

К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 533.6; 533.95; 523.62–1/-8
MSC 76-02; 78A35

Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ. Ч. 2. Моделирование процессов в плазме*

Е. К. Колесников, А. Б. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ. Ч. 2. Моделирование процессов в плазме // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 2. С. 203–227. EDN TNVXDQ

В статье дан обзор работ сотрудников кафедры и лаборатории физической механики СПбГУ с момента ее основания в 1986 г. и до 2024 г. включительно, посвященных моделированию неравновесных процессов в плазме. Основное внимание уделено нескольким важнейшим результатам: 1) расчет аэродинамических характеристик тел, движущихся в разреженной плазме; 2) моделирование процесса зарядки тел в космической плазме; 3) разработка методов описания динамики электронных пучков в космической плазме. Дано описание методов расчета аэродинамических характеристик тел как без учета собственного магнитного поля, так и при его наличии. Показано, что для описания процесса зарядки цилиндрического тела в космической плазме при учете внешнего магнитного поля можно использовать и аналитические методы. Другие результаты изложены достаточно кратко.

Ключевые слова: моделирование, неравновесный процесс, разреженная плазма, электризация тел в плазме, активные эксперименты, электронный пучок.

*Первую часть статьи см.: Морозов В. А., Хантулева Т. А., Яковлев А. Б. Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ. Ч. 1. Моделирование процессов в газе, жидкости и твердом теле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 419–454. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.302>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

1. Расчет аэродинамических характеристик тел, движущихся в разреженной плазме. Развитие космической техники и возникшие при этом проблемы поставили перед исследователями задачи изучения движения космического аппарата (КА) в плазме и влияния космической плазмы и наводимого на поверхности тела электрического заряда на распространение электромагнитных волн. В конце 60-х — начале 70-х гг. XX в. появилось много работ, посвященных решению этих задач [1–5]. Активное участие в этих исследованиях приняли и сотрудники кафедры и лаборатории физической механики [6–12]. Расчет аэродинамических характеристик при движении в плазме оказался значительно сложнее, чем для случая обтекания тел газом из нейтральных частиц, который рассмотрен в первой части обзора [13]. Его можно охарактеризовать следующими специфическими особенностями.

1. Силовое взаимодействие тела с потоком плазмы происходит не только при непосредственном столкновении частиц с поверхностью, но и через электромагнитное поле, порождаемое присутствием тела. Поэтому при вычислении аэродинамических коэффициентов законы об изменении импульса и момента импульса системы в общем случае необходимо записывать не на границе тела, а на границе области возмущения.

2. Значения напряженности электрического \mathbf{E} и индукции магнитного \mathbf{B} полей в области возмущения зависят от параметров плазмы в этой области.

3. Механизмы взаимодействия заряженных частиц с поверхностью существенно отличаются от механизмов взаимодействия нейтральных частиц.

1.1. Расчет без учета собственного магнитного поля. Так как длины свободного пробега частиц для рассматривавшихся условий намного превышают размеры тел, основными уравнениями, описывающими эволюцию плазмы возмущенной области в условиях свободномолекулярного обтекания, являются уравнения Власова [14] для одночастичных функций распределения f_k для всех компонент (1) совместно с уравнениями Максвелла (2), в которых плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} определяются через функции распределения частиц (3):

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f_k + \frac{q_k}{m_k} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \nabla_{\mathbf{v}} f_k = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), & \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_k d\mathbf{v} \quad \rho = \sum_k q_k \int f_k d\mathbf{v}. \quad (3)$$

Здесь индекс k принимает одно из значений: e — электрон или i_j — один из сортов ионов; q_k и \mathbf{v} — электрический заряд и масса соответствующей частицы, \mathbf{E} и \mathbf{B} — напряженность электрического и индукция магнитного поля; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Система уравнений (1)–(2) дополняется граничными условиями для набегающего потока (4), граничными условиями для функции распределения на поверхности тела (5) с помощью вероятностных функций T_j^k , характеризующих результат взаимодействия заряженных частиц с поверхностью, граничными условиями для \mathbf{E} и \mathbf{B} , а также для стационарных задач с условиями постоянства

заряда диэлектрической (6) и проводящей (7) поверхностей:

$$f_k|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow n_\infty \left(\frac{m_k}{2\pi k_B T_k} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_k}{2k_B T_k} (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 \right] + f_k^{high}, \quad (4)$$

$$f_k(\mathbf{r}_S, \mathbf{v}, t)|_{v_n > 0} = \frac{1}{|v_n|} \sum_j \int |u_n| f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) T_j^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u}, \quad (5)$$

$$\sum_k \int |v_n| q_k f_k d\mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

$$\sum_k \iint_S |v_n| q_k f_k d\mathbf{v} ds = 0. \quad (7)$$

Здесь f_k^{high} — функции распределения высокоэнергетичных частиц. На больших высотах существенное влияние на процесс электризации поверхности тела может оказывать фотоэмиссия электронов. В общем виде решение системы уравнений (1)–(3) очень сложное и не может быть доведено до конца.

Для анализа движения тел, обладающих собственными электрическими полями, в [7] введены следующие параметры: ε_k — средняя энергия, $u_{mean,k}$ — средняя тепловая скорость, ρ_k — средний ларморовский радиус для k -й компоненты плазмы, \mathbf{V} — скорость тела, φ_0 — потенциал поверхности (одинаковый для всех точек металлического тела), R — характерный размер тела, D — радиус Дебая.

В большинстве интересных для аэродинамики тел в космической плазме задач возможны следующие упрощения [6, 7]:

1. Линейный размер D области, в которой возмущения концентрации электронов порядка единицы и значения потенциала $\sim \varphi_0$ много меньше R ,

$$\frac{D}{R} \ll 1. \quad (8)$$

2. Так как

$$\frac{\rho_i}{R} \gg 1 \quad (9)$$

в областях с размером $\sim R$, влиянием магнитного поля на движение ионов можно пренебречь.

Из пунктов 1 и 2 следует, что для больших тел, не обладающих сильным собственным магнитным полем, влиянием магнитного поля на движение ионов и, следовательно, на аэродинамические характеристики можно пренебречь.

3. Электроны движутся по магнитным силовым линиям в соответствии с дрейфовым приближением.

4. Средняя тепловая скорость электронов много больше скорости тела, поэтому для больших тел вклад электронов в аэродинамические характеристики осуществляется в основном через потенциал поверхности.

5. В областях с малым значением

$$\frac{|e\varphi|}{k_B T_e} \frac{V}{u_{mean,e}}$$

приближенным решением кинетического уравнения для электронной компоненты является функция [7]

$$f_e = f_{e\infty} \exp\left(-\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right),$$

где $f_{e\infty}$ — функция распределения электронов на бесконечности; k_B — постоянная Больцмана.

Все эти условия выполняются при рассмотрении движения тел при умеренных потенциалах на их поверхности ($e\varphi_0 \sim 1 - 20$ эВ). В этом случае можно также не учитывать влияние f_k^{high} .

В работе [15] рассмотрен вопрос о механизме взаимодействия положительно заряженных ионов с металлическими поверхностями. Показано, что для газов с большими потенциалами ионизации (O, N, He, H) ионы с вероятностью, близкой к единице, нейтрализуются на расстояниях в несколько атомных радиусов от поверхности. Причем механизм нейтрализации зависит только от потенциала ионизации и почти не зависит от кинетической энергии ионов. Средний выход образующихся при нейтрализации вторичных электронов составляет 0,1 на один ион. Таким образом, с решеткой тела сталкивается уже нейтрализовавшаяся частица, скорость которой равна скорости иона в момент нейтрализации, и для T_j^k можно использовать модели, применяемые для нейтральных частиц [7]. Вторичными электронами в первом приближении можно пренебречь.

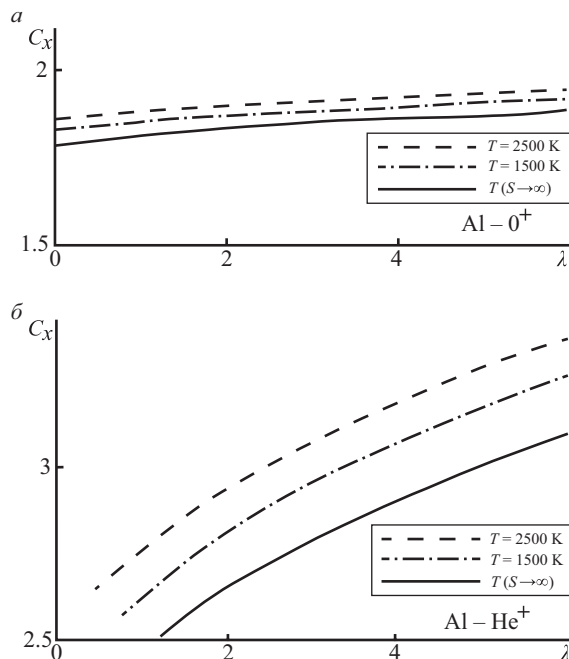
При расчете аэродинамических характеристик тел в плазменном потоке в [6, 7] учитывалось воздействие нейтрализованных ионов в результате непосредственного столкновения с поверхностью и ионов через электрическое поле до их нейтрализации.

Для умеренных потенциалов в [7] построена упрощенная методика расчета для больших осесимметричных тел (пластина, конус, сфера, цилиндр), основанная на предположениях об основном вкладе нейтрализовавшихся ионов, соударяющихся со скоростями $V \gg u_{mean,k}$ с передней частью поверхности тела, и тонкости слоя в области сгущения, в котором влияние электрического поля на подлетающие к телу ионы существенно (так называемое приближение тонкого плоского слоя). Такой подход позволил получить формулы для коэффициентов нормального и касательного импульса в виде асимптотических представлений по малым параметрам, а также справедливые в предельном случае $s = \sqrt{\frac{m_i V^2}{2\varepsilon_i}} \rightarrow \infty$ выражения для аэродинамических коэффициентов сопротивления C_x и C_y и момента C_m . Проведены расчеты аэродинамических коэффициентов для различных сочетаний атомов решетки и ионов набегающего потока и видов осесимметричных тел. В качестве примера на рисунке приведены зависимости C_x от потенциала поверхности через величину $\lambda = e_i(\varphi_0 + \chi_i)$ для алюминиевой сферы и двух видов ионов.

Результаты численных расчетов показали следующее:

- 1) с уменьшением массы ионов аэродинамические коэффициенты увеличиваются в полтора-два раза и возрастает влияние поля;
- 2) с увеличением массы атомов поверхностей аэродинамические коэффициенты увеличиваются;
- 3) вклад от тепловых скоростей в аэродинамические коэффициенты относительно невелик, поэтому использованная методика корректна.

Изложенная процедура предполагает пренебрежение влиянием немонотонности потенциала на границы области возможных скоростей. Задача о существова-



Зависимости C_x от λ для пар алюминий — ион водорода (а) и алюминий — ион гелия (б).

нии немонотонного потенциала в окрестности заряженной сферы, покоящейся в бесстолкновительной плазме, рассмотрена в работе [16].

Наличие у тела очень высокого потенциала ($e\varphi_0 \sim 1$ кэВ — 1 МэВ) может возникнуть при проведении некоторых активных экспериментов в космосе, например при инжекции электронного пучка с борта космического аппарата. Так как время нейтрализации КА может превышать несколько минут, то область возмущения в этом случае уже не является узкой, а захватывает протяженные области, намного превышающие характерные размеры тела. Таким образом, вклад в аэродинамические характеристики будут вносить не только частицы, непосредственно соударяющиеся с телом, но и частицы, взаимодействующие с ним через электромагнитное поле. В [8] получено следующее выражение для силы электродинамического торможения медленно движущейся сферы радиуса R_0 с высоким потенциалом в бесстолкновительной плазме:

$$F_{br} = \frac{8\sqrt{\pi}}{3} N_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right\} \frac{1}{(k_B T)^2 m_i} \times \\ \times \int_{\psi} \varepsilon \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{k_B T} \right\} d\varepsilon \cdot \int_F \sin^2 \left(\frac{\pi - C^-}{2} \right) dM^2. \quad (10)$$

Здесь $\varepsilon_0 = (m_i V^2)/2$, ψ — область интегрирования по энергии; F — область интегрирования по квадрату момента количества движения; C^- — определяемый в ходе решения угол, зависящий от размеров области возмущения; N_0 — концентрация

плазмы. Формула (10) справедлива при выполнении следующих предположений:

$$\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \ll 1, \quad R_0 \ll D, \quad \frac{e\varphi_0}{k_B T} \gg 1, \quad \frac{e\varphi_0}{k_B T} \left(\frac{R_0}{D} \right)^8 \ll 1.$$

1.2. Расчет при наличии собственного магнитного поля. При наличии у тела собственного магнитного поля характер его обтекания плазмой существенно меняется [12]. Внешнее магнитное поле не меняет функции распределения в набегающем потоке, а влияет только на характер геометрического затенения [7]. Собственное магнитное поле возмущает распределение по скоростям в набегающем потоке. Для решения задачи обтекания напряженность собственного магнитного поля в окрестности тела представлялась в виде разложения по сферическим функциям. При этом первый член разложения имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{M}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}, \quad (11)$$

который представляет поле магнитного диполя с магнитным моментом \mathbf{M} . В [7, 9–11] решение задачи обтекания рассматривается для поля магнитного диполя и без учета индуцированных потоком электрических и магнитных полей. В задачах с собственным магнитным полем появляется дополнительный безразмерный параметр $R' = R/C_{st}$, который характеризует величину магнитного поля. Здесь C_{st} — штермеровская единица длины [17].

В случае слабого магнитного поля ($R' \gg 1$) при решении уравнений движения, что необходимо для расчета аэродинамических характеристик, в [7, 11] использовалась методика С. А. Богуславского [18]. Такой подход позволил в случае $s \rightarrow \infty$ получить достаточно простые формулы для компонентов сил и моментов, действующих на тело, записанные через R' и безразмерные прицельные параметры.

Также в [11] разработана численная методика расчета аэродинамических характеристик, основанная на учете только ионных потоков, которая достаточно эффективна для слабых и умеренных ($R' \sim 1$) магнитных полей. Основными трудностями, которые необходимо было преодолеть при ее реализации, были высокая кратность используемых интегралов, необходимость предварительного расчета ряда параметров на основе решения дифференциальных уравнений движения и зависимость областей интегрирования от конкретных условий задачи. Первая трудность была преодолена с помощью метода Монте-Карло, специфические особенности применения которого к рассматриваемой задаче свелись к следующему.

В качестве плотности вероятностей случайной величины бралась максвелловская функция распределения со сдвигом.

При выборе областей распределения прицельных параметров заранее учитывались запрещенные области, подробный анализ которых проведен в [17]. Само распределение по ячейкам прицельных параметров бралось равномерным.

Для большей эффективности в пространстве прицельных параметров использовалась выборка специального вида [7].

В случае сильного магнитного поля ($R' \ll 1$) развитая в [11] численная методика достаточно эффективна только при условии, если радиус кривизны траектории не меньше масштабов неоднородности магнитного поля и не слишком мал по сравнению с размерами движущегося тела. В области сильного магнитного поля траекторные численные методы расчета аэродинамических характеристик трудоемки

и неэффективны. Поэтому в [7] предложено разделять всю область возмущения на подобласти умеренного и сильного магнитных полей. В подобласти сильного магнитного поля предложено использовать дрейфовые траекторные характеристики и развивать аналитические и численные методы, основанные на дрейфовом приближении. Показано, что областью сильного поля, внутри которой можно пользоваться дрейфовым приближением, является сфера с безразмерным штермеровским радиусом $r' \ll 0.18$. Обозначим через Γ границу раздела между подобластями сильного и умеренного поля. В подобласти умеренного поля по описанной выше методике производился расчет всех потоков и аэродинамических характеристик, за которые ответственны частицы, не попадающие на Γ ; по этой же методике рассчитываются функции распределения на Γ для входящих в область сильного поля частиц. Далее осуществлялся переход на Γ к функции распределения от дрейфовых переменных, которая затем интегрировалась по фазовому углу. В результате определяется искомое представление функции распределения $f_{\Gamma}(\mathbf{R}, v_{\parallel}, v_{\perp})$. Если обозначить через d/dt производную вдоль дрейфовой траектории, то кинетическое уравнение для $f(\mathbf{R}, v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$, описывающее дрейфовую эволюцию заряженных частиц без столкновений в магнитном поле, может быть записано в следующем виде:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}v_{\parallel} \operatorname{div} \mathbf{h} f, \quad (12)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{V}/B$. Если известны решения дрейфовых уравнений движения, то решение уравнения (12) можно записать через начальную или граничную функцию распределения. Таким образом, принципиально постановка задачи определения функций распределения для сильного поля сводится к постановке для умеренного поля [7]. Эти исследования были продолжены в [19–22].

2. Моделирование процесса зарядки тел в космической плазме, в том числе при проведении активных экспериментов. Как показано в пункте 1, электризация космических аппаратов может оказывать существенное влияние на их аэродинамические характеристики. Поэтому моделирование процесса зарядки и разработка методов расчета распределения потенциала вблизи КА стало со временем самостоятельным направлением исследований на кафедре и в лаборатории физической механики.

Находящиеся в космической плазме объекты приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы и степени освещенности Солнцем и, следовательно, от положения и ориентации тела в процессе движения. Для расчета токов частиц плазмы, текущих на тело, находящееся под некоторым потенциалом относительно плазмы, необходимо знать распределение потенциала и концентрации всех компонентов в возмущенной зоне вблизи тела. Для тела произвольной формы точно теоретически рассчитать его потенциал вряд ли возможно из-за сложности как геометрической, так и электрической структур поверхности тела и отсутствии ряда исходных данных о взаимодействии вещества, из которого оно состоит с набегающими потоками и падающим на него излучением [5]. Поэтому обычно используются различные предположения, упрощающие формулировку и решение задачи.

Равновесное распределение концентрации заряженных частиц, описываемое формулой Максвелла — Больцмана, нарушается в возмущенной зоне из-за поглощающего действия тела. Также искажается и распределение потенциала внутри дебаевской сферы. Эти эффекты существенно зависят от соотношения размеров тела,

радиуса Дебая и длины свободного пробега частиц. Длина свободного пробега нейтральных и заряженных частиц в ионосфере на высоте 300 км составляет несколько километров и быстро растет с увеличением высоты. Таким образом, для всех интересных орбит КА длина свободного пробега частиц значительно превышает характерный размер космических аппаратов ($R \sim 10$ м) и для описания взаимодействия ИСЗ с космической плазмой практически всегда применима кинетическая теория. При описании движения заряженных частиц в возмущенной зоне выделяют два предельных случая: тонкого экранирующего слоя ($R \gg D$) и толстого экранирующего слоя ($R \ll D$). В условиях околоземного космического пространства (ОКП) первый случай реализуется в ионосфере, а второй — характерен для геостационарной орбиты [23].

Все модели, рассматриваемые для описания электризации КА в космической плазме, можно классифицировать по следующим используемым предположениям (моделям): 1) учитывается или нет влияние на процесс электризации геомагнитного поля, 2) потенциал поверхности тела является малым или большим, 3) какова форма тела, используемого для моделирования реального КА. С развитием космической техники и увеличением размеров космических станций произошел естественный переход от рассмотрения в качестве модели КА сферического тела [16, 24, 25] к цилиндрическому [26–29] и комбинации нескольких элементов [30].

2.1. Моделирование процесса зарядки КА при инжекции пучка. Особый интерес к задачам электризации был связан с проведением активных экспериментов с инжекцией пучков заряженных частиц в ОКП [24, 25, 27–29]. В работе [24] на основе существующей симметрии задачи с использованием законов сохранения обобщенного импульса и энергии получена оценка снизу высокого равновесного положительного потенциала находящейся во внешнем магнитном поле сферы, которая инжектирует электронный поток, при релятивистских скоростях нейтрализующего потока. Как показано в [1], в случае высокого потенциала без учета влияния магнитного поля область вблизи тела следует разделить на три зоны: зону пространственного заряда, двойной слой и зону квазинейтральности. В [26] данный подход применен для определения электрического поля и возмущения концентрации частиц плазмы в окрестности заряженного до высокого потенциала цилиндра, находящегося в магнитном поле специального вида.

В связи со сложностью задачи о временной эволюции возникающих вблизи КА при инжекции пучков заряженных частиц плазменных колебаний основным методом ее решения является численное моделирование. В [27] рассмотрена задача об эволюции плазменных колебаний в окрестности бесконечного неподвижного цилиндра радиуса R_0 при заданной скорости стока отрицательного заряда с единицы поверхности $I(t)$. При условии пренебрежения влиянием внешнего магнитного поля и магнитных полей, инжектируемых с поверхности цилиндра частиц на процесс нейтрализации заряда на теле окружающей бесстолкновительной плазмой с электронной температурой T_e , задача сводится к системе уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_R}{\partial t} &= -\frac{2}{R}I(t, R) + 4\pi en_e v_{eR}, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial R n_e v_{eR}}{\partial R} &= 0, \\ \frac{\partial n_e v_{eR}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial R n_e v_{eR}^2}{\partial R} &= -\frac{en_e}{m_e} E_R - \frac{k_B T_e}{m_e} \frac{\partial n_e}{\partial R},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} &= -\frac{I(t)}{2\pi R_0} - \beta e n_e(R_0 + 0, t) v_{eR}(R_0 + 0, t), \\ E_R(R_0, t) &= 4\pi\sigma(t)\end{aligned}\quad (13)$$

относительно радиальной составляющей электрического поля E_R , плотности n_e и радиальной скорости v_{eR} электронов плазмы и плотности заряда на поверхности цилиндра $\sigma(t)$. Здесь e — заряд протона; m_e — масса электрона; β — константа, принимающая значение 0 или 1 в зависимости от направления v_{eR} на поверхности цилиндра. В [27] рассмотрено два способа сброса заряда: радиальный сброс с цилиндрической поверхности и сброс с торцов параллельно цилиндрической поверхности. Проведенные на основе системы (13) численные расчеты показали, что 1) существует временная задержка начала затухающих колебаний, пропорциональная расстоянию до поверхности цилиндра, 2) для используемых при расчетах параметров, типичных для проводимых активных экспериментов, не происходит запираания пучка наведенным на поверхности тела электрическим полем и время затухания колебаний существенно меньше длительности импульса.

Однако, как показано в [28, 29], для описания процесса зарядки цилиндрического тела в космической плазме при учете внешнего магнитного поля можно использовать и аналитические методы. В этих работах рассмотрена задача определения величины электрического заряда на единицу длины q , индуцированного на поверхности бесконечного цилиндра радиуса R_0 , который расположен перпендикулярно однородному магнитному полю \mathbf{B} , при заданном стоке отрицательного заряда с его поверхности. В случае высоковольтного положительного потенциала цилиндра поступающий на тело ток увеличивается за счет дрейфа электронов поперек силовых линий магнитного поля под действием трансверсальной электрической силы и дифференциальное уравнение для определения траектории ведущего центра имеет следующий вид:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{z}} = \alpha \frac{\tilde{x}\tilde{z}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2)^2}. \quad (14)$$

Здесь $\tilde{x} = x/R_0$, $\tilde{z} = z/R_0$, x и z — координаты прямоугольной системы, z вдоль магнитного поля, x перпендикулярно оси цилиндра; $\alpha = 2q|e|/(m_e\omega^2 R_0^2)$, ω — циклотронная частота. Уравнение (14) имеет аналитическое решение через функции Бесселя:

$$\frac{1}{\tilde{z}} = C_1 J_0 \left(\sqrt{\frac{4}{\alpha}} \tilde{x} \right) + C_2 Y_0 \left(\sqrt{\frac{4}{\alpha}} \tilde{x} \right). \quad (15)$$

Константы в (15) определяются из граничных условий. Если приравнять правую часть (15) к нулю, то решение получившегося уравнения $\tilde{x}|_{\tilde{z}=\infty}$ равно отношению заданного тока к току, приходящему на единицу длины цилиндра в отсутствие электрического поля, I/I_0 . Следовательно, задавая I_0 , можно определить величину q . Таким образом полученное в [28, 29] решение долгое время оставалось единственным аналитическим решением задачи зарядки КА при учете внешнего магнитного поля [31].

Результаты проведенных численных экспериментов показали, что инжектируемый в ОКП пучок заряженных частиц может через определенное время вернуться в окрестность КА, поэтому возникла необходимость исследовать взаимодействие пучка с поверхностью космического аппарата. В [32] построена математическая модель взаимодействия полностью компенсированного по заряду пучка заряженных частиц

в плазменном канале с плоской поверхностью, позволяющая учитывать неидеальную проводимость поверхности и влияние формы траектории пучка на силу взаимодействия. Результаты проведенных расчетов показали значительно лучшее соответствие с экспериментальными данными по сравнению с ранее используемыми моделями.

Отдельным направлением исследований процесса электризации КА в космической плазме стало изучение указанного процесса для пленочных конструкций [33–40]. В конце XX в. возник интерес к использованию ресурсов ОКП для энергообеспечения Земли и КА различного назначения. В [33] рассмотрена принципиальная возможность создания высоковольтного электрогенератора, преобразующего в электрическую энергию кинетическую энергию потоков заряженных частиц естественного происхождения в радиационных поясах Земли. Проведена теоретическая оценка максимальной удельной мощности генератора для конкретных случаев его размещения в ОКП. В дополнение к ранее опубликованным результатам в [34] рассмотрена возможность размещения указанного устройства в приполярной области ионосферы. Показано, что КПД генератора в этой области и в области доминирования потока протонов естественных радиационных поясов Земли одного порядка. Результаты этих работ могут быть использованы при создании принципиально новых систем энергообеспечения космических аппаратов.

Развитие космических исследований, особенно при осуществлении дальних полетов в Солнечной системе и за ее границами, потребовало исследования возможностей использования альтернативных двигательных систем. В литературе активно обсуждается применение для таких целей предложенного Ф. А. Цандером солнечного паруса. Важным направлением исследования возможности использования КА с солнечным парусом является изучение влияния различных факторов космического пространства на работоспособность указанных космических аппаратов. В [35–38] предложена методика расчета плотности электрического заряда на поверхности паруса и исследовано влияние наведенного поверхностного заряда на динамику КА при его движении по цандеровской траектории. Показано, что для перелетов Земля — Марс и Земля — Юпитер влиянием заряда можно пренебречь, если в процессе перелета форма паруса не изменяется. В связи с этим в [39, 40] построена модель деформирования паруса под влиянием наведенного на его поверхности электрического заряда и проведен расчет для конкретных параметров солнечного паруса круглой формы. Показано, что наведенный на поверхности паруса электрический заряд может привести к изменению эффективной площади поверхности паруса.

3. Динамика электронных пучков в космической плазме. Возникновение этого направления было обусловлено необходимостью проведения фундаментальных исследований, направленных на определение возможности создания перспективных космических корпускулярно-пучковых систем различного назначения, основанных на использовании электронных пучков. Примерами таких систем являются корпускулярно-пучковые системы дистанционного элементного анализа поверхностных пород безатмосферных небесных тел [41, 42], корпускулярно-пучковые системы очистки ближнего космоса от мелкомасштабного космического мусора [43] и др.

3.1. Разработка основ кинетической теории транспортировки электронных пучков в космической плазме. Вследствие сильной неравновесности процесса транспортировки в общем случае релятивистских электронных пуч-

ков (РЭП) в разреженной плазменной оболочке Земли и других небесных тел, а также определяющего влияния, которое оказывает на этот процесс коллективное электромагнитное поле, возбуждаемое зарядами и токами частиц пучка и плазмы, естественной методологической основой для построения математических моделей транспортировки РЭП в космической плазме является аппарат кинетических уравнений Власова — Больцмана с самосогласованным полем и следующих из них уравнений для моментов функции распределения частиц пучка и фазовых средних. В общем случае указанные модели, наряду с самосогласованным полем, должны учитывать воздействие на электроны пучка внешних магнитного и электрического полей естественного происхождения, а также электрического поля, индуцируемого в окрестности инжектирующего пучок космического аппарата.

Показано [44], что в представляющем основной практический интерес приближении осесимметричного параксиального пучка (когда поперечная оси симметрии пучка z составляющая скорости частиц v_\perp много меньше продольной компоненты v_\parallel), поперечная динамика частиц пучка в произвольных поперечных сегментах S^τ , каждый из которых инжектируется в момент времени $t = \tau$ и содержит фиксированное число частиц, описывается кинетическим уравнением для функции распределения частиц сегмента $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ по поперечным координатам \mathbf{r}_\perp и импульсам \mathbf{p}_\perp :

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m} \cdot \nabla_\perp f^\tau + [e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z] \cdot \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = \frac{m\gamma S}{2} \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau, \quad (16)$$

где $\mathbf{p}_\perp = m\gamma \mathbf{v}_\perp$ — поперечная компонента релятивистского импульса электрона пучка, γ — лоренц-фактор, \mathbf{v}_\perp — поперечная составляющая скорости электрона; $\beta = v/c$, $\Omega_b = |e|B_0/(m\gamma c)$ — гирочастота частиц пучка во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$; постоянная $\mu = 1 - (1 - \alpha_c)^2/\beta^2(1 - \alpha_m)$ (коэффициенты α_c и α_m — коэффициенты зарядовой и токовой нейтрализации пучка); S — величина, характеризующая среднюю скорость изменения кинетической энергии поперечного движения частиц пучка в результате многократного рассеяния в столкновениях с частицами фоновой среды. Интеграл столкновений в правой части уравнения (16) является частным случаем интеграла столкновений Фоккера — Планка для изотропного и упругого рассеяния. Величины $\varphi_0(r)$ и A_z представляют собой соответственно скалярный потенциал ионного остова плазмы (при распространении пучка в режиме ионной фокусировки) и z -компоненту векторного потенциала коллективного магнитного поля системы плазма — пучок. В приближении квазистационарного параксиального пучка [44] потенциал A_z удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta_\perp A_z = -\frac{4\pi}{c}(1 - \alpha_m)J_{bz}, \quad (17)$$

где $J_{bz} = \chi I_b$ — плотность пучка, I_b — полный ток пучка, а функция $\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau d\mathbf{p}_\perp$ характеризует радиальный профиль плотности пучка в сегменте S_τ . Отметим, что кинетическое уравнение (16) обобщает известное кинетическое уравнение Э.Ли [45] при наличии продольного внешнего магнитного поля и электрического поля ионного остова плазмы.

3.2. Моделирование поперечной динамики параксиального пучка.

В работе [46] в результате интегрирования уравнения (16), умноженного на 1, \mathbf{p} и p^2 по пространству поперечных импульсов, получены уравнения переноса для основных макроскопических характеристик пучка: средней плотности частиц, среднего

импульса $\widehat{\mathbf{p}}_{\perp}$ и средней кинетической энергии поперечного движения частиц пучка $\chi p_{\perp}^2/2m\gamma$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \left(\chi \frac{\widehat{\mathbf{p}}_{\perp}}{m\gamma} \right) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \chi \widehat{\mathbf{p}}_{\perp}}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \left(\chi \frac{\widehat{\mathbf{p}}_{\perp} \widehat{\mathbf{p}}_{\perp}}{m\gamma} \right) + e\chi \nabla_{\perp} (\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \chi \Omega_b (\mathbf{i}_z \times \widehat{\mathbf{p}}_{\perp}) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\chi \frac{\widehat{\mathbf{p}}_{\perp}^2}{2m\gamma} \right) = -\nabla_{\perp} \cdot \left(\chi \frac{\widehat{\mathbf{p}}_{\perp} p_{\perp}^2}{2m^2\gamma^2} \right) - \frac{e\chi \widehat{\mathbf{p}}_{\perp}}{m\gamma} \cdot \nabla_{\perp} (\varphi_0 - \beta\mu A_z) - \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \chi \frac{\widehat{\mathbf{p}}_{\perp}^2}{2m\gamma} + \chi S, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \chi \widehat{\mathbf{p}}_{\perp} &= \int f^{\tau} \mathbf{p}_{\perp} d\mathbf{p}_{\perp} & \chi \widehat{\mathbf{p}}_{\perp} \widehat{\mathbf{p}}_{\perp} &= \int f^{\tau} p_{\perp} \mathbf{p}_{\perp} d\mathbf{p}_{\perp}, \\ \chi \widehat{\mathbf{p}}_{\perp}^2 &= \int f^{\tau} p_{\perp}^2 d\mathbf{p}_{\perp} & \chi \widehat{\mathbf{p}}_{\perp}^2 \widehat{\mathbf{p}}_{\perp} &= \int f^{\tau} p_{\perp}^2 \mathbf{p}_{\perp} d\mathbf{p}_{\perp}. \end{aligned}$$

В [46] показано, что посредством усреднения по пространству поперечных координат в случае осесимметричного пучка из уравнений переноса (18)–(19) могут быть получены интеграл среднего обобщенного углового момента:

$$P_{\theta} = L + \frac{\Omega_b m\gamma}{4} \text{Re}^2 = \text{const} \quad (21)$$

и уравнение вириала:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\gamma}{8} \frac{d\text{Re}^2}{dt} \right) = E_{\perp} - e^2 \left(\frac{\kappa \beta^2 N_b}{2} + \overline{N_{\Phi}} \right) + \frac{\Omega_b L}{2}, \quad (22)$$

где $L = \int \chi r \widehat{\mathbf{p}}_{\theta} d\mathbf{r}_{\perp}$ — средний угловой момент частицы пучка в рассматриваемом сегменте; $E_{\perp} = \int \chi p_{\perp}^2 / (2m\gamma) d\mathbf{r}_{\perp}$ — средняя кинетическая энергия поперечного движения частиц пучка в сегменте S^{τ} ; $\kappa = (1 - \alpha_m)\mu$; $T_B = e\beta J_b / 2c$ — так называемая температура Беннета. Величина $\overline{N_{\Phi}(r)} = \int \chi(r) N_{\Phi}(r) d\mathbf{r}_{\perp}$, где $N_{\Phi}(r)$ — линейная плотность ионов в трубке радиуса r . Наконец, $\text{Re}^2 = 2 \int \chi r^2 d\mathbf{r}_{\perp}$ — квадрат среднеквадратичного радиуса пучка в сегменте S^{τ} .

В случае $d\text{Re}^2/dt \equiv 0$ из (22) следует необходимое условие динамического равновесия рассматриваемого сегмента пучка:

$$E_{\perp} = \kappa T_B + e^2 \overline{N_{\Phi}} - \frac{\Omega_b L}{2}, \quad (23)$$

обобщающее известное условие динамического равновесия Беннета [47, 48] при наличии внешнего продольного магнитного поля и фокусирующего электрического поля ионного остова плазмы. В работе [49] с использованием уравнений вириала (22) и интеграла обобщенного углового момента (21) получено уравнение, описывающее временную эволюцию среднеквадратичного радиуса пучка в сегменте S^{τ} :

$$\frac{d^2 \text{Re}}{dt^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\text{Re}}{dt} + \frac{4\kappa T_B}{\gamma m \text{Re}} + \frac{4e^2 \overline{N_{\Phi}(r_{\perp})}}{\gamma m \text{Re}} + \frac{\Omega_b^2 \text{Re}}{4} = \frac{4(E + P_{\theta}^2/m^2)}{\gamma^2 \text{Re}^3}, \quad (24)$$

где $E = \frac{\gamma \text{Re}}{2} \left[\frac{4E_{\perp}}{m\gamma} - \left(\frac{d\text{Re}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{2L}{\gamma m \text{Re}} \right)^2 \right]^{1/2}$ — так называемый среднеквадратичный эмиттанс пучка в рассматриваемом сегменте, временная эволюция которого описывается уравнением

$$E^2 = E_0^2 + \int_{\tau}^t dt' \frac{\gamma \text{Re}^2}{m} \left(-\kappa T_B \frac{d\Gamma}{dt'} - \int e\phi_0 \frac{\partial \chi}{\partial t'} d\mathbf{r}_{\perp} + e^2 \overline{N_{\Phi}(r_{\perp})} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\text{Re}}{R_c} \right)^2 + \int \chi S d\mathbf{r}_{\perp} \right), \quad (25)$$

где E_0 — начальное значение эмиттанса; R_c — заданный радиус экранировки поперечного электромагнитного поля, величина

$$\Gamma = \frac{\Lambda_b}{\kappa T_B} - \ln \left(\frac{\text{Re}}{R_c} \right)^2,$$

$\Lambda_b = -\frac{1}{2} \int \chi e\beta \mu A_z d\mathbf{r}_{\perp}$ — средняя потенциальная энергия частицы пучка в эффективном коллективном электрическом поле $E_{\text{ef}} = -\nabla_{\perp}(-\beta \mu A_z)$.

В работе [50] в предположениях об однородности рассеивающей среды и компенсирующего ионного фона из уравнений (23)–(24) получены уравнения, описывающие временную эволюцию радиуса пучка R_b в фиксированных поперечных сегментах (так называемые уравнения огибающей пучка) в автомоделных режимах транспортировки, в которых в любые моменты времени плотность пучка в произвольных поперечных сегментах зависит от отношения радиальной координаты r к радиусу пучка. Нормированная к единице функция $\chi(r, t)$ в этом случае будет иметь вид

$$\chi(r, t) = \frac{1}{2\pi R_b^2(t)} \Phi(x),$$

где безразмерная координата $x = r/R_b$, а $\Phi(x)$ — независимая от времени заданная функция, удовлетворяющая условию $\int_0^1 x \Phi(x) dx = 1$.

Как следует из уравнения (24), в отсутствие рассеяния ($S = 0$) и однородности компенсирующего ионного фона эмиттанс в сегменте пучка с автомоделным профилем плотности является интегралом движения: $E = E_0$. В этом случае из уравнения (24) может быть получено уравнение огибающей пучка, которое, как в случае пучка малой плотности [51] $n_b \ll n_{\Phi}$ (n_{Φ} — плотность электронов фоновой плазмы), так и в случае пучка большой плотности $n_b \gg n_{\Phi}$ [52], может быть записано в виде

$$\frac{d^2 \xi}{dt'^2} = -\frac{\partial U_{ef}(\xi, \delta, \lambda, \sigma_{\vartheta}, \varepsilon)}{\partial \xi}, \quad (26)$$

где $\xi = R_b/R_{b0}$ — безразмерный радиус пучка, R_{b0} — начальный радиус; t' — безразмерное время, а U_{ef} — скалярный потенциал эффективного поля, описывающего радиальное движение граничных электронов рассматриваемого сегмента пучка. Потенциал U_{ef} зависит от безразмерных постоянных

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\omega_{\Phi 0} \eta_{\Phi}}{\omega_{b0} \beta_0 \sqrt{|\kappa_0|}}, & \lambda &= \frac{\Omega_b \eta_{\Phi}}{\omega_{b0} \beta_0 \sqrt{|\kappa_0|}}, \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{2\Phi(x) \zeta^3 \dot{\theta}_0(x)}{\omega_{b0} \beta_0 \sqrt{|\kappa_0|} \eta_{\Phi}}, & \varepsilon &= \frac{2E_0}{\omega_{b0} \beta_0 \sqrt{|\kappa_0|} \eta_{\Phi} \gamma_0 R_{b0}^2}, \end{aligned}$$

$\omega_{\Phi 0}^2 = 4\pi e^2 n_{\Phi}^0 / (\gamma_0 m)$; $\omega_{b0}^2 = 4\pi e^2 \overline{n_{b0}} / (\gamma_0 m)$, $\overline{n_{b0}} = N_b^0 / (\pi R_{b0}^2)$ — средняя начальная плотность пучка в сегменте S^7 ; κ_0 , γ_0 , N_b^0 , β_0 и n_{Φ}^0 — начальные значения соответствующих величин. Масштаб времени t_0 определяется формулой $t_0 = (\omega_{b0} \beta_0 \sqrt{|\kappa_0|} / n_{\Phi}^0)^{-1}$. Постоянная $\eta_{\Phi} = \left[2 \int_0^1 \Phi(x) x^3 dx \right]^{1/2}$.

В работе [51] определены основные особенности поперечной динамики РЭП малой плотности, распространяющегося в плазме в отсутствие рассеяния. Показано, что в этом случае скалярный потенциал эффективного поля U_{ef} в уравнении (26) определяется выражением

$$U_{ef}(\xi) = \frac{\lambda^2}{8}(\xi^2 - 1) + \frac{1}{2} \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_{\theta} + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \frac{1 - \xi^2}{\xi^2} + \frac{\text{sign}(\kappa) \ln(\xi)}{2}. \quad (27)$$

Заметим, что в рассматриваемом режиме транспортировки параметр $\delta = 0$.

3.3. Основные типы радиальной эволюции пучка. Как следует из выражения (27), для потенциала $U_{ef}(\xi)$, в зависимости от значений параметров κ , λ , ε и σ_{θ} , возможны следующие три основных типа радиальной эволюции пучка: 1) периодические колебания радиуса пучка; 2) неограниченное расширение пучка; 3) режим пинчевания, когда на некотором расстоянии от ускорителя коллективное электромагнитное поле сжимает радиус пучка в точку.

Режим транспортировки, характеризующийся периодическими колебаниями радиуса пучка, реализуется при $\lambda \neq 0$, а также в ситуации $\lambda = 0$, $\kappa > 0$, $\varepsilon^2 + \sigma_{\theta}^2 \neq 0$. В этом случае безразмерный радиус пучка периодически колеблется в некотором промежутке $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ с периодом

$$T = 2 [T_0(\xi_{\max}) + T_0(\xi_{\min})], \quad (28)$$

где $T_0(\xi) = t_0 \left| \int_1^{\xi} \frac{d\xi'}{\sqrt{\Psi(\xi')}} \right|$, $\Psi(\xi) = \sigma_r^2 + \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_{\theta} + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \frac{1 - \xi^2}{\xi^2} + \frac{\lambda^2}{4} (1 - \xi^2) - \text{sign}(\kappa) \ln(\xi)$, $\sigma_r = t_0 \dot{R}_{b0} / R_{b0}$, а ξ_{\min} и ξ_{\max} определяются корнями уравнения

$$\Psi(\xi) = 0. \quad (29)$$

Режим неограниченного расширения пучка имеет место при $\lambda = 0$, $\kappa < 0$. В этом случае радиальное движение граничных частиц пучка является инфинитным и происходит в промежутке $[\xi_{\min}, \infty]$, нижняя граница которого в случае $\dot{R}_{b0} < 0$ определяется корнем уравнения (29), а для $\dot{R}_{b0} > 0$, $\xi_{\min} = 1$. В [51] показано, что в случае «холодного» невращающегося пучка ($\varepsilon = 0$, $\sigma_{\theta} = 0$) решение уравнения огибающей в рассматриваемом случае может быть записано в виде

$$t - \tau = 2t_0 \cdot \begin{cases} \frac{F(\sqrt{-\ln \xi_{\min}})}{\xi_{\min}} \pm \frac{\xi F(\sqrt{\ln \xi / \xi_{\min}})}{\xi_{\min}}, & \xi \leq 1, \quad \dot{R}_{b0} < 0, \\ \frac{F(\sqrt{-\ln \xi_{\min}})}{\xi_{\min}} + \frac{\xi F(\sqrt{\ln \xi / \xi_{\min}})}{\xi_{\min}}, & \xi > 1, \quad \dot{R}_{b0} < 0, \\ \frac{\xi F(\sqrt{\ln \xi / \xi_{\min}})}{\xi_{\min}} - \frac{F(\sqrt{-\ln \xi_{\min}})}{\xi_{\min}}, & \dot{R}_{b0} \geq 0. \end{cases} \quad (30)$$

В (30) $\xi_{\min} = \exp(-\sigma_r^2)$, а $F(y) = \exp(-y^2) \int_0^y \exp(t^2) dt$ — интеграл вероятности от мнимого аргумента. В случае $\dot{R}_{b0} = 0$ (30) принимает вид

$$t - \tau = 2t_0 \xi F(\sqrt{\ln \xi}). \quad (31)$$

С учетом асимптотических свойств функции $F(y)$ из (31) могут быть получены приближенные аналитические выражения для функции $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{R_b}{R_{b0}} = \begin{cases} \exp[(t-\tau)^2/4t_0^2], & \sqrt{\ln \xi} \ll 1, \\ (t-\tau)/t_0, & \sqrt{\ln \xi} \sim 1. \end{cases} \quad (32)$$

Как видно из (32), после выхода из инжектора радиус пучка в сегменте S^τ сначала экспоненциально растет со временем, а затем его рост становится линейным со скоростью $\dot{R}_{b0} = R_{b0}/t_0 = \text{const}$.

Режим пинчевания реализуется при $\kappa > 0$, $\varepsilon = \lambda = \sigma_\theta = 0$. В этом случае для любого значения \dot{R}_{b0} радиальное движение граничной частицы пучка происходит в промежутке $[0, \xi_{\max}]$, верхняя граница которого для $\dot{R}_{b0} > 0$ определяется корнем уравнения (29), а при $\dot{R}_{b0} \leq 0$, $\xi_{\max} = 1$. Решение уравнения огибающей в этом случае может быть записано в виде

$$t - \tau = \sqrt{\pi} t_0 \times \begin{cases} \varphi(\sqrt{\ln \xi_{\max}}) \mp \varphi\left(\sqrt{\ln \frac{\xi_{\max}}{\xi}}\right), & \xi \geq 1, \quad \dot{R}_{b0} > 0, \\ \varphi(\sqrt{\ln \xi_{\max}}) + \varphi\left(\sqrt{\ln \frac{\xi_{\max}}{\xi}}\right), & \xi < 1, \quad \dot{R}_{b0} > 0, \\ \varphi\left(\sqrt{\ln \frac{\xi_{\max}}{\xi}}\right) - \varphi(\sqrt{\ln \xi_{\max}}), & \dot{R}_{b0} \leq 0, \end{cases} \quad (33)$$

где $\xi_{\max} = \exp(\sigma_r^2)$; $\varphi(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ — функция Лапласа.

В работе [52] определены основные особенности поперечной динамики РЭП большой плотности, распространяющегося в плазме в отсутствие рассеяния. Предполагается, что длительность импульса пучка τ_b удовлетворяет условиям $\tau_e \ll \tau_b \ll \tau_i$, где τ_e — характерное время вытеснения электронов плазмы из области пучка его электрическим полем, а τ_i — характерное время колебаний ионов плазмы в потенциальной яме пучка. При выполнении условия $\tau_e \ll \tau_b$ электрическое поле головной части РЭП выталкивает из области пучка электроны плазмы, и основная часть пучка («тело пучка») распространяется на фоне ионов плазмы, которые в силу условия $\tau_b \ll \tau_i$ в процессе прохождения пучка остаются неподвижными. Таким образом, в рассматриваемом случае задача о транспортировке РЭП в плазме сводится к определению эволюции поперечных сегментов пучка, распространяющихся на фоне неподвижных ионов. Показано, что в этом случае скалярный потенциал эффективного поля U_{ef} в уравнении (26) определяется выражением

$$U_{ef}(\xi) = \frac{\delta^2}{4} (\xi^2 - 1) + \frac{\lambda^2}{8} (\xi^2 - 1) + \frac{1}{2} \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \frac{1 - \xi^2}{\xi^2} - \frac{\ln \xi}{2}. \quad (34)$$

Как видно из выражения (34), единственным возможным типом радиальной эволюции поперечного сегмента пучка являются периодические колебания его радиуса в некотором промежутке $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ с периодом T , который определяется выражениями, аналогичными (28)–(29), с функцией

$$\Psi(\xi) = \sigma_r^2 + \frac{\delta^2}{2} (1 - \xi^2) + \frac{\lambda^2}{4} (1 - \xi^2) + \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \frac{1 - \xi^2}{\xi^2} + \ln \xi.$$

В [52] показано, что в случае, когда радиальная скорость частиц пучка на выходе из инжектора равна нулю (параметр $\sigma_r = 0$), при выполнении соответствующего

ограничения на параметры пучка и плазмы возможен специальный режим транспортировки РЭП, когда $\xi_{\min} = \xi_{\max} = 1$, т. е. в процессе транспортировки радиус пучка остается постоянным и равным начальному радиусу R_{b0} . В предположениях об однородности пучка ($\eta_{\Phi} = 1$) и отсутствии вращения пучка на выходе из инжектора ($\sigma_{\theta=0}$) в [52] получено выражение для радиуса стабилизированного пучка:

$$R_b^{st} = \sqrt{\frac{c\varepsilon_N}{\omega_{\Phi}\sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{2 + \zeta^2} + \zeta \right)}, \quad (35)$$

где ε_N — так называемый нормализованный эмиттанс пучка, связанный с средне-квадратичным эмиттансом E соотношением $\varepsilon_N = 2E/c$, а безразмерный параметр ζ определяется как

$$\zeta = \frac{2c}{\varepsilon_N \omega_{\Phi} \sqrt{\gamma}} \frac{J_b}{J_A}, \quad (36)$$

J_b — полный ток пучка; $J_A = 17\beta\gamma[kA]$ — предельный ток Альвена.

Как показано в [50], в случае транспортировки РЭП в однородной рассеивающей газоплазменной среде с $S_0 \neq 0$ уравнение огибающей пучка может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt'} \left(\gamma' \xi^3 \frac{d^2 \xi}{dt'^2} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} \xi^3 \frac{d\xi}{dt'} + \frac{\text{sign}(\kappa)}{2} \left(\frac{|\kappa|\beta}{|\kappa_0|\beta_0} \right) \gamma' \xi^2 + \frac{\delta^2 \gamma' \xi^4}{2} + \frac{\lambda^2 \xi^4}{4} \right) = s \gamma' \xi^2. \quad (37)$$

Безразмерные параметры δ и λ в (37) определяются аналогично (27), а параметр s задается выражением $s = \frac{4S_0 i_0^3}{m \gamma_0 \eta_{\Phi}^2 R_{b0}^2}$. Уравнение (37) должно решаться при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} \xi|_{t=\tau/t_0} &= 1, \quad \left. \frac{d\xi}{dt'} \right|_{t=\tau/t_0} = \frac{t_0 \dot{R}_{b0}}{\gamma_0 R_{b0}}, \\ \left. \frac{d^2 \xi}{dt'^2} \right|_{t=\tau/t_0} &= \left[\varepsilon_0^2 + \left(\sigma_{\theta} + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] - \frac{t_0 \dot{R}_{b0}}{\gamma_0 R_{b0}} \cdot \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=\tau} - \frac{\text{sign}(\kappa_0)}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\lambda^2}{4}. \end{aligned}$$

3.4. Динамика РЭП в окрестности тела, инжектирующего пучок.

В работе [53] рассмотрена задача о поперечной динамике РЭП, радиально инжектируемого с поверхности проводящей сферы, покоящейся в бесстолкновительной плазме. Показано, что указанная задача сводится к совместному численному решению уравнения огибающей РЭП:

$$\frac{d^2 \xi}{d\eta^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \frac{dV}{d\eta} \frac{d\xi}{d\eta} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \right)^{3/2} \frac{1}{\xi} + \mu^2 \frac{\varepsilon^2 + \sigma_{\theta}^2}{\xi^3} \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \quad (38)$$

и сформулированного в [25] уравнения для безразмерного потенциала электрического поля, индуцированного в окрестности сферы:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{dV}{d\eta} \right) = 0.59 \left(\frac{kT}{m_i c^2} \right)^{3/2} \left(\frac{R^*}{D} \right)^2 \frac{V + 1}{\sqrt{V(V + 2)}}. \quad (39)$$

В (38), (39) величина $\eta = r/R^*$ — безразмерная радиальная координата, R^* — радиус области пространственного заряда, связанный с током инжектируемого пучка соотношением $I_b = 1.47(8\pi kT/m_i)^{1/2} n_{\Phi} R^{*2}$.

3.5. Моделирование транспортировки РЭП по искусственному плазменному каналу. В настоящее время при проведении работ по рассматриваемому направлению значительное внимание уделяется исследованиям, связанным с реализацией одного из наиболее перспективных методов транспортировки РЭП в газоплазменных средах, основанном на использовании для транспортировки пучка искусственного плазменного канала, создаваемого в результате ионизации нейтральной компоненты фоновой газа потоком излучения вспомогательного ультрафиолетового лазера. Плазменный канал выполняет при этом две основные функции: а) компенсирует возмущающее воздействие на пучок внешних электромагнитных полей, что приводит практически к прямолинейному распространению РЭП; б) обеспечивает равновесную транспортировку пучка с радиусом порядка 1–10 см при уровнях тока порядка 1–10 кА. При этом предельные дистанции транспортировки РЭП по искусственному плазменному каналу определяются развитием целого комплекса динамических явлений, приводящих к разрушению пучка в процессе транспортировки.

В результате проведения работ по указанному направлению разработаны и реализованы в расчетных программах для ЭВМ математические модели основных деструктивных процессов, возникающих при транспортировке РЭП по плазменному каналу, в том числе: поперечной дисперсии РЭП в результате многократного рассеяния частиц пучка на частицах фоновой газоплазменной среды [54]; омической эрозии головной части РЭП [55, 56]; эмиттансной эрозии головной части пучка [57]; перетяжечных неустойчивостей [58, 59]; резистивной планговой неустойчивости [60, 61]; ионной планговой неустойчивости, в том числе: при транспортировке РЭП по прямолинейному продольно однородному каналу [62], а также при распространении пучка в прямолинейном канале с продольно неоднородной плотностью [63, 64]. Кроме того, разработаны математические модели динамики РЭП в плазменном канале, в которых учитывается взаимное влияние указанных выше деструктивных процессов [65–68].

Заметим, что полученные результаты исследований в области динамики релятивистских пучков заряженных частиц в газоплазменных средах, помимо отмеченных выше приложений, могут найти применение и при решении других важных научно-технических проблем, таких, например, как создание новых типов ускорителей заряженных частиц. В работе [69] обоснована возможность создания ускорителя релятивистских электронов, основанного на использовании для ускорения электронов до энергий порядка сотен миллиэлектронвольт сильных коллективных продольных электрических полей, генерируемых в кильватере сильноточного РЭП с энергией электронов порядка 1–10 МэВ, распространяющегося по плазменному каналу в режиме ионной фокусировки. Вторым направлением работ, связанных с разработкой новых типов ускорителей, является изучение возможности создания компактного рециркуляционного ускорителя релятивистских электронов. В ускорителе этого типа конечной высокой энергии электронов предполагается достигать в результате многократного прохождения пучка через ускоряющий промежуток, которое должно обеспечиваться транспортировкой РЭП по замкнутому плазменному каналу из конечного числа прямолинейных участков, создаваемых системой лазерных пучков. Одним из основных препятствий на пути практической реализации концепции рециркуляционного ускорителя является возбуждение в системе пучок — канал неустойчивостей, индуцируемых поворотом плазменного канала, наиболее опасной из которых является ионная планговая неустойчивость (ИПН). В работе [70] раз-

работан метод численного моделирования динамики развития ИШН, распространяющегося по кусочно-прямолинейному плазменному каналу. Полученные результаты численного моделирования показывают, что при определенных ограничениях на параметры пучка, канала и углы поворота канала имеет место эффект затухания ИШН, возбуждаемой при прохождении РЭП участков поворота канала, что позволяет сформулировать соответствующие требования к техническим параметрам основных систем рециркуляционного ускорителя.

Литература

1. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. *Искусственные спутники в разреженной плазме*. Москва, Наука (1964).
2. Альперт Я. Л. *Распространение электромагнитных волн в ионосфере*. Москва, Наука (1972).
3. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Об эффектах, вызываемых искусственным спутником, быстро движущимся в ионосфере или межпланетной среде. *Успехи физических наук* **79** (233), 23–80 (1963).
4. Chorpа K. P. *Interaction of rapidly moving bodies in terrestrial atmosphere*. New York, Camb. Univ. Press. (1960).
5. Альперт Я. Л. *Волны и искусственные тела в приземной плазме*. Москва, Наука (1974).
6. Курьшев А. П., Филиппов Б. В. Аэродинамические коэффициенты тел вращения в сильно разреженной плазме. В: *Аэродинамика разреженных газов*. Вып. 4, 142–148. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1969).
7. Филиппов Б. В. *Аэродинамика тел в верхних слоях атмосферы*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1973).
8. Вавилов С. А., Колесников Е. К. Некоторые вопросы динамики сильнозаряженных тел в космическом пространстве. В: *Динамические процессы в газах и твердых телах: межвуз. сб. Сер. Физическая механика*. Вып. 4, 168–180. Ленинград (1980).
9. Гунько Ю. Ф., Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. Методика расчета аэродинамических коэффициентов тел в сильно разреженной плазме при наличии собственного магнитного поля. В: *Аэродинамика разреженных газов*. Вып. 6, 54–66. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1973).
10. Гунько Ю. Ф., Лоскутова Г. В. Влияние собственного магнитного поля на характер обтекания тел разреженной плазмой. В: *Физическая механика*. Вып. 1, 113–123. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1974).
11. Гунько Ю. Ф. Влияние собственного магнитного поля на аэродинамические характеристики кругового цилиндра, движущегося в разреженной плазме. В: *Физическая механика*. Вып. 2, 107–118. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1976).
12. Филиппов Б. В., Гунько Ю. Ф., Курьшев А. П. Определение на аэродинамических характеристиках тел, движущихся в разреженной плазме и обладающих собственными электрическими и магнитными полями. *Молекулярная газовая динамика и динамика разреженного газа: материалы VII Всесоюзной конференции по молекулярной газовой динамике и динамике разреженного газа (Москва-1985)*, Москва, 355–367 (1985).
13. Морозов В. А., Хантулева Т. А., Яковлев А. Б. Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ. Ч. 1. Моделирование процессов в газе, жидкости и твердом теле. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 3, 419–454 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.302>
14. Власов А. А. *Теория многих частиц*. Москва, Изд-во Моск. ун-та (1950).
15. Филиппов Б. В. Взаимодействие газовых ионов с поверхностью металла. В: *Аэродинамика разреженных газов*. Вып. 3, 110–124. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1967).
16. Филиппов Б. В., Пфау Г. Расчет параметров плазмы в окрестности тел со сферически симметричными условиями на бесконечности. В: *Аэродинамика разреженных газов*. Вып. 6, 47–54. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1973).
17. Колесников Е. К., Филиппов Б. В. *Некоторые задачи эволюции заряженных частиц в поле магнитного диполя*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1974).
18. Богуславский С. А. *Избранные труды по физике*. Москва, Физматгиз (1961).
19. Гунько Ю. Ф., Пономарев М. Г. Эмиссия заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле и расчет следа тел, движущихся в сильно разреженной плазме. В: *Труды 15-й сессии международной школы по моделям механики сплошной среды*, 1–10 июля 2000 г., Санкт-Петербург, 11–27 (2001).

20. Ponomarjov M. G., Gunko Yu. F. Kinetic modeling of charged particle cloud expansion and emission in magnetic and electric fields. *Planetary and Space Science* **43** (10–11), 1409–1418 (1995).
21. Гунько Ю. Ф., Гунько Н. А. Аэродинамические характеристики малых заряженных тел в разреженной плазме. *Всероссийский семинар по аэродинамике, посвященный 90-летию со дня рождения С. В. Баландера*, 5–7 февраля 2008 г., Санкт-Петербург, 24 (2008).
22. Гунько Ю. Ф., Гунько Н. А. Электрические и газодинамические поля вблизи поверхности проводящих тел в сильноразреженной плазме. Влияние кривизны поверхности. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2**, 92–99 (2013).
23. Акишин А. И., Новиков Л. С. *Физические процессы на поверхности искусственных спутников Земли. Ч. 2. Электризация космических аппаратов*. Москва, Изд-во Моск. ун-та (1987).
24. Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Оценка снизу равновесного потенциала эмитирующей сферы в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, при релятивистских скоростях нейтронизирующего потока. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 109–110 (1990).
25. Колесников Е. К. О расчете электрического поля в космической плазме в окрестности проводящей сферы, инжектирующей электронный пучок. *Физика плазмы* **28** (4), 360–367 (2002).
26. Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Структура зоны возмущения и электростатический потенциал в окрестности заряженного цилиндрического тела, находящегося в плазме при наличии магнитного поля. В: *Проблемы динамики процессов в гетерогенных средах: Всесоюз. межвуз. сб. науч. тр.*, 50–54. Калинин (1987).
27. Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Затухание плазменных волн, возникающих в окрестности инжектирующего электронный пучок цилиндрического тела. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 107–110 (1995).
28. Яковлев А. Б. Методика расчета напряженности электрического поля у поверхности космического аппарата, инжектирующего электронный пучок в замагниченную плазму. *Труды XIII сессии международной школы по моделям механики сплошной среды (Санкт-Петербург — 1996)*. Санкт-Петербург, 96–99 (1996).
29. Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Методика расчета напряженности электрического поля, индуцируемого у поверхности бесконечного цилиндра, покоящегося в бесконечной плазме в однородном магнитном поле, при заданном стоке заряда с его поверхности. *Космические исследования* **34** (6), 666–667 (1996).
30. Krupnikov K. K., Mileev V. N., Novikov L. S. A mathematical model of spacecraft charging. *Radiation Measurements* **26** (3 SPEC ISS), 513–516 (1996). [https://doi.org/10.1016/1350-4487\(96\)00022-4](https://doi.org/10.1016/1350-4487(96)00022-4)
31. Федоров В. А. Величина электрического потенциала КА при инжекции электронного пучка в ионосфере Земли. *Космические исследования* **39** (5), 454–462 (2001).
32. Яковлев А. Б. Отражение компенсированного электронного пучка от проводящей поверхности. *Журнал технической физики* **62** (9), 144–147 (1992).
33. Колесников Е. К. Оценка удельной мощности высоковольтного генератора, основанного на использовании энергетических ресурсов радиационных поясов Земли. *Космические исследования* **44** (6), 507–513 (2006).
34. Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Harnessing of the power of the solar particles captured in the Van Allen belts. *Acta Futura* **3**, 81–88 (2009).
35. Яковлев А. Б. Модель зарядки тонкой алюминиевой пленки в космической плазме. *IX Полятовские чтения: материалы международной научной конференции по механике*, 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, 440–442 (2021).
36. Yakovlev A. B. Mathematical model of the charging of the thin aluminum film in the space plasma. *Journal of Physics: Conference Series* **1959**, 012053 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012053>
37. Яковлев А. Б. Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на динамику паруса, который движется по цандеровской траектории. *IX Полятовские чтения: материалы международной научной конференции по механике*, 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, 180–181 (2021).
38. Yakovlev A. B. Influence of electric charge on surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories. *Journal of Physics: Conference Series* **1959**, 012052 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012052>
39. Тихонов А. А., Яковлев А. Б. Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на его прочностные характеристики. *IX Полятовские чтения: материалы международной научной конференции по механике*, 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, 172–174 (2021).

40. Tikhonov A.A., Naumova N.V., Yakovlev A.B., Ivanov D.N., Dorofeev N.P. On the Deformation of a Round Three-layer Plate under the Action of a Surface Charge. *Scientific publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A: Appl. Math. Inform. and Mech.* **16** (1), 39–45 (2024).
41. Колесников Е. К. Метод дистанционного рентгеноспектрального элементного анализа поверхностных пород безатмосферных небесных тел, основанный на искусственном возбуждении характеристического излучения электронным пучком. *Космические исследования* **54** (6), 524–527 (2016).
42. Kolesnikov E. K., Zelensky A. G. Remote x-ray spectral elemental analysis of lunar surface rocks using artificial electron-beam excited characteristic x-ray emission. *Planetary and Space Science* **193**, 105065 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.pss.2020.105065>
43. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. О возможности создания активных систем очистки ближнего космоса от мелкомасштабного космического мусора, основанных на использовании стабилизированных релятивистских электронных пучков. В: *Избранные труды Международной научной конференции по механике «VI Поляховские чтения»* (Санкт-Петербург — 2012). Санкт-Петербург, 107–111 (2012).
44. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Кинетическое уравнение для релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю. *Журнал технической физики* **74** (9), 103–107 (2004).
45. Lee E. P. Kinetic theory of a relativistic beam. *Physics of Fluids* **19** (1), 60–69 (1976).
46. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Уравнения переноса и условие динамического равновесия релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю. *Журнал технической физики* **75** (7), 119–125 (2005).
47. Bennett W. H. Self focusing streams. *Physics Review* **45**, 89–98 (1934).
48. Bennett W. H. Magnetically self — focusing streams. *Physics Review* **98**, 1584–1590 (1955).
49. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Уравнение для среднеквадратичного радиуса релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю. *Журнал технической физики* **77** (8), 109–113 (2007).
50. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Уравнение огибающей релятивистского электронного пучка с автомоделным профилем плотности, распространяющегося в плотной или разреженной газоплазменной среде продольно внешнему магнитному полю. *Журнал технической физики* **78** (2), 113–118 (2008).
51. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Особенности поперечной динамики релятивистского электронного пучка малой плотности, распространяющегося в плазме продольно внешнему магнитному полю. *Журнал технической физики* **79** (7), 92–95 (2009).
52. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Поперечная динамика релятивистского электронного пучка большой плотности, распространяющегося в плазме продольно внешнему магнитному полю. *Журнал технической физики* **79** (8), 104–109 (2009).
53. Колесников Е. К. Динамика релятивистского электронного пучка в космической плазме в окрестности сферического тела-инжектора. *Физика плазмы* **31** (10), 933–938 (2005).
54. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Определение конечного равновесного радиуса и прироста эмиттанса неподстроенного к равновесным условиям релятивистского электронного пучка при транспортировке вдоль внешнего магнитного поля в газоплазменной рассеивающей среде. *Журнал технической физики* **67** (7), 108–111 (1997).
55. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Эрозия фронта пучка заряженных частиц в плазменном канале высокой проводимости. *Журнал технической физики* **62** (9), 55–61 (1992).
56. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Влияние процесса фазового перемешивания на скорость фронтальной эрозии релятивистских электронных пучков при транспортировке в рассеивающей газоплазменной среде. *Радиотехника и электроника* **45** (5), 607–610 (2000).
57. Колесников Е. К., Савкин А. Д. Влияние длительности переднего фронта РЭП на асимптотическое значение скорости эрозии. *Письма в Журнал технической физики* **20** (1), 54–56 (1994).
58. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. К вопросу о влиянии рассеяния на развитие резистивной перетянутой моды РЭП. *Письма в Журнал технической физики* **17** (3), 46–50 (1991).
59. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Влияние многократного рассеяния и внешнего магнитного поля на развитие резистивной перетянутой неустойчивости релятивистского электронного пучка. *Журнал технической физики* **70** (7), 130–132 (2000).
60. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. К вопросу о влиянии радиального профиля обратного плазменного тока и эффекта фазового перемешивания на развитие резистивной шланговой

неустойчивости релятивистского электронного пучка. *Журнал технической физики* **60** (3), 40–44 (1990).

61. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Влияние кольцевого плазменного канала на развитие резистивной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка. *Журнал технической физики* **61** (12), 43–46 (1991).

62. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Стабилизирующие факторы при развитии шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка в режиме ионной фокусировки. *Радиотехника и электроника* **37** (4), 694–699 (1992).

63. Зеленский А. Г., Колесников Е. К. Влияние периодического по плотности ионного канала на поведение ионной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка. *Журнал технической физики* **73** (12), 71–75 (2003).

64. Зеленский А. Г., Колесников Е. К. Математическое моделирование развития ионной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка в плазменном канале с изменяющейся плотностью. *Журнал технической физики* **75**, 127–129 (2005).

65. Колесников Е. К., Мануйлов А. С., Абашкина И. В. Влияние процесса фронтальной эрозии на развитие резистивной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка. *Журнал технической физики* **64** (11), 136–139 (1994).

66. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. К вопросу о влиянии резистивной шланговой неустойчивости на поперечное расширение релятивистского электронного пучка. *Журнал технической физики* **65** (1), 165–167 (1995).

67. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Исследование взаимного влияния деструктивных процессов, сопровождающих транспортировку релятивистских электронных пучков в плотных газоплазменных средах. В: *Модели механики сплошной среды: межвуз. сб. Сер. Физическая механика* **7**, 61–70. Санкт-Петербург (1998).

68. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Влияние рассеяния на развитие резистивной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка. *Радиотехника и электроника* **44** (11), 1331–1333 (1999).

69. Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Расчет электрического поля в «кильватере» релятивистского электронного пучка в режиме ионной фокусировки. В: *Модели неоднородных сред: межвуз. сб. Сер. Физическая механика* **8**, 113–119. Санкт-Петербург (2004).

70. Зеленский А. Г., Колесников Е. К. Численное моделирование развития ионной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка, распространяющегося по кусочно-прямолинейному плазменному каналу. *Журнал технической физики* **65** (5), 188–190 (1995).

Статья поступила в редакцию 26 августа 2024 г.;
доработана 11 ноября 2024 г.;
рекомендована к печати 21 ноября 2024 г.

Контактная информация:

Колесников Евгений Константинович — д-р физ.-мат. наук, проф.;

<https://orcid.org/0000-0002-3052-0926>, evgkolesn@yandex.ru

Яковлев Андрей Борисович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.;

<https://orcid.org/0000-0002-8744-0783>, a.b.yakovlev@spbu.ru

Mathematical modeling of nonequilibrium processes on chair of physical mechanics of St. Petersburg State University.

Part 2. Modeling of processes in plasma*

E. K. Kolesnikov, A. B. Yakovlev

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Mathematical modeling of nonequilibrium processes on chair of physical mechanics of St. Petersburg State University. Part 2. Modeling

*See the first part: Morozov V. A., Khantuleva T. A., Yakovlev A. B. Mathematical modeling of nonequilibrium processes on chair of physical mechanics of St. Petersburg State University. Part 1. Modeling of processes in gas, fluid and solid. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 419–454. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.302> (In Russian)

of processes in plasma. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12 (70), issue 2, pp. 203–227. EDN TNVXDQ (In Russian)

The paper gives the review of works of employees of chair and laboratory of physical mechanics of St. Petersburg State University from the moment of its establishment in 1986 and till 2024 inclusive, that are devoted to modelling of the non-equilibrium processes in plasma. The basic attention is given several major results: 1) calculation of aerodynamic characteristics of bodies, moving in the rarefied plasma; 2) modelling of process of charging of bodies in space plasma; 3) creation of methods for the description of dynamics of electron beams in comic plasma. The description of calculation methods of aerodynamic characteristics of bodies both without own magnetic field and at its presence is given. There is shown that for the description of process of charging of a cylindrical body in space plasma when taking into account a external magnetic field it is possible to use and analytical methods. Other results are given short enough.

Keywords: modeling, non-equilibrium process, plasma, charging of bodies in plasma, electron beam.

References

1. Al'pert Ya., Gurevich A. V., Pitaevsku L. P. *Iskusstvennye sputniki v razrezhennoi plazme*. Moscow, Nauka Publ. (1964). (In Russian) [Eng. transl.: Al'pert Ya., Gurevich A. V., Pitaevsku L. P. *Space Physics with Artificial Satellites*. New York, Consultants Bureau (1965)].
2. Al'pert Ya. *Rasprostraneniye elektromagnitnykh voln v ionosfere*. Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian) [Eng. transl.: Al'pert Ya. *Electromagnetic waves propagation in an ionosphere*. New York, Consultants Bureau (1973)].
3. Al'pert Ya., Gurevich A. V., Pitaevsku L. P. About the effects caused by the artificial satellite quickly moving in an ionosphere or interplanetary medium. *Usp. fiz. nauk* **79** (233), 23–80 (1963). (In Russian)
4. Chorpa K. P. *Interaction of rapidly moving bodies in terrestrial atmosphere*. New York, Cambs. Univ. Press (1960).
5. Al'pert Y. L. *Waves and artificial bodies in surface plasma*. Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)
6. Kurishev A. P., Filippov B. V. Aerodynamic coefficients of rotation bodies in strongly rarefied plasma. In: *Aerodynamics of rarefied gases*. Vol. 4, 142–148. Leningrad, Leningrad University Press (1969). (In Russian)
7. Filippov B. V. *Aerodynamics of bodies in the upper layers of the atmosphere*. Leningrad, Leningrad University Press (1973). (In Russian)
8. Vavilov S. A., Kolesnikov E. K. Some questions of dynamics of highly charged bodies in a space. In: *Dynamic processes in gases and solids: Interuniversity Collection of Scientific Works. Ser.: Physical mechanics*. Vol. 4, 168–180. Leningrad (1980). (In Russian)
9. Gunko Yu. F., Kurbatova G. I., Filippov B. V. Calculation procedure of aerodynamic coefficients of bodies in strongly rarefied plasma in the presence of own magnetic field. In: *Aerodynamics of rarefied gases*. Vol. 6, 54–66. Leningrad, Leningrad University Press (1973). (In Russian)
10. Gunko Yu. F., Loskutova G. V. Influence of own magnetic field on character of a flow around bodies by the rarefied plasma. In: *Physical mechanics*. Vol. 1, 113–123. Leningrad, Leningrad University Press (1974). (In Russian)
11. Gunko Yu. F. Influence of own magnetic field on aerodynamic characteristics of the circular cylinder moving in the rarefied plasma. In: *Physical mechanics*. Vol. 2, 107–118. Leningrad, Leningrad University Press (1976). (In Russian)
12. Filippov B. V., Gunko Yu. F., Kurishev A. P. Determination of aerodynamic characteristics of bodies moving in the rarefied plasma and possessing own electrical and magnetic fields. In: *Molecular gas dynamics and dynamics of the rarefied gas. Proceedings of VII All-Union conference on molecular gas dynamics and dynamics of the rarefied gas (Moscow — 1985)*. Moscow, 355–367 (1985). (In Russian)
13. Morozov V. A., Khantuleva T. A., Yakovlev A. B. Mathematical Modeling of Nonequilibrium Processes at the Department of Physical Mechanics, St. Petersburg State University. Part 1. Modeling of Processes in Gases, Liquids, and Solids. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 3, 419–454 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.302> (In Russian)

- Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57**, iss. 3, 283–306 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1063454124700146>].
14. Vlasov A. A. *Many particles theory*. Moscow, Moscow University Press (1950). (In Russian)
 15. Filippov B. V. Interaction of gas ions with a metal surface. In: *Aerodynamics of rarefied gases*. Vol. 3, 110–124. Leningrad, Leningrad University Press (1967). (In Russian)
 16. Filippov B. V., Pfau G. Calculation of parametres of plasma in a vicinity of bodies with spherically symmetric conditions on infinity. In: *Aerodynamics of rarefied gases*. Vol. 6, 47–54. Leningrad, Leningrad University Press (1973). (In Russian)
 17. Kolesnikov E. K., Filippov B. V. *Some problems of evolution of the charged particles in the field of a magnetic dipole*. Leningrad, Leningrad University Press (1974). (In Russian)
 18. Bogusl'svskiy S. A. *The selected works on physics*. Moscow, Fizmatlit Publ. (1961). (In Russian)
 19. Gunko Yu. F., Ponomarjov M. G. Emission of the charged particles in a outer electromagnetic field and calculation of a trace of bodies moving in strongly rarefied plasma. In: *Proceedings of the XV session of the international school on models of continuum mechanics (St. Petersburg — 2000)*, July 1–10, 2000, St. Petersburg, 11–27 (2001). (In Russian)
 20. Ponomarjov M. G., Gunko Yu. F. Kinetic modeling of charged particle cloud expansion and emission in magnetic and electric fields. *Planetary and Space Science* **43** (10–11), 1409–1418 (1995).
 21. Gunko Yu. F., Gunko N. A. Aerodynamic characteristics of the small charged bodies in the rarefied plasma. In: *The All-Russia seminar on aerodynamics, devoted 90th anniversary from the date of S. V. Vallander's birth*, February 5–7, 2008, Saint Petersburg, 24 (2008). (In Russian)
 22. Gunko Yu. F., Gunko N. A. Electrical and gas-dynamic fields near to a surface of conductive bodies in strongly rarefied plasma. Influence of curvature of a surface. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, 92–99 (2013). (In Russian)
 23. Akishin A. I., Novikov L. S. *Physical processes on a surface of artificial satellites of the Earth*. Part 2. Charging of space vehicles. Moscow, Moscow University Press (1987). (In Russian)
 24. Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Lower estimate of equilibrium potential of emitting sphere in the plasma which is in a outer magnetic field for relativistic speeds of a neutralised stream. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 109–110 (1990). (In Russian)
 25. Kolesnikov E. K. Calculation of electric field in space plasma near a conducting sphere injecting an electron beam. *Fizika plazmy* **28** (4), 360–367 (2002). (In Russian) [Eng. transl.: *Plasma Physics Reports* **28** (4), 327–334 (2002)].
 26. Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Structure of disturbance zone and electrostatic potential in a vicinity of the charged cylindrical body which are in plasma in the presence of a magnetic field. In: *Problems of dynamics of processes in heterogeneous media: All-Union. intercollegiate Sat. scientific tr.*, 50–54. Kalinin (1987). (In Russian)
 27. Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Decay of the plasma waves arising in a vicinity of a cylindrical body injecting an electron beam. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (22), 107–110 (1995). (In Russian)
 28. Yakovlev A. B. Procedure of calculation of electric field strength at a surface of the space vehicle injecting an electron beam in magnetized plasma. *Proceedings of the XIII session of the international school on models of continuum mechanics (St. Petersburg — 1996)*. Saint Petersburg, 96–99 (1996). (In Russian)
 29. Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Procedure for calculating the electric field strength induced near the surface of an infinite cylinder that rests in a collisionless plasma in a homogeneous magnetic field, the charge flow from its surface being fixed. *Kosmicheskie issledovaniia* **34** (6), 666–667 (1996). (In Russian) [Eng. transl.: *Cosmic Research* **34** (6), 615–616 (1996)].
 30. Krupnikov K. K., Mileev V. N., Novikov L. S. A mathematical model of spacecraft charging. *Radiation Measurements* **26** (3 SPEC ISS), 513–516 (1996). [https://doi.org/10.1016/1350-4487\(96\)00022-4](https://doi.org/10.1016/1350-4487(96)00022-4)
 31. Fedorov V. A. Value of electric potential of spacecraft during electron beam injection in the Earth ionosphere. *Kosmicheskie issledovaniia* **39** (5), 454–462 (2001). (In Russian)
 32. Yakovlev A. B. Reflection of compensated electron beam from conducting surface. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **62** (9), 144–147 (1992). (In Russian)
 33. Kolesnikov E. K. Evaluation of the Specific Power of a High-Voltage Generator Based on the Use of Energy of the Earth's Radiation Belts. *Kosmicheskie issledovaniia* **44** (6), 507–513 (2006). (In Russian)
 34. Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Harnessing of the power of the solar particles captured in the Van Allen belts. *Acta Futura* **3**, 81–88 (2009).

35. Yakovlev A. B. Model of the charging of the thin aluminum film in the space plasma. *Proc. Int. Sci. Conf. on Mechanics — 9th Polyakhov's Reading*, March 9–12, 2021, St. Petersburg, 440–442 (2021). (In Russian)
36. Yakovlev A. B. Mathematical model of the charging of the thin aluminum film in the space plasma. *Journal of Physics: Conference Series* **1959**, 012053 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012053>
37. Yakovlev A. B. Influence of electric charge induced on the surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories. *Proc. Int. Sci. Conf. on Mechanics — 9th Polyakhov's Reading*, March 9–12, 2021, St. Petersburg, 180–181 (2021). (In Russian)
38. Yakovlev A. B. Influence of electric charge on surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories. *Journal of Physics: Conference Series* **1959**, 012052 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012052>
39. Tichonov A. A., Yakovlev A. B. Influence of electric charge induced on the surface of a solar sail on its strength characteristics. *Proc. Int. Sci. Conf. on Mechanics — 9th Polyakhov's Reading*, March 9–12, 2021, St. Petersburg, 172–174 (2021). (In Russian)
40. Tikhonov A. A., Naumova N. V., Yakovlev A. B., Ivanov D. N., Dorofeev N. P. On the Deformation of a Round Three-layer Plate under the Action of a Surface Charge. *Scientific publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A: Appl. Math. Inform. and Mech.* **16** (1), 39–45 (2024).
41. Kolesnikov E. K. Method Based on Artificial Excitation of Characteristic Radiation by an Electron Beam for Remote X-Ray Spectral Elemental Analysis of Surface Rocks on Atmosphereless Celestial Bodies. *Kosmicheskie issledovaniia* **54** (6), 524–527 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *Cosmic Research* **54** (6), 491–493 (2016). <https://doi.org/10.1134/S0010952516060058>].
42. Kolesnikov E. K., Zelensky A. G. Remote x-ray spectral elemental analysis of lunar surface rocks using artificial electron-beam excited characteristic x-ray emission. *Planetary and Space Science* **193**, 105065 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.pss.2020.105065>
43. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. About possibility of creation of active cleaning system of near space from the small-scale space dust based on using of the stabilised relativistic electron beams. *Select. Proc. Int. Sci. Conf. on Mechanics — 6th Polyakhov's Reading (St. Petersburg — 2012)*. St. Petersburg, 107–111 (2012). (In Russian)
44. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Kinetic Equation for a Relativistic Electron Beam Propagating along an External Magnetic Field in Dense and Tenuous Gas — Plasma Media. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **74** (9), 103–107 (2004). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **49** (9), 1208–1212 (2004)].
45. Lee E. P. Kinetic theory of a relativistic beam. *Physics of Fluids* **19** (1), 60–69 (1976).
46. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Moment equations and the dynamics equilibrium condition for a relativistic electron beam propagating along an external magnetic field in dense and rarefied gas-plasma media. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **75** (7), 119–125 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **50** (7), 937–943 (2005)].
47. Bennett W. H. Self focusing streams. *Physics Review* **45**, 89–98 (1934).
48. Bennett W. H. Magnetically self — focusing streams. *Physics Review* **98**, 1584–1590 (1955).
49. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Equation for the RMS radius of a relativistic electron beam propagating in dense and rarefied gas-plasma media along an external magnetic field. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **77** (8), 109–113 (2007). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **52** (8), 1068–1072 (2007)].
50. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Envelope equation for a relativistic electron beam with a self-similar current density profile propagating in dense or rarefied gas-plasma medium along an applied magnetic field. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **78** (2), 113–118 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **53** (2), 255–260 (2008)].
51. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Transverse dynamics of a low-density relativistic electron beam propagating in the plasma along an external electric field. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **79** (7), 92–95 (2009). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **54** (7), 1018–1022 (2009)].
52. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Transverse dynamics of high-density relativistic electron beams propagating in plasma in the direction of the external magnetic field. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **79** (8), 104–109 (2009). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **54** (8), 1190–1195 (2009)].
53. Kolesnikov E. K. Dynamics of a relativistic electron beam in the vicinity of a spherical injecting body in space plasma. *Fizika plazmy* **31** (10), 933–938 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *Plasma Physics Reports* **31** (10), 865–870 (2005)].
54. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Determination of the final equilibrium radius and the increase in the emittance of a nonequilibrium relativistic electron beam during transport along an external magnetic field in a gas-plasma scattering medium. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **67** (7), 108–111 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **42** (7), 819–822 (1997)].

55. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Erosion of front of a beam of the charged particles in the plasma channel with high conductivity. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **62** (9), 55–61 (1992). (In Russian)
56. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. The influence of phase mixing on the rate of relativistic electron beam head erosion during beam transport in a scattering gas-plasma medium. *Radiotekhnika i elektronika* **45** (5), 607–610 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Communications Technology and Electronics* **45** (5), 553–556 (2000)].
57. Kolesnikov E. K., Savkin A. D. Influence of leading edge duration of the REB on the asymptotical value of erosion rate. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **20** (1), 54–56 (1994). (In Russian)
58. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. To the question of influence of dispersion on development of the sausage mode of a relativistic electron beam. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **17** (3), 46–50 (1991). (In Russian)
59. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Effect of multiple scattering and the external magnetic field on the resistive sausage instability of a relativistic electron beam. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **70** (7), 130–132 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *Technical Physics* **45** (7), 942–944 (2000)].
60. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. To the question of influence of radial profile of an anisotropic plasma current and effect of a phase mixing on development of a resistive hose instability of a relativistic electron beam. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **60** (3), 40–44 (1990). (In Russian)
61. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Influence of ring plasma channel on development of a resistive hose instability of a relativistic electron beam. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **61** (12), 43–46 (1991). (In Russian)
62. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Stabilising factors at development of hose instability of a relativistic electron beam in a mode of ionic focusing. *Radiotekhnika i elektronika* **37** (4), 694–699 (1992). (In Russian)
63. Zelensky A. G., Kolesnikov E. K. Influence of a ion channel of a periodic density on behaviour of ionic hose instability of a relativistic electron beam. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **73** (12), 71–75 (2003). (In Russian)
64. Zelensky A. G., Kolesnikov E. K. Mathematical modelling of development of ionic hose instability of a relativistic electron beam in the plasma channel with changing density. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* (75), 127–129 (2005). (In Russian)
65. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S., Abashkina I. V. Influence of process of frontal erosion on development of resistive hose instability of a relativistic electron beam. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **64** (11), 136–139 (1994). (In Russian)
66. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. To the question of influence resistive hose instability on transverse expansion of a relativistic electron beam. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **65** (1), 165–167 (1995). (In Russian)
67. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Research of mutual influence of the destructive processes accompanying transportation of relativistic electron beams in dense gas-plasma mediums. In: *Models of continuum mechanics: Interuniversity. Sat. Ser. Physical mechanics*. Vol. 7, 61–70. St. Petersburg (1998). (In Russian)
68. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Influence of scattering on development of resistive hose instability of a relativistic electron beam. *Radiotekhnika i elektronika* **44** (11), 1331–1333 (1999). (In Russian)
69. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Electric field calculation in “a wake” of a relativistic electron beam in a mode of ionic focusing. In: *Models of inhomogeneous media: Interuniversity. Sat. Ser. Physical mechanics*. Vol. 8, 113–119. St. Petersburg (2004). (In Russian)
70. Zelensky A. G., Kolesnikov E. K. Numerical modelling of development of ionic hose instability of a relativistic electron beam propagating along the piecewise-rectilinear plasma channel. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **65** (5), 188–190 (1995). (In Russian)

Received: August 26, 2024
 Revised: November 11, 2024
 Accepted: November 21, 2024

Authors' information:

Evgeniy K. Kolesnikov — <https://orcid.org/0000-0002-3052-0926>, evgkolesn@yandex.ru
Andrey B. Yakovlev — <https://orcid.org/0000-0002-8744-0783>, a.b.yakovlev@spbu.ru