior algebras*. Combinatorics, Probability and Computing. 2001. V. 10. P. 435–351.
6. Terekhov N., Zhukovskii M. *Weak saturation in graphs: a combinatorial approach*. Journal of Combinatorial Theory, Series B. 2025. V. 172. P. 146–167.
7. Lee A., Streinu I. *Pebble game algorithms and sparse graphs*. Discrete Mathematics. 2008. V. 308. P. 1425–1437.
8. Pikhurko O. *Uniform families and count matroids*. Graphs and Combinatorics. 2001. V. 17. P. 729–740.
9. Bulavka D., Tancer M., Tyomkyn M. *Weak saturation of multipartite hypergraphs*. Combinatorica. 2023. V. 43. P. 1081–1102.

# О СПЕКТРАХ ГЕЛЬФОНДА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ОСТРОВСКОГО

*A. B. Шутов*

*Владимирский государственный университет*

Пусть

$$N = \sum_i n_i b^i,$$

где  $n_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  – разложение  $N$  в  $b$ -ичной системе счисления. Пусть  $N_{d,a}^{(b)}(X)$  – количество натуральных чисел, меньших  $X$ , для которых  $\sum_i n_i \equiv a \pmod{d}$ .

А. О. Гельфонд [1] показал, что при условии взаимной простоты  $d$  и  $b-1$  существует постоянная  $\mu < 1$  такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^\mu).$$

Данный результат обобщался в огромной количестве направлений. Одним из них является его перенос с  $b$ -ичных систем счисления на другие представления натуральных чисел. Важным классом таких разложений являются разложения Островского.

Пусть  $\alpha = [0; q_1, q_2, \dots]$  – иррационально,  $\{q_i\}$  – неполные частные разложения  $\alpha$  в цепную дробь, а  $\{Q_i\}$  – знаменатели подходящих дробей. Разложением Островского натурального числа  $N$  называется представление

$$N = \sum_{i=0}^{t(N)} z_i(N) Q_i,$$

получаемое при помощи жадного алгоритма. Коэффициенты  $z_i(N)$  однозначно определяются условиями  $0 \leq z_0(N) < q_1$ ,  $0 \leq z_i(N) \leq q_{i+1}$  при  $i \geq 1$ , причем  $z_i(N) = q_{i+1}$  влечет за собой  $z_{i-1}(N) = 0$ . Коэффициенты  $z_i(N)$  также можно однозначно определить из неравенств  $|N - \sum_{i=k}^{t(N)} z_i(N) Q_i| < Q_k$ , которые как раз и означают жадность разложения.

Пусть  $N_{d,a}^{(\alpha)}(X)$  – количество натуральных чисел, меньших  $X$ , для которых сумма цифр разложения Островского сравнима с  $a$  по модулю  $d$ .

Пусть

$$g_{d,a}(\alpha) = \inf \left\{ \lambda : N_{d,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^\lambda) \right\}$$

и

$$g_d(\alpha) = \max_a g_{d,a}(\alpha).$$

Отметим, что во всех примерах, в которых  $g_{d,a}(\alpha)$  удается вычислить, это значение не зависит от  $\alpha$ .

Множество  $\mathbb{G}_d = \{g_d(\alpha)\}$  будем называть  $d$ -м спектром Гельфонда.

При  $d = 2$  спектр Гельфонда имеет очень простой вид [2]:  $\mathbb{G}_2 = \{0\}$ .

Далее предполагаем, что  $d \geq 3$ . В этом случае известно [3], что существуют постоянные  $\lambda_d < 1$  такие, что

$$\mathbb{G}_d \subseteq [0; \lambda_d].$$

Отметим, что значение  $\lambda_d$ , полученное в [3], с ростом  $d$  стремится к единице быстрее, чем любая экспонента. В настоящем времени для  $\lambda_d$  нами получены верхние оценки вида  $\lambda_d \lesssim 1 - O(c^{-d})$  для некоторого  $c > 0$ .

Пусть  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  и

$$\mu_d = \log_\tau \left| \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos \frac{2\pi}{d} + i \sin \frac{2\pi}{d}} \right|.$$

В [4] доказано, что

$$g_d(\tau) = \mu_d.$$

Установлено, что для любого  $\mu \in [0; \mu_d]$  существует бесконечно много иррациональных  $\alpha$ , для которых

$$g_{d,a}(\alpha) = \mu$$

для всех  $a$ . В частности,

$$[0; \mu_d] \subseteq \mathbb{G}_d.$$

Рассмотрим семейство квадратичных иррациональностей вида

$$\tau_g = \frac{g + \sqrt{g^2 + 4}}{2}.$$

Данные квадратичные иррациональности важны тем, что все неполные частные их разложения в цепную дробь равны  $g$ . Пусть  $g' = g \bmod d$ . Тогда при  $d \geq 3$  и любом  $a$

$$g_{d,a} = \begin{cases} 0, & g' = 0, \\ \frac{\ln \eta_{g'}}{\ln \tau_g}, & g' \neq 0, \end{cases}$$

где

$$\eta_{g'} = \frac{1}{2} \max_{1 \leq k \leq [d/2]} \left| \left| U_{g'-1} \left( \cos \frac{\pi k}{d} \right) \right| + \sqrt{\left| U_{g'-1} \left( \cos \frac{\pi k}{d} \right) \right|^2 + \cos \frac{2\pi k}{d} + i \sin \frac{2\pi k}{d}} \right|.$$

Здесь  $U_n(\cdot)$  – многочлены Чебышева второго рода.

Компьютерные эксперименты показывают, что максимум в формуле для  $\eta_{g'}$  всегда достигается при  $k = 1$ . В настоящем времени это предположение доказано при  $g' = d - 1$ , а также в случае, когда  $d$  достаточно велико по сравнению с  $g'$ .

Также компьютерный эксперимент показывает, что  $g_d(\tau_g) < g_d(\tau)$  при любом  $g \geq 2$ . Кроме того, множество значений  $g_d(\tau_g)$ ,  $1 \leq g \leq d - 1$ , согласно компьютерному эксперименту, имеет (при подходящей нормировке) предельное распределение при  $d \rightarrow \infty$ .

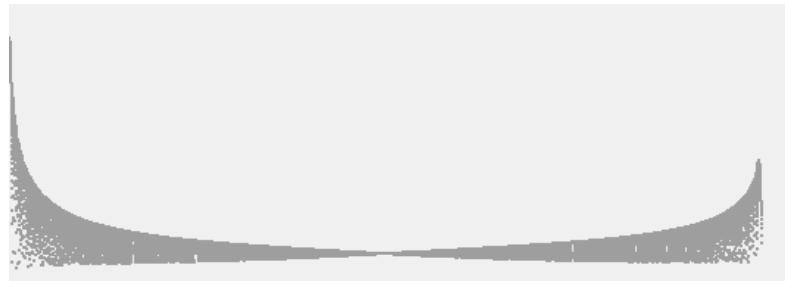


Рис. 1. Множество значений  $g_d(\tau_g)$  при  $d = 30000$  и  $1 \leq g \leq d - 1$

Результат о вычислении  $g_{d,a}$  для  $\tau_g$  можно обобщить следующим образом. Пусть иррациональное  $\alpha$  таково, что все  $q_i \equiv g' \pmod{d}$ . Предположим также, что существует предел

$$L(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_n}{n}.$$

Данный предел называется константой Леви иррациональности  $\alpha$ . Тогда

$$g_{d,a}(\alpha) = \frac{\ln \eta_{g'}}{L(\alpha)}.$$

Отсюда, в частности, можно получить, что при любом  $g$ ,  $1 \leq g < d$ , и любом  $\mu < g_d(\tau_g)$  существует бесконечно много иррациональных  $\alpha$  таких, что все неполные частные их разложения в цепную дробь сравнимы с  $g$  по модулю  $d$  и  $g_{d,a}(\alpha) = \mu$ .

Приведем также один результат о совместных значениях величин  $g_d$ . Пусть  $D$  – конечное множество натуральных чисел,  $D \geq 3$ . Тогда существует несчетное множество  $\alpha$  таких, что  $g_d = 0$  для всех  $d \in D$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gelfond A. O. *Sur les nombres qui ont des proprietes additives et multiplicatives donnees*. Acta Arithmetica. 1968. V. 13. №3. P. 259–265.
2. Шутов А. В., Жукова А. А. *Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа*. Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 104–120.
3. Шутов А. В., Жукова А. А. *Об аналоге задачи Гельфонда для разложений Островского*. Известия РАН. Серия математическая. 2025. Т. 89. № 3. С. 25–44.
4. Шутов А. В. *Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цеккендорфа*. Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 5. С. 195–215.

# УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

## ОБОСНОВАНИЕ ОДНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

## В ПОРОУПРУГОМ ТОНКОМ СЛОЕ

*П. В. Гилев, А. А. Папин*

*Алтайский государственный университет, Барнаул*

Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений составного типа [1]:

$$\frac{\partial(s_i\phi\rho_i^0)}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i\phi\vec{u}_i\rho_i^0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\vec{u}_3\rho_3^0) = 0, \quad (3)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \vec{x}), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi) \left( \frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} + \nabla \cdot \left\{ \frac{\eta}{2}(1-\phi) \left[ \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left( \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right] \right\} = \rho_{tot} \vec{g}. \quad (6)$$

Здесь  $\rho_i^0$ ,  $\vec{u}_i$ ,  $s_i$  и  $p_i$  – соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление  $i$ -й фазы ( $i = 1$  – смачивающая фаза,  $i = 2$  – несмачивающая фаза,  $s_1 + s_2 = 1$ ,  $i = 3$  – твердый деформируемый скелет),  $\phi$  – пористость (доля объема среды, приходящейся на пустоты),  $p_e \equiv p_{tot} - p_f$  – эффективное давление,  $p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi)p_3$  – общее давление,  $p_f \equiv p_1 s_1 + p_2 s_2$  – давление жидкой фазы,  $\rho_{tot} \equiv \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0) + (1-\phi)\rho_3^0$  – общая плотность;  $\eta$ ,  $\xi(\phi)$  и  $\beta_t(\phi)$  соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объемной вязкости и объемной сжимаемости среды,  $\vec{g}$  – плотность массовых сил; кроме того,  $K_0(\phi)$  – тензор проницаемости,  $\mu_i$  – динамическая вязкость  $i$ -й жидкости,  $k_{0i}(s_i)$  – относительная фазовая проницаемость,  $p_c(s_1, \vec{x})$  – капиллярное давление – есть заданные функции.

Движение рассматривается в области изменения переменных  $(x, z, t) \in \Omega_T = \Omega \times [0, T]$ , где  $\Omega = [-H, H] \times [-L, L]$ . В статье [2] показано, что с использованием следующих ограничений:

$$\vec{u}_3 = (0, u_3(x, t)), \quad \vec{u}_i = (0, u_i(x, z, t)), \quad i = 1, 2, \quad \frac{H}{L} = \delta \ll 1, \quad \vec{g} = (0, -g),$$

обозначений

$$\vec{f}(x, s) = K_0 \left( \frac{k_{01}}{\mu_1} \rho_1 \vec{g} + \frac{k_{02}}{\mu_2} \rho_2 \vec{g} \right), \quad \vec{f}_0(x, s) = K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \rho_1 \vec{g}, \quad \vec{F}(x, s) = \vec{f}_0 - b\vec{f},$$

$$\begin{aligned} a(s) &= -\frac{1}{k} \frac{k_{01}}{\mu_1} \frac{k_{02}}{\mu_2} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad s = s_1, \quad p = p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}}{k(\xi)\mu_2} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \quad k(s) = \frac{k_{01}}{\mu_1} + \frac{k_{02}}{\mu_2}, \\ b(s) &= \frac{k_{01}}{\mu_1 k}, \quad \vec{v} = s_1 \phi \vec{u}_1 + s_2 \phi \vec{u}_2 + (1 - \phi) \vec{u}_3, \quad \vec{v}_1 = s \phi \vec{u}_1, \end{aligned}$$

а также начально-краевых условий

$$\begin{aligned} s(t, x, -L) &= s_1^-(t), \quad s(t, x, L) = s_1^+(t), \quad s(0, x, z) = s_1^0(z), \\ p_1(t, x, -L) &= p_1^-(t), \quad p_1(t, x, L) = p_1^+(t), \\ \phi(0, x, z) &= \phi_0(x), \quad u_3(t, -H, z) = u_3^-(t), \quad u_3(t, +H, z) = u_3^+(t), \end{aligned} \tag{7}$$

уравнения (1)–(6) можно свести к следующей системе:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_0 k \frac{\partial p}{\partial z} + \vec{f} \right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial s \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( s \phi u_3 - K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial z} - K_0 a \frac{\partial s}{\partial z} - \vec{f}_0 \right) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( (1 - \phi) u_3 \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(1 - \phi) \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0. \tag{10}$$

Система (8)–(10) распадается на две подсистемы. Первая из них состоит из уравнений (10) и может быть решена независимо от остальных уравнений. Вторая, с учетом найденных  $\phi$  и  $u_3$ , состоит из уравнений (8)–(9).

Задачу, состоящую из подсистемы (10) и начально-краевых условий для  $\phi$  и  $u_3$ , будем называть задачей 1. Задачу, состоящую из уравнений (8)–(9) и начально-краевых условий для  $s_1$  и  $p_1$ , назовем задачей 2.

Задача 1, в силу входящих в нее уравнений, при достаточно гладких начально-краевых условиях, имеет классическое решение. Решение задачи 2, в силу того, что коэффициент  $a(s) = 0$  при  $s = 0$  и  $s = 1$ , может вырождаться. Поэтому оно будет пониматься в обобщенном смысле.

Функции  $u_3(x, t)$  и  $\phi(x, z, t)$  называются решением задачи 1, если

- 1)  $u_3(x, t) \in C^{2,1}(\Omega_t)$ ,  $\phi(x) \in C^1(\Omega_t)$ ;
- 2)  $u_3$  и  $\phi$  удовлетворяют уравнениям (10) и начально-краевым условиям (7);
- 3)  $0 < \phi < 1$ .

Ограниченнные измеримые функции  $s(z, t)$  и  $p(z, t)$  называются обобщенным решением задачи 2, если:

- 1)  $0 \leq s(z, t) \leq 1$  почти всюду в  $\Omega_T$ ;
- 2)  $\frac{\partial p}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$ ,  $a \frac{\partial s}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$ , где при  $0 \leq s \leq 1$  функция  $a \frac{\partial s}{\partial z}$  определяется формулой

$$a \frac{\partial s}{\partial z} = \left| \frac{dp_c}{ds} \right| \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \in L_2(\Omega_T), \quad u(s) = \int_0^s \frac{1}{k(\xi)} \frac{k_{01}(\xi)}{\mu_1} \frac{k_{02}(\xi)}{\mu_2} d\xi;$$

- 3)  $p$  удовлетворяет краевым, а  $s$  – начально-краевым условиям;
- 4) для произвольных допустимых функций  $\lambda(z, t)$  и  $\psi(z)$  таких, что

$$\lambda(z, t) \in W_2^1(\Omega_T), \quad \psi(z) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\lambda(-1, t) = \psi(-1) = \lambda(1, t) = \psi(1) = \lambda(z, T) = 0, \quad t \in [0, T],$$

почти всюду выполнены равенства:

$$L_1 \equiv - \left( \phi s, \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)_{\Omega_T} + \left( \vec{v}_1, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_T} = - (\phi s, \lambda)_{\Omega} |_{t=0}, \quad L_2 \equiv \left( \vec{v}_1, \frac{d\psi}{dz} \right)_{\Omega} = 0.$$

Здесь

$$s_0(x, t) = \begin{cases} s^-(t), & x = -1, \\ s^+(t), & x = 1, \\ s^0(z), & t = 0. \end{cases} \quad p_0(x, t) = \begin{cases} p^-(t), & x = -1, \\ p^+(z), & x = 1. \end{cases}$$

Существование обобщенного решения для задачи 2 было доказано в [2]. В работе для задачи 2 на основе обобщенного решения строится классическое решение [4] и обосновывается один приближенный метод, позволяющий получить данное решение. Идея этого метода была изложена в [3].

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (№ FZMW-2024-0003).*

## ЛИТЕРАТУРА

- Папин А. А., Подладчиков Ю. Ю. *Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде*. Известия Алтайского государственного университета. 2015. № 1–2. С. 131–135. DOI: 10.1425izvasu(2015)1.2-24.
- Гилев П. В., Папин А. А. *Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в тонком пороупругом слое*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27. № 2. С. 20–33. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202.
- Кружков С. Н., Суторянский С. М. *Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов*. Матем. сб. 1977. Т. 104(146). № 1(9). С. 69–88.
- Папин А. А. *Краевые задачи двухфазной фильтрации: монография*. Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2009. 220 с.

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ФРОНТАМИ

*A. L. Казаков*

*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,  
Иркутск*

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение второго порядка параболического типа

$$u_t = f(u)u_{xx} + g(u_x) + h(u). \quad (1)$$

Здесь  $u$  — искомая функция,  $t$  (время) и  $x$  (пространственная координата) — независимые переменные,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  — известные функции одной переменной, которые предполагаются достаточно гладкими. Подобные математические объекты применяются в механике сплошных сред в качестве моделей диффузии, фильтрации и теплопроводности [1], и в биологии для описания популяционной динамики [2].

Для уравнения (1) ищутся и исследуются решения, имеющие вид тепловой (диффузионной, фильтрационной) волны [3]: кусочно-гладкие функции, состоящие из положительной и нулевой частей, непрерывно сстыкованных вдоль некоторого многообразия в пространстве переменных  $t, x$ . Для простоты и наглядности будем предполагать, что последнее может быть задано в виде  $x = a(t)$ , при этом выполнено следующее условие:

$$u|_{x=a(t)} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $a(t)$  — достаточно гладкая функция, именуемая нулевым фронтом, которая может быть как известной, так и подлежащей определению. По одну сторону от нулевого фронта искомая функция  $u > 0$ , по другую — предполагается, что  $u \equiv 0$ . Иначе говоря, отрицательная часть решения заменяется тождественным нулем.

Необходимым условием существования решений с подобными свойствами, которые позволяют описать возмущения, распространяющиеся по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью, т. е. имеют вполне понятную физическую (биологическую) интерпретацию, является выполнение равенств

$$f(0) = g(0) = h(0). \quad (3)$$

Легко видеть, что при выполнении (3) уравнение (1) имеет решение  $u \equiv 0$ , причем на этом решении уравнение вырождается, поскольку обращается в ноль коэффициент перед второй (старшей) производной.

Ранее решения (1), удовлетворяющие (2), рассматривались нами для различных частных случаев (см., например, [4, 5]). В докладе будут представлены результаты для более общей постановки.

Исследования нелинейных уравнений с частными производными традиционно проводятся нами в двух основных направлениях:

1. Доказательство теорем существования и единственности в классе аналитических функций, когда искомая функция представлена либо в виде ряда по степеням некоторой переменной (не обязательно физической), либо в виде кратного ряда. Коэффициенты

разложений определяются по явным рекуррентным формулам, сходимость рядов доказывается методом мажорант [6].

2. Построение точных решений и исследование их свойств. На этапе построения решений путем использования анзаца специального вида уравнение с частными производными редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению, наследующему нелинейность и особенность у исходной постановки, при этом (2) превращается в условие в точке. На этапе исследования свойств решений последние либо записываются в явном виде (редко), либо исследуются методами качественно теории дифференциальных уравнений, либо строятся приближенно. Зачастую, все три элемента исследования присутствуют одновременно [7].

В рамках настоящего исследования доказана новая теорема существования и единственности решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2) с построением решения в виде ряда по степеням переменной  $z = x - a(t)$  с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. Найдены новые классы точных решений, которые получаются с использованием многочленов по степеням  $x$  с коэффициентами, зависящими от  $t$ , т. е. в виде

$$u = \sum_{i=0}^n A_i(t)x^i,$$

а также обобщенного разделения переменных

$$u = \psi(t)v(z),$$

где  $x = x - a(t)$  или  $z = x/a(t)$ .

Во всех случаях нахождение точных решений сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Построенные решения в дальнейшем предполагается использовать в качестве тестовых примеров при разработке численных методов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Vazquez J. L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford: Oxford University Press, 2007.
2. Миррей Дж.Д. *Математическая биология. Том II. Пространственные модели и их приложения в биомедицине*. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований, 2011.
3. Сидоров А. Ф. *Избранные труды. математика. Механика*. М.: Физматлит, 2001.
4. Казаков А. Л. *О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности*. Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 1057–1068.
5. Казаков А. Л. *Решения с нулевым фронтом для квазилинейного параболического уравнения теплопроводности*. Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 2. С. 86–102.
6. Баутин С. П., Казаков А. Л. *Обобщенная задача Коши и ее приложения*. Новосибирск: Наука. 2006.
7. Kazakov A. *Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type*. Symmetry. 2021. V. 13. № 5. P. 871.

**РЕШЕНИЯ С ДВУМЯ РАСХОДЯЩИМИСЯ НУЛЕВЫМИ  
ФРОНТАМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

A. Л. Казаков<sup>1</sup>, Л. Ф. Спевак<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,  
Иркутск

<sup>2</sup>Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург

Доклад посвящен построению и исследованию решений с нулевыми фронтами системы вырождающихся нелинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + u_x v_x) + f(u, v), \\ v_t &= \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + g(u, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$  — искомые функции;  $t$  (время) и  $x$  (пространственная координата) — независимые переменные;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — константы,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ . Известные функции  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  являются достаточно гладкими. Такие системы используются в качестве модели «хищник-жертва» в популяционной биологии [1].

Дополнительно будем предполагать, что

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0. \quad (2)$$

Для системы (1) рассмотрим граничные условия

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0, \quad (3)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$  — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям  $a(0) = b(0) = 0$ ,  $a(t) < 0$ ,  $b(t) > 0$  при  $t > 0$ . Таким образом, нулевые фронты двух искомых функций движутся в противоположных направлениях.

При выполнении условия (2) система (1) имеет нулевое решение:  $u \equiv 0, v \equiv 0$ , которое, очевидно, удовлетворяет (3). Однако, как показали ранее проведенные исследования авторов (см., например, [2]), в подобных задачах могут существовать и нетривиальные решения.

Ранее в [3] был рассмотрен частный случай задачи (1), (3), когда  $a(t) \equiv b(t)$ . К сожалению, для полученных результатов не удалось предложить содержательную интерпретацию, поскольку все полученные решения таковы, что всюду, за исключением нулевого фронта,  $uv \leq 0$ , т. е. искомые функции принимают  $u$  и  $v$  значения разных знаков. Первые шаги по преодолению данной проблемы были предприняты в статьях [2, 4]. В настоящей работе продолжается исследование решений задачи (1), (3), в которых обе искомые функции принимают положительные значения в некоторой области, т. е. имеют смысл для приложений.

Для задачи (1), (3) доказана теорема существования и единственности нетривиального решения в классе аналитических функций. Доказательство теоремы состоит из двух этапов: 1) формальное решение строится в виде рядов Тейлора с рекуррентно определяемыми коэффициентами  $u_{k,l}$ ,  $v_{k,l}$ ,

$$u^a(t, x) \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}, \quad v^a(t, x) = \sum_{k,l=0}^{\infty} v_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}, \quad (4)$$

2) сходимость рядов (4) доказывается классическим методом мажорант [5].

В частном случае, когда в системе (1)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , а  $f$  и  $g$  — степенные функции вида  $f(u, v) = A_1 v^\lambda u^{\theta-\lambda} - A_2 u^\theta$  — неотрицательные константы,  $\theta > \lambda > 0$ ,  $\theta > \mu > 0$ , найден новый класс точных решений системы, построение которого посредством обобщенного разделения переменных сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что, по крайней мере, в некоторых случаях решения облашают искомым свойством: существует непустая область, в которой обе искомые функции положительны.

Для приближенного решения задачи (1), (3) предложен численный алгоритм. Решение строится по шагам с разностной дискретизацией по времени. На очередном шаге  $t = t_k$  пространственная задача решается в области ненулевых значений двух искомых функций,  $x \in [a(t_k), b(t_k)]$ . Решение проводится итерационно, с использованием метода коллокаций [6] и аппроксимации радиальными базисными функциями [7].

С целью изучения поведения решений и оценки их точности были проведены тестовые расчеты. Оценить радиус сходимости рядов (4), а также возможность использования полученного решения в практических или тестовых целях априори невозможно. В связи с этим были исследованы свойства отрезков рядов (1),

$$u_n^a(t, x) = \sum_{k+l \leq n} u_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}, \quad v_n^a(t, x) = \sum_{k+l \leq n} v_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}, \quad (5)$$

а также аналогичных, построенных по степеням  $[x - b(t)]$ ,

$$u_n^b(t, x) = \sum_{k+l \leq n} u_{k,l} \frac{t^k [x - b(t)]^l}{k!l!}, \quad v_n^b(t, x) = \sum_{k+l \leq n} v_{k,l} \frac{t^k [x - b(t)]^l}{k!l!}. \quad (6)$$

Для примера был рассмотрен случай линейных функций  $f(u, v) = \gamma_1 u + \eta_1 v$ ,  $g(u, v) = \gamma_2 u + \eta_2 v$ . Точность приближенных решений (5) оценивалась невязками уравнений (1),

$$\begin{aligned} \delta_1^a &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |u_t^a - \alpha_1 u_x^a - \beta_1(u^a v_{xx}^a + u_x^a v_x^a) - f(u^a, v^a)|, \\ \delta_2^a &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |v_t^a - \alpha_2 v_x^a + \beta_2(v^a u_{xx}^a + u_x^a v_x^a) - g(u^a, v^a)| \end{aligned} \quad (7)$$

и погрешностью выполнения второго условия (3),

$$\delta_3^a = |v^a(t, b(t))|, \quad (8)$$

Для отрезков рядов (6) оценивались значения

$$\begin{aligned} \delta_1^b &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |u_t^b - \alpha_1 u_x^b - \beta_1(u^b v_{xx}^b + u_x^b v_x^b) - f(u^b, v^b)|, \\ \delta_2^b &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |v_t^b - \alpha_2 v_x^b + \beta_2(v^b u_{xx}^b + u_x^b v_x^b) - g(u^b, v^b)|, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta_3^b = |u^b(t, a(t))|. \quad (10)$$

На рис. 1 показаны графики отрезков рядов (5), (6) при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.5$ ,  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\gamma_1 = \eta_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = \eta_2 = -1$ ,  $a(t) = -0.15t^2$ ,  $b(t) = 0.1t^2$ ,  $n = 25$ . Значения невязок, приведенные в табл. 1, показывают, что ряды (5), (6) сходятся по крайней мере на отрезке  $x \in [0, 1]$ . При этом с течением времени для решения (5) растет погрешность

выполнения второго условия (3), а для (6) – первого. Например, при  $t = 1$  функция  $u_{25}^b(t, x)$  обращается в ноль в точке  $x = -0.1343409233$ , тогда как  $a(1) = -0.15$ . Таким образом, функции (5) (или (6)) при достаточно больших  $n$  можно считать приближенными решениями задачи (1), (3) лишь вблизи начального момента времени.

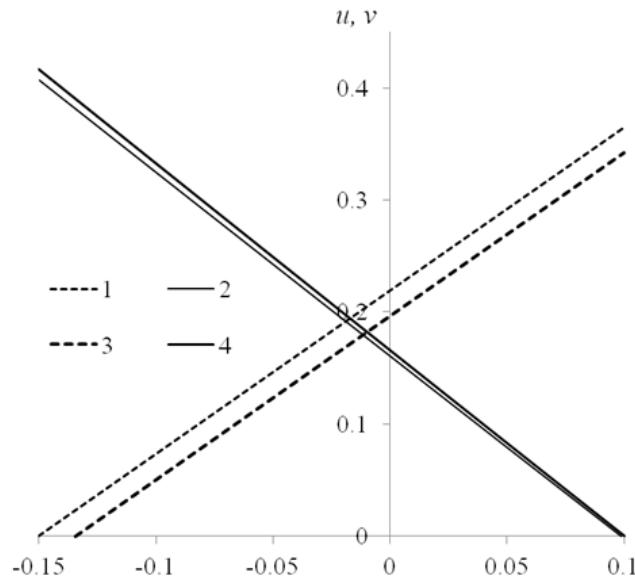


Рис. 1. Отрезки рядов (5), (6) при  $t = 1$ : 1 –  $u_{25}^a(t, x)$ , 2 –  $v_{25}^a(t, x)$ , 3 –  $u_{25}^b(t, x)$ ; 4 –  $v_{25}^b(t, x)$ .

Таблица 1: Невязки уравнений и погрешности нулевых фронтов для решений (5), (6)

$t$	$n$	$\delta_1^a$	$\delta_2^a$	$\delta_3^a$	$\delta_1^b$	$\delta_2^b$	$\delta_3^b$
0.5	5	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
0.5	15	$9.9 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
0.5	25	$2.2 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
1	5	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$
1	15	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$
1	25	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$8.4 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$

Если принять в качестве приближенных решений задачи (1), (3) пары функций  $u_n^a(t, x)$ ,  $v_n^b(t, x)$ , то для них априори будут выполнены условия (3). Точность выполнения уравнений (1) оценивалась невязками

$$\Delta_1 = \max_{x \in [a(t), b(t)]} |u_t^a - \alpha_1 u_x^a - \beta_1(u^a v_{xx}^b + u_x^a v_x^b) - f(u^a, v^b)|,$$

$$\Delta_2 = \max_{x \in [a(t), b(t)]} |v_t^b - \alpha_2 v_x^b + \beta_2(v^b u_{xx}^a + u_x^a v_x^b) - g(u^a, v^b)|.$$

В момент  $t = 1$  при  $n = 5$ :  $\Delta_1 = 1.1 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Delta_2 = 3.0 \cdot 10^{-3}$ ; при  $n = 15$ :  $\Delta_1 = 1.1 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Delta_2 = 3.0 \cdot 10^{-3}$ ; при  $n = 25$ :  $\Delta_1 = 5.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Delta_2 = 3.9 \cdot 10^{-2}$ .

При тех же параметрах задача (1), (3) была решена численно. Точность решения оценивалась невязками  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  уравнений системы (1), аналогично (7).

Таблица 2: Невязки уравнений (1) для численных решений

$t$	$h$	$N$	$\delta_1$	$\delta_2$
0.5	0.1	10	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.1	20	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.05	10	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.05	20	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
1	0.1	10	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
1	0.1	20	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$
1	0.05	10	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
1	0.05	20	$5.1 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$

Приведенные в табл. 2 данные демонстрируют сходимость алгоритма относительно шага по времени  $h$  и числа точек коллокаций  $N$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Murray J. D. *Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications*. Interdisciplinary applied mathematics. New York: Springer, 2003. V. 18.
2. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. *Решения нелинейной вырождающейся системы реакции – диффузия типа диффузионных волн с двумя фронтами*. ПМТФ. 2022. Т. 63. № 6. С. 104–115.
3. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. *Аналитические решения с нулевым фронтом для нелинейной вырождающейся параболической системы*. Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 11. Р. 1461–1470.
4. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. *Точные и приближенные решения квазилинейной параболической системы «хищник-жертва» с нулевыми фронтами*. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2025. Т. 240. С. 19–28.
5. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. V. II: Partial differential equations*. New York: Interscience, 2008.
6. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.
7. Fornberg B., Flyer N. *Solving PDEs with radial basis functions*. Acta Numerica. 2015. V. 24. Р. 215–258.

# ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

*В. Л. Литвинов, К. В. Литвинова*

*Самарский государственный технический университет*

Задача о колебаниях тел с подвижными границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением гиперболической задачи. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора вида решения строятся эквивалентные интегродифференциальные уравнения с симметричными и нестационарными ядрами и нестационарными пределами интегрирования. Преимущества метода интегродифференциальных уравнений раскрываются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок. Метод распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление внешней среды и жесткость основания колеблющегося объекта. Решение приводится в безразмерных переменных с точностью до значений второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. Находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях каната грузоподъемной установки, обладающего изгибной жесткостью, один конец которого наматывается на барабан, а на втором закреплен груз.

Среди всего множества задач динамики упругих систем с точки зрения технических приложений весьма актуальными являются задачи о колебаниях в системах с изменяющимися во времени геометрическими размерами. В технике широко распространены системы, границы которых подвижны (канаты грузоподъемных установок [1–8], гибкие передаточные звенья [4, 6, 9], бурильные колонны, твердотопливные стержни [10, 11] и др.). Исследования многих авторов по динамике подъемных канатов привели к необходимости постановки новых задач механики о динамике одномерных объектов переменной длины. В математической постановке это сводится к новым задачам математической физики – к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных диапазонах изменения обоих аргументов. Наличие подвижных границ вызывает значительные трудности при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1–18].

Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [19, 20], заключающийся в подборе новых переменных, оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [21] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, использованный в [22], заключающийся в замене геометрической переменной чисто мнимой, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить методологию теории функций комплексного переменного для решения. Однако точные методы решения ограничены волновым уравнением и относительно простыми граничными условиями.

Из приближенных методов наиболее эффективным является метод Канторовича – Галеркина [10, 14], а также метод построения решений интегродифференциальных уравнений, описанный в данной статье. Задача о колебаниях тел с подвижными границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными

условиями, является неклассическим обобщением гиперболической задачи. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора вида решения строятся эквивалентные интегродифференциальные уравнения с симметричными и нестационарными ядрами и нестационарными пределами интегрирования. Построение интегродифференциальных уравнений движения объектов переменной длины основано на прямом интегрировании дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной заменой искомой функции новой переменной.

В тривиальных случаях методы интегральных уравнений не имеют преимущества перед методом дифференциальных уравнений применительно к исследованию колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы [4, 6]. Преимущества метода интегродифференциальных уравнений раскрываются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющимся под действием движущихся нагрузок и т. д. Эти методы могут быть весьма плодотворными применительно к динамике канатов переменной длины и другим механическим объектам с движущимися границами.

В данной работе метод построения решений интегродифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [5, 7, 11], сопротивление внешней среды [10] и жесткость основания (подложки) объекта [4, 6]. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда на границах действуют внешние возмущения. При фиксированной длине объекта построенные интегродифференциальные уравнения переходят в классические уравнения Фредгольма второго рода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колосов Л. В., Жигула Т. И. *Продольно–поперечные колебания струны каната подъемной установки*. Изв. вузов. Горный журнал. 1981. № 3. С. 83–86.
2. Zhu W. D., Chen Y. *Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control*. J. Vibr. Acoust. 2006. № 1. Р. 66–78.
3. Shi Y., Wu L., Wang Y. *Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы*. J. Vibr. Eng. 2006. № 2. Р. 173–178.
4. Горошко О. А., Савин Г. Н. *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*. Киев: Наук. думка, 1971. 290 с.
5. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. *Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении*. Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Т. 19. № 4. С. 161–165.
6. Савин Г. Н., Горошко О. А. *Динамика нити переменной длины*. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
7. Liu Z., Chen G. *Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости*. J. Vibr. Eng. 2007. № 1. Р. 57–60.
8. Palm J. [et al.] *Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method*. V International Conference on Computational Methods in Marine Engineering. 2013.
9. Литвинов В. Л. *Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода*. Журн. Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16. № 1. С. 83–88.

10. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. *Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография*. Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2017. 149 с.
11. Лежнева А. А. *Свободные изгибные колебания балки переменной длины // Ученые записки*. Пермь: Пермск. ун–т, 1966. № 156. С. 143–150.
12. Wang L., Zhao Y. *Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations*. J. Sound Vib. 2009. № 1–2. P. 1–14.
13. Zhao Y., Wang L. *On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance*. J. Sound Vib. 2006. № 4–5. P. 1073–1093.
14. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. *Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах*. Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.
15. Berlioz A., Lamarque C.–H. *A non-linear model for the dynamics of an inclined cable*. Journal of Sound and Vibration. 2005. № 279. P. 619–639.
16. Sandilo S. H., van Horssen W. T. *On variable length induced vibrations of a vertical string*. Journal of Sound and Vibration. 2014. № 333. P. 2432–2449.
17. Zhang W., Tang Y. *Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations*. International Journal of Non–Linear Mechanics. 2002. № 37. P. 505–526.
18. Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F. *Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation*. Struct. Control Health Monit. 2010. № 17. P. 386–403.
19. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
20. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. *Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами*. Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». 2012. № 3(28). Р. 145–151.
21. Весницкий А. И. *Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры*. Изв. вузов. Радиофизика. 1971. № 10. Р. 1538–1542.
22. Барсуков К.], А., Григорян Г. А. *К теории волновода с подвижными границами*. Изв.вузов. Радиофизика. 1976. № 2. Р. 280–285.

## РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ВЛОЖЕНИИ

*A. A. Шейкин*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Стандартная метрическая формулировка общей теории относительности обладает рядом проблем, затрудняющих ее дальнейшие обобщения. Возможным выходом из этой проблемы является использование альтернативных геометрических переменных. Модификация гравитации зачастую требует подключения дополнительных степеней свободы, а квантование ощущается при наличии в теории фиксированного пространства времени, по времени которого можно развивать канонический формализм. Весьма естественным в свете этого является рассмотрение не только внутренней, но и внешней геометрии псевдоримановых многообразий, воспринимаемых как поверхности в объемлющем пространстве большего числа измерений. Эта идея лежит в основе нескольких подходов, известных под общим названием “brane world”. Одним из вариантов такого подхода является гравитация Редже – Тейтельбайма [1], в которой изучаемое  $n$ -мерное псевдориманово пространство предполагается изометрически вложенным в плоское объемлющее  $N$ -мерное пространство. Согласно теореме Жане – Картана – Бурстина – Фридмана [2], для локального вложения пространства общего вида достаточно  $N = n(n+1)/2$ . Динамической переменной в этом подходе вместо метрики  $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ ,  $\lambda, \mu, \nu = 0, \dots, n-1$ , объявляется функция вложения  $y^a(x^\lambda)$ ,  $a = 0, \dots, N-1$ , а метрика становится индуцированной:

$$\partial_\mu y^a \partial_\nu y^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}(x), \quad (1)$$

где  $\eta_{ab}$  — метрика плоского объемлющего пространства. Уравнение (1) в этом подходе понимается как замена переменных в вариационной задаче. Поскольку она содержит дифференцирование, класс решений уравнений Эйлера – Лагранжа расширяется. Подобная ситуация реализуется, например, в так называемой миметической гравитации (см. обсуждение связи этих теорий в [3]), а процедура замены переменных является обобщением замены Полякова в теории струн [4].

Будучи подставленной в действие Эйнштейна – Гильберта, замена приводит к уравнениям Редже – Тейтельбайма

$$G^{\mu\nu} - \varkappa T^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} \tau^{\mu\nu} \partial_\nu y^a) = 0, \quad (2)$$

где  $G^{\mu\nu}$  — тензор Эйнштейна,  $T^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса (ТЭИ) материи,  $\varkappa$  — гравитационная постоянная, а  $\tau^{\mu\nu}$  можно воспринимать как ТЭИ дополнительной материи и искать на этом пути, например, объяснение феномена темной материи [5].

К сожалению, за все приходится платить. Система уравнений (1), (2) куда более сложна, чем привычные уравнения Эйнштейна ( $G^{\mu\nu} = \varkappa T^{\mu\nu}$ ), и не может быть линеаризована привычными методами теории возмущений (возмущения над тривиальным фоном) [6]. Поэтому при анализе этих уравнений приходится фиксировать зависимость функции вложения и/или метрики пространства от определенных координат, руководствуясь физическими соображениями. В частности, зачастую метрика пространства частично фиксируется условиями симметрии, и задача разбивается на поиск функции вложения, удовлетворяющей тем же условиям и (1), и решение уравнений (2) для такой функции вложения.

Сама по себе задача поиска вложения пространства с заданной метрикой имеет очень длинную историю и восходит к Гауссу. Уравнения Гаусса – Кодацци – Майнарди – Петерсона [2] успешно использовались геометрами для доказательства существования вложения. Исторически наибольший интерес представляли задачи о вложении двумерных пространств в трехмерное, для которых существуют регулярные методы решения уравнений ГКМП, однако в случае большей коразмерности такие методы не известны. Кроме того, для физических приложений более актуально не доказательство возможности вложения, а нахождение явного вида функции  $y^a$  путем решения (1) как ДУЧП с неоднородностью в виде метрики  $g_{\mu\nu}$ . Поскольку это уравнение само по себе тоже нелинейное и в общем случае содержит много переменных, его решение сопряжено со значительными трудностями.

С. А. Пастон предложил [7] теоретико-групповой метод разделения переменных в (1), основанный на понятии симметричной поверхности. Симметричной считается такая поверхность, области которой, переходящие друг в друга под действием преобразования симметрии, обладают как одинаковой внутренней, так и внешней симметрией, и поэтому могут быть переведены друг в друга каким-либо преобразованием из группы движений  $SO(N_-, N_+) \triangleright \mathbb{R}^{N_-, N_+}$  объемлющего пространства. Тривиальный пример —  $\mathbb{R}$ -симметрия: одномерное пространство, параметризуемое координатой  $t$  и инвариантное относительно сдвигов по ней, можно представить в виде

- прямой:  $y^1(t) = at + b$ ,
- окружности:  $y^1(t) = c \cos \omega t, y^2(t) = c \sin \omega t$ ,
- спирали:  $y^1(t) = at + b, y^2(t) = c \cos \omega t, y^3(t) = c \sin \omega t$

и т. д. Сдвиг по координате  $t$  на кривой можно скомпенсировать сдвигом и/или поворотом в объемлющем пространстве.

Общий алгоритм применения метода таков:

1. Выбрать вкладываемое пространство и идентифицировать группу его симметрии  $G$  (например, пространство Шварцшильда обладает  $SO(3) \times \mathbb{R}$ -симметрией).
2. Выбрать размерность объемлющего пространства (для пространства Шварцшильда минимально возможное  $N = 6$ ).
3. Построить все представления группы симметрии  $G$  матрицами группы движений объемлющего пространства, размерность которых допускает их действие в объемлющем пространстве (например, «спиральное» вложение кривой, описанное выше, невозможно в пространство  $\mathbb{R}^2$ ).
4. Выбрав начальный вектор в объемлющем пространстве, произвольно зависящий от координат, не затрагиваемых симметрией, действовать на него построенными в предыдущем пункте матрицами и получить все возможные типы симметричных поверхностей (например, отрезок произвольной плоской кривой в  $\mathbb{R}^3$ , будучи повернут на  $2\pi$  относительно какой-либо оси, даст  $SO(2)$ -симметричную двумерную поверхность).
5. Определив тем самым зависимость функции вложения  $y^a(x)$  от координат, параметризующих действие группы  $G$ , подставить ее в уравнение (1) и решить его. Если это невозможно, вернуться на шаг 1, увеличить  $N$  и продолжить.

При помощи этого метода было найдено большое количество явных вложений: невращающихся 3+1-мерных черных дыр [8] и вращающейся 2+1-мерной [9], коллапсирующего пылевидного шара [11], космологических моделей Фридмана и Геделя [10] и других. Также оказалось возможным построить нетривиальные вложения плоского фона, требуемого для анализа нерелятивистского предела уравнений (2) [12].

Несмотря на то, что метод был специально разработан с расчетом на физические приложения и хорошо себя зарекомендовал, он имеет свои ограничения.

- Если группа симметрии вкладываемого пространства слишком бедна, то ее может не хватить для того, чтобы полностью разделить переменные. Примером такого пространства может служить гравитационная  $pp$ -волна, симметричная только относительно сдвигов одной из светоподобных координат. В такой ситуации целесообразно привлекать другие соображения: например, использовать информацию, даваемую уравнениями ГКМП, если коразмерность вкладываемого и объемлющего пространств достаточно мала [13].

- Если же полное разделение переменных возможно, однако коразмерность велика, типов симметричных поверхностей может быть очень много, и анализ разрешимости (1) может занять много времени. Предварительный анализ возможности вложения с геометрических позиций (например, знакопредопределенность компонент метрики, которой обладает та или иная поверхность, их асимптотические свойства или анализ второй фундаментальной формы поверхности [12]) может сократить объем работы.

- Наконец, если группа симметрии пространства-времени сама по себе велика и/или имеет сложную структуру, построение ее представлений может оказаться нетривиальной задачей. В том случае, если эта группа содержит достаточно для полного разделения переменных количество абелевых подгрупп, целесообразно ограничиться построением их простейших представлений [9]. Такой подход, помимо упрощения процедуры, позволяет анализировать возможность изометрического изгибания полученных поверхностей. Особенно удобным он оказывается для анализа аксиально-симметричных пространств: например, пространств Геделя, БТЗ или Тауба-НУТ.

“Святым граалем” в задаче о поиске явных изометрических вложений, бесспорно, является вложение вращающейся 3+1-мерной черной дыры: метрики Керра. Определенный успех был достигнут лишь во вложении подпространств этой метрики (так называемая задача о диаграммах вложения) [14], в то время как для всего пространства известно лишь неявное 3+6-мерное вложение [15] и явное 6+8-мерное вложение [16], оба из которых не пригодны для исследования уравнений (2). Хотя известно, что задача о получении самой метрики Керра из уравнений Эйнштейна допускает полное разделение переменных в них [17], добиться полного разделения переменных в (1) при  $N \leq 10$  никаким из вышеуказанных способов пока не удалось. Возможно, недавняя модификация классического алгоритма Ньюмена – Джениса [18] для генерации пространств с вращением может оказаться полезной.

Хочется выразить надежду, что задача получения явного вложения метрики Керра и других физически интересных метрик заинтересует специалистов по ДУЧП, опыт которых сможет помочь в ее решении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Regge T., Teitelboim C. *General relativity a la string: a progress report*. In Proc. of the First Marcel Grossmann Meeting. 1975. arXiv: 1612.05256.
2. Han Q., Hong J.-X. *Isometric Embedding of Riemannian Manifolds in Euclidean Spaces*. AMS, 2006.

3. Sheykin A. A. Solovyev D. P. , Sukhanov V. V. , Paston S. A. *Modifications of gravity via differential transformations of field variables.* Symmetry. 2020. V. 12. № 2. P. 240. arXiv:2002.01745.
4. Sheykin A. A., Ioffe M. V., Manida S. N., Paston S. A. *Polyakov-like approach to the modified gravity and other geometric theories.* Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2020. V. 17. № 3. P. 2050037. arXiv:1912.12713.
5. Paston S. A., Sheykin A. A. *Embedding theory as new geometrical mimetic gravity.* Eur. Phys. J. C. 2018. V. 78. P. 989. arXiv:1806.10902.
6. Deser S., Pirani F. A. E., Robinson D. C. *New embedding model of general relativity.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. № 12. P.3301.
7. Paston S. A., Sheykin A. A. *Embeddings for Schwarzschild metric: classification and new results.* Class. Quantum Grav. 2012. V. 29. P. 095022. arXiv:1202.1204.
8. Sheykin A. A., Paston S. A. *Classification of global minimal embeddings for nonrotating black holes.* Theor. Math. Phys. 2015. V. 185. № 1. P. 1547–1556. arXiv:1512.08280.
9. Sheykin A. A., Markov M. V., Paston S. A. *Global embedding of BTZ spacetime using generalized method of symmetric embeddings construction.* J. Math. Phys. 2021. V. 62. P. 102502. arXiv:2107.00752.
10. Sheykin A. A., Markov M. V., Fedulov Ya. A., Paston S. A. *Explicit isometric embeddings of pseudo-Riemannian manifolds: ideas and applications.* J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1697. P. 012077. arXiv:2004.05882.
11. Kapustin A. D., Ioffe M. V., Paston S. A. *Explicit isometric embeddings of collapsing dust ball.* Class. Quant. Grav. 2020. V. 37. P. 075019. arXiv:2003.03742.
12. Kuptsov S.,S., Paston S. A., Sheykin A. A. *Classification of ten-dimensional embeddings of spherically symmetric static metrics..* Grav. Cosm. 2025. V. 31. № 2. P. 133. arXiv:2411.13135.
13. Федулов Я. А., Шейкин А. А. *Изометрические вложения гравитационной pp-волны.* OPEN SCIENCE. Сб. тезисов X Всероссийского молодежного научного форума с международным участием. Гатчина, 2023. С. 31. EDN: ZFLFGK.
14. Chantry L., Dauvergne F., Temmam Y., Cayatte V. *Quasi-isometric embedding of Kerr poloidal sub-manifolds.* Class. Quant. Grav. 2021. V. 38. P. 145030. arXiv:2111.02337.
15. Кузеев Р. Р. *Погружение пространства-времени Керра.* Гравитация и теория относительности. 1981. Т. 18. С. 75.
16. Soon-Tae Hong, Sung-Won Kim. *Hydrodynamics and global structure of rotating Schwarzschild black holes.* J. Korean Phys. Soc. 2006. V. 49. P. S748. arXiv:gr-qc/0503079v1.
17. Korotkin D., Nicolai H. *Separation of Variables and Hamiltonian Formulation for the Ernst Equation.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. № 8. P. 1272. arXiv:hep-th/9412072.
18. Azreg-Ainou, M. *Generating rotating regular black hole solutions without complexification.* Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 064041. arXiv:1405.2569.

## АВТОРСКИЕ ДАННЫЕ

**Abed Sami Abdullah,** Diyala University, Baquba, Iraq, e-mail: samialbarkish@gmail.com

**Абильдаев Темирлан Ергалиевич,** Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: t.abildaev23@gmail.com

**Абыкеров Жанат Сергеевич,** Национальный исследовательский Томский государственный университет, e-mail: zhanatab@mail.ru

**Александров Кирилл Игоревич,** Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, e-mail: kira.aleks01@mail.ru

**Андреева Ирина Алексеевна,** Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, e-mail: irandr@inbox.ru

**Афанасьев Даниил Евгеньевич,** Московский авиационный институт, Москва, e-mail: daniel\_afanasev@yahoo.com

**Баринов Роман Васильевич,** Факультет математики и компьютерных наук, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

**Барон Михаил,** Американский университет, Вашингтон, США, e-mail: baron@american.edu

**Бахвалов Александр Николаевич,** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, e-mail: an-bakh@yandex.ru

**Бахтин Кирилл Евгеньевич,** РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований ДВФУ», Владивосток, e-mail: bakhtin.ke@dvgfu.ru

**Бизяев Иван Алексеевич,** Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, Ижевск, e-mail: bizyaevtheory@gmail.com

**Богатов Егор Михайлович,** Филиал ФГАУ ВО “Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»”, г. Губкин Белгородской области; Старооскольский технологический институт, филиал ФГАУ ВО “Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»”, Старый Оскол, e-mail: embogatov@inbox.ru

**Борисов Денис Иванович,** Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, e-mail: borisovdi@yandex.ru

**Боровских Алексей Владиславович,** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва; Научно-образовательный математический центр Северо-Осетинского государственного университета, Владикавказ, e-mail: bor.bor@mail.ru

**Бузин Алексей Павлович,** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, e-mail: aleksei.buzin@math.msu.ru

**Бурлуцкая Мария Шаукатовна,** Воронежский государственный университет, Воронеж, e-mail: bmsh2001@mail.ru

**Буфетов Александр Игоревич,** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: bufetov@mi-ras.ru

**Вилков Павел Юрьевич,** Сибирский федеральный университет, Красноярск.

**Волков Алексей Михайлович,** Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: volkov@imm.uran.ru

**Выонг Хыу Бао**, Региональный научно-образовательный математический центр Томского государственного университета, Томск, **e-mail:** baovuong2024@gmail.com

**Гвоздев Родион Игоревич**, Институт математики и фундаментальной информатики, Красноярск, **e-mail:** gvozdev.rodion@bk.ru

**Гилева Лидия Викторовна**, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** gileva@icm.krasn.ru

**Гилев Павел Вячеславович**, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** pavel.gilev.2000@mail.ru

**Голубев Роман Андреевич**, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** rgolubev@icm.krasn.ru

**Голубятников Михаил Петрович**, Институт математики и механики им. Н. Н. Краусского УрО РАН, Уральский математический центр, Екатеринбург, **e-mail:** mike\_ru1@mail.ru

**Goncharov Sergey Savostyanovich**, Novosibirsk State University, Academy of Sciences, Siberian Branch, Mathematical Institute, Novosibirsk, **e-mail:** s.s.goncharov@math.nsc.ru

**Гребенкина Александра Сергеевна**, Донецкий государственный университет, Донецк, **e-mail:** grebenkina.aleks@yandex.ru

**Грешнов Александр Валерьевич**, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** a.greshnov@g.nsu.ru

**Губарев Всеволод Юрьевич**, Институт математики СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** wsewolod89@gmail.com

**Гурина Елена Ивановна**, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, **e-mail:** elena.gyrina@mail.tsu.ru

**Гусев Андрей Олегович**, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, **e-mail:** aogus@mail.ru

**Данелян Елена Дмитриевна**, Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ, Ростов-на-Дону, **e-mail:** danelian@sfedu.ru

**Деза Елена Ивановна**, Московский педагогический государственный университет, Москва, **e-mail:** elena.deza@gmail.com

**Долгов Дмитрий Александрович**, Институт вычислительной математики и информационных технологий КФУ, Казань, **e-mail:** Dolgov.kfu@gmail.com

**Долгоруков Виталий Владимирович**, Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ, Москва, **e-mail:** vdolgorkov@hse.ru

**Евсеева Елена Геннадиевна**, Донецкий государственный университет, Донецк, **e-mail:** e.evseeva.dongu@mail.ru

**Ефимова Марина Викторовна**, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** efnavi@icm.krasn.ru

**Ефремов Евгений Леонидович**, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, **e-mail:** efremov.el@dvgfu.ru

**Жакупов Олжас Бауржанович**, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, **e-mail:** zhakupov.ob@phystech.edu

**Закора Дмитрий Александрович**, Физико-технический институт ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», Симферополь, **e-mail:** dmitry.zkr@gmail.com

**Замятינה Оксана Михайловна**, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, **e-mail:** zamyatina@tpu.ru

---

**Збродько Даниил Александрович**, АНО “Консультационный центр «Резонанс», Томск, e-mail: daniilz12\_@mail.ru

**Зверева Маргарита Борисовна**, Воронежский государственный университет, Воронеж, e-mail: margz@rambler.ru

**Казаков Антон Александрович**, Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, e-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

**Казаков Александр Леонидович**, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, e-mail: kazakov@icc.ru

**Карапетянц Алексей Николаевич**, Южный федеральный университет, РНОМЦ ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: karapetyants@gmail.com

**Карпенко Анастасия Валерьевна**, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: anastasia.v.karpenko@yandex.ru

**Катанаев Михаил Орионович**, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, e-mail: katanaev@mi-ras.ru

**Кашенко Сергей Александрович**, Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

**Кибкало Владислав Александрович**, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

**Кияткин Владимир Ростиславович**, Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск, e-mail: KiyatkinVR@mail.ru, VKiyatkin@sfsu-kras.ru

**Козловская Татьяна Анатольевна**, Региональный научно-образовательный математический центр Томского государственного университета, Томск, e-mail: konus\_magadan@mail.ru

**Колесников Денис Викторович**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: st123522@student.spbu.ru

**Кондратьева Алиса Витальевна**, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, e-mail: alisakondr@mail.ru

**Кондратьев Анатолий Семенович**, Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Уральский математический центр, Екатеринбург, e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

**Kravtsov Vladimir Konstantinovich**, Novosibirsk State University, Novosibirsk, e-mail: v.kravtsov@g.nsu.ru

**Кропачева Наталия Юрьевна**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: natakr4@gmail.com

**Кутеева Галина Анатольевна**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: g.kuteeva@spbu.ru

**Лемперт Анна Ананьевна**, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, e-mail: lempert@icc.ru

**Литвинов Владислав Львович**, Самарский государственный технический университет, Самара, e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

**Литвинова Кристина Владиславовна**, Самарский государственный технический университет, Самара, e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

**Лобзин Федор Игоревич**, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, e-mail: fiadat@mail.ru

**Лобода Надежда Алексеевна**, Адыгейский государственный университет, Майкоп, e-mail: n-loboda@yandex.ru

**Ломов Андрей Александрович**, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, **e-mail:** andrei@lomov.pw

**Люлько Наталья Альбертовна**, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** natlyl@mail.ru

**Магин Матвей Ильич**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** matheusz.magin@gmail.com

**Мажорова Ольга Семеновна**, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, **e-mail:** olgamazhor@mail.ru

**Малов Сергей Васильевич**, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, **e-mail:** sergey.v.malov@gmail.com

**Марковская Ирина Александровна**, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** mark.i.a@mail.ru

**Марчук М. Е.**, АО «Решетнев», Железногорск

**Маслова Наталья Владимировна**, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский математический центр, Екатеринбург, **e-mail:** butterson@mail.ru

**Минигулов Николай Александрович**, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский математический центр, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, **e-mail:** n.a.minigulov@imm.uran.ru

**Михайлов Леонид Максимович**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** st116631@student.spbu.ru

**Мкртчян Александр Джанибекович**, Институт математики НАН РА, Ереван, Сибирский федеральный университет, Красноярск **e-mail:** amkrtchyan@sfsu-kras.ru

**Монченко Никита Михайлович**, Центр фундаментальной математики, МФТИ, Москва, **e-mail:** monchenko.nm@phystech.edu

**Мурашко Вячеслав Игоревич**, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, **e-mail:** mvimath@yandex.ru

**Мурясов Роман Русланович**, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, **e-mail:** romrurmur@yandex.ru

**Нагибин Ярослав Владимирович**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** yaroslavnagibin@yandex.ru

**Нгуен Дык Минь**, Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск **e-mail:** nguyenducminh.mt@gmail.com

**Нечесов Андрей Витальевич**, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, **e-mail:** nechesoff@gmail.com

**Nikolaeva Irina Alexandrovna**, Lean technologies lab, Kazan, Tatarstan, Russian Federation, **e-mail:** irattional@gmail.com

**Никулин Михаил Александрович**, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, **e-mail:** nikmihale@gmail.com

**Нирова Марина Сефовна**, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, **e-mail:** nirova\_m@mail.ru

**Novikov Andrei Andreevich**, Novikov Labs, Kazan, Tatarstan, Russian Federation, **e-mail:** andrei@hobukob.ru

**Нужин Яков Нифантьевич**, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** nuzhin2008@rambler.ru

**Онуфриенко Мария Викторовна**, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики,

Москва **e-mail:** mary.onufrienko@gmail.com

**Ореховский Владислав Николаевич**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** v.orekhovskii@alumni.nsu.ru

**Павилайнен Галина Вольдемаровна**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** g\_v\_pavilaynen@mail.ru

**Павленко Виктор Александрович**, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, **e-mail:** PVA100186@mail.ru

**Папин Александр Алексеевич**, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** papin@math.asu.ru

**Petrenko Andrey Mihailovich** Novosibirsk State University, Novosibirsk, **e-mail:** a.petrenko2@g.nsu.ru

**Пекарская Татьяна Андреевна**, Алтайский государственный университет, Барнаул, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, **e-mail:** pekarskayat@yandex.ru

**Петров Виктор Александрович**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** victorapetrov@googlemail.com

**Платонова Мария Владимировна**, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** mariyaplat@gmail.com

**Подуфалов Николай Дмитриевич**, Российская академия образования, Москва, **e-mail:** londont@yandex.ru

**Поляков Дмитрий Михайлович**, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, **e-mail:** dmitrypolyakov@mail.ru

**Попова Елена Леонидовна**, Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ, Москва, **e-mail:** elropova@hse.ru

**Прокудин Дмитрий Алексеевич**, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, **e-mail:** prokudin@hydro.nsc.ru

**Проценко Никита Александрович**, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** nikitaprotsenko2003@gmail.com

**Пустовойтов Сергей Евгеньевич**, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, **e-mail:** pustovoitovse1@mail.ru

**Radomskii Artyom Olegovich**, HSE University, Moscow, Russia, **e-mail:** aradomskii@hse.ru

**Реброва Ирина Юрьевна**, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тула, **e-mail:** rebrova@tolstovsky.ru

**Римацкий Виталий Валентинович** Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** Gemmeny@rambler.ru

**Рогалев Алексей Николаевич**, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** rogaliov@icm.krasn.ru

**Рокина Алена Эдуардовна**, Институт математики и механики УРО РАН, Екатеринбург, **e-mail:** a.e.rokina@mail.ru

**Рыбаков Владимир Владимирович**, Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск, **e-mail:** vladimir\_rybakov@mail.ru

**Рыбаков Михаил Николаевич**, ВШМ МФТИ, НИУ ВШЭ, Москва; ТвГУ, Тверь, **e-mail:** m\_rybakov@mail.ru

**Севостьянова Виктория Владимировна**, Самарский национальный исследовательский университет им. С. П. Королева, Самара, **e-mail:** sevostyanova.vv@ssau.ru

**Селиванов Виктор Львович**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: v.selivanov@spbu.ru

**Селиванов Кирилл Владимирович**, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский математический центр, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, e-mail: ckirill2000@mail.ru

**Сенашов Сергей Иванович**, Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, Красноярск, e-mail: sen@sibsau.ru

**Сибин Антон Николаевич**, Алтайский государственный университет, Барнаул, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, e-mail: sibin\_anton@mail.ru

**Симаков Валентин Константинович**, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, e-mail: valentin.simakov@yahoo.com

**Синильщикова Галина Александровна**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: g.sinilschikova@spbu.ru

**Скафа Елена Ивановна**, Донецкий государственный университет, Донецк, e-mail: e.i.skafa@mail.ru

**Смирнова Ирина Юрьевна**, Донской государственный технический университет, РНОМЦ ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: IrinaSmiY@yandex.ru

**Смирнов Михаил Юрьевич**, Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, e-mail: mikhail.smirnov.2016@gmail.com

**Соколов Евгений Викторович**, Ивановский государственный университет, Иваново, e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

**Соловьев Дмитрий Вячеславович**, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: d.solovev@g.nsu.ru

**Спевак Лев Фридрихович**, Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: lfs@imach.uran.ru

**Сташ Айдамир Хазретович**, Адыгейский государственный университет, Майкоп, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

**Стрепетова Виталия Вадимовна**, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: v.strepetova@g.nsu.ru

**Стукачев Алексей Ильич**, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, e-mail: aistu@math.nsc.ru

**Сурков Платон Геннадьевич**, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, e-mail: spg@imm.uran.ru

**Тарасов С. К.**, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

**Терехов Николай Алексеевич**, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, e-mail: nikolayterek@gmail.com

**Тимофеева Надежда Владимировна**, Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, e-mail: ntimofeeva@list.ru

**Толбей Анна Олеговна**, Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, e-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru

**Трачева Наталья Валерьевна**, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск,

**e-mail:** tnv@osmf.ssc.ru

**Тренбач Иван Владимирович**, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, **e-mail:** ivan trenbac@gmail.com

**Троянская Елизавета Николаевна**, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** troyanskaya.elizaveta@ya.ru

**Туманова Елена Александровна**, Ивановский государственный университет, Иваново, **e-mail:** helenfog@bk.ru

**Ухинов Сергей Анатольевич**, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, **e-mail:** sau@osmf.ssc.ru

**Федорова Мария Юрьевна**, Военно-морской политехнический институт, Санкт-Петербург, **e-mail:** natakr4@gmail.com

**Хамзин Виктор Олегович**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** viktor.khamzin@spbu.ru

**Khlestova Elizaveta Ivanovna**, Novosibirsk State University, Novosibirsk, **e-mail:** e.khlestova@g.nsu.ru

**Черепанова Ольга Николаевна**, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** ochegapanova@sfu-kras.ru

**Челнокова Анна Сергеевна**, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, **e-mail:** smolina-pyuta@mail.ru

**Шайдуров Владимир Викторович**, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** shaidurov04@mail.ru

**Шаталова Ольга Игоревна**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** o.shatalova@spbu.ru

**Шейкин Антон Андреевич**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** a.sheykin@spbu.ru

**Шехтман Валентин Борисович**, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, **e-mail:** vhehtman@hse.ru

**Shirokov I. M.**, Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg **e-mail:** shirokov.im@phystech.edu

**Шкатов Дмитрий Петрович**, University of the Witwatersrand, Johannesburg, **e-mail:** shkatov@gmail.com

**Шкляев Александр Викторович**, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, **e-mail:** ashklyaev@gmail.com

**Шульга Георгий Сергеевич**, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** gsdxtrous@gmail.com

**Шутов Антон Владимирович**, Владимирский государственный университет, Владимир, **e-mail:** a1981@mail.ru

**Юдин Глеб Александрович**, Лаборатория «Вероятностные методы в анализе», Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** gleb.yudin@spbu.ru

**Якимова (Агуриева) Екатерина Сереевна**, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, **e-mail:** agureevamath@yandex.ru

*Научное издание*

# V Конференция математических центров России

Материалы докладов

Техническая подготовка, обработка материалов:

*B. Б. Бекежсанова, И. В. Степанова*

Компьютерная верстка:

*H. Ф. Ильина*

---

Объем данных 12 Мб

Подписано к печати 16.08.2025

---

Размещено в открытом доступе  
на сайте <https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776>  
в разделе [Материалы докладов](#)

ISBN 978-5-6054684-0-0



9 785605 468400 >

Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
660036, Красноярск, Академгородок, 50/44.