

Астрономические исследования на математическом факультете Санкт-Петербургского университета.

III. Научное наследие профессора

К. В. Холшевникова*

*Е. Н. Поляхова, А. А. Васильев, А. В. Веселова,
Д. В. Микрюков, И. И. Никифоров, Б. Б. Эскин*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Поляхова Е. Н., Васильев А. А., Веселова А. В., Микрюков Д. В., Никифоров И. И., Эскин Б. Б. Астрономические исследования на математическом факультете Санкт-Петербургского университета. III. Научное наследие профессора К. В. Холшевникова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 3. С. 474–490. EDN UWRFQO

Дан обзор важнейших из последних работ К. В. Холшевникова по аналитической небесной механике, которые раскрывают в плане этой тематики относящуюся к XXI в. часть II обзора астрономических исследований, выполненных в Санкт-Петербургском университете. Подчеркнута органическая связь аналитической небесной механики с математическими методами. Показан потенциал этого направления в современных фундаментальных и прикладных астрономических исследованиях. Отмечаются некоторые другие аспекты деятельности К. В. Холшевникова как астронома-математика, подвижника в науке и просвещении.

Ключевые слова: приложения математики в астрономии, метрики в пространстве орбит, планетная задача N тел, метод осреднения, ограниченная задача трех тел, фигуры равновесия небесных тел, астероидная опасность, астрономические аспекты в истории математики.

1. Введение. Астрономические исследования, проводившиеся в Санкт-Петербургском университете (далее — Университет) на протяжении XVIII–XXI вв., в целом были описаны, в неразрывной связи их с математикой, в первой и второй частях обзора [1, 2]. Ограниченный объем этих статей позволил лишь упомянуть некоторые важные недавние результаты, полученные в рамках аналитической небесной механики — одной из наиболее тесно связанных с математикой астрономических дисциплин. Профессор К. В. Холшевников, 85-летие со дня рождения которого отмечалось в 2024 г. [3], преимущественно работал в области этой астрономической и одновременно математической науки и внес в нее выдающийся вклад.

Константин Владиславович Холшевников (1939–2021) возглавил кафедру небесной механики (далее — кафедра) Университета в 1970 г. и был ее бессменным руководителем более 50 лет. За это время на кафедре было проведено большое чис-

* Вторую часть статьи см.: Ильин В. Б., Савченко С. С., Морозова Д. А., Шликина Е. В. Астрономические исследования на математическом факультете Санкт-Петербургского университета. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 2. С. 228–255. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.202>

© Е. Н. Поляхова, А. А. Васильев, А. В. Веселова, Д. В. Микрюков, И. И. Никифоров, Б. Б. Эскин, 2025

ло научных исследований [4, 5]. Многие результаты обрели мировую известность. Большинство исследований было выполнено либо под руководством К. В. Холшевникова, либо при его деятельном участии. Научное наследие профессора Холшевникова, сформированное за эти полвека, включает то, что по праву теперь можно назвать «научной школой Холшевникова». Многие ученики и последователи этой школы стали известными специалистами в своих областях и работают сегодня по всему миру. В наследие Холшевникова входят также плоды его многогранной деятельности в иных направлениях: история науки, просветительская работа, в частности преподавание основ современной науки, и многое другое.

В дополнение ко второй части обзора [2], посвященной астрономическим исследованиям в Университете в XXI в., настоящая, третья, часть описывает наиболее важные математические результаты, полученные Холшевниковым в области небесной механики в этот период, а также кратко рассказывает о других сторонах творческой деятельности ученого в сфере науки и просвещения.

2. Исследования в области небесной механики. Период, когда Холшевников возглавлял кафедру, можно условно разделить на два этапа: конец XX века (с начала 1970-х до конца 1990-х гг.) и начало XXI в. (с начала 2000-х до начала 2020-х гг.). Во время первого этапа на кафедре были продолжены и широко развернуты работы, которые велись еще прежним руководителем проф. В. С. Новоселовым, а также чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботиным. Были также открыты новые направления исследований. Обзоры важнейших исследований, проведенных Холшевниковым с коллегами по кафедре на протяжении первого этапа, были сделаны в статьях [1, 4]. В данном разделе мы рассмотрим наиболее важные результаты, полученные Холшевниковым и его коллегами в течение второго этапа.

2.1. Метрики в пространстве кеплеровых орбит. Одной из важных задач в современных исследованиях Солнечной системы является определение общей природы различных небесных тел, в частности взаимосвязи между метеороидными потоками и астероидами или кометами. Холшевников и коллеги [6, 7] разработали критерии близости кеплеровых орбит небесных тел, основанные на метриках, удовлетворяющих всем аксиомам метрического пространства, и в частности, в отличие от ряда применявшихся со второй половины XX в. субметрик, аксиоме треугольника. В общем случае критерием близости двух орбит \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 служит неравенство

$$\rho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) < \epsilon,$$

где величина ϵ выбирается в соответствии с поставленной задачей, функция ρ имеет смысл расстояния и удовлетворяет аксиомам метрического пространства.

В пространстве непрямолинейных орбит \mathbb{H} метрика определяется следующим образом. Пусть p , e , i , ω , Ω — фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, аргумент перигентра и долгота восходящего узла соответственно. Орбита задается ортогональными векторами \mathbf{u} (данный вектор пропорционален вектору момента импульса) и \mathbf{v} (пропорционален вектору Лапласа — Рунге — Ленца). Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_x, u_y, u_z), \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{p} > 0, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\mathbf{v}| = e\sqrt{p}; \\ u_x &= \sqrt{p} \sin i \sin \Omega, & v_x &= e\sqrt{p} (\cos \omega \cos \Omega - \cos i \sin \omega \sin \Omega), \\ u_y &= -\sqrt{p} \sin i \cos \Omega, & v_y &= e\sqrt{p} (\cos \omega \sin \Omega + \cos i \sin \omega \cos \Omega), \\ u_z &= \sqrt{p} \cos i, & v_z &= e\sqrt{p} \sin i \sin \omega. \end{aligned}$$

Расстояние между двумя орбитами в пространстве \mathbb{H} определяется евклидовой метрикой

$$\rho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}, \quad \mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{u}(\mathcal{E}_{1,2}), \quad \mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}(\mathcal{E}_{1,2}).$$

Особый вид функций расстояния на множестве кеплеровых орбит представляют расстояния в фактор-пространствах орбит. Рассмотрение расстояний в фактор-пространствах позволяет не учитывать отдельные изменяющиеся вековым образом элементы орбиты [8, 9]. Если узлы орбит испытывают большие вековые возмущения, можно отождествлять орбиты с одинаковыми p, e, i, ω . В соответствующем фактор-пространстве \mathbb{H}/Ω метрику можно определить как

$$\rho_3 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \rho_2.$$

В случае быстрого изменения направления перицентров вводится фактор-пространство \mathbb{H}/ω и метрика ρ_4 в нем:

$$\rho_4 = \min_{\omega_1, \omega_2} \rho_2.$$

При возможном игнорировании узлов и перицентров вводится уже трехмерное фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega, \omega)$ с метрикой

$$\rho_5 = \min_{\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2} \rho_2.$$

Также в [9] была предложена субметрика для классов орбит с фиксированными значениями p, e, i и всевозможными Ω, ω при сохранении постоянной долготы перицентра $\Omega + \omega$. Минимальное расстояние определяется как

$$\rho_6 = \min \rho_2,$$

где вычисление минимума проводится при фиксированных элементах $p_{1,2}, e_{1,2}, i_{1,2}$ варьированием $\Omega_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$ при сохранении постоянных долгот перицентра.

Предложенные метрики используются при поиске семейств небесных тел, связанных общим происхождением. Так, в [10] метрики ρ_2, ρ_3, ρ_4 применены для оценки расстояний между орбитами объектов астероидно-метеороидного комплекса σ -Каприкорнид на протяжении последних 40 тыс. лет эволюции, что позволило оценить возможный момент разрушения родительского тела: породившая комплекс комета могла разрушиться 5,5 тыс. лет назад. В работе [11] были оценены расстояния между орбитами планет Солнечной системы, между парами орбит нумерованных астероидов, а также расстояния между орбитами челябинского тела и орбитами нумерованных астероидов. Точности имевшихся на 2018 г. данных оказалось недостаточно для достоверной идентификации родительского астероида для челябинского тела. В работе [12] использовано понятие среднего Фреше в пространстве орбит с метрикой ρ_2 для введения понятия средней орбиты и дисперсии семейства орбит метеороидов, проведено численное моделирование эволюции орбит метеороидов потока Геминид, получены оценки возраста потока и скорости истечения газа в предположении возникновения потока вследствие быстрого разрушения кометного ядра. Метрики $\rho_2 - \rho_5$ также использованы в работе [13] для поиска родительского тела метеорита Траспена, упавшего 18 января 2021 г. на территории Испании; исследована возможная динамическая связь с потенциально опасным астероидом 1989 QF (Минос).

2.2. Планетная задача N тел. В начале 2000-х гг. Холшевников вместе со своими учениками начал активно заниматься планетной задачей. Она является важным частным случаем задачи N тел, в котором масса одного тела существенно (не менее чем на 1–2 порядка) превышает массу остальных тел. Первым этапом исследования задачи является процедура исключения центра инерции, позволяющая понизить размерность фазового пространства на шесть единиц. В цикле работ Холшевникова и его соавторов [14–18] для этой цели используются координаты Якоби:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{M_N} \sum_{s=0}^N m_s \boldsymbol{\rho}_s, \quad \mathbf{r}_k = \boldsymbol{\rho}_k - \frac{1}{M_{k-1}} \sum_{s=0}^{k-1} m_s \boldsymbol{\rho}_s, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (1)$$

где $N + 1$ — число материальных точек (тел) в системе; m_s и $\boldsymbol{\rho}_s$ — массы и абсолютные положения этих точек; $M_n = m_0 + \dots + m_n$. После записи уравнений движения в координатах (1) и выбора системы оскулирующих элементов обычно используют метод осреднения, позволяющий исследовать поведение планетных орбит на больших временах.

Суть метода осреднения сводится к переходу от оскулирующих к средним элементам с помощью специальной замены переменных. Общая векторная форма уравнений движения в оскулирующих элементах имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

где ε — малый положительный параметр, а вектор-функции f и g имеют по быстрым фазам φ период 2π . Замена переменных строится [19] в виде формального ряда

$$\begin{aligned} I &= J + \varepsilon u_1(J, \psi) + \varepsilon^2 u_2(J, \psi) + \dots, \\ \varphi &= \psi + \varepsilon v_1(J, \psi) + \varepsilon^2 v_2(J, \psi) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

В преобразовании (3) функции u_s и v_s должны иметь по ψ период 2π и подбираются так, чтобы в новой (осредненной) системе

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \varepsilon F_0(J) + \varepsilon^2 F_1(J) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega(J) + \varepsilon G_0(J) + \varepsilon^2 G_1(J) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

правые части не зависели от быстрых переменных ψ . В системе (2) основные долговременные характеристики орбитальной эволюции описываются медленными переменными I , а в системе (4) — медленными переменными J . Преимущество системы (4) перед системой (2) заключается в том, что в ней группа уравнений относительно J имеет замкнутый вид и потому интегрируется отдельно от быстрых фаз ψ . Поскольку правые части этой группы не зависят от ψ , шаг численного интегрирования для нее можно выбрать в $1/\varepsilon$ раз большим.

Одной из наиболее удобных для применения на практике разновидностей метода осреднения является метод Хори — Дебри (см. [20]). В работах [14–16] был разработан численно-аналитический аппарат, реализующий практическое применение метода Хори — Дебри к изучению двухпланетных систем. Прежде всего с помощью построенного аппарата К. В. Холшевниковым и Э. Д. Кузнецовым была исследована динамическая эволюция системы Солнце — Юпитер — Сатурн [17]. Далее с помощью

этого аппарата К. В. Холшевниковым в соавторстве с Э. Д. Кузнецовым изучались в основном вопросы, связанные с запасом устойчивости двухпланетных систем по массам планет. Было установлено, что в системе Солнце — Юпитер — Сатурн при увеличении планетных масс примерно в 20 раз могут происходить тесные сближения планет с пересечением их сфер Хилла [18, 21]. В результате таких сближений планетные орбиты могут существенно искажаться, а вероятным финалом эволюции является распад системы. В экзопланетной системе 47 УМа (рассматривался двухпланетный вариант с планетами b и c) аналогичные сценарии возникают при увеличении масс планет примерно в 38 раз. Полученные результаты перспективны для плодотворного использования в исследованиях долговременной динамики экзопланетных систем (см. [22–24]).

2.3. Ограниченная задача трех тел. Помимо исследования двухпланетного варианта задачи трех тел, Холшевниковым были также получены новые результаты в ограниченной задаче трех тел. В работах [25, 26] Холшевниковым совместно с В. Б. Титовым изучался пространственный вариант круговой ограниченной задачи, осредненный по угловой переменной движения возмущающего тела. Такая постановка задачи подходит для описания динамики астероида, движущегося на значительном удалении от двойной системы. Кинетическая энергия T и силовая функция V пробной частицы относительно барицентра двойной системы равны

$$T = \frac{v^2}{2}; \quad V = V_1 + V_2; \quad V_s = \frac{\mathcal{G}m_s}{r_s}, \quad s = 1, 2.$$

Здесь v — скорость частицы; \mathcal{G} — постоянная тяготения; m_s и r_s — массы основных тел и расстояния от них до точки нулевой массы соответственно. Осреднение по явно содержащемуся в V_s времени приводит к замене V и V_s функциями

$$W = W_1 + W_2, \quad W_s = \frac{\mathcal{G}m_s}{P} \int_0^P \frac{dt}{r_s},$$

где P — период двойной системы. Определяемая функциями T и W автономная система, помимо интеграла Якоби, обладает еще одним интегралом, отсутствующим в неосредненном случае. Существование этого интеграла позволило Холшевникову и Титову более детально исследовать структуру фазового пространства задачи и ввести понятие поверхности минимальной скорости. Важность введенного термина заключается главным образом в том, что эта поверхность позволяет наложить существенно более жесткие ограничения на область возможных движений частицы. Эффективность построенной теории была показана [25] на примере описания динамики четырех маломассивных спутников Плутона (Стикс, Никта, Кербер, Гидра), вращающихся вокруг двойной системы Плутон — Харон на существенном от нее удалении.

Кроме того, Холшевниковым было установлено, что в таком однократно усредненном варианте круговой ограниченной задачи перестает быть справедливой теорема Якоби (полная энергия устойчивой по Лагранжу системы отрицательна). Контрпример, опровергающий утверждение теоремы, построен Холшевниковым в работе [26]. Там же показано, что справедливость теоремы восстанавливается после ее небольшой модификации.

2.4. Фигуры равновесия небесных тел. Теория фигур равновесия небесных тел всегда занимала в научной жизни Холшевникова видное место. Космический аппарат New Horizons (NASA), пролетевший рядом с Плутоном и его спутниками в 2015 г., получил множество новых данных об этой системе и возобновил интерес к ее изучению. Наряду с вышеописанными исследованиями динамики спутников Плутона, Холшевниковым были также получены новые результаты о форме фигур Плутона и Харона. В работе [27] оба тела считались уровнями трехосными эллипсоидами. На основе измеренных космическим аппаратом значений больших полуосей были получены двусторонние теоретические оценки полярного и экваториального сжатий обоих тел, а также вычислены коэффициенты при второй зональной и второй секториальной гармониках. Далее Холшевниковым [28] количественно изучалось влияние притяжения Солнца и несферичности форм Плутона и Харона на их поступательное движение (движение их центров масс). Влияние обоих факторов оказалось пренебрежимо малым, на основании чего был сделан вывод об устойчивости системы Плутон—Харон на временной шкале в миллионы лет. Количественно было также оценено приливное воздействие Солнца на форму фигур Плутона и Харона. Оно тоже оказалось чрезвычайно слабым и потому неспособным нарушить устойчивость двойной карликовой планеты.

К. В. Холшевниковым в соавторстве с Д. В. Милановым и В. Ш. Шайдулиным были также получены интересные и полезные для астрономических приложений результаты в теории эллипсоидальных фигур. В цикле работ [29–31] получено разложение в ряд Лапласа внешнего потенциала эллипсоида вращения с различными эллипсоидальными стратификациями и уровня эллипсоида с произвольной внутренней структурой. Найдены асимптотики коэффициентов, на основании которых сделан вывод о том, что уровень эллипсоид не может иметь эллипсоидальной стратификации с невозрастающим к центру сжатием слоев. Наконец, получено уточнение неравенства Пуанкаре, связывающего скорость вращения планеты с ее массой и формой, для уровня эллипсоида вращения.

2.5. Астероидная опасность. Значительный вклад ученых внес и в такое важное для всего человечества направление астрономических исследований, как астероидно-кометная безопасность. Холшевников с коллегами рассмотрели возможные варианты увода астероида с опасной траектории с помощью двигателя малой тяги. Данный способ увода астероида с траектории соударения может найти применение в том случае, если время с момента начала воздействия на объект до предполагаемого столкновения исчисляется годами. В действительности крупные объекты обнаруживают задолго до расчетного времени соударения. В работе [32] предлагалось направить тягу по трансверсали к траектории астероида, в работе [33] — по касательной (математически более сложная задача).

В работе [33] движение рассматривается в орбитальной системе координат с ортами, направленными по касательной, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали. Ранее в работах цикла выполнялись осредняющие преобразования уравнений Эйлера для изменения оскулирующих элементов ω , e , i , Ω , g , M , $a = \kappa^{2/3} \omega^{-2/3}$ — соответственно среднего движения, эксцентриситета, наклона, долготы восходящего узла, аргумента перигелия, средней аномалии и большой полуоси (здесь κ^2 — произведение постоянной тяготения на массу). Переход от оскулирующих элементов к средним проводится с учетом разложения в ряд по степеням e

до пятого порядка включительно. Записана система автономных дифференциальных уравнений для средних элементов:

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{a} F_1(x) \mathcal{I}, \quad \dot{e} = -\frac{e}{\omega a} F_2(x) \mathcal{I}, \quad \dot{M} = \omega, \quad \dot{i} = \dot{\Omega} = \dot{g} = 0,$$

где \mathcal{I} — ненулевая постоянная, $x \equiv e^2$,

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{64}x^2 + \dots, \quad F_2(x) = 1 - \frac{5}{8}x - \frac{9}{64}x^2 + \dots$$

В зависимости от начального значения эксцентриситета выделяются два случая: 1) для круговой начальной орбиты вследствие совпадения касательного и трансверсального направлений становится возможным использование точного решения из работы [34]; 2) для некруговой начальной орбиты в предположении малого \mathcal{I} используется метод рядов Ли; вековые возмущения позиционных элементов оказываются пропорциональными времени, средней аномалии — квадрату времени. При одинаковых модулях возмущающего ускорения смещения как вдоль, так и поперек орбиты оказываются больше именно в случае касательной тяги. Для оценки влияния отличия оскулирующих элементов от средних используется норма из работы [35].

Для 66 астероидов в работе [33] рассчитываются смещения орбиты и определяется возможность увода в двух вариантах возмущающей силы: 1 Н и 20 Н. Сила 20 Н оказалась достаточной для увода за год астероидов с диаметром до $1.5 \cdot 10^2$ м. Но для астероида Апофис с оценкой диаметра в 325 м увод с орбиты соударения за год возможен с силой тяги не менее 200 Н. Тяга по касательной во всех случаях дает лучшие результаты в сравнении с тягой по трансверсали, что становится особенно заметным начиная с $e = 0.5$, а при $e = 0.8$ различие составляет 45 %.

В менее благоприятном случае, если медленный увод невозможен или же объект будет возвращаться к Земле, могут потребоваться более радикальные методы решения проблемы астероидной опасности. В работе [36] предлагается разрушать астероид взрывом ядерного устройства задолго до предсказанного падения, что возможно, поскольку, как правило, перед соударением объект несколько раз сближается с Землей. При подрыве после сближения количество выпадающих на Землю осколков мало, а радиоактивность снижена вследствие выпадения осколков уже спустя годы, а не часы после взрыва. В работе [37] более тщательно исследована физика процесса, рассмотрены два приемлемых способа воздействия: 1) космический аппарат с зарядом догоняет астероид, 2) астероид догоняет космический аппарат, что требует меньшей скорости аппарата. Для оценки последствий взрыва было исследовано разрушение астероида Апофис в двух вариантах выбора момента взрыва: через 4 ч 38 мин после сближения 2029 г. и через 9 ч 26 мин после сближения 2029 г. для каждого из способов воздействия. Распределение начальных скоростей v осколков в сферической системе координат с углами θ и λ задается соотношениями

$$F_1(v) = 1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\nu-1}, \quad F_2(\theta) = 1 - \cos \theta, \quad F_3(\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi}$$

при некоторых положительных величинах v_0 , ν , где $2 < \nu < 3$. Моделирование показывает потенциальную опасность подрыва астероида непосредственно после сближения в сценарии астероида, догоняющего космический аппарат, поскольку часть радиоактивных осколков успевает попасть на Землю.

3. Деятельность в области истории науки и в других направлениях.

Научное наследие Холшевникова не ограничивается только рамками аналитической небесной механики. Оно также распространяется на историю науки и другие родственные области.

Проблемы истории науки рассматривались Холшевниковым применительно к решению различных научных задач, к изучению научного вклада выдающихся ученых, а также с целью освещения преемственности современных результатов на фоне исторического развития соответствующей области знаний [38, 39]. Холшевниковым в этом плане было рассмотрено множество задач классической и релятивистской небесной механики. Все эти задачи связаны с именами таких деятелей науки, как Эйлер, Лагранж, Лаплас, Пуанкаре, Эйнштейн. Историко-научная составляющая трудов Холшевникова нашла свое место в его популярных публикациях по истории фундаментальных задач науки, участии в работе по редактированию перевода книг зарубежных ученых, а также в его лекциях об основах современного естествознания.

В этом разделе мы выделяем несколько аспектов деятельности Холшевникова, связанных с историей науки в части развития естествознания XVIII–XX вв. и со смежными областями. При этом мы не будем углубляться в его исследования по античной астрономии [40].

3.1. Изучение научного наследия Леонарда Эйлера по астрономии и небесной механике. Холшевников рассматривал вклад Эйлера в теорию возмущенного движения планет-гигантов, в теорию движения Луны и параболических комет. При изучении наследия Эйлера он сотрудничал с советскими учеными В. К. Абалакиным, Е. А. Гребениковым, с выдающимся историком астрономии Н. И. Невской (ИИЕТ РАН, Санкт-Петербург) [41], а также с другими исследователями, плодотворно разрабатывающими эйлерову задачу двух неподвижных центров.

Холшевников участвовал в Эйлеровом конгрессе 1985 г., посвященном памяти годовщины кончины Эйлера [42]. В 2007 г. в Международном математическом институте им. Л. Эйлера (входит в состав Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН) в честь 300-летия Эйлера состоялся Симпозиум по аналитической небесной механике [43], на котором Холшевниковым был сделан пленарный доклад по истории аналитической небесной механики [44].

3.2. История астрономии. Холшевников уделял большое внимание научному наследию петербургской научной школы по астрономии и небесной механике [45]. Совместно с коллегами по факультету Холшевников участвовал в написании работ, в которых освещались научные достижения С. В. Ковалевской [46], М. В. Остроградского [47], академика А. Н. Крылова [48, 49].

Отдельным направлением деятельности Холшевникова было написание биографических статей об ученых, внесших фундаментальный вклад в развитие небесной механики: Ж.-Л. Лагранж, Ж.-Л. Даламбер [50, 51], Л. Эйлер, Ф. И. Шуберт, А. М. Ляпунов, П. Боль и др. Холшевников писал статьи о заведующих кафедрами и директорах Астрономической обсерватории Университета — В. К. Вишневском, С. П. Глазенапе, П. М. Горшкове, М. Ф. Субботине, В. А. Амбарцумяне, В. С. Новоселове [52]. Кроме того, он участвовал в редактировании двух изданий энциклопедии-справочника «Астрономы России» на русском и английском языках [39].

Холшевников был соавтором учебника «История астрономии в России и СССР» [53], брошюры по истории и хронологии астрономии в Университете.

3.3. Просветительская и педагогическая деятельность. Следует отметить научно-популярные публикации Холшевникова в издательствах «Квант» и «Знание» («Космические трассы» и др.), его контакты с Петербургским планетарием, популярные статьи по истории небесной механики [54, 55]. Он был соавтором обзорно-популярной книги по истории возникновения и исследования задачи трех тел [56]. Под научной редакцией Холшевникова осуществлялся перевод книг французских ученых Б. Боннара, Л. Фобура, Э. Треля [57], а также Ж. Шази [58]. В первой [57] он наиболее активно редактировал разделы «Симплектическая геометрия и канонические преобразования», «Некоторые свойства уравнений Гамильтона: интегрируемость и устойчивость», «Введение в задачу N тел», «Поиск периодических решений», «Орбитальные перелеты». При этом он особенно выделял теорию Сундмана, методы Пуанкаре, теорему Ляпунова — Пуанкаре, орбиты Пуанкаре и орбиты Хилла, структуру алгебры Ли в задачах управляемости.

Интерес к истории науки привел Холшевникова к еще одной важной просветительской задаче — преподаванию основ современной науки студентам-гуманитариям. Разработанный им курс помимо обычного в этом случае материала содержал и более сложные темы, такие как теорема Ферма, гипотеза Римана, описание физической реальности на основе принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа — Гамильтона. Холшевникову также принадлежит разработка учебного курса «Наука и религия», в котором он, опираясь на всю совокупность современных знаний, раскрыл сложное соотношение между научным и религиозным подходами к знанию и морали как в историческом аспекте, так и в современную эпоху.

4. Заключение. Приведенный обзор только наиболее важных научных работ К. В. Холшевникова, выполненных в XXI в., с очевидностью показывает, что, несмотря на все возрастающую роль численных подходов в небесно-механических и вообще астрономических исследованиях, потенциал аналитической небесной механики, математических методов далеко не исчерпан и способен приводить к существенным и даже прорывным результатам, имеющим не только фундаментальное, но и важное прикладное значение, причем в глобальном масштабе (например, в рамках проблемы астероидной опасности).

Профессор К. В. Холшевников был разносторонней личностью. Будучи выдающимся астрономом-математиком, он также находил энергию и время на занятия историей науки, просветительской деятельностью, интересовался общей историей, философией, филологией и многим другим. Многогранная деятельность Холшевникова является для нас — его коллег и последователей — примером служения науке во всех отношениях, во всех сферах проявления ее в жизни отдельных людей, различных сообществ и всего человечества в целом.

Благодарность. Авторы выражают искреннюю признательность В. Б. Ильину за внимание к данной работе. Авторы благодарны И. И. Шевченко, В. Б. Титову, Э. Д. Кузнецову, Д. В. Миланову и Т. Н. Санниковой за ценные замечания и комментарии, способствовавшие ее существенному улучшению.

Литература

1. Прокопьева М. С., Крайни Х. А., Ильин В. В. Астрономические исследования на математическом факультете Санкт-Петербургского университета. I. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 2, 228–258 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.202>
2. Ильин В. В., Савченко С. С., Морозова Д. А., Шишкина Е. В. Астрономические исследования на математическом факультете Санкт-Петербургского университета. II. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **12** (10), вып. 2, 228–255 (2025). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.202>
3. Vassiliev N. N. (ed.). *Analytical methods of celestial mechanics devoted to the memory of K. V. Kholshchevnikov. August 19–24, 2024. International Conference*. St. Petersburg, VVM (2024). Доступно на: http://amcm.conf-pdmi.ru/2024/AMCM_Book.pdf (дата обращения: 20.01.2025).
4. Шевченко И. И., Мельников А. В., Титов В. Б., Балугев Р. В., Веселова А. В., Кривов А. В., Микрюков Д. В., Миланов Д. В., Мюллери А. А., Никифоров И. И., Питьев Н. П., Поляхова Е. Н., Соколов Л. Л., Шайдюлин В. Ш. Избранные проблемы классической и современной небесной механики и звездной динамики. I. Классические результаты. *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы* **57** (1), 81–99 (2023). <https://doi.org/10.31857/S0320930X23010073>
5. Шевченко И. И., Мельников А. В., Титов В. Б., Балугев Р. В., Веселова А. В., Кривов А. В., Микрюков Д. В., Миланов Д. В., Мюллери А. А., Никифоров И. И., Питьев Н. П., Поляхова Е. Н., Соколов Л. Л., Шайдюлин В. Ш. Избранные проблемы классической и современной небесной механики и звездной динамики. II. Современные исследования. *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы* **57** (2), 181–196 (2023). <https://doi.org/10.31857/S0320930X2302007X>
6. Kholshchevnikov K. V., Vassiliev N. N. Natural metrics in the spaces of elliptic orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **89** (2), 119–125 (2004). <https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000034504.41897.ac>
7. Kholshchevnikov K., Kokhirova G., Babadzhanyan P., Khamroev U. Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **462** (2), 2275–2283 (2016). <https://doi.org/10.1093/mnras/stw1712>
8. Холшевников К. В., Щепалова А. С., Джазмати М. С. Об одном фактор-пространстве кеплеровых орбит. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 1, 165–174 (2020). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116>
9. Холшевников К. В., Миланов Д. В., Щепалова А. С. Пространство кеплеровых орбит и семейство его фактор-пространств. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 2, 359–369 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.215>
10. Kokhirova G. I., Babadzhanyan P. V., Khamroev U. H., Kholshchevnikov K. V., Milanov D. V. Metric approaches to identify a common origin of objects in σ -Capricornids complex. *Planetary and Space Science* **157**, 28–33 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.pss.2018.04.004>
11. Холшевников К. В., Щепалова А. С. О расстояниях между орбитами планет и астероидов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 3, 509–523 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.314>
12. Milanov D. V., Shaidulin V. S., Rusakov A. S., Veselova A. V. Age of Geminids derived from the statistics of meteoroid orbits. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **529** (4), 3988–3997 (2024). <https://doi.org/10.1093/mnras/stae745>
13. Andrade M., Docobo J. Á., Garca-Guinea J., Campo P. P. The Traspenna meteorite: heliocentric orbit, atmospheric trajectory, strewn field, and petrography of a new L5 ordinary chondrite. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **518** (3), 3850–3876 (2023). <https://doi.org/10.1093/mnras/stac2911>
14. Холшевников К. В., Греб А. В., Кузнецов Э. Д. Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам (теория). *Астрономический вестник* **35** (3), 267–272 (2001).
15. Холшевников К. В., Греб А. В., Кузнецов Э. Д. Разложение гамильтониана двухпланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: оценка и прямое вычисление коэффициентов. *Астрономический вестник* **36** (1), 75–87 (2002).
16. Кузнецов Э. Д., Холшевников К. В. Разложение гамильтониана двухпланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора. *Астрономический вестник* **38** (2), 171–179 (2004).
17. Кузнецов Э. Д., Холшевников К. В. Динамическая эволюция слабозмущенной двухпланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце — Юпитер — Сатурн. *Астрономический вестник* **40** (3), 263–275 (2006).

18. Кузнецов Э. Д., Холшевников К. В. Запас устойчивости двупланетных систем по массам планет. *Астрономический вестник* **43** (3), 230–239 (2009).
19. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. Москва, Эдиториал УРСС (2002).
20. Холшевников К. В. *Асимптотические методы небесной механики*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1985).
21. Kholshchevnikov K. V., Kuznetsov E. D. Stability of planetary systems with respect to masses. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **109**, 201–210 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10569-010-9324-0>
22. Shevchenko I. I. Chaotic zones around gravitating binaries. *Astrophys. J.* **799**, 8 (2015). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/799/1/8>
23. Маров М. Я., Шевченко И. И. Экзопланеты: природа и модели. *Успехи физических наук* **190**, 897–932 (2020). <https://doi.org/10.3367/UFN.2019.10.038673>
24. Shevchenko I. I. *Dynamical chaos in planetary systems*. Cham, Springer Nature (2020). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-52144-8>
25. Холшевников К. В., Титов В. Б. Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 4, 734–742 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413>
26. Холшевников К. В. Справедлива ли теорема Якоби в однократно осредненной ограниченной круговой задаче трех тел? *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 1, 179–184 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.116>
27. Kholshchevnikov K. V., Borukha M. A., Eskin B. B., Mikryukov D. V. On the asphericity of the figures of Pluto and Charon. *Planet. Space Sci.* **181**, 104777 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.pss.2019.104777>
28. Холшевников К. В., Микрюков Д. В., Джазмат М. С. Фигуры Плутона и Харона и их относительное движение. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 3, 533–546 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.314>
29. Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдюлин В. Ш. Коэффициенты Стокса сжатого эллипсоида вращения, эквиденситы которого подобны его поверхности. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 3, 516–524 (2017).
30. Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдюлин В. Ш. Ряд Лапласа эллипсоидальных фигур вращения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 4, 695–703 (2017).
31. Kholshchevnikov K. V., Milanov D. V., Shaidulin V. Sh. Laplace series for the level ellipsoid of revolution. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **130**, 64 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9851-7>
32. Батмунх Н., Оськина К. И., Санникова Т. Н., Титов В. Б., Холшевников К. В. Увод астероида с помощью двигателя малой тяги, направленной по трансверсали. *Астрономический журнал* **96** (11), 961–968 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0004629919100013>
33. Холшевников К. В., Миланов Д. В., Оськина К. И., Титов В. Б. Увод астероида с помощью двигателя малой тяги, направленной по касательной к орбите. *Астрономический журнал* **97** (9), 754–764 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0004629920100035>
34. Батмунх Н., Санникова Т. Н., Холшевников К. В. Движение в центральном поле при возмущающем ускорении, постоянном в сопровождающей системе отсчета, связанной с вектором скорости. *Астрономический журнал* **95** (4), 307–316 (2018). <https://doi.org/10.7868/S0004629918040023>
35. Холшевников К. В., Батмунх Н., Оськина К. И., Титов В. Б. Нормы смещения положения небесного тела в одной задаче динамической астрономии. *Астрономический журнал* **97** (4), 348–352 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0004629920040039>
36. Александрова А. Г., Галушина Т. Ю., Прищепенко А. Б., Холшевников К. В., Четкин В. М. О превентивном разрушении опасного астероида. *Астрономический журнал* **93** (6), 595–602 (2016). <https://doi.org/10.7868/S0004629916040010>
37. Александрова А. Г., Галушина Т. Ю., Прищепенко А. Б., Холшевников К. В., Четкин В. М. О возможности безопасного разрушения угрожающего Земле астероида. *Астрономический журнал* **96** (9), 785–792 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0004629919090019>
38. Коротцев О. Н. *Звездные имена Петербурга. Малые планеты, названные именами ленинградцев-петербуржцев: энциклопедический справочник*. Санкт-Петербург, Премикс (2005).
39. Черепашук А. М., Холшевников Константин Владиславович, В. Черепашук А. М. (ред.) *Астрономы России 1917–2021*, 2-е изд., перераб. Москва, Изд-во РАН (2022).
40. Холшевников К. В. Точность эпициклической теории. *Историко-астрономические исследования* **24**, 181–191 (1994).

41. Невская Н. И., Холшевников К. В. Эйлер и развитие небесной механики. В: Боголюбов Н. Н., Михайлов Г. К., Юшкевич А. П. (ред.) *Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука*, 254–258. Москва, Наука (1988).
42. Брылевская Л. И., Ерохина К. С., Паламарчук А. А., Полевой А. В. (ред.), Колчинский Э. И., Тропп Э. А. (отв. ред.). Леонард Эйлер и современная наука. *Материалы Международной научной конференции*, 14–17 мая 2007 г., Москва, РАН (2007).
43. Васильев В. Н. (отв. ред.), Брылевская Л. И., Маттмюллер М., Сезиано Ж. (сост.) *Леонард Эйлер: к 300-летию со дня рождения*. Санкт-Петербург, Нестор-История (2008).
44. Kholshchevnikov K. V. Euler and Celestial Mechanics. *The International Conference “Analytical Methods of Celestial Mechanics”*, July 8–12, 2007, St. Petersburg (2007). Доступно на: <https://pdmi.ras.ru/EIMI/2007/AMCM/prog.html> (дата обращения: 21.01.2025).
45. Поляхова Е. Н., Королев В. С., Холшевников К. В. Достижения Петербургской научной школы по астрономии и небесной механике. *Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XXXVI–XXXVII междунар. научн.-практ. конф.* 11–12 (35), 96–111. Новосибирск, Изд-во АНС «СибАК» (2015).
46. Поляхова Е. Н., Холшевников К. В. К 150-летию со дня рождения Софьи Ковалевской (1850–1891): ее научное наследие по классической и небесной механике. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* 2 (9), 3–26 (2001).
47. Поляхова Е. Н., Холшевников К. В. Некоторые задачи прикладной математики — небесная механика, геодезия, картография — в работах академика М. В. Остроградского и его научной школы: к 200-летию со дня рождения ученого. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* 1, 112–136 (2007).
48. Поляхова Е. Н., Королев В. С., Холшевников К. В. Переводы трудов классиков науки академиком А. Н. Крыловым. *Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XXVII междунар. научн.-практ. конф.* 2 (26), 108–128. Новосибирск, Изд-во АНС «СибАК» (2015).
49. Холшевников К. В., Поляхова Е. Н., Королев В. С. Работы академика А. Н. Крылова по астрономии, механике, прикладной математике и истории науки. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* 3 (61), вып. 2, 324–334 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.217>
50. Поляхова Е. Н., Холшевников К. В. Жан-Батист Даламбер: к 300-летию со дня рождения. *Земля и Вселенная* 6, 27–37 (2017).
51. Королев В. С., Поляхова Е. Н., Холшевников К. В. К 300-летию Даламбера (1717–1783). *Наука и техника: вопросы истории и теории* 34, 229–230 (2018).
52. Алферов Г. В., Королев В. С., Поляхова Е. Н., Холшевников К. В. Моделирование задач динамики и развитие научных направлений механики и прикладной математики. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* 8 (66), вып. 1, 138–149 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.112>
53. Холшевников К. В. Небесная механика. В: Соболев В. В. (ред.) *История астрономии в России и СССР*, 78–132. Москва, Янус-К (1999).
54. Холшевников К. В. Небесная механика. В: Сурдин В. Г. (ред.-сост.) *Солнечная система*. Москва, Физматлит (2008).
55. Холшевников К. В. Небесная механика. В: Сурдин В. Г. (ред.-сост.) *Солнечная система*. Москва, Физматлит (2017).
56. Valtonen M., Anosova J., Kholshchevnikov K., Mylläri A., Orlov V., Tanikawa K. *The Three-body Problem from Pythagoras to Hawking*. Cham, Springer International Publishing (2016). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-22726-9>
57. Боннар Б., Фобур Л., Треля Э. *Небесная механика и управление космическими летательными аппаратами*, пер. с фр., Холшевников К. В. (ред.). В: Математика и механика. Москва; Ижевск, Институт компьютерных исследований (2014).
58. Шази Ж. *Теория относительности и небесная механика*. Т. 1–2, пер. с фр., Холшевников К. В. (ред.). Москва; Ижевск, Институт компьютерных исследований (2012).

Статья поступила в редакцию 28 января 2025 г.;
доработана 13 февраля 2025 г.;
рекомендована к печати 20 февраля 2025 г.

Контактная информация:

Поляхова Елена Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0009-0004-1547-8389>, pol@astro.spbu.ru
Васильев Андрей Александрович — мл. науч. сотр.;
<https://orcid.org/0000-0002-8293-0214>, andrey.vasilyev@spbu.ru
Веселова Ангелина Владимировна — ассистент;
<https://orcid.org/0000-0003-2601-1667>, a.v.veselova@spbu.ru
Микрюков Денис Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0002-7532-2472>, d.mikryukov@spbu.ru
Никифоров Игорь Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0002-8490-5709>, i.nikiforov@spbu.ru
Эскин Борис Борисович — ст. преп.;
<https://orcid.org/0000-0002-7011-4893>, esk@astro.spbu.ru

Astronomical research at the mathematical faculty of St. Petersburg University. III. Scientific heritage of professor K. V. Kholshevnikov*

*E. N. Polyakhova, A. A. Vasilyev, A. V. Veselova,
D. V. Mikryukov, I. I. Nikiforov, B. B. Eskin*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Polyakhova E. N., Vasilyev A. A., Veselova A. V., Mikryukov D. V., Nikiforov I. I., Eskin B. B. Astronomical research at the mathematical faculty of St. Petersburg University. III. Scientific heritage of professor K. V. Kholshevnikov. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 3, pp. 474–490. EDN UWRFAQ (In Russian)

The most important of K. V. Kholshevnikov's recent works on analytical celestial mechanics are described. Those reveal the second part of the review of astronomical research carried out at St. Petersburg University in terms of this subject, which pertains to the XXI century. The organic connection of analytical celestial mechanics with mathematical methods is emphasized. The potential of this direction in modern fundamental and applied astronomical research is shown. Some other aspects of the multifaceted activity of K. V. Kholshevnikov as an astronomer-mathematician, a devotee of science and education are described.

Keywords: applications of mathematics in astronomy, metrics in orbital space, planetary N body problem, averaging method, restricted three-body problem, equilibrium figures of celestial bodies, asteroid hazard, astronomical aspects in the history of mathematics.

References

1. Prokopjeva M. S., Krayani H. A., Il'in V. B. Astronomical researches at the mathematical faculty of the Saint Petersburg University. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 2, 228–258 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.202> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57**, iss. 2, 152–170 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1063454124700031>].
2. Il'in V. B., Savchenko S. S., Morozova D. A., Shishkina E. V. Astronomical researches at the mathematical faculty of the Saint Petersburg University. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **12** (70), iss. 2, 228–255 (2025). <https://doi.org/10.21638>

*See the second part: Il'in V. B., Savchenko S. S., Morozova D. A., Shishkina E. V. Astronomical researches at the mathematical faculty of the Saint Petersburg University. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2025, vol. 12 (70), issue 2, pp. 228–255. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2025.202> (In Russian)

- /spbu01.2025.202 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **58**, iss. 2, 171–187 (2025)].
3. Vassiliev N.N. (ed.) *Analytical methods of celestial mechanics devoted to the memory of K. V. Kholshchevnikov, August 19–24, 2024. International Conference*. St. Petersburg, VVM Publishing (2024). Available at: http://amcm.conf-pdmi.ru/2024/AMCM_Book.pdf (accessed: January 20, 2025).
 4. Shevchenko I.I., Mel'nikov A.V., Titov V.B., Baluev R.V., Veselova A.V., Krivov A.V., Mikryukov D.V., Milanov D.V., Mülläri A.A., Nikiforov I.I., Pit'ev N.P., Polyakhova E.N., Sokolov L.L., Shaidulin V.Sh. Selected problems of classical and modern celestial mechanics and stellar dynamics: I. Classical results. *Astronomicheskii vestnik. Issledovaniia Solnechnoi sistemy* **57** (1), 81–99 (2023). <https://doi.org/10.31857/S0320930X23010073> (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **57** (1), 85–102 (2023)]. <https://doi.org/10.1134/S0038094623010069>.
 5. Shevchenko I.I., Mel'nikov A.V., Titov V.B., Baluev R.V., Veselova A.V., Krivov A.V., Mikryukov D.V., Milanov D.V., Mülläri A.A., Nikiforov I.I., Pit'ev N.P., Polyakhova E.N., Sokolov L.L., Shaidulin V.Sh. Selected problems of classical and modern celestial mechanics and stellar dynamics: II. Modern studies. *Astronomicheskii vestnik. Issledovaniia Solnechnoi sistemy* **57** (2), 181–196 (2023). <https://doi.org/10.31857/S0320930X2302007X> (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **57** (2), 175–189 (2023)]. <https://doi.org/10.1134/S0038094623020077>.
 6. Kholshchevnikov K.V., Vassiliev N.N. Natural metrics in the spaces of elliptic orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **89** (2), 119–125 (2004). <https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000034504.41897.ac>
 7. Kholshchevnikov K., Kokhirova G., Babadzhano P., Khamroev U. Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **462** (2), 2275–2283 (2016). <https://doi.org/10.1093/mnras/stw1712>
 8. Kholshchevnikov K.V., Shchepalova A.S., Jazmati M.S. On a quotient space of Keplerian orbits. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 1, 165–174 (2020). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 1, 108–114 (2020)]. <https://doi.org/10.1134/S1063454120010045>.
 9. Kholshchevnikov K.V., Milanov D.V., Shchepalova A.S. The space of Keplerian orbits and a family of its quotient spaces. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 2, 359–369 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.215> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 2, 213–220 (2021)]. <https://doi.org/10.1134/S1063454121020047>.
 10. Kokhirova G.I., Babadzhano P.B., Khamroev U.H., Kholshchevnikov K.V., Milanov D.V. Metric approaches to identify a common origin of objects in σ -Capricornids complex. *Planetary and Space Science* **157**, 28–33 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.pss.2018.04.004>
 11. Kholshchevnikov K.V., Shchepalova A.S. On distances between orbits of planets and asteroids. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 3, 509–523 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.314> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 3, 305–316 (2018)]. <https://doi.org/10.3103/S1063454118030044>.
 12. Milanov D.V., Shaidulin V.S., Rusakov A.S., Veselova A.V. Age of Geminids derived from the statistics of meteoroid orbits. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **529** (4), 3988–3997 (2024). <https://doi.org/10.1093/mnras/stae745>
 13. Andrade M., Docobo J. Á., Garca-Guinea J., Campo P.P. The Traspenna meteorite: heliocentric orbit, atmospheric trajectory, strewn field, and petrography of a new L5 ordinary chondrite. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **518** (3), 3850–3876 (2023). <https://doi.org/10.1093/mnras/stac2911>
 14. Kholshchevnikov K.V., Greb A.V., Kuznetsov E.D. The expansion of the hamiltonian of the planetary problem into the Poisson series in all keplerian elements (theory). *Astronomicheskii vestnik* **35** (3), 267–272 (2001). (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **35** (3), 243–248 (2001)]. <https://doi.org/10.1023/A:1010487107989>.
 15. Kholshchevnikov K.V., Greb A.V., Kuznetsov E.D. The expansion of the hamiltonian of the two-planetary problem into a Poisson series in all elements: estimation and direct calculation of coefficients. *Astronomicheskii vestnik* **36** (1), 75–87 (2002). (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **36** (1), 68–79 (2002)]. <https://doi.org/10.1023/A:1014229712204>.
 16. Kuznetsov E.D., Kholshchevnikov K.V. Expansion of the Hamiltonian of the two-planetary problem into the Poisson series in all elements: application of the poisson series processor. *Astronomicheskii vestnik* **38** (2), 171–179 (2004). (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **38**, 147–154 (2004)]. <https://doi.org/10.1023/B:SOLS.0000022825.93837.7d>.

17. Kuznetsov E. D., Kholshchevnikov K. V. Dynamical Evolution of Weakly Disturbed Two-Planetary System on Cosmogonic Time Scales: The Sun—Jupiter—Saturn System. *Astronomicheskii vestnik* **40** (3), 263–275 (2006). (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **40** (3), 239–250 (2006)]. <https://doi.org/10.1134/S0038094606030087>.
18. Kuznetsov E. D., Kholshchevnikov K. V. Planet mass stability margin of two-planetary systems. *Astronomicheskii vestnik* **43** (3), 230–239 (2009). (In Russian) [Eng. transl.: *Solar System Research* **43** (3), 220–228 (2009)]. <https://doi.org/10.1134/S0038094609030046>.
19. Arnold V.I., Kozlov V. V., Neishtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki*. Moscow, Editorial URSS Publ. (2002). (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. 3rd ed. New York, Springer (2006)].
20. Kholshchevnikov K.V. *Asymptotic methods of celestial mechanics*. Leningrad, Leningrad University Press (1985).
21. Kholshchevnikov K.V., Kuznetsov E. D. Stability of planetary systems with respect to masses. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **109**, 201–210 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10569-010-9324-0>
22. Shevchenko I.I. Chaotic zones around gravitating binaries. *Astrophys. J.* **799**, 8 (2015). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/799/1/8>
23. Marov M. Ya., Shevchenko I. I. Exoplanets: Nature and models. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **190**, 897–932 (2020). <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.10.038673> (In Russian) [Eng. transl.: *Phys. Uspekhi* **63**, 837–871 (2020)]. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.10.038673>.
24. Shevchenko I. I. *Dynamical chaos in planetary systems*. Cham, Springer Nature (2020). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-52144-8>
25. Kholshchevnikov K. V., Titov V.B. Minimal velocity surface in the restricted circular Three-Body-Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 4, 734–742 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 4, 473–479 (2020)]. <https://doi.org/10.1134/S106345412004007X>].
26. Kholshchevnikov K.V. Is Jacobi theorem valid in the singly averaged restricted circular three-body-problem? *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 1, 179–184 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.116> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 1, 106–110 (2021)]. <https://doi.org/10.1134/S1063454121010076>].
27. Kholshchevnikov K.V., Borukha M.A., Eskin B.B., Mikryukov D.V. On the asphericity of the figures of Pluto and Charon. *Planet. Space Sci.* **181**, 104777 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.pss.2019.104777>
28. Kholshchevnikov K.V., Mikryukov D.V., Jazmati M.S. Figures of Pluto and Charon and their relative motion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 3, 533–546 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.314> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 3, 289–299 (2021)]. <https://doi.org/10.1134/S1063454121030043>].
29. Kholshchevnikov K.V., Milanov D.V., Shaidulin V.Sh. Stokes constants of an oblate ellipsoid of revolution with equidensities homothetic to its surface. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 3, 516–524 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.313> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **50**, iss. 3, 318–324 (2017)]. <https://doi.org/10.3103/S1063454117030098>].
30. Kholshchevnikov K.V., Milanov D.V., Shaidulin V.Sh. Laplace series of ellipsoidal figures of revolution. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 4, 695–703 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.417> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **50**, iss. 4, 406–413 (2017)]. <https://doi.org/10.3103/S1063454117040112>].
31. Kholshchevnikov K.V., Milanov D.V., Shaidulin V.Sh. Laplace series for the level ellipsoid of revolution. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **130**, 64 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9851-7>
32. Batmunkh N., Os'kina K.I., Sannikova T.N., Titov V.B., Kholshchevnikov K.V. Diversion of an asteroid using a transversal thruster. *Astronomicheskii zhurnal* **96**, iss. 11, 961–968 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0004629919100013> [Eng. transl.: *Astronomy Reports* **63**, iss. 11, 420–432 (2019)] <https://doi.org/10.1134/S1063772919100019>].
33. Kholshchevnikov K.V., Milanov D.V., Os'kina K.I., Titov V.B. Deflecting an asteroid with a low-thrust tangential engine to the orbit. *Astronomicheskii zhurnal* **97**, iss. 9, 754–764 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0004629920100035> (In Russian) [Eng. transl.: *Astronomy Reports* **64**, iss. 9, 785–794 (2020)] <https://doi.org/10.1134/S1063772920100029>].

34. Batmunkh N., Sannikova T.N., Kholshchevnikov K.V. Motion in a central field in the presence of a constant perturbing acceleration in a coordinate system comoving with the velocity vector. *Astronomicheskii zhurnal* **95**, iss. 4, 307–316 (2018). <https://doi.org/10.7868/S0004629918040023> (In Russian) [Eng. transl.: *Astronomy Reports* **62**, iss.4, 288–298 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1063772918040029>].
35. Kholshchevnikov K. V., Batmunkh N., Os'kina K.I., Titov V.B. Norm of the position shift of a celestial body in a dynamical astronomy problem. *Astronomicheskii zhurnal* **97**, iss. 4, 348–352 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0004629920040039> (In Russian) [Eng. transl.: *Astronomy Reports* **64**, iss. 4, 369–373 (2020) <https://doi.org/10.1134/S1063772920040034>].
36. Aleksandrova A. G., Galushina T. Y., Prishchepenko A. B., Kholshchevnikov K. V., Chechetkin V. M. The preventive destruction of a hazardous asteroid. *Astronomicheskii zhurnal* **93**, iss. 6, 595–602 (2016). <https://doi.org/10.7868/S0004629916040010> (In Russian) [Eng. transl.: *Astronomy Reports* **60**, iss. 6, 611–619 (2016) <https://doi.org/10.1134/S1063772916040016>].
37. Aleksandrova A. G., Galushina T. Y., Prishchepenko A. B., Kholshchevnikov K. V., Chechetkin V. M. The possibility of harmless destruction of an asteroid threatening the Earth. *Astronomicheskii zhurnal* **96**, iss. 9, 785–792 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0004629919090019> (In Russian) [Eng. transl.: *Astronomy Reports* **63**, iss. 9, 786–793 (2019) <https://doi.org/10.1134/S1063772919140014>].
38. Korotsev O. N. *The star names of St. Petersburg. Minor planets named after leningrad-petersburgians: an encyclopedic reference*. St. Petersburg, Premiks Publ. (2005). (In Russian)
39. Cherepashchuk A. M. Kholshchevnikov Konstantin Vladislavovich. In: Cherepashchuk A. M. (ed.) *Russian astronomers 1917–2021*. Moscow, RAS Publ. (2022). (In Russian)
40. Kholshchevnikov K. V. The exactness of epicyclic theory. *Istoriko-astronomicheskie issledovaniia* **24**, 181–191 (1994). (In Russian)
41. Nevskaya N. I., Kholshchevnikov K. V. Ejler i razvitie nebesnoj mekhaniki. In: Bogolyubov N. N., Mikhailov G. K., Yuskevich A. P. (ed.) *Razvitie idej Leonarda Ejlera*, 254–258. Moscow, Nauka Publ. (1988). (In Russian) [Eng. transl.: Nevskaya N. I., Kholshchevnikov K. V. Euler and the Evolution of Celestial Mechanics. In: Bogolyubov N. N., Mikhailov G. K., Yuskevich A. P. (ed.) *Euler and Modern Science*, 245–263. Washington, D. C., Mathematical Association of America (2007)].
42. Brylevskaya L. I., Erokhina K. S., Palamarchuk A. A., Polevoj A. V. (ed.), Kolchinskij E. I., Tropp E. A. (res. ed.). Leonhard Euler and modern science. *Proceedings of the International Scientific Conference*, May 14–17, 2007, Moscow, RAS (2007). (In Russian)
43. Vasil'ev V. N. (res. ed.), Brylevskaya L. I., Mattmüller M., Sesiano J. (comp.) *Leonhard Euler: On the 300th anniversary of his birth*. St. Petersburg, Nestor-Istoriya Publ. (2008). (In Russian)
44. Kholshchevnikov K. V. Euler and Celestial Mechanics. *The International Conference "Analytical Methods of Celestial Mechanics"*, July 8–12, 2007, St. Petersburg (2007). Available at: <https://pdmi.ras.ru/EIMI/2007/AMCM/prog.html> (accessed: January 21, 2025).
45. Polyakhova E. N., Korolev V. S., Kholshchevnikov K. V. Achievements of the St. Petersburg scientific school in astronomy and celestial mechanics. *Proceedings of the XXXVI–XXXVII International scientific and practical conference "Natural and mathematical sciences in the modern world"* **11–12** (35), 96–111. Novosibirsk, SibAC Publ. (2015). (In Russian)
46. Polyakhova E. N., Kholshchevnikov K. V. On the 150th anniversary of the birth of Sofia Kovalevskaya (1850–1891): her scientific legacy in classical and celestial mechanics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (9), 3–26 (2001). (In Russian)
47. Polyakhova E. N., Kholshchevnikov K. V. Several problems of applied mathematics — celestial mechanics, geodesy and cartography — in the works of the academician M. V. Ostrogradsky, and of his scientific school (to Ostrogradsky's jubilee). *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer Science. Control Processes* **1**, 112–136 (2007). (In Russian)
48. Polyakhova E. N., Korolev V. S., Kholshchevnikov K. V. Translations of works of the classics of sciences by the academician A. N. Krylov. *Proceedings of the XXVII International scientific and practical conference "Natural and mathematical sciences in the modern world"* **2** (26), 108–128. Novosibirsk, SibAC Publ. (2015). (In Russian)
49. Kholshchevnikov K. V., Polyakhova E. N., Korolev V. S. Academician A. N. Krylov's works in astronomy, mechanics, applied mathematics and history of science. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (61), iss. 2, 324–334 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.217> (In Russian)
50. Polyakhova E. N., Kholshchevnikov K. V. Jean Baptiste D'Alembert (on the 300th anniversary of his birth). *Zemlya i Vselennaya* **6**, 27–37 (2017). (In Russian)
51. Korolev V. S., Polyakhova E. N., Kholshchevnikov K. V. On the 300th anniversary of D'Alembert (1717–1783). *Nauka i tekhnika: Voprosy istorii i teorii* **34**, 229–230 (2018). (In Russian)

52. Alferov G. V., Korolev V. S., Polyakhova E. N., Kholshevnikov K. V. Dynamics modeling and scientific development directions of mechanics and applied mathematics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (66), iss.1, 138–149 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.112> (In Russian)
53. Kholshevnikov K. V. Celestial mechanics. In: Sobolev V. V. (ed.) *History of astronomy in Russia and the USSR*, 78–132. Moscow, Yanus-K (1999). (In Russian)
54. Kholshevnikov K. V. Celestial mechanics. In: Surdin V. G. (ed.) *Solar System*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2008). (In Russian)
55. Kholshevnikov K. V. Celestial mechanics. In: Surdin V. G. (ed.) *Solar System*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2017). (In Russian)
56. Valtonen M., Anosova J., Kholshevnikov K., Mylläri A., Orlov V., Tanikawa K. *The Three-body problem from Pythagoras to Hawking*. Cham, Springer International Publishing (2016). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-22726-9>
57. Bonnard B., Faubourg L., Trélat E. *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*. In: *Mathématiques & Applications*, vol. 51. Berlin; Heidelberg, Springer (2006) [Rus. ed.: Bonnard B., Faubourg L., Trélat E. *Nebesnaja mehanika i upravlenie kosmicheskimi letatel'nymi apparatami*. Izhevsk, Institut komp'yuternyh issledovanij Publ. (2014)].
58. Chazy De J. *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*. Tome 1, 2. Paris, Gauthier-Villars (1928, 1930). [Rus. ed.: Chazy De J. *Teorija otnositel'nosti i nebesnaja mehanika*. Izhevsk, Institut komp'yuternyh issledovanij Publ. (2012)].

Received: January 28, 2025

Revised: February 13, 2025

Accepted: February 20, 2025

Authors' information:

Elena N. Polyakhova — <https://orcid.org/0009-0004-1547-8389>, pol@astro.spbu.ru
Andrey A. Vasilyev — <https://orcid.org/0000-0002-8293-0214>, andrey.vasilyev@spbu.ru
Angelina V. Veselova — <https://orcid.org/0000-0003-2601-1667>, a.v.veselova@spbu.ru
Denis V. Mikryukov — <https://orcid.org/0000-0002-7532-2472>, d.mikryukov@spbu.ru
Igor I. Nikiforov — <https://orcid.org/0000-0002-8490-5709>, i.nikiforov@spbu.ru
Boris B. Eskin — <https://orcid.org/0000-0002-7011-4893>, esk@astro.spbu.ru