

Сшивка голографического уравнения состояния с
уравнением адронного газа как инструмент для
изучения эволюции кварк-глюонной плазмы
Holographic equation of state matched with hadron
gas equation as a tool for the study of the quark-gluon
plasma evolution

*А.В. Ануфриев^{a,b}, В.Н. Коваленко^b,
A. Anufriev^{a1}, V.N. Kovalenko^{a2}*

^a Санкт-Петербургский Государственный Университет

^a Saint Petersburg State University

В данной статье рассматривается сшивка голографического уравнения состояния с уравнением адронного резонансного газа для изучения свойств ядерной материи в рамках релятивистских столкновений тяжелых ионов. Методы машинного обучения применяются для настройки свободных параметров модели с использованием результатов решеточной квантовой хромодинамики для физических значений масс кварков. Одна из наиболее продвинутых процедур сшивки применяется с использованием функции, которая аппроксимирует предельное поведение обеих моделей. Окончательные адронные спектры получены в рамках многоступенчатого численного метода с использованием пакетов iEBE-MUSIC и SMASH-vHLE. Код релятивистской гидродинамики модифицирован путем внедрения табличного голографического уравнения состояния, что позволяет моделировать эволюцию кварк-глюонной плазмы с динамически генерируемыми начальными условиями с помощью трехмерной модели Глаубера по методу Монте-Карло и SMASH. На стадии вымораживания используются гибридные подходы iSS+UrQMD и Hadron Sampler+SMASH.

In this paper, we discuss the matching of the holographic equation of state with the equation of Hadron Resonance Gas for studying the nuclear matter properties within the framework of relativistic heavy-ion collisions. Machine learning methods are applied to the calibration of model's free parameters using the lattice QCD results for the physical values of quark masses. One of the most advanced procedure for matching is used with the function that approximate behavior of both models on particular limit adopted from NEOS equation. Final adronic spectra are obtained within multi-staged numerical approach of iEBE-MUSIC and SMASH-vHLE packages. The code of relativistic hydrodynamics is modified by implementing a tabulated holographic equation of state, enabling simulations of quark-gluon plasma evolution with dynamically generated initial conditions via the 3D Monte Carlo Glauber Model and SMASH. Hybrid iSS+UrQMD and Hadron Sampler+SMASH approaches are utilized at the freeze-out stage.

PACS: 25.75.-q, 12.38.Mh, 24.10.Nz

¹E-mail: anton.anufriev@spbu.ru

²E-mail: v.kovalenko@spbu.ru

Введение

Изучение фазовой диаграммы кварк-глюонной плазмы (QGP) становится особенно актуальным в современных исследованиях, т.к. предполагается что данная особая фаза вещества обладает свойствами, сходными с релятивистской жидкостью [1]. В последние годы модель релятивистской гидродинамики модель [2] приобрела значительную популярность. Уравнение состояния (EoS), общая форма которого остается неизвестной, успешно аппроксимируется в рамках КХД на решетке при барионных потенциалах, близких к нулю, в предположении плавного кроссоверного перехода в этой области [3]. Однако при ненулевых значениях μ_B , которые обычно связаны с наличием критической точки в кварк-глюонной плазме (QGP), возникает “проблема знака” из-за неопределенности фермионного определителя [4], что позволяет рассматривать более экзотические варианты.

В 1998 году Малдасена предложил строгую формулировку AdS/CFT-инвариантности [5], которая в дальнейшем позволила рассмотреть преимущества этого подхода в низкоэнергетическом пределе теории струн, открыв рабочую область дуальности AdS/QCD [6]. Ярким примером такого подхода является цикл исследований теоретической группы И. Я. Арефьевой [7], в рамках которого предполагается введение дополнительного скалярного дилатонного поля в рамках классического действия Эйнштейна-Максвелла, дополненного реализацией метода восстановления потенциала. Предположение о нулевых массах кварков, которое характерно для кирального предела в исследованиях квантовой хромодинамики на решетке, эффективно восстанавливается путем выбора коэффициента деформации с определенным набором предсказанных свободных параметров для исходного анзаца, как это было сделано, например, в ссылке [8].

В рамках наших предыдущих работ [9,11] было указано, что голографические уравнения состояния часто остаются теоретическими и редко используются для изучения имеющихся экспериментальных данных и численных предсказаний, что позволило нам предложить практический способ для внедрения голографического подхода в программные пакеты для численного моделирования эволюции ядерной материи в рамках релятивистских столкновений тяжелых ионов. Данное исследование посвящено традиционной проблеме сшивки уравнения состояния в рамках гидродинамического моделирования с уравнением адронного газа при малых температурах. Изучив опыт решеточных уравнений по данному вопросу, мы выбрали один из самых продвинутых методов среди существующих на данный момент, что позволяет исключить проблемы с законами сохранения, которые возникали на более ранних этапах в истории развития процедур такой сшивки [12].

Используемые подходы

В этом исследовании рассматривается уравнение состояния, полученное с использованием подхода ‘bottom-up’ с мягкой стенкой, что позволяет

связать квазиконформную теорию КХД с классической гравитацией в пространстве AdS размерности 5, как предложено в работе [8].

Вводится особая форма начального анзаца:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} B(z) \left[-g(z) dt^2 + dx^2 + \left(\frac{z}{R} \right)^{2-\frac{2}{\nu}} dy_1^2 + \left(\frac{z}{R} \right)^{2-\frac{2}{\nu}} dy_2^2 + \frac{dz^2}{g(z)} \right], \quad (1)$$

здесь R - размерный коэффициент, который для метрики Пуанкаре соответствовал бы радиусу AdS (мы используем $R = 1$ для дальнейших вычислений. Это типичный выбор для теоретических работ и не уменьшает общности приведенных выше выражений), $g(z)$ - функция почернения, определяющая термодинамическое поведение черной браны. Параметр ν контролирует пространственную анизотропию компонентов метрики. При этом $\nu = 1$ соответствует изотропному случаю, а выбор $\nu = 4.5$, как было показано в [13], является наилучшим для анизотропной модели в контексте восстановления экспериментально наблюдаемой зависимости плотности множественности заряженных адронов от энергии столкновения.

Коэффициент деформации $B(z)$ из уравнения (1) в ссылке [14] соответствует модели ‘легких кварков’ и был выбран таким образом, чтобы восстановить результаты расчетов КХД решетки в пределе от $m_q \rightarrow 0$. Таким образом:

$$B(z) = \exp(2A(z)), \quad (2)$$

$$A(z) = d \ln(az^2 + 1) + d \ln(bz^4 + 1). \quad (3)$$

Данный подход позволяет получить связь основных термодинамических величин с гравитационными параметрами черной браны, результаты чего были показаны в наших предыдущих работах.

После подготовки полученного уравнения состояния к численному моделированию, которое будет подробнее описано в параграфе 3, мы внедряем его в пакеты для релятивистской гидродинамики MUSIC [15] и VHLLE [16].

Финальные адронные спектры, обсуждаемые в параграфе 4, вычисляются с применением многоступенчатого подхода, включающего в себя модели 3D MC Glauber [17] и SMASH [18] для получения начальных условий гидродинамики. Кроме того, на этапе вымораживания применяются пакеты iSS [19] и Hadron Sampler [20], а постэволюция адронов рассматривается в контексте транспортных моделей UrQMD [21] и SMASH в режиме “afterburner”.

Т.к. гидродинамическое моделирование требует детальной настройки начальных условий и параметров самой модели (например, для включения вязкости), на данной стадии наших исследований мы конструируем полноценную методологию и не предполагаем существенного согласования предсказаний моделирования, приведенных в параграфе 4, с экспериментальными результатами. Данная задача будет решена в более поздних исследованиях.

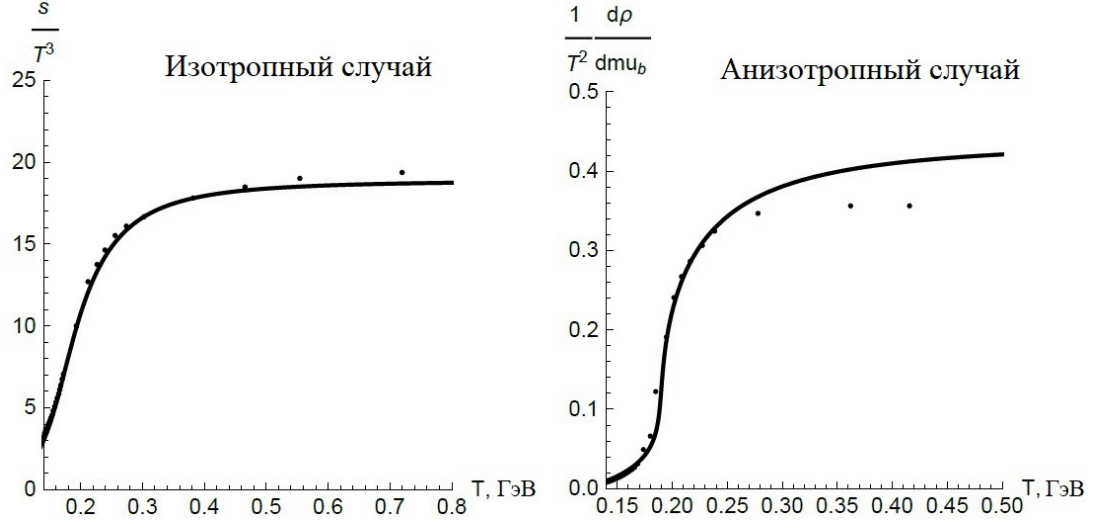


Рис. 1. Результат фитирования соотношения $\frac{s}{T^3}$ для изотропной (линия на картинке слева) и анизотропной (линия на картинке справа) модели. Точки для $T > 0.18$ ГэВ - решеточные результаты для физических масс кварков [23]. В области $T < 0.18$ ГэВ в качестве точек используются результаты уравнения адронного газа, полученные в пакете Thermal-FIST [10]

Настройка модельных параметров и сшивка голографического уравнения с адронным газом

Основной проблемой данной работы является вопрос о сшивке уравнения состояния, применяемого в рамках численного моделирования, с уравнением адронного газа, широко обсуждаемое в литературе (см, например, обзор [12]). Среди основных аргументов, высказываемых в пользу данной процедуры, можно выделить необходимость соответствия предсказаний термодинамики алгоритму вымораживания Купера-Фрая [22], подразумевающего свободный адронный газ в конечном состоянии. Кроме того, этот вопрос оказывается принципиальным для многоступенчатого моделирования, применяемого в данной работе, т.к. транспортные модели, предсказывающие поведение адронного состояния после вымораживания, также включают уравнение адронного газа в качестве основного.

Наши предыдущие исследования фокусировались на необходимости настройки гидродинамической модели на решеточные результаты с экспериментальными значениями масс легких мезонов, что соответствует случаю физических масс кварков. Это связано с тем, что традиционно для настройки применяются данные, полученные в рамках кирального или тяжелого предела, что мы не рассматриваем в качестве хороших аппроксимаций для реалистичного численного моделирования. На данном этапе в качестве начальных данных мы рассматриваем результаты работы [23], вручную комбинируя точки для настраиваемых термодинамических величин (их выбор обсуждался в нашей работе [9]) с предсказаниями адронного газа для температур < 180 МэВ (что примерно соответствует термодинамике после фазового

перехода). Данный набор точек мы получаем из уравнения адронного газа в рамках пакета Thermal FIST [10] (что соответствует уравнению состояния SMASH и UrQMD). Результаты соответствующей настройки с применением машинного обучения (алгоритм приведен в работе [11]) демонстрируются на рис. 1.

Данный способ настройки обеспечивает нам сшивку лишь при нулевых барионных потенциалах, тогда как основным преимуществом голографического подхода мы называли возможность исследования широкой области фазовой диаграммы. Для того, чтобы включить это преимущество, автоматически обеспечивая соблюдение законов сохранения в рамках гидродинамики, мы применяем подход авторов уравнения NEOS, детали которого подробно изложены в работе [24]. Подход подразумевает получение основных термодинамических величин в виде линейной комбинации подхода голографии и адронного газа с динамическими коэффициентами, зависящими от температуры и барионного потенциала. Такую зависимость обеспечивает выбор “переключающей функции”, которая в нашей работе, как и в вышеупомянутом исследовании, взята в виде:

$$f(T, \mu_b) = \tanh \left(T - \frac{T_c(\mu_b)}{\Delta T_c} \right)$$

Сшивающая температура $T_c(\mu_b)$ получена из подробного исследования химического вымораживания, а $\Delta T_c = 0.1T_c(0)$.

Такой подход позволяет обеспечить гладкую аппроксимацию обоих подходов в соответствующих температурных областях, как показано на рис. 2.

Обсуждение результатов

Результаты многоступенчатого моделирования в рамках iEBE-MUSIC и SMASH-vHLLC с применением голографического уравнения состояния, сшитого с уравнением адронного газа в кинематической области эксперимента NA49 для наиболее центральных столкновений при $\sqrt{s} = 8.9$ ГэВ [25], приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

В связи с высокой чувствительностью гидродинамики к начальным условиям, важно указать, что в двух приведенных случаях для 3D MC Glauber и SMASH были заданы одинаковые начальные параметры для моделирования со всеми тремя использованными уравнениями для обеспечения чистого сравнения полученных результатов.

Нельзя было ожидать значительных отличий полученных результатов моделирования по сравнению с предсказаниями из нашей предыдущей работы, сделанными без учета процедуры сшивки ([11], рис. 7 и 8), так как изменения подхода не являются существенными по сравнению, например, с альтернативным выбором деформирующего фактора. Однако в связи с адаптацией процедуры сшивки из уравнения NEOS следовало ожидать улучшения согласования наших результатов с предсказаниями

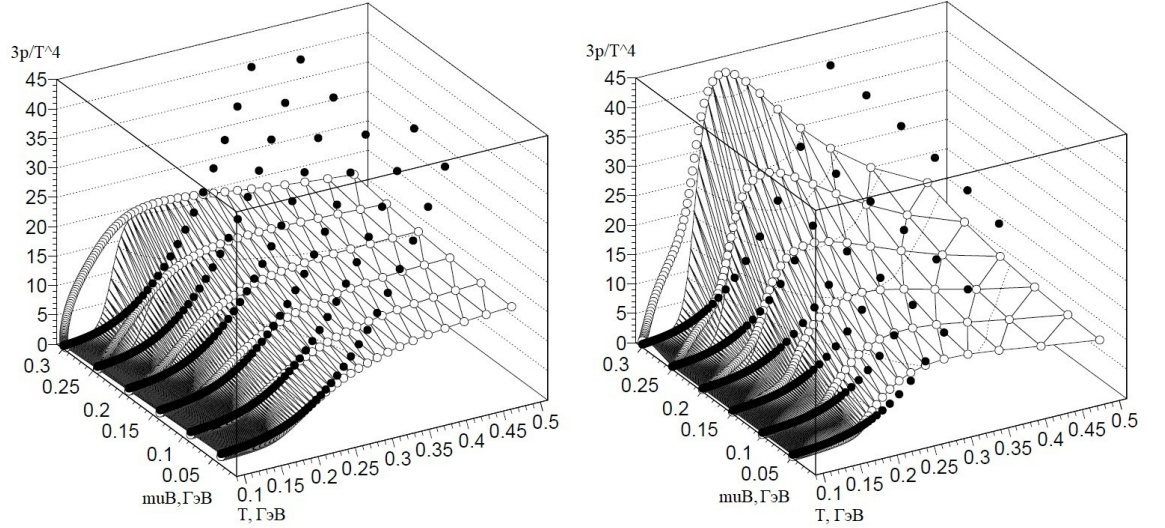


Рис. 2. Результаты сшивки голографического уравнения с уравнением адронного газа для изотропного случая (слева) и анизотропного (справа). Пустым и закрашенным кружком обозначены предсказания голографии и адронного газа соответственно, а черной сетке соответствует результат со сшивкой

гидродинамики для указанного референса, что, действительно, наблюдается в сравнении с предыдущими результатами.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, шифр проекта 103821868.

Конфликт интересов

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. Adams et al. (STAR Collab.)* Experimental and Theoretical Challenges in the Search for the Quark Gluon Plasma: The STAR Collaboration's Critical Assessment of the Evidence from RHIC Collisions // Nucl. Phys. A — 2005. — V. 757, no. 102.
2. *J.-Y. Ollitrault* Relativistic hydrodynamics for heavy-ion collisions // Eur. J. Phys. — 2008. — V. 29, no. 75.
3. *Bazavov A et al. (HotQCD)* Equation of state in (2+1)-flavor QCD // Phys. Rev. D — 2014. — V. 90, no. 094503

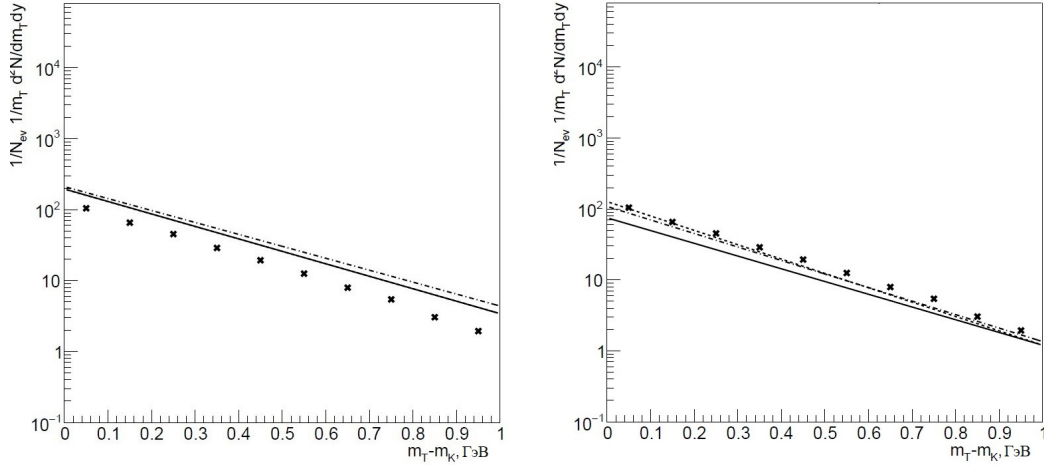


Рис. 3. Результаты расчетов спектров m_T для K^+ в подходе MUSIC-UrQMD (слева) и SMASH-vHLE (справа) с применением уравнения состояния с включенной сшивкой. Сплошная линия соответствует изотропному уравнению состояния, пунктир - анизотропному, штрихпунктир - референсному уравнению (NEOS [24] в случае iEBE-MUSIC, AZ Hydro [26] для SMASH-vHLE). Точки взяты для данных эксперимента NA49 [25]

4. *D. Stephen, D. Reeb* On the sign problem in dense QCD // Int. J. Mod. Phys. A — 2010. — V. 25, no. 53
5. *J. Maldacena* The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity // Adv. Theor. Math. Phys. — 1998. — V. 2, no. 231
6. *J. Erlich, E. Katz, D. T. Son, M. A. Stephanov* QCD and a Holographic Model of Hadrons // Phys. Rev. Lett. — 2005. — V. 95, no. 261602
7. *M. Li, Y. Yang, P. Yang* Approaching Confinement Structure for Light Quarks in a Holographic Soft Wall QCD Model // Phys. Rev. D — 2017. — V. 96, no. 066013
8. *I. Ya. Aref'eva, K. Rannu, P. Slepov* Holographic Anisotropic Model for Light Quarks with Confinement-Deconfinement Phase Transition // JHEP — 2021. — V. 06, no. 090
9. *A. Anufriev, V. Kovalenko* Application of the Holographic Equation of State for Numerical Modeling of the Evolution of Quark-Gluon Plasma // arXiv:2504.20207 [nucl-th] — 2025.
10. *V. Vovchenko, H. Stoecker* Application of the Holographic Equation of State for Numerical Modeling of the Evolution of Quark-Gluon Plasma // Comput. Phys. Commun. — 2019. — 244, pp. 395-310
11. *A. Anufriev, V. Kovalenko* Application of the holographic equations of state for modeling experiments on heavy ion collisions // arXiv:2510.03157 [nucl-th] — 2025.

12. *P. Huovinen, P. Petreczky* QCD Equation of State and Hadron Resonance Gas // Nucl. Phys. A — 2010. — V. 1-2, no. 837
13. *I. Ya. Aref'eva, A. Golubtsova, E. Gourgoulhon* Analytic black branes in Lifshitz-like backgrounds and thermalization // JHEP — 2016. — V. 09, no. 142
14. *X. Chen, M. Huang* Flavor dependent critical endpoint from holographic QCD through machine learning // JHEP — 2025. — V. 02, no. 123
15. *B. Schenke, S. Jeon, C. Gale* 3+1D hydrodynamic simulation of relativistic heavy-ion collisions // Phys. Rev. C — 2010. — V. 82, no. 014903
16. *A. Schäfer, I. Karpenko* Particle production in a hybrid approach for a beam energy scan of Au+Au/Pb+Pb collisions between $\sqrt{s_{NN}} = 4.3$ GeV and $\sqrt{s_{NN}} = 200.0$ GeV // Eur. Phys. J. A — 2022. — V. 58, no. 230
17. *C. Shen and B. Schenke* Dynamical initial state model for relativistic heavy-ion collisions // Phys. Rev. C. — 2018. — V. 97, no. 024907
18. *J. Weil, V. Steinberg, J. Staudenmaier et al.* Particle production and equilibrium properties within a new hadron transport approach for heavy-ion collisions // Phys. Rev. C. — 2016. — V. 94, no. 054905
19. *C. Shen, Z. Qiu et al.* The iEBE-VISHNU code package for relativistic heavy-ion collisions // Comput. Phys. Commun. — 2016. — V. 61, no. 199
20. *I. Karpenko et al.* Estimation of the shear viscosity at finite net-baryon density from $A+A$ collision data at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 200$ GeV // Phys. Rev. C — 2015. — V. 91, no. 064901
21. *S. A. Bass et al.* Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions // Prog. Part. Nucl. Phys. — 1998. — V. 41, p. 255
22. *F. Cooper, G. Frye* Single-particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production // Phys. Rev. D — 1974. — V. 10, no. 186
23. *M. Cheng et al.* QCD equation of state with almost physical quark masses // Phys. Rev. D — 2008. — V. 77, no. 014511
24. *A. Monnai, B. Schenke, C. Shen* Equation of state at finite densities for QCD matter in nuclear collisions // Phys. Rev. C — 2019. — V. 100, no. 024907
25. *S. Afanasiev et al. (NA49 Collaboration)* Energy Dependence of Pion and Kaon Production in Central Pb+Pb Collisions // Phys. Rev. C — 2002. — V. 66, no. 054902

26. *M. He, R. J. Fries, R. Rapp* Ideal hydrodynamics for bulk and multi-strange hadrons in $\sqrt{s_{NN}} = 200A$ GeV Au-Au collisions // Phys. Rev. C — 2012. — V. 85, no. 044911