

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2024–2025 гг.

Санкт-Петербург
ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
2025

Д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН *А. К. Беляев* (науч. рук. семинара) (ИПМаш РАН), канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ), канд. физ.-мат. наук, доц. *А. С. Смирнов* (отв. секретарь) (СПбГУ Петра Великого), канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Архипова* (ВИ(ИТ) ВА МТО), PhD, Sr. lecturer *Е. И. Апрощенко* (Ун-т Нового Южного Уэльса, Австралия), д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ), канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. В. Воронкова* (СПбГУ), д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Мигасев* (Ун-т Харбина, КНР), канд. физ.-мат. наук, доц. *Г. А. Нестерчук* (СПбГУ), д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП), д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Ун-т Ольборга, Дания), канд. физ.-мат. наук *Д. В. Франус* (Фонд «УниШанс»)

Т78

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025. – 219 с.

ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Издание адресовано исследователям, специализирующимся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды. Семинар проводится математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета совместно с Институтом проблем машиноведения РАН.

ISSN 2218-7421

ISBN 978-5-7422-XXXX-X

ББК 22.25

- © Институт проблем машиноведения РАН, 2025
- © Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2025



Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»



МАВИС
инвестиционно-строительная группа

ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

А. С. Смирнов

Статья посвящена анализу динамического поведения пространственного двойного маятника, шарнирные оси которого не коллинеарны друг другу. Предполагается, что в шарнирах маятника действуют управляющие моменты, сформированные по принципу коллинеарного управления, а также учитывается наличие диссипативных сил вязкого трения в шарнирных сочленениях. Полученное в рамках линейной модели аналитическое решение позволяет выявить совместное влияние управляющих воздействий и диссипативных эффектов на динамику системы, а также дать классификацию возможных режимов ее движения и построить диаграмму режимов на плоскости безразмерных параметров задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросам динамики и управления движением двойного маятника посвящено множество научных работ, при этом большой интерес представляет изучение пространственных модификаций двойного маятника в разнообразных условиях их функционирования [1–3]. Одной из таких разновидностей является двойной математический маятник с цилиндрическими шарнирами, оси которых не являются коллинеарными друг другу [4, 5]. Ясно, что в данном случае конфигурации системы будут иметь более сложный вид, чем для плоского двойного маятника, и это обстоятельство находит определенное применение на практике при разработке манипуляторов. Тем не менее подобные системы исследованы еще далеко не достаточным образом по сравнению с плоскими вариантами двухзвенных конструкций, так что они заслуживают серьезного внимания.

В силу сказанного, основной целью настоящей работы является исследование возможных режимов движения двойного маятника с неколлинеарными шарнирами, находящегося под действием управляющих моментов и при наличии диссипативных эффектов.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим двойной маятник, состоящий из двух идентичных математических маятников, каждый из которых имеет длину l и массу концевой груза m . Будем считать, что оси цилиндрических шарниров данного двойного маятника не коллинеарны друг другу и составляют между собой некоторый острый угол α . Кроме того, полагаем, что двойной маятник испытывает в обоих шарнирах действие вязкого трения с одинаковым диссипативным коэффициентом b [5]. Наконец, предположим также, что в шарнирах маятника действуют управляющие моменты, сформированные по принципу коллинеарного управления [6], т. е. путем взаимосвязи их действия с силами инерции, причем коэффициент усиления будем считать постоянным и равным γ . Расчетная схема получившегося при этом пространственного двойного маятника приведена на рис. 1.

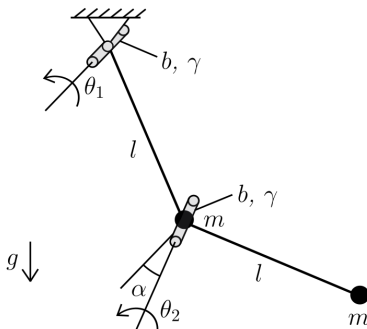


Рис. 1. Пространственный двойной маятник

В качестве обобщенных координат примем углы поворота θ_1 и θ_2 в шарнирах маятника, причем в настоящей работе будем ограничиваться рассмотрением лишь малых отклонений системы от ее нижнего положения равновесия. Обозначая за $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ столбец обобщенных координат системы, запишем ее кинетическую энергию T , потенциальную энергию Π , а также диссипативную функцию вязкого трения R в рамках линейной модели в виде квадра-

тичных форм с матрицами инерционных, квазиупругих и диссипативных коэффициентов соответственно (они обозначаются за \mathbf{A}_0 , \mathbf{C}_0 и \mathbf{B}_0) [5]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 5 & 2 \cos \alpha \\ 2 \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 3 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}, \\ R &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{B}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{B}_0 = b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для учета управляющих воздействий, формируемых по принципу коллинеарного управления, заметим, что условие коллинеарности математически означает пропорциональность столбца управляющих воздействий \mathbf{Q} столбцу обобщенных импульсов системы $\mathbf{K} = \partial T / \partial \dot{\boldsymbol{\theta}}$, т. е. $\mathbf{Q} = \gamma \mathbf{K}$, где γ – коэффициент усиления, принимаемый постоянным. Такое управление является кинетическим, т. к. оно учитывает собственные свойства системы, и оно позволяет эффективно осуществлять разгон или торможение системы.

Ясно, что уравнения движения рассматриваемой системы, записанные в матричной форме, будут иметь вид [5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} + \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции согласно (1), получим следующее линейное матричное уравнение:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{B}_0 - \gamma \mathbf{A}_0) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (3)$$

которое и является предметом дальнейшего исследования.

3. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ

Переходя к изучению уравнения движения (3) и домножая его на $\dot{\boldsymbol{\theta}}^T$ слева, нетрудно получить энергетическое соотношение [8]:

$$\dot{E} = 2(\gamma T - R) = N(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{D}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4)$$

где матрица \mathbf{D}_0 квадратичной формы обобщенных скоростей, которую представляет собой суммарная мощность $N(\dot{\theta})$ диссипативных сил и управляющих воздействий, имеет вид

$$\mathbf{D}_0 = 2ml^2 \begin{bmatrix} 5\delta - n & 2\delta \cos \alpha \\ 2\delta \cos \alpha & \delta - n \end{bmatrix}, \quad n = \frac{b}{2ml^2}, \quad \delta = \frac{\gamma}{2}, \quad (5)$$

причем параметры n и δ характеризуют диссипативные эффекты и управляющие воздействия соответственно. При этом величина n имеет смысл фактора затухания малых колебаний обычного математического маятника длины l с концевым грузом массы m , в шарнире которого действует вязкое трение с коэффициентом b .

Сначала определим условия на величины n и δ , при которых полная энергия системы всегда будет возрастающей или убывающей функцией. Из формулы (4) следует, что для этого мощность N должна всегда принимать положительные или же отрицательные значения при любых значениях обобщенных скоростей $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$. Поэтому матрица \mathbf{D}_0 должна быть знакоопределенной положительной или отрицательной, что диктуется условиями Сильвестра [9]. Так, для положительной определенности этой матрицы требуется, чтобы

$$5\delta > n, \quad (5\delta - n)(\delta - n) - 4\delta^2 \cos^2 \alpha > 0, \quad (6)$$

тогда как для отрицательной определенности должно быть

$$5\delta < n, \quad (5\delta - n)(\delta - n) - 4\delta^2 \cos^2 \alpha > 0. \quad (7)$$

Решая последовательно системы неравенств (6) и (7), получим соответственно $\delta > n_2$ и $\delta < n_1$, где $n_1 = \eta_1 n$, $n_2 = \eta_2 n$, а безразмерные коэффициенты η_1 и η_2 определяются общей формулой:

$$\eta_s = \frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4\sin^2 \alpha}, \quad (8)$$

где $s = 1, 2$, причем η_1 – меньшее значение, а η_2 – большее.

Если ввести также в рассмотрение безразмерный диссипативный параметр $\nu = n/k$ и безразмерный управляющий параметр $\sigma = \delta/k$, где $k = \sqrt{g/l}$ – частота малых колебаний обычного математического маятника длины l , то условия положительной и отрицательной определенности матрицы (5) примут соответственно вид $\sigma > \eta_2 \nu$ и $\sigma < \eta_1 \nu$.

Из этих рассуждений также следует вывод, что при выполнении условия $\eta_1\nu < \sigma < \eta_2\nu$ мощность N будет являться знакопеременной функцией обобщенных скоростей $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$, так что данному двойному неравенству будут отвечать некоторые промежуточные режимы, для выявления которых требуется специальный анализ.

Рассмотрим теперь подробно весь спектр возможных режимов движения системы. Чтобы построить эти режимы и дать им адекватную интерпретацию и классификацию, следует построить точное аналитическое решение уравнения (3). Разыскивая это решение в виде $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}e^{\lambda t}$, можно прийти к матричному алгебраическому уравнению:

$$[\mathbf{A}_0\lambda^2 + (\mathbf{B}_0 - \gamma\mathbf{A}_0)\lambda + \mathbf{C}_0]\boldsymbol{\Theta} = 0. \quad (9)$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение лишь при условии равенства нулю определителя его матрицы, а именно:

$$\det [\mathbf{A}_0\lambda^2 + (\mathbf{B}_0 - \gamma\mathbf{A}_0)\lambda + \mathbf{C}_0] = 0, \quad (10)$$

и оно является характеристическим уравнением системы.

Обращаясь к структуре матриц \mathbf{A}_0 , \mathbf{C}_0 и \mathbf{B}_0 из (1), нетрудно видеть, что при любом значении угла α между ними имеет место линейная связь:

$$\mathbf{A}_0 + \frac{1}{2n}\mathbf{B}_0 = \frac{2}{k^2}\mathbf{C}_0, \quad (11)$$

которая существенно упрощает все дальнейшие построения. Соотношение (11) означает, что в системе реализуется случай т. н. «пропорционального демпфирования» [8].

Исключая теперь из (10) матрицу \mathbf{B}_0 посредством соотношения (11), получим характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\det \left[\mathbf{A}_0 (\lambda^2 - (2n + \gamma)\lambda) + \mathbf{C}_0 \left(1 + \frac{4n}{k^2}\lambda \right) \right] = 0. \quad (12)$$

Как известно, в рамках консервативной модели, когда управляющие моменты и диссипативные эффекты отсутствуют, уравнение для нахождения собственных частот колебаний k_{s0} , где $s = 1, 2$, имеет вид $\det (\mathbf{C}_0 - k_0^2\mathbf{A}_0) = 0$, и они определяются по формуле [5]:

$$k_{s0} = \sqrt{\frac{2(1 + \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4 \sin^2 \alpha}} k, \quad s = 1, 2. \quad (13)$$

При этом формы колебаний консервативной модели $\Theta_{(s)}$, где $s = 1, 2$, находятся из уравнения $(\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0) \Theta = 0$, и они характеризуются соотношениями амплитуд колебаний β_{s0} шарнирных углов поворота θ_2 и θ_1 [5]:

$$\beta_{s0} = -\frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{\cos 2\alpha \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}} \cos \alpha, \quad s = 1, 2.$$

Возвращаясь теперь к характеристическому уравнению (12) и учитывая, что частоты консервативной модели k_{s0} удовлетворяют уравнению $\det(\mathbf{C}_0 - k_{s0}^2 \mathbf{A}_0) = 0$, нетрудно понять, что значения λ находятся из следующих двух квадратных уравнений:

$$\lambda^2 - (2n + \gamma)\lambda = -k_{s0}^2 \left(1 + \frac{4n}{k^2} \lambda\right), \quad s = 1, 2. \quad (14)$$

Отсюда также вытекает, что и формы колебаний системы при наличии управляющих воздействий и диссипативных эффектов, определяемые из (9) с учетом (11) и (14), останутся такими же, как и в консервативной модели, т. е. будут совпадать со столбцами $\Theta_{(s)}$, удовлетворяющими условию $(\mathbf{C}_0 - k_{s0}^2 \mathbf{A}_0) \Theta_{(s)} = 0$.

Преобразуя далее уравнения (14), получим:

$$\lambda^2 + 2(n_s - \delta)\lambda + k_{s0}^2 = 0, \quad s = 1, 2, \quad (15)$$

где использованы ранее введенные обозначения для величин n_s , а именно, $n_1 = \eta_1 n$, $n_2 = \eta_2 n$. Решения уравнений (15) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \delta - n_1 \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = \delta - n_2 \pm ik_2, \quad (16)$$

где введены новые обозначения: $k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - (\delta - n_s)^2}$, $s = 1, 2$.

Отметим, что общее решение уравнения (3) можно представить в следующей комплексной форме:

$$\theta = e^{\delta t} \left[\Theta_{(1)} e^{-n_1 t} (A_1 e^{ik_1 t} + B_1 e^{-ik_1 t}) + \Theta_{(2)} e^{-n_2 t} (A_2 e^{ik_2 t} + B_2 e^{-ik_2 t}) \right], \quad (17)$$

где A_s и B_s , $s = 1, 2$ – комплексные константы интегрирования, которые из условия вещественности столбца θ должны удовлетворять соотношениям $B_s = \overline{A_s}$. Для их определения следует задать

начальные условия движения: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ и $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_0$ при $t = 0$. Вычисляя далее столбец обобщенных скоростей

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = e^{\delta t} \left\{ \boldsymbol{\Theta}_{(1)} e^{-n_1 t} \left[A_1(\delta - n_1 + ik_1) e^{ik_1 t} + B_1(\delta - n_1 - ik_1) e^{-ik_1 t} \right] + \right. \\ \left. + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} e^{-n_2 t} \left[A_2(\delta - n_2 + ik_2) e^{ik_2 t} + B_2(\delta - n_2 - ik_2) e^{-ik_2 t} \right] \right\}$$

и удовлетворяя начальным условиям, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\Theta}_{(1)} (A_1 + B_1) + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} (A_2 + B_2), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = \boldsymbol{\Theta}_{(1)} [A_1(\delta - n_1 + ik_1) + B_1(\delta - n_1 - ik_1)] + \\ + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} [A_2(\delta - n_2 + ik_2) + B_2(\delta - n_2 - ik_2)]. \end{cases}$$

Умножая каждое из этих уравнений на $\boldsymbol{\Theta}_{(1)}^T \mathbf{A}_0$, а затем и на $\boldsymbol{\Theta}_{(2)}^T \mathbf{A}_0$ слева, а также принимая во внимание условия ортогональности $\boldsymbol{\Theta}_{(1)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(2)} = 0$, $\boldsymbol{\Theta}_{(2)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(1)} = 0$ и вводя обозначения для нормировочных коэффициентов $N_s = \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)}$, $s = 1, 2$, можно получить после выполнения несложных действий следующие выражения для комплексных констант интегрирования:

$$A_s = \frac{(n_s - \delta + ik_s) \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}, \\ B_s = \frac{(-n_s + \delta + ik_s) \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}.$$

Вводя для удобства безразмерные корни характеристического уравнения $\kappa = \lambda/k$, можно записать их согласно (16) с использованием безразмерных параметров ν и σ в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} &= \sigma - \eta_1 \nu \pm i \sqrt{p_{10}^2 - (\sigma - \eta_1 \nu)^2}, \\ \kappa_{3,4} &= \sigma - \eta_2 \nu \pm i \sqrt{p_{20}^2 - (\sigma - \eta_2 \nu)^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где величины η_s определяются по формулам (8), а $p_{s0} = k_{s0}/k$ – безразмерные частоты колебаний системы в рамках консервативной модели, отвечающие истинным частотам (13).

Видно, что в зависимости от соотношения между величинами ν и σ значения κ могут быть как вещественными (положительными или отрицательными), так и комплексными (при этом имея

положительную или отрицательную вещественную часть). Все эти случаи предопределяют принципиально различный качественный характер возникающих режимов движения системы.

Для того чтобы наглядно представить характер режимов движения системы под действием управляющих воздействий и при наличии диссипативных эффектов, а также оценить их общее количество, построим на плоскости параметров $\nu\sigma$ семейство пограничных линий, на которых происходит смена характера движения по каждой из форм $\Theta_{(s)}$ с затухающего на разгонный и с колебательного на апериодический. Из выражений (18) ясно, что этими пограничными линиями являются следующие шесть прямых:

$$\sigma = \eta_1\nu, \quad \sigma = \eta_2\nu, \quad \sigma = \eta_1\nu \pm p_{10}, \quad \sigma = \eta_2\nu \pm p_{20}. \quad (19)$$

На первых двух из выписанных прямых обращаются в нуль вещественные части корней $\kappa_{1,2}$ и $\kappa_{3,4}$ соответственно, а на двух оставшихся парах – мнимые, причем эти последние две пары можно также представить в виде $\sigma = p_{10}(\pm 1 + \nu/\nu_{10})$ и $\sigma = p_{20}(\pm 1 + \nu/\nu_{20})$, где величины ν_{10} и ν_{20} определяются по формулам

$$\nu_{s0} = \frac{p_{s0}}{\eta_s} = \sqrt{\frac{(1 + 4 \sin^2 \alpha) \left[2(1 + \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha} \right]}{\left(3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha} \right)^2}}, \quad s = 1, 2.$$

При этом следует подчеркнуть, что $\nu_{20} < \nu_{10}$ при любом значении угла α , в чем легко убедиться непосредственно.

Прямые (19) показаны на рис. 2. Учитывая, что $\nu > 0$, а параметр σ может быть как положительным, так и отрицательным, можно заключить, что данные прямые делят полуплоскость $\nu > 0$ на 11 областей с различным характером движения системы.

Дадим развернутую классификацию этих областей:

- 1 – апериодический разгон обеих форм $\Theta_{(1)}$ и $\Theta_{(2)}$;
- 2 – апериодический разгон формы $\Theta_{(1)}$, колебательный разгон формы $\Theta_{(2)}$;
- 3 – колебательный разгон обеих форм $\Theta_{(1)}$ и $\Theta_{(2)}$;
- 4 – колебательный разгон формы $\Theta_{(1)}$, колебательное гашение формы $\Theta_{(2)}$;

- 5 – аperiodический разгон формы $\Theta_{(1)}$, колебательное гашение формы $\Theta_{(2)}$;
 6 – колебательный разгон формы $\Theta_{(1)}$, аperiodическое гашение формы $\Theta_{(2)}$;
 7 – аperiodический разгон формы $\Theta_{(1)}$, аperiodическое гашение формы $\Theta_{(2)}$;
 8 – колебательное гашение обеих форм $\Theta_{(1)}$ и $\Theta_{(2)}$;
 9 – колебательное гашение формы $\Theta_{(1)}$, аperiodическое гашение формы $\Theta_{(2)}$;
 10 – аperiodическое гашение формы $\Theta_{(1)}$, колебательное гашение формы $\Theta_{(2)}$;
 11 – аperiodическое гашение обеих форм $\Theta_{(1)}$ и $\Theta_{(2)}$.

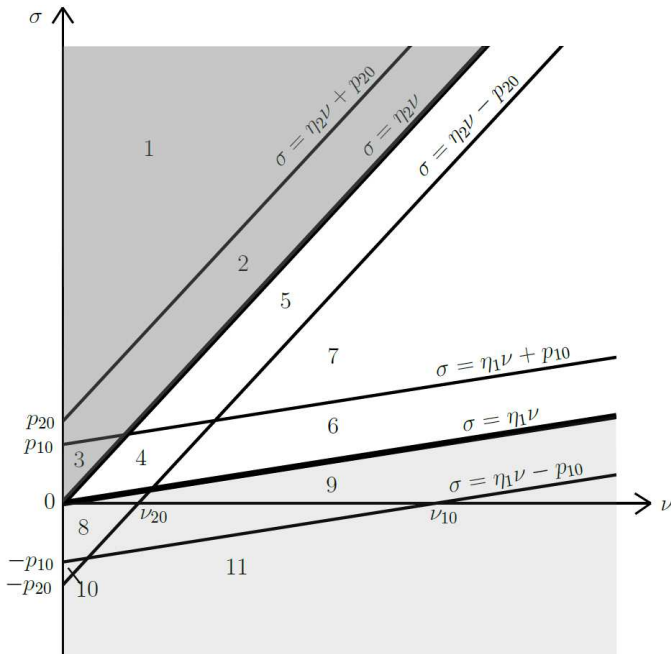


Рис. 2. Диаграмма режимов движения системы

Следует отметить, что в том случае, когда какая-либо часть решения (17) уже не носит колебательного характера, а имеет апериодический характер, то отвечающий ей столбец $\Theta_{(s)}$ более корректно называть уже не формой колебаний, а формой движения.

Возвращаясь теперь к ранее полученным результатам, можно видеть, что условие $\sigma > \eta_2\nu$ имеет место в областях 1, 2 и 3, где обе формы раскачиваются, а условие $\sigma < \eta_1\nu$ выполнено в областях 8, 9, 10 и 11, когда обе формы гасятся, как этого и следовало ожидать. Эти группы областей для наглядности выделены на диаграмме режимов соответственно темным и светлым фоном. В областях 4, 5, 6 и 7 реализуются промежуточные режимы, когда первая форма раскачивается, а вторая – гасится, и им отвечает условие $\eta_1\nu < \sigma < \eta_2\nu$. Особый практический интерес могут представлять области 4 и 6, поскольку при выборе параметров ν и σ в этих областях вторая форма будет гаситься (колебательно или апериодически соответственно), и в результате с течением времени можно наблюдать только одну раскачивающуюся первую форму. Отметим также, что если выбрать параметры ν и σ на границе $\sigma = \eta_1\nu$, то с течением времени можно будет наблюдать незатухающие колебания только по одной первой форме.

Остается подчеркнуть, что приведенная на рис. 2 диаграмма режимов движения сохраняет свою качественную структуру при любом значении угла α между шарнирными осями пространственного двойного маятника, и она обобщает диаграмму, построенную для случая плоского двойного маятника и лишь при $\sigma > 0$ в [11].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было изучено совместное влияние управляющих воздействий и диссипативных эффектов на динамическое поведение пространственного двойного маятника, обладающего неколлинеарными шарнирными осями. Проведенные в рамках линейной модели аналитические преобразования позволили получить достаточно несложные конечные выражения, описывающие движение рассматриваемой системы. Для иллюстрации картины распределения возможных режимов движения системы была построена на-

глядная графическая иллюстрация в виде диаграммы режимов, каждый из которых обладает своими отличительными особенностями, и она может оказаться полезной при выборе наиболее пригодных из этих режимов для конкретных практических целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агарева О. Ю.* Относительные равновесия двойного сферического маятника и их устойчивость / О. Ю. Агарева // Деп. в ВИНТИ 4.12.1996. – 1996. – № 34930-B96.
2. *Xinjilefu.* Stabilization of the spatial double inverted pendulum using stochastic programming seen as a model of standing postural Control / Xinjilefu, V. Hayward, H. Michalska // 9th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. – 2009. – P. 367–372.
3. *Ludwicki M.* Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up / M. Ludwicki, J. Awrejcewicz, G. Kudra // International Journal of Dynamics and Control. – 2015. – Vol. 3. – P. 1–8.
4. *Bendersky S.* Investigation of a spatial double pendulum: an engineering approach / S. Bendersky, B. Sandler // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2006. – P. 1–22.
5. *Smirnov A. S.* Dissipative model of double mathematical pendulum with noncollinear joints / A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education". Saint Petersburg, Russia, June 2021. – 2022. – P. 38–47.
6. *Smirnov A. S.* Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain / A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // Cybernetics and Physics. – 2021. – Vol. 10. – No. 2. – P. 90–96.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
8. *Смирнов А. С.* Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи / А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2022. – Т. 9. – Вып. 2. – С. 357–365.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 300 с.
10. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.
11. *Леонтьев В. А.* Коллинеарное управление колебаниями диссипативного двойного маятника / В. А. Леонтьев, А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Робототехника и техническая кибернетика. – 2019. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 65–70.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИИ

Н. К. ЕГОРОВА

В работе обсуждается ряд вопросов, связанных с моделированием тела человека в условиях вибрации. В частности, вопрос о единственности набора параметров механических моделей, учет влияния многосуставных мышц позвоночника, которые в значительной степени определяют механические свойства позвоночника, учет реальных механических свойств межпозвонковых дисков.

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в области создания новых машин и технологических процессов сопровождается увеличением механических воздействий на человека. Эксплуатация различных технических устройств и машин приводит к утомлению, болевым ощущениям, профессиональным заболеваниям. Среди всего многообразия воздействий на тело человека чаще других встречается действие вибрации. Вибрации, возникающие при движении транспортных средств, как правило, имеют вертикальное направление.

Проблема защиты человека от вредного влияния вибрационных нагрузок, порождаемых машинами в процессе их функционирования, весьма многогранна, поэтому ее решение возможно только в результате комплексных исследований, одним из главных аспектов которых является изучение биомеханики тела человека в условиях динамических нагрузок и построение механических моделей. При этом необходимы механические модели, с помощью которых можно оценивать степень напряжения в межпозвонковых дисках и перемещения позвонков, прежде всего в шейном и поясничном отделах.

Исследования в области изучения влияния вибрации на тело человека принадлежат к одному из самых перспективных направлений современной биомеханики и интенсивно ведутся в течение более 60 лет у нас в стране и за рубежом.

Доклад на семинаре 12 ноября 2024 г.

© Н. К. Егорова, 2025.

К основным трудностям, возникающим при разработке моделей тела человека, относятся следующие:

- большое число степеней свободы у тела человека;
- сложность, а иногда принципиальная невозможность измерения механических параметров у живого человека;
- изменяемость механических параметров за счет протекания биологических процессов, и, в частности, за счет управления со стороны нервной системы.

Наиболее принципиальными вопросами при создании модели тела человека являются:

1. Как по экспериментальным данным определить класс механических систем, в котором следует искать механическую модель?
2. Как выяснить, существует ли вообще в заданном классе механическая система, воспроизводящая экспериментальные зависимости с заданной степенью точности?
3. Если для механической модели с определенной уже структурой найден набор параметров, то необходимо выяснить: является ли этот набор единственным?
4. Достаточно ли полученных экспериментальных данных для идентификации механической модели или нужны дополнительные измерения?

В силу этого не представляется возможным построить универсальную модель, способную ответить на все вопросы, возникающие при анализе вибрационного воздействия, и, следовательно, необходимо использовать набор таких моделей, выбираемых в зависимости от воздействия и цели конкретного исследования, а значения параметров модели необходимо идентифицировать на основе данных, полученных при экспериментальных исследованиях воздействия вибрационных нагрузок на человека (эксперименты с испытуемыми); необходимо учитывать разброс значений параметров

модели в зависимости от антропометрических данных, возраста, пола, физического развития и т. д. [1].

Механические модели тела человека разрабатываются на основе экспериментальных исследований частотных характеристик тела человека. При малых колебаниях и достаточно малых частотах возбуждения (до 100 Гц) тело человека можно рассматривать как линейную вязкоупругую механическую систему. Это позволяет описывать динамические свойства тела с помощью передаточной функции (ПФ) $H(p)$ при описании вынужденных колебаний точки наблюдения [2]. Модуль ПФ $|H(i\omega)|$ представляет собой безразмерную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) $H(\omega)$ (зависимость от частоты амплитуды колебаний точки наблюдения, отнесенной к амплитуде колебаний точки, в которой приложено возбуждение).

Частотные характеристики тела человека служат исходными данными при расчете эффективных систем виброзащиты человека, разработке гигиенических норм вибрации [3], определении параметров эквивалентных механических моделей.

Численные значения и характер частотных характеристик существенно зависят от выбора мест приложения вынуждающей вибрации и точки, в которой измеряются параметры вынужденных колебаний тела человека. Изменение рабочей позы или активности различных групп мышц, а также изменение взаимодействия с опорными поверхностями (спинками сидений, подлокотниками и т. д.) или дополнительными внешними системами (органами управления и др.) могут значительно повлиять на динамические свойства тела человека. Измерения, как правило, производятся на сиденье и голове сидящего человека.

Следует отметить исследования, проводившиеся в Институте машиноведения АН СССР. В частности, в [4] представлены результаты экспериментальных исследований, в которых были получены АЧХ тела человека, подверженного действию вертикальной вибрации от 0 до 200 Гц одного уровня ускорения в трех сидячих позах. Надо заметить, что выбранный диапазон частот является самым широким из приведенных в литературе. Полученные авторами АЧХ тела человека для выбранных поз значительно отличаются друг от друга как по количеству резонансных частот, так и

по их значениям. Так, для выпрямленной позы сидя были установлены три резонансные частоты: первая в диапазоне от 4 до 6 Гц, вторая – от 10 до 15 Гц, третья, слабо выраженная, – около 30 Гц.

При этом была установлена схожесть полученных характеристик, как и отмечалось выше, с характеристиками механических систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных между собой последовательно пружинами и демпферами, что послужило основанием для построения механических моделей с сосредоточенными параметрами цепной структуры.

Построение таких моделей основывается, как отмечено в [5], на предположении о внутренней структуре «черного ящика», которая не может быть определена единственным образом. Это достаточно наглядно продемонстрировано на моделях, представленных в [6–9]. В данных моделях абсолютно твердые тела никак не связаны с частями тела человека. По существу, это не модели человека, а модели АЧХ. Модель тела человека должна содержать моделируемые части тела человека, для каждой из которых экспериментально определены передаточные функции.

Кроме того, увеличение числа степеней свободы механических моделей не позволяет добиться воспроизведения особенностей АЧХ тела человека. При этом резко обостряется проблема определения большого количества параметров моделей, значительная часть которых не может быть непосредственно измерена в экспериментах с испытуемыми, а следовательно, возникает опасность того, что определение параметров окажется неоднозначным. Иными словами, решение задачи параметрической идентификации механической модели может оказаться не единственным. При этом, как отмечается в [10], важно не просто найти решение системы уравнений, определяющей параметры модели, а исследовать его с точки зрения единственности, что является принципиально важным при использовании механических моделей тела человека при построении систем виброзащиты.

В то же время учет в структуре моделей тела человека многоставных мышц и межпозвонковых дисков может позволить существенно приблизиться к экспериментальным АЧХ без значительного увеличения числа степеней свободы.

2. ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА, ПОДВЕРЖЕННОГО ВИБРАЦИОННОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Как уже отмечалось, анализ предшествующих исследований показал, что при поиске параметров в большинстве предложенных механических моделей не ставился вопрос о единственности найденного набора этих параметров. В то же время данный вопрос, как отмечалось ранее, является принципиально важным при использовании механических моделей тела человека в построении систем виброзащиты.

2.1. Система с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую модель, состоящую из двух масс, соединенных линейными пружинами и демпферами, которая расположена на вибрирующем основании (рис. 1).

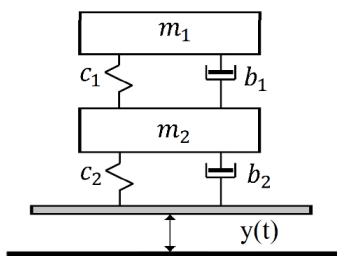


Рис. 1. Двухмассовая механическая модель тела человека, подверженного вибрации

Здесь следует отметить, что в экспериментальных исследованиях, как отмечалось выше, измерения проводятся, как правило, на голове. Из этого можно заключить, что эти измерения относятся к массе m_1 , хотя, строго говоря, это не обязательно модель головы.

Уравнения движения механической системы, представленной на рис. 1, в абсолютной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{y}) + c_2(x_2 - y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где m_1 и m_2 – верхняя и нижняя массы; y – перемещение вибрирующего основания; x_1 и x_2 – перемещения верхней и нижней масс; c_1 и c_2 – жесткости пружин, соединяющих массы m_1 и m_2 ; b_1 и b_2 – соответствующие коэффициенты демпфирования.

Построим ПФ рассматриваемой механической системы. Для этого применим к системе уравнений движения (1) преобразование Лапласа (с нулевыми начальными данными):

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt,$$

где p – комплексная переменная.

Заменяя функции $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) и $y(t)$ по правилу преобразования Лапласа их изображениями $X_i(p)$ ($i = 1, 2$) и $Y(p)$, получаем при начальных нулевых условиях вместо системы (1) обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $x_i(t)$ и $y(t)$ систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $X_i(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} (m_1 p^2 + b_1 p + c_1)X_1(p) - (b_1 p + c_1)X_2(p) = 0, \\ -(b_1 p + c_1)X_1(p) + (m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + (c_1 + c_2))X_2(p) = \\ = (b_2 p + c_2)Y(p). \end{cases} \quad (2)$$

Как известно, ПФ, обозначаемая через $H_i(p)$ ($i = 1, 2$) и представляющая собой отношение изображений входной и выходной координаты объекта, вычисляется по формуле

$$H_i(p) = \frac{X_i(p)}{Y(p)}. \quad (3)$$

Поделим каждое из уравнений системы (2) на $Y(p)$:

$$\begin{cases} (m_1 p^2 + b_1 p + c_1)H_1(p) - (b_1 p + c_1)H_2(p) = 0, \\ -(b_1 p + c_1)H_1(p) + (m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + (c_1 + c_2))H_2(p) = \\ = b_2 p + c_2. \end{cases} \quad (4)$$

Разрешая систему (4) относительно $H_i(p)$, получим:

$$H_1(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (5)$$

$$H_2(p) = \frac{\beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{\delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}. \quad (6)$$

Коэффициенты в передаточных функциях (5) и (6) связаны с параметрами модели следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 = \alpha_0 = \beta_0 = c_1 c_2, \\ \delta_1 = \alpha_1 = \beta_1 = c_1 b_2 + c_2 b_1, \\ \delta_2 = (m_1 + m_1) c_1 + m_1 c_2 + b_1 b_2, \\ \delta_3 = (m_1 + m_1) b_1 + m_1 b_2, \\ \delta_4 = m_1 m_2, \\ \alpha_2 = b_1 b_2, \\ \beta_2 = m_1 c_2 + b_1 b_2, \\ \beta_3 = m_1 b_2. \end{array} \right. \quad (7)$$

Амплитудно-частотные характеристики, соответствующие передаточным функциям $H_i(p)$ ($i = 1, 2$), как известно, получаются в результате подстановки в них вместо комплексной переменной p мнимой переменной $i\omega$ с последующим определением их модуля.

После подстановки уравнения (5)–(6) приобретут следующий вид:

$$H_1(i\omega) = \frac{-\alpha_2 \omega^2 + \alpha_1 i\omega + \alpha_0}{\delta_4 \omega^4 - \delta_3 i\omega^3 - \delta_2 \omega^2 + \delta_1 i\omega + \delta_0},$$

$$H_2(i\omega) = \frac{-\beta_3 i\omega^3 - \beta_2 \omega^2 + \beta_1 i\omega + \beta_0}{\delta_4 \omega^4 - \delta_3 i\omega^3 - \delta_2 \omega^2 + \delta_1 i\omega + \delta_0}.$$

Окончательно АЧХ будут иметь следующий вид:

$$H_1(\omega) = |H_1(i\omega)| = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2}{(\delta_4 \omega^4 - \delta_2 \omega^2 + \delta_0)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}, \quad (8)$$

$$H_2(\omega) = |H_2(i\omega)| = \sqrt{\frac{(\beta_0 - \beta_2 \omega^2)^2 + (\beta_1 \omega - \beta_3 \omega^3)^2}{(\delta_4 \omega^4 - \delta_2 \omega^2 + \delta_0)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}. \quad (9)$$

Значения коэффициентов α_i , β_i и δ_i определяются таким образом, чтобы максимально приблизить теоретические АЧХ (8) и (9) к экспериментальным. Наличие этих коэффициентов всегда позволяет построить и передаточные функции в изображениях. В большинстве экспериментальных исследований измерение вибрации производилось на сиденье (сигнал на входе) и на голове испытуемого (сигнал на выходе). В этом случае можно построить лишь одну передаточную функцию $H_1(p)$ (5).

Определив таким образом их значения, мы будем иметь в соответствии с соотношениями (7) шесть нелинейных уравнений для определения значения шести неизвестных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 = \alpha_0 = c_1 c_2, \\ \delta_1 = \alpha_1 = c_1 b_2 + c_2 b_1, \\ \delta_2 = (m_1 + m_1) c_1 + m_1 c_2 + b_1 b_2, \\ \delta_3 = (m_1 + m_1) b_1 + m_1 b_2, \\ \delta_4 = m_1 m_2, \\ \alpha_2 = b_1 b_2. \end{array} \right.$$

Кроме того, нам известна общая масса системы M , что дает нам дополнительное соотношение между параметрами m_1 и m_2 :

$$m_1 + m_2 = M. \quad (10)$$

Тогда, используя выражение для δ_4 , получим квадратное уравнение для одной из масс, например для $m_1 = M - m_2$, а именно

$$m_1^2 - M m_1 + \delta_4 = 0.$$

Это уравнение имеет два вещественных решения:

$$(m_1)_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4\delta_4}}{2} \quad \text{при } M^2 - 4\delta_4 > 0,$$

а значит, и для m_2 мы будем иметь два значения.

Далее из соотношения для δ_3 с использованием соотношения для α_2 можно получить квадратное уравнение относительно b_1 :

$$M b_1^2 - \delta_3 b_1 + m_1 \alpha_2 = 0,$$

которое также имеет два вещественных решения для каждого из двух значений m_1 :

$$(b_1)_{1,2} = \frac{\delta_3 \pm \sqrt{\delta_3^2 - 4m_1 M \alpha_2}}{2M} \quad \text{при } \delta_3^2 - 4m_1 M \alpha_2 > 0.$$

Наконец, из соотношений α_0 и α_1 можно получить ещё одно квадратное уравнение относительно c_1 :

$$b_2 c_1^2 - \alpha_1 c_1 + \alpha_0 b_1 = 0,$$

имеющее два вещественных решения для каждого из двух значений b_1 и b_2 :

$$(c_1)_{1,2} = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4b_1 b_2 \alpha_0}}{2b_2} \quad \text{при } \alpha_1^2 - 4b_1 b_2 \alpha_0 > 0.$$

В результате мы имеем 2 значения для параметров модели m_1 и m_2 , 4 значения для параметров b_1 , b_2 и 8 значений для параметров c_1 и c_2 .

Некоторые авторы механических моделей тела человека (см., например, [4]) заранее задают значения масс, предполагая, что они знают, какая масса какой части тела соответствует. В нашем случае это соответствует заданию значений m_1 и m_2 . Однако из приведенных выше формул видно, что для параметров модели b_1 , b_2 , c_1 и c_2 неоднозначность и в этом случае будет сохраняться.

В том случае, когда для массы m_2 можно экспериментально получить амплитудно-частотную характеристику, для определения параметров модели можно воспользоваться их связью с коэффициентами β_i теоретической передаточной функции $H_2(p)$, приведённой выше.

Поскольку $\beta_0 = \alpha_0$, а $\beta_1 = \alpha_1$, выражения коэффициентов этой передаточной функции через параметры модели (7) дает нам дополнительно два соотношения, а именно

$$\beta_2 = c_2 m_1 + b_1 b_2, \quad \beta_3 = b_2 m_1.$$

В силу того, что

$$\delta_2 = M c_1 + c_2 m_1 + b_1 b_2 = M c_1 + \beta_2,$$

$$\delta_3 = M b_1 + b_2 m_1 = M b_1 + \beta_3,$$

параметры c_1 и b_1 определяются однозначно:

$$c_1 = \frac{\delta_2 - \beta_2}{M}, \quad b_1 = \frac{\delta_3 - \beta_3}{M}.$$

Далее определяем оставшиеся параметры модели:

$$c_2 = \frac{M\delta_0}{\delta_2 - \beta_2} = \frac{M\alpha_0}{\delta_2 - \beta_2} = \frac{M\beta_0}{\delta_2 - \beta_2}, \quad b_2 = \frac{M\alpha_2}{\delta_3 - \beta_3}.$$

Заметим, что в этом случае, чтобы однозначно определить величины m_1 и m_2 , достаточно знать общую массу M , поскольку из условия для β_3

$$m_1 = \frac{\beta_3(\delta_3 - \beta_3)}{M\alpha_2},$$

а из соотношения (10)

$$m_2 = M - m_1.$$

Таким образом, для однозначного определения параметров двух-массовой модели тела человека, подверженного вибрации, необходимо знать передаточные функции $H_1(p)$, $H_2(p)$ и значение общей массы M .

2.2. Система с тремя степенями свободы

Рассмотрим механическую модель тела человека, подверженного вибрации цепной структуры с тремя степенями свободы (рис. 2). Данная механическая система была предложена, например, в [4]. Соответствующие массы, жесткости пружин и коэффициенты вязкого трения демпферов модели обозначим через m_i , c_i , b_i ($i = \overline{1, 3}$). В качестве внешнего воздействия, как и для двухмассовой модели, будем рассматривать перемещение основания $y(t)$, т. е. кинематическое возбуждение.

Рассмотрим вопрос однозначности параметров данной системы.

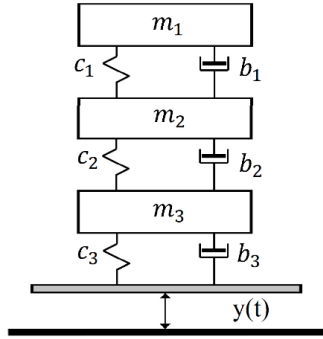


Рис. 2. Трехмассовая механическая модель тела человека, подверженного вибрации

Уравнения движения предлагаемой модели в абсолютной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + \\ \quad + c_2(x_2 - x_3) = 0, \\ m_3\ddot{x}_3 - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - c_2(x_2 - x_3) + b_3(\dot{x}_3 - \dot{y}) + \\ \quad + c_3(x_3 - y) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где m_i ($i = \overline{1, 3}$) – массы системы; y – перемещение вибрирующего основания; x_i ($i = \overline{1, 3}$) – перемещения масс; c_i ($i = \overline{1, 3}$) – жесткости пружин, соединяющих массы; b_i ($i = \overline{1, 3}$) – соответствующие коэффициенты демпфирования.

ПФ данной механической системы имеют вид

$$H_1(p) = \frac{\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_6 p^6 + \delta_5 p^5 + \delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (12)$$

$$H_2(p) = \frac{\beta_4 p^4 + \beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{\delta_6 p^6 + \delta_5 p^5 + \delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (13)$$

$$H_3(p) = \frac{\gamma_5 p^5 + \gamma_4 p^4 + \gamma_3 p^3 + \gamma_2 p^2 + \gamma_1 p + \gamma_0}{\delta_6 p^6 + \delta_5 p^5 + \delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (14)$$

где

$$\begin{cases} \delta_0 = \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = c_1 c_2 c_3, \\ \delta_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = b_1 c_2 c_3 + b_2 c_1 c_3 + b_3 c_1 c_2, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \delta_2 = m_1(c_1(c_2 + c_3) + c_2 c_3) + m_2 c_1 c_3 + m_3 c_1 c_2 + c_1 b_2 b_3 + \\ \quad + c_2 b_1 b_3 + c_3 b_1 b_2, \\ \delta_3 = m_1(b_1(c_2 + c_3) + b_2(c_1 + c_3) + b_3(c_1 + c_2)) + \\ \quad + m_2(b_1(c_2 + c_3) + b_2 c_1 + b_3 c_1) + m_3(b_1 c_2 + b_2 c_1) + b_1 b_2 b_3, \\ \delta_4 = m_1 m_2(c_2 + c_3) + m_1 m_3(c_1 + c_2) + m_2 m_3 c_1 + \\ \quad + m_1(b_1(b_2 + b_3) + b_2 b_3) + m_2(b_1 b_2 + b_1 b_3) + m_3 b_1 b_2, \\ \delta_5 = m_1 m_2(b_2 + b_3) + m_1 m_3(b_1 + b_2) + m_2 m_3 b_1, \\ \delta_6 = m_1 m_2 m_3, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = c_1 b_2 b_3 + c_2 b_1 b_3 + c_3 b_1 b_2, \\ \alpha_3 = b_1 b_2 b_3, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \beta_2 = c_1 b_2 b_3 + c_2 b_1 b_3 + c_3 b_1 b_2 + m_1 c_2 c_3 = \alpha_2 + m_1 c_2 c_3, \\ \beta_3 = b_1 b_2 b_3 + m_1(b_2 c_3 + b_3 c_2) = \alpha_3 + m_1(b_2 c_3 + b_3 c_2), \\ \beta_4 = m_1 b_2 b_3, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = c_1 b_2 b_3 + c_2 b_1 b_3 + c_3 b_1 b_2 + m_1 c_3(c_1 + c_2) + m_2 c_1 c_3 = \\ \quad = \beta_2 + (m_1 + m_2) c_1 c_3, \\ \gamma_3 = b_1 b_2 b_3 + m_1(b_3(c_1 + c_2) + c_3(b_1 + b_2)) + \\ \quad + m_2(b_1 c_3 + b_3 c_1) = \beta_3 + (m_1 + m_2)(b_1 c_3 + b_3 c_1), \\ \gamma_4 = m_1 b_3(b_1 + b_2) + m_2 b_1 b_3 + m_1 m_2 c_3, \\ \gamma_5 = m_1 m_2 b_3. \end{cases} \quad (19)$$

Как уже отмечалось ранее, в большинстве экспериментальных исследований измерение вибрации производилось на сиденье и на голове испытуемого. В этом случае можно построить лишь одну передаточную функцию $H_1(p)$. Как и в случае с двухмассовой моделью, рассмотрим вначале АЧХ на верхней массе (12):

$$H_1(\omega) = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega - \alpha_3 \omega^3)^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4 - \delta_6 \omega^6)^2 + (-\delta_1 \omega + \delta_3 \omega^3 - \delta_5 \omega^5)^2}}.$$

Значения коэффициентов α_i и δ_i определяются таким образом, чтобы максимально приблизить теоретическую АЧХ к экспериментальной. Наличие этих коэффициентов всегда позволяет построить

и передаточную функцию в изображениях. Определив таким образом их значения, мы будем иметь в соответствии с соотношениями (15)–(17) девять нелинейных уравнений для определения значения девяти неизвестных m_i, b_i, c_i ($i = \overline{1, 3}$).

Ввиду того что все 9 уравнений нелинейные, решение данной системы в общем случае не единственно. Добавление к этим уравнениям ещё одного, которое отражает знание общей массы модели, а именно

$$m_1 + m_2 + m_3 = M,$$

не решает проблему.

Введем некоторые допущения. Положим, что структура моделируемого объекта совпадает со структурой нашей механической модели, и возможно экспериментально получить АЧХ не только для верхней массы, но и для масс m_2 и m_3 , теоретические АЧХ которых равны:

$$H_2(\omega) = \sqrt{\frac{(\beta_0 - \beta_2\omega^2 + \beta_4\omega^4)^2 + (\beta_1\omega - \beta_3\omega^3)^2}{(\delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \delta_6\omega^6)^2 + (-\delta_1\omega + \delta_3\omega^3 - \delta_5\omega^5)^2}},$$

$$H_3(\omega) = \sqrt{\frac{(\gamma_0 - \gamma_2\omega^2 + \gamma_4\omega^4)^2 + (\gamma_1\omega - \gamma_3\omega^3 + \gamma_5\omega^5)^2}{(\delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \delta_6\omega^6)^2 + (-\delta_1\omega + \delta_3\omega^3 - \delta_5\omega^5)^2}}.$$

Из условия максимального приближения теоретических АЧХ к экспериментальным определяем коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и δ_i . Наличие этих коэффициентов, как указывалось ранее, всегда позволяет построить и передаточные функции в изображениях. Определив таким образом их значения, мы будем иметь в соответствии с соотношениями (15)–(19) 16 нелинейных уравнений для определения значения девяти неизвестных m_i, b_i, c_i ($i = \overline{1, 3}$). Все уравнения системы являются нелинейными, поэтому решение данной системы в общем случае не единственно.

Если же возможно провести дополнительные измерения и измерить все массы, то параметры c_i, b_i можно определить однозначно:

$$c_1 = \frac{\alpha_0 m_1}{\beta_2 - \alpha_2},$$

$$c_2 = \frac{(\beta_2 - \alpha_2)m_2^2\beta_4}{(\gamma_4 - \beta_4)m_2\beta_4 - (m_1 + m_2)\alpha_3\gamma_5},$$

$$c_3 = \frac{(\gamma_4 - \beta_4)m_3m_2\beta_4 - (m_1 + m_2)\alpha_3\gamma_5m_3}{m_2\beta_4},$$

$$b_1 = \frac{\alpha_3m_1}{\beta_4}, \quad b_2 = \frac{b_4m_2}{\gamma_5}, \quad b_3 = \gamma_5m_3.$$

Таким образом, в отличие от системы с двумя степенями свободы для данной механической системы возможно определить единственным образом значения вязких и упругих элементов лишь при условии, что все массы модели известны и можно измерить их АЧХ.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МНОГОЗВЕННЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ДИНАМИКУ МОДЕЛИ ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИЙ

С анатомической точки зрения основной вклад в механические свойства тела сидящего человека вносят многосуставные мышцы позвоночника. В частности, хорошо известно, что в отсутствие мышц позвоночный столб не в состоянии сохранять свою конфигурацию. Однако влияние многосуставных мышц на механические характеристики тела человека в условиях вибрации не изучалось, хотя в случае ударных воздействий такие попытки предпринимались [11]. В связи с этим была поставлена задача моделирования и исследования влияния данных мышц на частотные свойства тела сидящего человека.

Специфика работы скелетных мышц в условиях вибрации заключается в следующем. Во-первых, при воздействии с частотой до 1 Гц нервная система реагирует на каждое колебание, но при более высоких частотах напряжение мышц становится практически постоянным. Было установлено, что при длительном действии вибраций на тело сидящего человека ускорения на голове уменьшаются, в то время как смещения увеличиваются [12]. Во-вторых, поскольку уровень воздействия вибрации на организм человека определяется ускорением [3], то допустимые значения амплитуды колебаний при экспериментальных исследованиях на испытуемых со-

ставляют в области первого резонансного пика (от 4 до 6 Гц) несколько миллиметров с последующим снижением в каждой октавной полосе частот и при столь малых амплитудах вибрации силу, развиваемую мышцей, можно считать пассивной и вязкоупругой, а многосуставную мышцу моделировать многозвенным вязкоупругим соединением.

3.1. Система с двумя степенями свободы и двухзвенным соединением

Рассмотрим двухмассовую модель, снабженную двухзвенными соединениями (рис. 3). Ее уравнения движения в абсолютной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) + b_0(\dot{x}_1 - \dot{y}) + c_0(x_1 - y) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{y}) + c_2(x_2 - y) = 0, \end{cases}$$

где x_i – перемещение тела массы m_i ($i = 1, 2$); y – перемещение вибрирующего основания; c_j , b_j ($j = \overline{0, 2}$) – жесткости пружин и коэффициенты вязкого трения демпферов соответственно. Предполагается, что тело массой m_0 жестко закреплено на основании, т. е. не происходит его «отрывов» от основания.

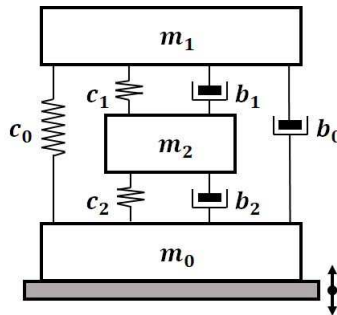


Рис. 3. Механическая система цепной структуры с двумя степенями свободы с двухзвенными соединениями

ПФ данной системы будут иметь вид

$$H_1(p) = \frac{\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0},$$

$$H_2(p) = \frac{\beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{\delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0},$$

где

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \alpha_0 = \beta_0 = c_1 c_2 + c_0(c_1 + c_2), \\ \delta_1 &= \alpha_1 = \beta_1 = c_1 b_2 + c_2 b_1 + b_0(c_1 + c_2) + c_0(b_1 + b_2), \\ \delta_2 &= (m_1 + m_2)c_1 + c_2 m_1 + b_1 b_2 + c_0 m_2 + b_0(b_1 + b_2), \\ \delta_3 &= b_1(m_1 + m_2) + b_2 m_1 + b_0 m_2, \\ \delta_4 &= m_1 m_2, \\ \alpha_2 &= b_1 b_2 + b_0(b_1 + b_2) + c_0 m_2, \\ \alpha_3 &= b_0 m_2, \\ \beta_2 &= b_1 b_2 + c_2 m_1 + b_0(b_1 + b_2), \\ \beta_3 &= b_2 m_1. \end{aligned}$$

АЧХ, соответствующие передаточным функциям $H_i(p)$, будут иметь вид

$$H_1(\omega) = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega - \alpha_3 \omega^3)^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}, \quad (20)$$

$$H_2(\omega) = \sqrt{\frac{(\beta_0 - \beta_2 \omega^2)^2 + (\beta_1 \omega - \beta_3 \omega^3)^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}.$$

Значения коэффициентов α_i и δ_i в выражении (20) определяют таким образом, чтобы максимально приблизить теоретическую АЧХ к экспериментальной. Наличие этих коэффициентов всегда позволяет построить и передаточную функцию в изображениях.

Условие равенства нулю числителя АЧХ при $b_j (j = \overline{0, 2})$ определяет число антирезонансных частот на данной массе. На верхней массе нашей системы в соответствии с (20) получаем следующее равенство:

$$\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2 = 0,$$

в соответствии с которым на верхней массе имеем одну антирезонансную частоту:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}} = \sqrt{\frac{c_1 c_2 + c_0(c_1 + c_2)}{c_0 m_2}}.$$

Заметим, что в отсутствие многозвенных соединений, т. е. в данном случае при $c_0 = 0$, антирезонансных частот на верхней массе данной системы не будет.

3.2. Модель с произвольным числом степеней свободы и одним многозвенным соединением

Рассмотрим механическую систему аналогичной структуры, имеющую n степеней свободы (рис. 4).

В качестве внешнего воздействия, как и для двухмассовой модели, будем рассматривать перемещение основания $y(t)$, т. е. кинематическое возбуждение.

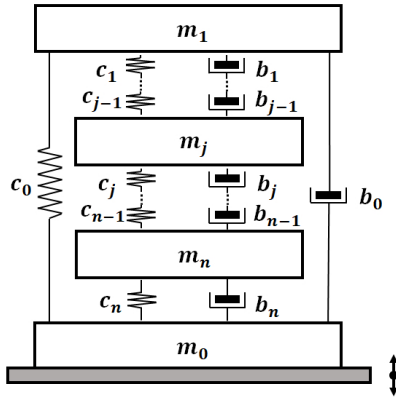


Рис. 4. Многомассовая механическая система с многозвенными соединениями

Уравнения движения этой системы в абсолютной системе координат будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) + b_0(\dot{x}_1 - \dot{y}) + c_0(x_1 - y) = 0, \\ \vdots \\ m_i \ddot{x}_i - b_{i-1}(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) + b_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) - \\ - c_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + c_i(x_i - x_{i+1}) = 0, \\ \vdots \\ m_n \ddot{x}_n - b_{n-1}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) + b_n(\dot{x}_n - \dot{y}) - \\ - c_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + c_n(x_n - y) = 0, \end{array} \right.$$

где x_i – перемещение тела массы m_i ($i = \overline{1, n}$); y – перемещение вибрирующего основания; c_j , b_j ($j = \overline{0, n}$) – жесткости пружин и коэффициенты вязкого трения демпферов соответственно.

АЧХ данной механической системы при $b_j = 0$ ($j = \overline{0, n}$), будет равна:

$$H_1(\omega) = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2\omega^2 + \alpha_4\omega^4 - \dots + \alpha_{2n-2}\omega^{2n-2})^2}{(\delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \dots + \delta_{2n}\omega^{2n})^2}}. \quad (21)$$

В соответствии с формулой (21) число антирезонансных частот на верхней массе системы, представленной на рис. 4, равно $n - 1$.

3.3. Модель с произвольным числом степеней свободы и произвольным числом многозвенных соединений

В зависимости от того, какие многосуставные мышцы включаются в разрабатываемую модель, многозвенные соединения могут связывать различные массы системы. Поэтому рассмотрим систему, приведенную на рис. 5.

Уравнение движения массы m_i в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i - (b_{i-1}\dot{x}_{i-1} + c_{i-1}x_{i-1}) + \left(b_{i-1} + b_i + \sum_k b_{ik} \right) \dot{x}_i + \\ + \left(c_{i-1} + c_i + \sum_k c_{ik} \right) x_i - (b_{i+1}\dot{x}_{i+1} + c_{i+1}x_{i+1}) - \\ - \left(\sum_k b_{ik}\dot{x}_k + \sum_k c_{ik}x_k \right) = 0, \end{aligned}$$

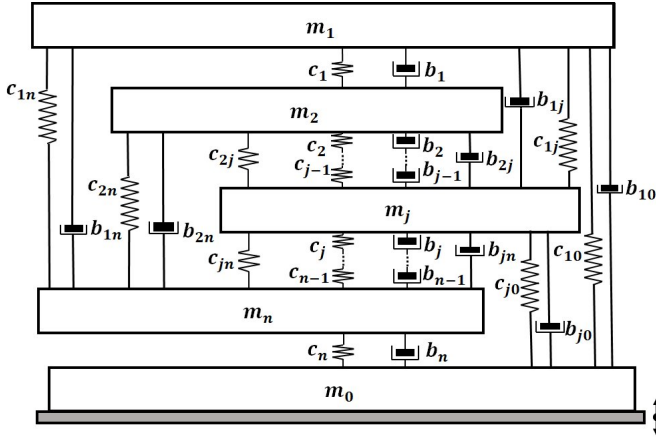


Рис. 5. Различные способы наложения многозвенных соединений на механическую систему с n степенями свободы

где \sum_k – суммирование по $k \in [1, i - 2] \cup [i + 2, n + 1]$ ($n + 1 = 0$), $x_{n+1} = y$ (y – абсолютное перемещение основания), для жесткостей пружин и коэффициентов вязкого трения для соседних масс введено обозначение с одним индексом, а для многозвенных соединений – с двумя.

Заметим, что некоторые коэффициенты в \sum_k будут равны нулю в том случае, когда на массы m_i и m_k не наложены многозвенные соединения в виде пружины и демпфера.

Написав уравнения движения для всех масс в соответствии с (22), получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений. Заменяя функции $x_i(t)$ и $y(t)$ по правилу преобразования Лапласа их изображениями, придем при начальных нулевых условиях к системе алгебраических уравнений относительно $X_i(p)$ и $Y(p)$. Поделим каждое из уравнений полученной системы на $Y(p)$ и, разрешая полученную систему относительно $H_i(p)$, получим ПФ

для каждой массы рассматриваемой механической системы.

Для верхней массы ПФ будет иметь вид

$$H_1(p) = \frac{\alpha_m p^m + \alpha_{m-1} p^{m-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_{2n} p^{2n} + \delta_{2n-1} p^{2n-1} + \dots + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (22)$$

где

$$m \leq 2n - 1, \delta_0 = \alpha_0, \delta_1 = \alpha_1,$$

а n – число масс рассматриваемой механической системы.

Отметим, что для механических систем цепной структуры без многосвязных соединений $m \leq n$, т. е. степень полинома числителя в случае механической системы с многосвязными соединениями больше.

Подставляя в (22) вместо комплексной переменной p мнимую переменную $i\omega$ с последующим определением её модуля, получим АЧХ, соответствующую передаточной функции $H_1(p)$.

Значения коэффициентов α_i и δ_i определяются аналогично системе с двумя степенями свободы, рассмотренной ранее.

Введение в механическую систему многосвязных соединений приводит к повышению степени полинома числителя передаточной функции, что дает возможность точнее приблизить теоретическую передаточную функцию к экспериментальной.

3.4. Определение числа антирезонансных частот

Для линейной механической системы цепной структуры без трения в условиях кинематического возбуждения число антирезонансных частот на i -й массе ($i = \overline{1, n}$) равно числу собственных частот системы той же структуры с $(i - 1)$ степенями свободы. Данное утверждение в виде формулы имеет вид

$$S_i = i - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где S_i – число антирезонансных частот на i -й массе.

Исходя из этой формулы, число антирезонансных частот на каждой массе системы цепной структуры зависит от того, какое число масс находится выше нее. Нетрудно заметить, что на верхней

массе такой системы антирезонансных частот нет. Введение в систему традиционной цепной структуры дополнительных многозвенных соединений в виде пружин приводит к следующему важному результату: появлению на верхней массе антирезонансных частот, число которых S_1 будет принимать значения из интервала $[1, n - 1]$ в зависимости от того, каким образом наложены дополнительные упругие соединения.

Остановимся на случае, когда на систему цепной структуры наложено одно многозвенное упругое соединение. Рассмотрим 4 возможных варианта введения в систему такого дополнительного соединения:

- 1) верхняя масса соединена с нижней массой m_0 ;
- 2) верхняя масса соединена с массой m_j ($j \geq 3$);
- 3) масса m_j ($j = \overline{2, n}$) соединена с массой m_0 ;
- 4) масса m_j ($j = \overline{2, n}$) соединена с массой m_k ($k = \overline{4, n}$, причем $k \geq j + 2$).

Формулы для вычисления числа антирезонансных частот на верхней массе системы с многозвенным упругим соединением для каждого из перечисленных выше случаев имеют следующий вид:

$$1) S_1 = n - 1; \quad (24)$$

$$2) S_1 = j - 2; \quad (25)$$

$$3) S_1 = n - j; \quad (26)$$

$$4) S_1 = (k - 1) - j. \quad (27)$$

Для примера рассмотрим вопрос наличия антирезонансных частот на верхней массе модели с тремя степенями свободы в зависимости от того, как наложено многозвенное соединение. На рис. 6 представлены возможные варианты.

В первом случае (рис. 6, а) условие определения антирезонансных частот имеет вид

$$c_0((c_1 + c_2) - m_2\omega^2)((c_2 + c_3) - m_3\omega^2) - c_0c_2^2 + c_1c_2c_3 = 0.$$

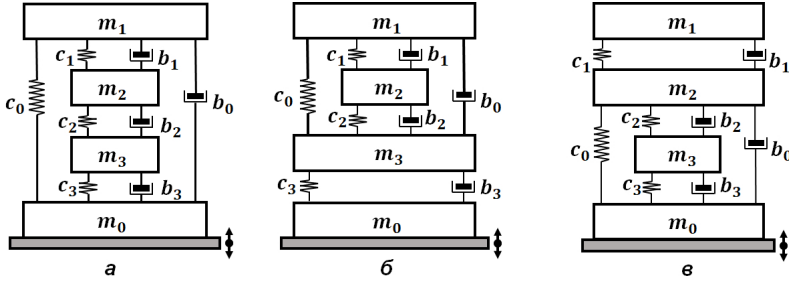


Рис. 6. Механическая система цепной структуры с тремя степенями свободы с тремя вариантами многозвенного соединения

Решая данное уравнение при

$$(c_0 m_2 (c_2 + c_3) - m_3 (c_1 + c_2))^2 > 4 c_0 m_2 m_3 c_2 (c_1 c_3 - c_0 c_2),$$

получаем 2 вещественных корня. Таким образом, число антирезонансных частот на верхней массе $S_1 = 2$, что доказывает справедливость формулы (24).

Для случая, показанного на рис. 6, б, условие

$$c_3 c_0 ((c_1 + c_2) - m_2 \omega^2) + c_1 c_2 c_3 = 0$$

определяет одну частоту антирезонанса, что соответствует формуле (25).

В третьем случае (рис. 6, в) условие определения антирезонансных частот имеет вид

$$c_1 c_0 ((c_2 + c_3) - m_3 \omega^2) + c_1 c_2 c_3 = 0,$$

и $S_1 = 1$, что подтверждает справедливость формулы (26).

Вариант, подтверждающей формулу (27), возможен для механической системы, начиная с четырех степеней свободы, и здесь не рассматривается.

3.5. Перспективы дальнейшего развития моделей тела человека с многозвенными соединениями

Для иллюстрации существенного влияния многозвенных соединений на АЧХ механической модели были проведены численные расчеты АЧХ механической системы с восемью степенями свободы. Эта система может служить механической моделью тела сидящего человека, если m_1 – это масса головы, m_0 – масса туловища, а массы m_2, \dots, m_8 – массы семи шейных позвонков вместе с окружающими их мягкими тканями.

На рис. 7 проиллюстрировано различие двух АЧХ такой системы при отсутствии и наличии многозвенных соединений, моделирующих многосуставные мышцы. Важно подчеркнуть, что основная цель этого рисунка была в том, чтобы обратить внимание на качественное, а не количественное отличие двух характеристик. В частности, видно, что наличие многозвенных соединений (кривая 2) может привести к появлению частот, при которых АЧХ близка к нулю, что в отсутствие этих соединений принципиально невозможно.

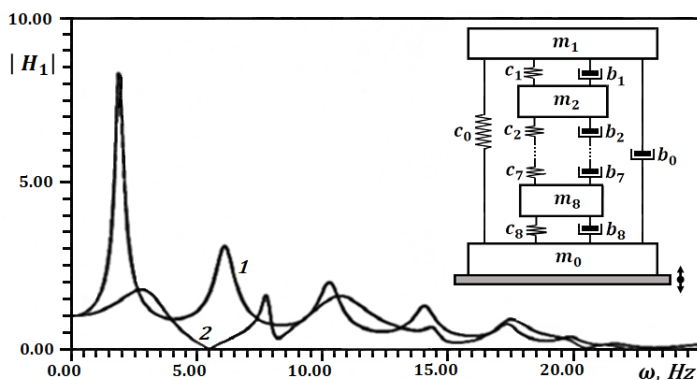


Рис. 7. АЧХ для модели цепной структуры с восемью степенями свободы в отсутствие дополнительных многозвенных соединений (1) и при их наличии (2)

Полученные результаты позволяют говорить о перспективности дальнейшего изучения особенностей моделей с многозвенными соединениями с целью получения их количественных и качественных характеристик для последующего их использования в моделировании тела человека при вибрационном воздействии.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЦЕЛЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

При моделировании позвоночника или его отделов, а также всего тела человека широко применяются механические системы с сосредоточенными параметрами. Эти модели состоят обычно из абсолютно твердых тел, соединенных последовательно пружинами и демпферами. Однако в этом случае не учитываются свойства межпозвонковых дисков.

Ввиду того что экспериментально было установлено [13], что развиваемое в межпозвонковом диске усилие удовлетворяет следующему условию:

$$\alpha \dot{F} + \beta F = -\gamma \dot{x} - \delta x,$$

где x – деформация и F – сила, то для моделирования позвонка с межпозвонковым диском будем использовать механическую систему с так называемым нецелым числом степеней свободы [14], и исследуем ее частотные свойства при вибрационном воздействии.

4.1. Система с полутора степенями свободы

Механическая модель позвонка с межпозвонковым диском представлена на рис. 8.

Уравнения движения данной системы при кинематическом возбуждении в абсолютной системе координат будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1(x_2 - x_1), \\ 0 = c_2(y - x_2) - b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_1(x_2 - x_1), \end{cases}$$

где m – масса твердого деформируемого тела; c_1 и c_2 – жесткости пружин; b – коэффициент демпфирования; x_1 – перемещение тела массы m ; x_2 – перемещение пружины с жесткостью c_2 ; y – перемещение вибрирующего основания.

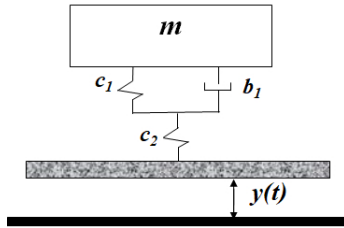


Рис. 8. Механическая модель позвонка с межпозвонковым диском под действием вибрации $y(t)$

Эта система уравнений может быть сведена к одному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$a\ddot{x} + d\dot{x} + bx + c_1x = by + c_1y, \quad (28)$$

где

$$a = \frac{mb}{c_2}, \quad d = \frac{m(c_1 + c_2)}{c_2}.$$

Это уравнение можно рассматривать как математическую модель позвонка, скрепленного межпозвонковым диском с вибрирующим основанием.

Применив к уравнению (28) преобразование Лапласа, разделив все члены уравнения на $Y(p)$, где p – комплексная переменная, получим ПФ данной механической системы:

$$H(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0},$$

где

$$\delta_0 = \alpha_0 = c_1 c_2, \quad \delta_1 = \alpha_1 = b c_2, \quad \delta_2 = m(c_1 + c_2), \quad \delta_3 = m b.$$

АЧХ, соответствующая ПФ этой системы, будет иметь вид

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{c_1^2 + b^2 \omega^2}{c_1^2 + (b^2 - 2c_1 d)\omega^2 + (d^2 - 2ab)\omega^4 + a^2 \omega^6}}. \quad (29)$$

В отсутствии демпфирования, т. е. при $b = 0$, АЧХ (29) примет следующий вид:

$$H(\omega) = \frac{c_1 c_2}{c_1 c_2 - m(c_1 + c_2)\omega^2},$$

откуда резонансная частота рассматриваемой системы равна:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}.$$

При наличии трения возрастание коэффициента демпфирования приводит к уменьшению максимального значения АЧХ лишь до некоторой величины, после чего наблюдается (рис. 9) вновь возрастание максимума АЧХ вплоть до бесконечности при частоте

$$\omega_{res}^* = \sqrt{\frac{c_2}{m}},$$

которую также следует считать резонансной.

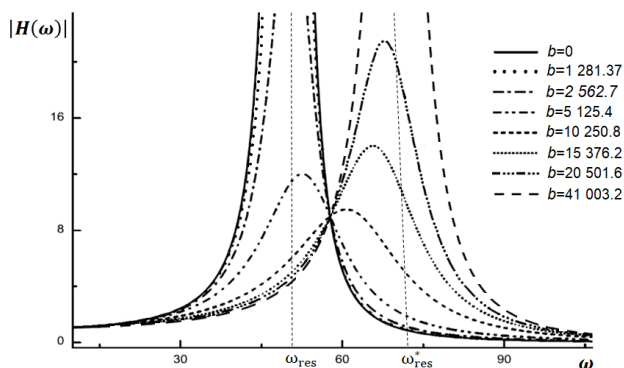


Рис. 9. Изменение АЧХ с возрастанием коэффициента демпфирования b

В отличие от АЧХ системы с одной степенью свободы АЧХ системы с полутора степенями свободы имеет две резонансные частоты: при $b = 0$ и при $b = \infty$.

4.2. Двухмассовая система с нецелым числом степеней свободы

Следующий шаг – моделирование системы из двух позвонков, соединенных межпозвонковыми дисками между собой и с вибрирующим основанием (рис. 10). Она представляет собой последовательное соединение систем, каждая из которых имеет полторы степени свободы.

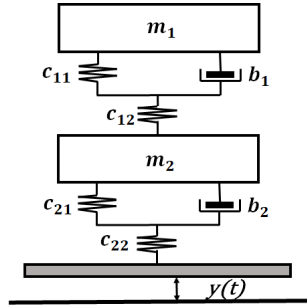


Рис. 10. Механическая модель двухпозвонкового участка позвоночника

Движение этой механической модели в абсолютной системе координат описывается системой двух дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} a_1 \ddot{x}_1 + d_1 \dot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_{11} x_1 - b_1 \dot{x}_2 - c_{11} x_2 = 0, \\ a_2 \ddot{x}_1 + d_2 \ddot{x}_1 + a_2 \ddot{x}_2 + d_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + c_{21} x_2 = b_2 \dot{y} + c_{21} y, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$a_1 = \frac{m_1 b_1}{c_{12}}, \quad d_1 = \frac{m_1 (c_{11} + c_{12})}{c_{12}}, \quad a_2 = \frac{m_2 b_2}{c_{22}},$$

$$d_2 = \frac{m_2 (c_{21} + c_{22})}{c_{22}}, \quad h = \frac{m_1}{m_2},$$

x_1 и x_2 – перемещения масс m_1 и m_2 ; c_{ij} ($i, j = 1, 2$) – жесткости пружин; b_1 и b_2 – коэффициенты демпфирования.

Применив к системе уравнений (30) преобразование Лапласа и разделив каждый член уравнений на $Y(p)$, где p – комплексная переменная, разрешим данную систему относительно $H_1(p)$. В результате получаем передаточную функцию для массы m_1 :

$$H_1(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_6 p^6 + \delta_5 p^5 + \delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \delta_0 = c_{11}c_{21}, \\ \alpha_1 &= \delta_1 = b_1c_{21} + b_2c_{11}, \\ \alpha_2 &= b_1b_2, \\ \delta_2 &= d_1c_{21} + d_2c_{11}(h+1) + b_1b_2, \\ \delta_3 &= a_1c_{21} + a_2c_{11}(h+1) + d_1b_2 + d_2b_1(h+1), \\ \delta_4 &= a_1b_2 + a_2b_1(h+1) + d_1d_2, \\ \delta_5 &= a_1d_2 + a_2d_1, \\ \delta_6 &= a_1a_2, \end{aligned}$$

коэффициенты a_1 , d_1 , a_2 , d_2 , h – из (30).

АЧХ, соответствующая передаточной функции (31), имеет вид

$$H_1(\omega) = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2\omega^2)^2 + \alpha_1^2\omega^2}{(\delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \delta_6\omega^6)^2 + (\delta_1\omega - \delta_3\omega^3 + \delta_5\omega^5)^2}}. \quad (32)$$

АЧХ (32) при $b_1 = b_2 = 0$ запишем следующим образом:

$$H_1'(\omega) = \frac{\alpha_0}{\delta_0' - \delta_2'\omega^2 + \delta_4'\omega^4}, \quad (33)$$

где

$$\delta_0' = \delta_0, \quad \delta_2' = c_{11}(m_1 + m_2)d_2 + m_1c_{21}d_1, \quad \delta_4' = m_1 + m_2d_1d_2.$$

Приравняв знаменатель выражения (33) к нулю и решая биквадратное уравнение

$$\delta_0' - \delta_2'\omega^2 + \delta_4'\omega^4 = 0,$$

получим квадраты резонансных частот, а именно:

$$(\omega_{res})_{1,2}^2 = \frac{\delta_2' \pm \sqrt{\delta_2'^2 - 4\delta_0'\delta_4'}}{2\delta_4'}.$$

Нетрудно убедиться, что подкоренное выражение больше нуля и корни вещественные и положительные.

Для определения поведения АЧХ при b_1 и b_2 , стремящимся к бесконечности, нужно разделить ее коэффициенты на b_1 и b_2 и устремить их к бесконечности. В результате АЧХ (33) представим в виде

$$H_1''(\omega) = \frac{\alpha_2''\omega^2}{-\delta_2''\omega^2 + \delta_4''\omega^4 - \delta_6''\omega^6}, \quad (34)$$

здесь

$$\delta_2'' = \alpha_2'' = 1, \quad \delta_4'' = \frac{m_1(c_{12} + c_{22}) + m_2c_{12}}{c_{12}c_{22}}, \quad \delta_6'' = \frac{m_1m_2}{c_{12}c_{22}}.$$

Разделив числитель и знаменатель в (34) на $-\omega^2$, получаем

$$H_1''(\omega) = \frac{1}{1 - \delta_4''\omega^4 + \delta_6''\omega^6}. \quad (35)$$

Приравнивая знаменатель выражения (35) к нулю и решая биквадратное уравнение

$$\delta_6''\omega^6 - \delta_4''\omega^4 + 1 = 0,$$

получим два значения квадрата резонансных частот при b_1 и b_2 , стремящихся к бесконечности:

$$(\omega_{res}^*)_{1,2}^2 = \frac{\delta_4'' \pm \sqrt{\delta_4''^2 - 4\delta_2''\delta_6''}}{2\delta_6''}.$$

Нетрудно убедиться, что подкоренное выражение больше нуля, а корни вещественные и положительные. Характер изменения АЧХ этой двухмассовой системы при изменении коэффициентов демпфирования b_1 и b_2 от нуля до бесконечности представлен на рис. 11.

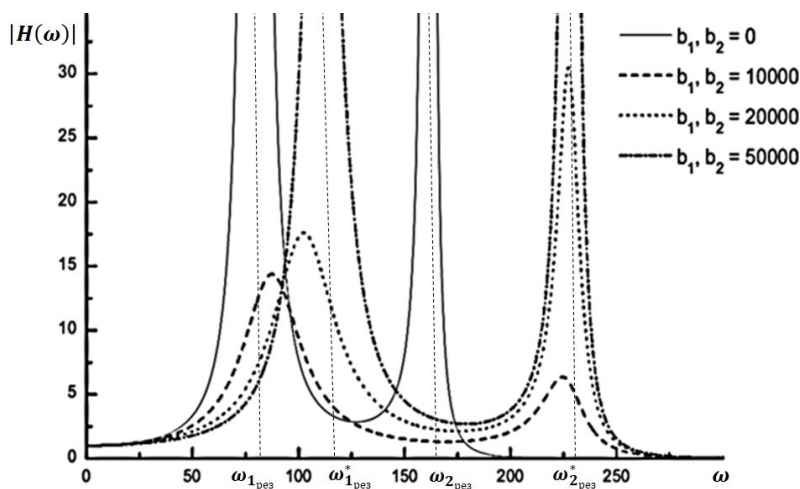


Рис. 11. Изменение АЧХ двухмассовой системы при возрастании коэффициентов демпфирования

Видно, что возрастание b_1 и b_2 приводит к уменьшению максимумов АЧХ до некоторых ненулевых значений с последующим возрастанием их до бесконечности при найденных выше значениях частот $(\omega_{res}^*)_1$ и $(\omega_{res}^*)_2$.

4.3. Перспективы: моделирование поясничного отдела позвоночника с использованием моделей с многозвенными соединениями и моделей с нецелым числом степеней свободы

В результате приведенных исследований АЧХ одномассовой и двухмассовой систем появляется возможность строить и многозвенные системы, у которых каждое звено имеет полторы степени свободы. Такие системы можно использовать для моделирования некоторых отделов позвоночника, подверженных вертикальному вибрационному воздействию. Грудной отдел гораздо в меньшей степени

подвержен вертикальной деформации при допустимых значениях амплитуды вибрационного воздействия. Шейный отдел достаточно подвижен, однако в наибольшей степени вибрационному воздействию подвержен поясничный отдел позвоночника [15]. В связи с этим может быть смоделирована механическая модель поясницы, которая встроена в модель тела сидящего человека (рис. 12). Она состоит из семи твердых тел, моделирующих пять поясничных позвонков L_1, \dots, L_5 с равными массами, и двух тел, моделирующих части туловища ниже и выше поясницы.

Как было отмечено ранее, в случае вибрационного воздействия многосуставные мышцы можно моделировать с помощью пассивных механических соединений. В связи с этим в предложенной модели верхняя и нижняя части туловища соединены многосвязными вязкоупругими соединениями, которые моделируют многосуставные мышцы поясничного отдела.

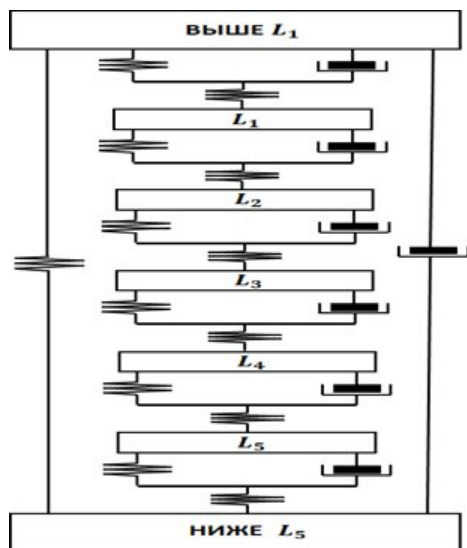


Рис. 12. Механическая модель тела человека с поясничным отделом позвоночника

Что касается параметров модели, то для определения коэффициентов упругости могут быть использованы экспериментальные данные, полученные на изолированных образцах межпозвонковых дисков, например, в [16]. Для определения коэффициентов демпфирования требуются дополнительные экспериментальные исследования. В частности, они могут быть выбраны таким образом, чтобы исключить собственные колебания системы. Верхняя и нижняя массы тел соответствуют средним значениям масс нижней и верхней части туловища. Что же касается моделирования мышц, то их параметры коэффициентов упругости и демпфирования многозвенного соединения могут быть подобраны таким образом, чтобы АЧХ модели соответствовала экспериментальной АЧХ тела человека.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На примере двухмассовой механической модели тела человека показано, что задача определения значений параметров модели по полученной в эксперименте амплитудно-частотной характеристике для верхней массы или входному механическому импедансу в общем случае не имеет единственного решения. Это важно при использовании механических моделей тела человека для разработки систем виброзащиты.
2. Проведенный анализ АЧХ механических систем с многозвенными соединениями показывает, что введение дополнительных соединений приводит к увеличению числа антирезонансных частот на всех массах системы по сравнению с системами цепной структуры без многозвенных соединений. В частности, если для системы традиционной структуры на верхней массе антирезонансных частот нет, то для системы предлагаемой структуры с дополнительными соединениями верхняя масса всегда имеет антирезонансные частоты, а их число, в зависимости от того, каким образом наложены дополнительные упругие соединения, будет принимать значения из интервала $[1, n - 1]$. В качестве иллюстрации влияния многосуставных

мышц на частотные свойства тела сидящего человека приведены графики АЧХ механических моделей с восьмью степенями свободы при наличии и отсутствии многозвенных соединений.

Введение в механическую систему многозвенных соединений приводит к повышению степени полинома числителя передаточной функции, что дает возможность точнее приблизить теоретическую передаточную функцию к экспериментальной, что говорит о целесообразности расширения класса механических систем цепной структуры введением дополнительных многозвенных соединений и о необходимости дальнейшего изучения динамики моделей расширенного класса.

3. Проведено исследование АЧХ систем с нецелым числом степенями свободы с одной и двумя массами и продемонстрированы особенности их поведения при увеличении коэффициента демпфирования. Практическое значение имеет тот факт, что, начиная с некоторого значения возрастающего коэффициента демпфирования, АЧХ перестает убывать и также начинает возрастать. Это важно учитывать при моделировании как межпозвонкового диска, так и позвоночника в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paddan G. S. The transmission of translational seat vibration to the head. – I. Vertical seat vibration / G. S. Paddan, M. J. Griffin // Journal of Biomechanics. – 1988. – Vol. 21. – Iss. 3. – P. 191–197.
2. Вибрации в технике. В 6 т. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1995. – 456 с.
3. СН 2.2.4/2.1.8.566-96 «Федеральные санитарные правила, нормы и гигиенические нормативы. Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий». – М., 1997. – 20 с.
4. Потёмкин Б. А. Построение динамической модели тела человека-оператора, подверженного действию широкополосных случайных вибраций / Б. А. Потёмкин, К. В. Фролов // Виброизоляция машин и виброзащита человека-оператора. – 1973. – С. 17–30.
5. Tregubov V. P. Problems of mechanical model identification for human body under vibration / V. P. Tregubov // Mechanism and Machine Theory. – 2000. – Vol. 35. – P. 491–504.

6. On 4-degree-of-freedom biodynamic models of seated occupants: Lumped-parameter modeling / Bai Xian-Xu [et al.] // J. Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 402. – Iss. 18. – P. 122–141.
7. Optimization of biodynamic seated human models using genetic algorithms / W. Abbas [et al.] // Engineering. – 2010. – Vol. 2. – P. 710–719.
8. Boileau P. E. Whole-body vertical biodynamic response characteristics of the seated vehicle driver: measurement and model development / P. E. Boileau, S. Rakheja // Int. J. Ind. Ergonomics. – 1998. – Vol. 22. – P. 449–472.
9. Dynamic modeling and vibration characteristics of multi-DOF upper part system of seated human body / Zhang E. [et al.] // Chine J. Engineering Design. – 2008. – Vol. 15. – P. 244–249.
10. Графеев Е. В. Проблемы определения структуры и параметров механических моделей тела человека, подверженного действию вибрации / Е. В. Графеев, В. П. Трегубов // Динамика и устойчивость механических систем. Прикладная механика. – 1995. – Вып. 9. – С. 47–57.
11. Трегубов В. П. Математическое моделирование динамики шейного отдела позвоночника при импульсных воздействиях / В. П. Трегубов, Н. А. Селезнева // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2016. – Вып. 1. – С. 53–65.
12. Глухарев К. К. Особенности биодинамики тела человека при вибрациях / К. К. Глухарев, Б. А. Потёмкин, К. В. Фролов // Виброзащита человека-оператора и вопросы моделирования. – 1973. – С. 22–28.
13. Orne D. The in vivo driving-point impedance of the human ulna – a viscoelastic beam modal / D. Orne // J. Biomechanics. – 1974. – Vol. 7. – P. 249–257.
14. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. – М. : ОНТИ, 1937. – 519 с.
15. Matsumoto Y. Non-Linear Characteristics in the Dynamic Responses of Seated Subjects Exposed to Vertical Whole-Body Vibration / Y. Matsumoto, M. J. Griffin // J. of Biomech. Engineering. – 2002. – Vol. 124(5). – P. 527–532.
16. Experimental and numerical investigations of C5-C6 cervical spinal segment before and after discectomy using the Cloward operation technique / M. Ciach [et al.] // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 1999. – Vol. 1. – No. 1. – P. 101–105.

СИНТЕЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННО-УПРУГИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. В. Лукин, И. А. Попов, Д. В. Антуфьев, Н. Д. Пискун

Рассматривается проблема синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке (прежде всего – тонкостенных конструкций: струн, мембран, балок, пластинок, оболочек) на базе метода конечных элементов. В основе рассматриваемых подходов лежит идея идентификации нелинейной (квадратично-кубической) жесткостной характеристики упругой системы в её модальных координатах с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, касательного к выбранному модальному подпространству. Получаемая таким образом динамическая модель пониженного порядка учитывает нелинейную упругую связанность рабочих форм колебаний с высокочастотными продольными и объемными модами конструкции, что обеспечивает корректность вычисляемой нелинейной жесткостной характеристики системы по выбранным главным координатам. Разработанный алгоритм применяется к построению нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и её верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галеркина. Обсуждаются особенности программной реализации представленного метода на основе программной системы конечно-элементного анализа ABAQUS.

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей механики деформируемого твердого тела и динамики машин на современном этапе является разработка вычислительно эффективных численных методов моделирования динамических режимов работы сооружений, конструкций, приборов и их элементов в геометрически нелинейной постановке и с учетом

Доклад на семинаре 18 февраля 2025 г.

© А. В. Лукин, И. А. Попов, Д. В. Антуфьев, Н. Д. Пискун, 2025.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10097, <https://rscf.ru/project/24-71-10097/>.

связанности физических полей различной природы (термо-, электро-, магнито-, аэро-, гидроупругость и пр.). Ключевыми требованиями к создаваемым математическим моделям становятся, на первый взгляд, противоречащие друг другу характеристики: с одной стороны, это высокая степень подробности модели, её адекватности реальным геометрическим и физико-механическим параметрам системы и условиям её нагружения; с другой стороны – это компактность численной модели, её применимость для проведения вычислений в реальном времени и с учетом вариативности как параметров внешнего нагружения, так и параметров, описывающих саму систему. Модель также должна быть адаптирована к использованию в задачах проектирования систем автоматического управления движением, съема и обработки полезных сигналов. В современной научной литературе модели, обладающие указанными свойствами, называются моделями пониженного порядка (Reduced Order Models, ROM), или редуцированными моделями [1–3]. Вопросам разработки, верификации и практического применения численных методов синтеза таких моделей для различных физико-математических постановок и промышленных приложений посвящено значительное число научных работ (см., например, [4–7]). Отмечается [3], что автоматизированные алгоритмы создания моделей пониженного порядка представляют собой ключевую технологию в рамках разработки цифрового двойника изделия [3]. В настоящей работе рассматривается проблема синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке (прежде всего – тонкостенных конструкций: струн, мембран, балок, пластинок, оболочек) на базе метода конечных элементов. В основе рассматриваемых подходов лежит идея идентификации нелинейной (квадратично-кубической) жесткостной характеристики упругой системы в её модальных координатах с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, касательного к интересующему модальному подпространству. Разработанный алгоритм применяется к построению нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и её верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галеркина. Обсуждаются особен-

ности программной реализации представленного метода на основе программной системы конечно-элементного анализа ABAQUS.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения эластодинамики трехмерного упругого тела в геометрически точной лагранжевой постановке имеют вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial X_k}(F_{ij}S_{jk}) + \rho_0 b_i^0 = \rho_0 \ddot{u}_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где Ω_0 – область трехмерного пространства, занимаемая телом в своей отсчетной конфигурации; $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ – вектор перемещений материальных точек упругого тела; \mathbf{x}, \mathbf{X} – радиус-векторы точек тела в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно; ρ_0 – массовая плотность материала; \mathbf{b}^0 – объемная плотность приложенных сил. Компоненты тензора градиента деформации определяются выражениями

$$F_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (2)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Определяющее соотношение для анизотропного линейно-упругого материала имеет вид

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}, \quad (3)$$

где S_{ij} – тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа, C_{ijkl} – тензор упругих модулей 4-го ранга, а компоненты тензора деформации Коши–Грина выражаются через градиент деформации следующим образом:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}). \quad (4)$$

Уравнения (1) дополняются граничными условиями

$$\begin{aligned} F_{ij}S_{jk}n_k^0 &= t_i^0 & \mathbf{X} \in \partial\Omega_0^t, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^0, & \mathbf{X} \in \partial\Omega_0^u. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\partial\Omega_0^t$ и $\partial\Omega_0^u$ – части границы тела $\partial\Omega_0$, на которой заданы внешние поверхностные усилия \mathbf{t}^0 и перемещения \mathbf{u}^0 соответствен-

но; \mathbf{n}^0 – нормаль к поверхности тела. Все указанные величины рассматриваются по отношению к отсчетной конфигурации.

Путем применения проекционных или вариационно-сеточных методов вычислительной механики (методы Галеркина, Ритца; метод конечных элементов и др.) уравнения (1)–(5) приводятся к виду следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{U} = [U_1, \dots, U_N]^T$ – конечномерный вектор обобщенных координат дискретизированной модели (модальных координат в случае применения метода Галеркина; узловых перемещений для метода конечных элементов); \mathbf{M}, \mathbf{K} – матрицы масс и жесткостей; $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{U})$ – вектор нелинейных восстанавливающих сил, обусловленных учетом квадратичных компонент в тензоре деформации (4); $\mathbf{F}(t)$ – вектор обобщенных сил. В уравнениях (6) также учтены малые силы линейного вязкого трения согласно модели Рэлея: матрица диссипации \mathbf{C} имеет вид

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K},$$

где α, β – параметры демпфирования Рэлея.

Отметим, что в рамках рассматриваемой геометрически точной постановки вектор нелинейных внутренних усилий $\mathbf{\Gamma}$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}), \quad (7)$$

где \mathbf{G} и \mathbf{H} – билинейная и трилинейная векторные формы по обобщенным координатам \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) &= \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \mathbf{G}_{rs} U_r U_s, \\ \mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}) &= \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \mathbf{H}_{rst} U_r U_s U_t. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражениях (8) $\mathbf{G}_{rs}, \mathbf{H}_{rst}$ представляют собой векторы коэффициентов соответствующих мономов второй и третьей степени в уравнениях (6).

Целью настоящей работы является построение модели пониженного порядка $n \ll N$, точно описывающей нелинейную динамику полной системы (6) при заданном пространственном распределении внешнего воздействия и его спектральном составе. В связи с этим представим искомое поле перемещений \mathbf{U} в виде разложения по ограниченному числу модальных координат $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$:

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{q},$$

где $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ – матрица, составленная из учтенных собственных векторов линейной части системы (6).

В модальном базисе система дифференциальных уравнений примет вид

$$\tilde{M}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{C}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{K}\mathbf{q} + \gamma(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (9)$$

где с учетом нормировки собственных форм ϕ_r по массе

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \Phi^T M \Phi = I, \quad \tilde{C} = \Phi^T C \Phi = \text{diag}[2\xi_r \omega_r], \\ \tilde{K} &= \Phi^T K \Phi = \text{diag}[\omega_r^2]. \end{aligned}$$

В выражениях, представленных ранее, ω_r – собственные частоты недемпфированной системы, $\xi_r = \frac{1}{2}(\beta\omega_r + \frac{\alpha}{\omega_r})$ – коэффициенты относительного модального затухания.

Нелинейная жесткостная характеристика в модальном базисе $\gamma(\mathbf{q})$ может быть по аналогии с (7)–(8) представлена в виде

$$\gamma(\mathbf{q}) = g(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + h(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}),$$

где

$$g(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n g_{rs} q_r q_s, \quad h(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n h_{rst} q_r q_s q_t.$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что дискретизация континуальной задачи выполнена с применением метода конечных элементов.

Разработка численной процедуры определения векторов коэффициентов $\mathbf{g}_{rs} = \{g_{rs}^l\}_{l=1}^n$, $\mathbf{h}_{rst} = \{h_{rst}^l\}_{l=1}^n$ на базе произвольной

расчетной модели вида (6) с применением встроенного функционала выбранного программного комплекса конечно-элементного анализа позволит синтезировать и применять при анализе динамики системы редуцированные нелинейные модели вида (9).

3. ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В настоящей работе для решения задачи определения коэффициентов нелинейной жесткости в модальном базисе применяется алгоритм STEP (Stiffness Evaluation Procedure), предложенный в [10]. Подробный обзор различных подходов к решению поставленной проблемы приведен в [11, 12]. Программная реализация алгоритма STEP выполнена авторами на базе конечно-элементной системы ABAQUS.

Для идентификации значений коэффициентов $\{g_{rs}^l\}_{l=1}^n, \{h_{rst}^l\}_{l=1}^n$ нелинейной жесткостной характеристики

$$\gamma_l(q_1, \dots, q_n) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n g_{rs}^l q_r q_s + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n h_{rst}^l q_r q_s q_t, \quad l = 1, \dots, n \quad (10)$$

конечно-элементной модели, описываемой уравнениями (6), последовательно сообщается ряд заданных статических полей перемещений по рассматриваемым собственным формам. А именно, на первом шаге процедуры выполняется статический расчет напряженно-деформированного состояния конструкции в геометрически линейной и нелинейной постановках при заданных полях перемещений вида $\mathbf{U}_c = \pm \phi_r q_r, r = 1, \dots, n$. Величины модальных амплитуд q_r при этом выбираются исходя из ожидаемого размаха перемещений конструкции в реальных условиях её нагружения. Результатом расчетов являются векторы сил реакций в узлах конечно-элементной сетки в линейной \mathbf{F}_L и нелинейной

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{NL} = \mathbf{K}\mathbf{U}_c + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{U}_c)$$

постановках, что позволяет вычислить нелинейную часть упругой

восстанавливающей силы по формуле

$$\mathbf{F}_{NL} = \mathbf{\Gamma}(U_c) = \mathbf{F}_T - \mathbf{F}_L.$$

Проецирование нелинейной компоненты сил реакций \mathbf{F}_{NL} на рассматриваемое модальное подпространство и учет структуры выражений (10) позволяют записать системы линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов $g_{rr}^l, h_{rrr}^l, l = 1, \dots, n$ последовательно для всех $r = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_{NL1} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{NL1} = \mathbf{\Phi}^T, \mathbf{\Gamma}(+\phi_r q_r) = [g_{rr}^l] q_r q_r + [h_{rrr}^l] q_r q_r q_r \\ \tilde{\mathbf{F}}_{NL2} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{NL2} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Gamma}(-\phi_r q_r) = [g_{rr}^l] q_r q_r - [h_{rrr}^l] q_r q_r q_r.\end{aligned}$$

На втором шаге процедуры аналогичные вычисления производятся для определения коэффициентов g_{rs}^l, h_{rrs}^l и h_{rss}^l путем сообщения конструкции перемещений по комбинациям собственных форм вида

$$U_c = +\phi_r q_r + \phi_s q_s, \quad U_c = -\phi_r q_r - \phi_s q_s, \quad U_c = +\phi_r q_r - \phi_s q_s.$$

Наконец, для вычисления коэффициентов h_{rst}^l расчеты проводятся при задании системе смещений по суперпозиции каждой трех собственных форм с номерами r, s, t :

$$U_c = +\phi_r q_r + \phi_s q_s + \phi_t q_t.$$

Описанная процедура, в принципе, позволяет вычислить коэффициенты нелинейной характеристики (10) для любого числа n учитываемых в модели пониженного порядка собственных форм колебаний. При этом число искоемых компонент линейных форм силовой характеристики составляет порядка n^3 для $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ и n^4 для $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q})$, что приводит к стремительному росту числа расчетов в рамках процедуры STEP с увеличением n . В то же время в практических приложениях число рабочих форм колебаний, по которым развивается динамика конструкции, как правило, невелико, что делает STEP чрезвычайно эффективным алгоритмом вычисления нелинейной восстанавливающей силы в модальном базисе. Вопросам повышения вычислительной эффективности алгоритма STEP при больших n посвящена статья [13].

4. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Следует подчеркнуть, что изложенная ранее процедура идентификации нелинейной силовой характеристики в модальном базисе в общем случае не приводит к построению требуемой модели пониженного порядка. Как это будет показано далее, причиной тому являются существенные нелинейные межмодальные взаимодействия, связывающие между собой движения системы по низшим (конструкционным) и высшим (объемным) формам колебаний. Наличие таких взаимодействий не позволяет осуществить классическую для линейной теории колебаний модальную редукцию – отбрасывание (принятие равными нулю тождественно) всех обобщенных модальных координат, кроме т. н. «главных», соответствующих частотному составу и пространственному распределению внешних воздействий. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере достаточно общего класса тонких плоских упругих конструкций (струн, прямолинейных балок, плоских мембран и пластин), опираясь на [14, 15].

Выделим в общей форме уравнений нелинейных колебаний упругой системы, записанных в модальном базисе:

$$\ddot{q}_l + 2\xi_l\omega_l\dot{q}_l + \omega_l^2 q_l + \sum_{r,s=1}^n g_{rs}^l q_r q_s + \sum_{r,s,t=1}^n h_{rst}^l q_r q_s q_t = Q_l, \quad (11)$$

$$l = 1, \dots, n,$$

две группы обобщенных координат: $\mathbf{q} = [\eta_1, \dots, \eta_{n_b}, p_{n_b+1}, \dots, p_n]^T$, где $\eta_r, r = 1, \dots, n_b$ – набор модальных координат, соответствующих низкочастотным изгибным формам колебаний конструкции; $p_s, s = n_b + 1, \dots, n$ – все остальные модальные координаты, соответствующие неизгибным высокочастотным формам колебаний (стержневые и объемные формы колебаний балок и пр.; крутильные формы колебаний здесь рассматривать не будем).

Примем, что внешнее воздействие является низкочастотным и ориентированным преимущественно по нормали к срединной поверхности конструкции. В таком случае будем считать, что $Q_s \equiv 0$ для $s = n_b + 1, \dots, n$. Как следствие, динамика системы будет развиваться в первую очередь по низшим изгибным формам колебаний.

В связи с этим будет выполняться следующее соотношение между порядками модальных амплитуд, типичное для тонкостенных конструкций: $\eta_r = O(\varepsilon)$ для $r = 1, \dots, n_b$; $p_s = O(\varepsilon^2)$ для $s = n_b + 1, \dots, n$. Здесь ε – малый параметр, значение которого соответствует величинам смещений порядка толщины конструкции. Кроме того, учтем, что для любой пары изгибных координат с номерами i, j квадратичные коэффициенты g_{ij}^r равны нулю в силу симметричности упругой восстанавливающей силы. С учетом этих допущений система уравнений (11) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=n_b+1}^n g_{ij}^r \eta_i p_j + \\ + \sum_{i,j,k=1}^n h_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k + O(\varepsilon^4) = Q_r, \quad r = 1, \dots, n_b, \\ \ddot{p}_s + 2\xi_s \omega_s \dot{p}_s + \omega_s^2 p_s + \sum_{i,j=1}^{n_b} g_{ij}^s \eta_i \eta_j + O(\varepsilon^3) = 0, \\ s = n_b + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Из структуры уравнений видно, что присутствует квадратичная связанность изгибных и высших форм колебаний. Это препятствует простому пренебрежению координатами p_s при редукции полной системы к подпространству нижних рабочих форм колебаний η_r . В то же время вторую группу уравнений (12) в рамках сделанных предположений можно разрешить квазистатически:

$$p_s \cong - \sum_{i,j=1}^{n_b} \frac{g_{ij}^s}{\omega_s^2} \eta_i \eta_j, \quad s = n_b + 1, \dots, n,$$

что после подстановки p_s в (12) приводит к асимптотически и механически корректной нелинейной модели пониженного порядка для изгибных форм колебаний конструкции:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k + O(\varepsilon^4) = Q_r, \\ r = 1, \dots, n_b, \end{aligned} \quad (13)$$

где истинные коэффициенты нелинейной жесткости Γ_{ijk}^r учитывают как собственную нелинейность данной формы колебаний, так и её нелинейную квазистатическую связанность с высшими формами. Для краткости изложения приведем здесь явные выражения лишь для «диагональных» коэффициентов кубической нелинейности Γ_{iii}^r [14, 15]:

$$\Gamma_{iii}^r = h_{iii}^r - \sum_{s=n_b+1}^n \frac{g_{is}^r g_{ii}^s}{\omega_s^2}, \quad i, r = 1, \dots, n_b. \quad (14)$$

Конкретный числовой анализ показывает, что в общем случае отличие между значениями коэффициентов h_{ijk}^r и Γ_{ijk}^r существенно [14, 15]. Это отражает факт сильного межмодального взаимодействия в задачах геометрически нелинейной теории упругости, причем резонансные соотношения между частотами соответствующих мод не имеют здесь особого значения: обсуждаемый эффект является чисто кинематическим и обусловлен характером распределения поля конечных деформаций по объему конструкции.

Из изложенного следует вывод о необходимости вычисления при синтезе моделей пониженного порядка как самих высших форм линейных колебаний системы, так и всех коэффициентов нелинейной жесткостной характеристики в модальном базисе. Численная реализация данной задачи для подробных конечно-элементных моделей реальных конструкций является практически неосуществимой: даже решение задачи на собственные значения с вычислением полного спектра частот системы с $n > 1000$ степеней свободы является чрезвычайно трудоемким, не говоря уже о применении процедур типа STEP для вычисления нелинейных жесткостных коэффициентов в полном модальном базисе. Кроме того, рассмотренная выше декомпозиция форм свободных колебаний на изгибные и остальные является, в известной степени, условной и напрямую относится лишь к случаю низкочастотных возбуждений плоских тонкостенных конструкций. В связи с этим возникает задача разработки и программной реализации достаточно универсальных и вычислительно эффективных алгоритмов создания моделей пониженного порядка по числу рабочих форм колебаний конструкции с разрешением их квазистатической связанности с вторичными соб-

ственными формами. Как показывается в следующем разделе, отмеченные принципиальные трудности могут быть преодолены путем применения аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре.

5. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПУАНКАРЕ КАК МОДЕЛЬ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Отмеченная выше существенная нелинейная связанность уравнений системы в модальном базисе (11) с точки зрения теории динамических систем [16] выражает особенности топологической структуры её пространства состояний, а именно – отличие геометрии инвариантных подмногообразий от геометрии линейных подпространств, натянутых на соответствующие наборы собственных векторов линеаризованной в окрестности положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ системы. Подробное обсуждение этих вопросов приведено в [12, 17]; здесь же отметим лишь ключевые положения общей теории, важные для практических приложений.

Для консервативной системы в нерезонансном случае А. М. Ляпунов показал, что каждой паре комплексно-сопряженных собственных значений $\{\pm i\omega_j\}$ соответствует инвариантное многообразие, плотно заполненное периодическими орбитами и касательное к линейному подпространству соответствующих собственных векторов – т.н. «ляпуновское центральное подмногообразие» (ЛЦПМ) [18]. Топологическое понятие ЛЦПМ идентично механическому понятию нелинейной нормальной моды (ННМ) – изолированного семейства периодических орбит, выходящего за границы малой окрестности особой точки динамической системы [19]. В работах Шоу, Пьера показано [20], что в неконсервативном случае систем вибрационного типа со слабой диссипацией нелинейные нормальные моды также образуют инвариантные подмногообразия, касательные к линейным подпространствам. Проблема неединственности таких подмногообразий рассматривается в [21], где предложен алгоритм аналитического построения наиболее гладких (т.н. спектральных) подмногообразий.

Задача сведения исходной динамической системы к своему инвариантному подмногообразию решается с применением теории нормальных форм Пуанкаре [8, 22], основным результатом которой является процедура нахождения наиболее простой формы, к которой можно привести систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия или периодического движения. Построение нормальных форм широко используется в теории бифуркаций при сведении системы к своему центральному многообразию и дальнейшей классификации негиперболических особых точек или предельных циклов [22]. В контексте задач нелинейной динамики конструкции теория нормальных форм Пуанкаре выступает как метод вычисления нелинейных нормальных мод колебательной системы – как эффективный алгоритм синтеза редуцированной модели (модели пониженного порядка).

Следуя [24], последовательно рассмотрим процесс построения нормальной формы для нелинейной динамической системы, записанной в модальном и исходном узловом базисах, оставив за рамками изложения фактор возможного наличия внутренних резонансов между формами колебаний системы.

В первом случае формально примем, что с помощью процедур типа STEP был предварительно совершен переход к модальным координатам для всех N степеней свободы механической системы. Для простоты изложения не будем учитывать силы диссипации и внешние нагрузки на конструкцию. Тогда уравнения (9) примут вид

$$\ddot{q}_l + \omega_l^2 q_l + \sum_{r,s=1}^N g_{rs}^l q_r q_s + \sum_{r,s,t=1}^N h_{rst}^l q_r q_s q_t = 0, \quad l = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Обозначим вектор обобщенных скоростей $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{q}}$ и поставим задачу нахождения такой замены координат $\{q_i, v_i\}_{i=1}^N \rightarrow \{R_j, S_j \equiv \dot{R}_j\}_{j=1}^n, n \ll N$, которая осуществляет переход к нормальной форме Пуанкаре по выбранным n нелинейным нормальным модам. Можно показать, что общий вид этой замены в разложении до тре-

тьего порядка включительно таков:

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{i=1}^n e_i R_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} R_i R_j + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} S_i S_j + \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^n r_{ijk} R_i R_j R_k + \sum_{i,j,k=1}^n u_{ijk} R_i S_j S_k, \\
 v &= \sum_{i=1}^n e_i S_i + \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} R_i S_j + \sum_{i,j,k=1}^n \mu_{ijk} S_i S_j S_k + \sum_{i,j,k=1}^n \nu_{ijk} S_i R_j R_k.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь e_i – вектор, i -я компонента которого равна единице, а все остальные – нулю; a_{ij} , b_{ij} , r_{ijk} , u_{ijk} , γ_{ij} , μ_{ijk} , ν_{ijk} – искомые векторы коэффициентов нелинейной замены переменных. Как видно из (16), в модальном представлении переход к нормальной форме осуществляется квазитождественной заменой координат, что отражает свойство касательности инвариантного подмногообразия к соответствующему линейному подпространству.

Подстановка (16) в (15) и решение задачи о минимизации количества ненулевых нелинейных коэффициентов для динамической системы в новых (криволинейных) координатах $\{R_i, S_i\}$ (решение гомологических уравнений второго и третьего приближений [22]) позволяет определить как все коэффициенты замены (16), так и итоговый вид дифференциальных уравнений, описывающих динамику выбранных n нелинейных нормальных мод:

$$\begin{aligned}
 &\ddot{R}_r + \omega_r^2 R_r + (A_{rrr}^r + h_{rrr}^r) R_r^3 + B_{rrr}^r R_r \dot{R}_r^2 + \\
 &+ R_r \sum_{j \neq r}^n (A_{jjr}^r + A_{jrr}^r + A_{rjj}^r + 3h_{rjj}^r) R_j^2 + \\
 &+ R_r \sum_{j \neq r}^n B_{rjj}^r \dot{R}_j^2 + \dot{R}_r \sum_{j \neq r}^n (B_{jjr}^r + B_{jrr}^r) R_j \dot{R}_j = 0, \quad r = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где коэффициенты

$$A_{ijk} = \sum_{s=1}^N 2g_{is} a_{jk}^s, \quad B_{ijk} = \sum_{s=1}^N 2g_{is} b_{jk}^s \tag{18}$$

вычисляются через параметры нелинейной модальной характеристики $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ и коэффициенты замены координат (16) $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}$. Явные выражения для последних здесь не приводятся для краткости изложения [24, 25].

В отношении полученных уравнений в нормальной форме (17) необходимо подчеркнуть, что они асимптотически точно описывают подмножества фазового пространства исходной системы высокой размерности (15), а именно – инвариантные центральные многообразия полной динамической системы. Это позволяет называть систему в нормальной форме корректной моделью пониженного порядка, учитывающей все свойственные исходной системе нелинейные межмодальные взаимодействия. Вторым важным следствием подхода с построением нормальной формы является отсутствие в системе (17) т. н. нелинейных членов, нарушающих инвариантность: в каждое r -тое уравнение (17) координаты $R_j, j \neq r$ входят лишь в произведении с R_r или \dot{R}_r , что является аналогией с расщеплением системы на набор независимых линейных осцилляторов в линейном случае и также обосновывает возможность редукции динамической системы к малому числу нелинейных нормальных мод, соответствующих частотному составу и пространственному распределению внешних воздействий.

В то же время из выражений (18) следует, что вычисление истинных параметров нелинейной упругой характеристики механической системы по n главным координатам требует знания коэффициентов билинейной формы $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ по всем N линейным формам колебаний. Это является обобщением на случай упругих тел произвольной геометрии ранее отмеченного факта связанности изгибных и остальных форм колебаний в случае плоских тонких конструкций (см. выражения (14)). В свою очередь, это обстоятельство ограничивает практическую реализуемость процедуры вычисления нелинейной нормальной формы в модальном базисе для упругой конструкции лишь случаем достаточно малого с вычислительной точки зрения полного числа степеней свободы N .

В ранее цитированной работе [24] предложен вычислительно эффективный алгоритм синтеза нормальной формы (модели пониженного порядка), не требующий вычисления как высших форм

колебаний, так и коэффициентов их нелинейной связанности с выбранными главными формами – т. н. метод прямой нормальной формы (Direct Normal Form, DNF). Основная идея подхода состоит в построении нормальной формы на основе не модального базиса (9), а исходного конечно-элементного представления системы в узловых перемещениях (6).

Рассмотрим свободные нелинейные колебания системы в отсутствие затухания:

$$M\ddot{U} + KU + G(U, U) + H(U, U, U) = 0.$$

Переход к нормальной форме осуществляется заменой переменных:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^n \phi_i R_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} R_i R_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} S_i S_j, \\ V \equiv \dot{U} &= \sum_{i=1}^n \phi_i S_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_{ij} R_i S_j, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}$ – подлежащие определению векторы коэффициентов. Для краткости изложения здесь, в отличие от случая работы в модальном базисе, выражения перехода записаны во втором, а не третьем приближении.

Как отмечено ранее, целью рассматриваемого подхода является построение нормальной формы для $n \ll N$ без необходимости вычисления высших, вторичных форм колебаний и соответствующих им компонент нелинейной восстанавливающей силы. В [24] показано, что задача нахождения коэффициентов нелинейной замены координат (19) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= \frac{1}{2}(\bar{Z}d_{ij} + \bar{Z}s_{ij}), \\ \bar{b}_{ij} &= \frac{1}{2\omega_i\omega_j}(\bar{Z}d_{ij} - \bar{Z}s_{ij}), \\ \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_j}\bar{Z}d_{ij} + \frac{\omega_j + \omega_i}{\omega_j}\bar{Z}s_{ij}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij} &= \left((+\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{G}(\phi_i, \phi_j), \\ \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} &= \left((-\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{G}(\phi_i, \phi_j).\end{aligned}\quad (20)$$

В отношении метода вычисления векторов $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}, \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij}$ прежде всего отметим, что входящие в правую часть векторы квадратичных компонент узловых сил реакции $\mathbf{G}(\phi_i, \phi_j)$ являются результатом ранее описанной процедуры идентификации нелинейной жесткости STEP. Следующая из (20) необходимость работы с полноразмерными матрицами масс и жесткостей КЭ-модели в практической реализации не представляет трудностей, т.к. может выполняться посредством вычислительно эффективных численных алгоритмов используемой программной системы КЭ-анализа. В частности, вместо вычисления обратных матриц размерности N , входящих в правые части выражений (20), может быть формально поставлена задача статического нагружения силами $\mathbf{G}(\phi_i, \phi_j)$ некоторой «механической» системы с соответствующей матрицей жесткости $[(\pm\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}]$. Также отметим, что из (33) следует вырожденность получаемых соотношений в случае внутреннего резонанса второго порядка, т. е. в случае $\pm\omega_i + \omega_j \cong \omega_k$ для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $k \in \{1, \dots, N\}$; здесь нумерация собственных частот такова, что первые n из них являются главными, для которых и происходит вычисление нормальной формы Пуанкаре.

Динамика нелинейных нормальных мод во втором приближении в рамках подхода DNF описывается уравнениями

$$\ddot{R}_r + \omega_r^2 R_r + \sum_{i,j,k=1}^n [(A_{ijk}^r + h_{ijk}^r) R_i R_j R_k + B_{ijk}^r R_i \dot{R}_j \dot{R}_k] = 0,$$

$$r = 1, \dots, n,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ijk} &= 2G(\phi_i, \bar{a}_{jk}), & A_{ijk} &= \Phi^T \bar{A}_{ijk}, \\ \bar{B}_{ijk} &= 2G(\phi_i, \bar{b}_{jk}), & B_{ijk} &= \Phi^T \bar{B}_{ijk}.\end{aligned}\quad (21)$$

Существенно, что, в отличие от построения нормальной формы в модальном базисе, вычисление коэффициентов A_{ijk}, B_{ijk} по (21) требует знания лишь главных форм колебаний, а также проведения дополнительного этапа процедуры STEP на расширенном пространстве базисных векторов $\{\phi_i, \bar{a}_{jk}\}_{i,j,k=1}^n$.

Изложенный численный алгоритм построения прямой нормальной формы был реализован авторами настоящей работы на базе программной системы КЭ анализа ABAQUS с применением языков программирования Python и Matlab. Далее представлены результаты верификации алгоритма на основе приближенного аналитического решения модельной задачи об изгибных колебаниях защемленной с двух концов балки.

6. ПРОЛЕТНАЯ БАЛКА: МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В рамках механической модели Бернулли-Эйлера для балки постоянного сечения связанные продольно-изгибные колебания малой, но конечной амплитуды описываются следующей системой нелинейных уравнений в частных производных [26]:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} - EAu'' &= EA\left(\frac{1}{2}v'^2 - u'v'^2\right)' + \\ &+ EI\left[v'(v''' - u'''v' - 2u''v'' - 3u'v''')\right]', \\ m\ddot{v} - j_3\ddot{v}'' + EIv^{IV} &= EA\left(u'v' - u'^2v' + \frac{1}{2}v'^3\right)' + \\ &+ EI\left[u'v''' + (u'v')'' - (u'^2 - v'^2)v''' - u'(u'v')'' - \left(u'^2v' - \frac{1}{3}v'^3\right)''\right]' + \\ &+ F. \end{aligned}$$

Здесь $u(x, t), v(x, t)$ – продольная и поперечная компоненты вектора перемещений; m, A – погонная масса и площадь сечения; E – модуль Юнга материала; I, j_3 – геометрический и массовый моменты инерции сечения; штрихом и точкой обозначены производные по продольной координате x и времени t соответственно. Принято, что внешние нагрузки действуют на балку только в поперечном направлении и имеют распределение $F(x, t)$.

В предположении о малости амплитуд продольных перемещений по сравнению с поперечными $u = O(v^2)$ и тонкости стержня $h \ll L$, где h – высота сечения в плоскости изгиба, L – длина стержня, можно пренебречь силами инерции сечения на поворот и записать упрощенную асимптотически корректную модель системы:

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + EIV^{IV} - EA\left[u'v' + \frac{1}{2}v'^3\right] &= F(x, t), \\ m\ddot{u} - EA(u'' + v'v'') &= 0. \end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным величинам и параметрам:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{v}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{L}{h^2}u, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_0}, \quad T_0 = L^2\sqrt{\frac{m}{EI}}, \\ f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{L^4}{EIh}F(L\bar{x}, T_0\bar{t}), \quad \beta = \frac{Ah^2}{I}, \quad \mu = \frac{1}{AL^2}. \end{aligned}$$

Получим уравнения в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + v^{IV} - \beta\left[u'v' + \frac{1}{2}v'^3\right]' &= f(x, t), \\ \mu\ddot{u} - (u'' + v'v'') &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь опущена черта в обозначениях безразмерных величин; точкой и штрихом отмечены производные по безразмерному времени и продольной координате.

Выполним модальную дискретизацию континуальной системы методом Галеркина. Функции поперечных и продольных перемещений представляются в виде рядов по собственным формам колебаний:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{r=1}^{n_b} \Phi_r(x) \eta_r(t), \\ u(x, t) &= \sum_{s=n_b+1}^n \Psi_s(x) p_s(t). \end{aligned} \tag{23}$$

Формы свободных изгибных и продольных колебаний защепленной с двух концов балки (стержня) имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_r(x) &= A_r \left[(\sin \alpha_r - \sinh \alpha_r)(\cos \alpha_r x - \cosh \alpha_r x) - \right. \\ &\quad \left. - (\cos \alpha_r - \cosh \alpha_r)(\sin \alpha_r x - \sinh \alpha_r x) \right], \\ \Psi_s(x) &= B_s \sin s\pi x,\end{aligned}\tag{24}$$

где α_r являются корнями трансцендентного уравнения

$$\cos \alpha_r \cosh \alpha_r - 1 = 0,$$

а амплитудные множители A_r, B_s определяются из условия нормировки собственных функций по модальной массе:

$$\int_0^1 \Phi_r^2 dx = \int_0^1 \Psi_s^2 dx = 1.$$

Подставляя (23) в (22) и записывая условия минимизации невязки, приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений в модальных координатах:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=n_b+1}^n g_{ij}^r \eta_i p_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k = Q_r,$$

$$r = 1, \dots, n_b,\tag{25}$$

$$\ddot{p}_s + \omega_s^2 p_s + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} g_{ij}^s \eta_i \eta_j = 0, \quad s = n_b + 1, \dots, n,$$

где модальные нагрузки $Q_r(t) = \int_0^1 \Phi_r(x) F(x, t) dx$, $\omega_r = \alpha_r^2$, $\omega_s = \mu^{-0,5} \pi s$; квадратичные и кубические коэффициенты жесткости имеют следующий вид

$$\begin{aligned}g_{ij}^r &= -\beta \int_0^1 (\Psi_r \Phi_i')' \Phi_r dx, \quad r = 1, \dots, n_b, \\ h_{ijk}^r &= -\frac{\beta}{2} \int_0^1 (\Phi_i' \Phi_j' \Phi_k')' \Phi_r dx, \quad r = 1, \dots, n_b, \\ g_{ij}^s &= -\frac{1}{\mu} \int_0^1 \Psi_s \Phi_i' \Phi_j'' dx, \quad s = n_b + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Следуя общей теории, изложенной в первой части статьи, модель (25) представляет собой конкретный пример тонкостенной упругой системы с существенной нелинейной связанностью между изгибными и продольными формами колебаний (см. уравнения (12)). Численная идентификация коэффициентов мультилинейных форм \mathbf{g} и \mathbf{h} может быть выполнена с помощью процедуры STEP, что путем сопоставления результатов с аналитическими выражениями для этих коэффициентов позволяет верифицировать разработанный алгоритм определения нелинейной жесткостной характеристики.

Далее приведены результаты такой верификации в случае редукции континуальной системы к трем нижним изгибным формам. В качестве примера рассмотрена балка длиной 1 м, шириной 50 мм и толщиной 1 мм, изготовленная из стали с модулем Юнга 210 ГПа и объемной плотностью 7800 кг/м³. Зависимость результатов от величины коэффициента Пуассона ν далее рассматривается отдельно; на первом этапе в целях прямого сопоставления численного и аналитического (на основе моделей продольных колебаний стержня и изгибных колебаний балки Бернулли-Эйлера) решений принималось $\nu = 0$.

На рис. 1 изображены поля перемещений конструкции, сообщаемых ей кинематически в ходе некоторых из внутренних этапов процедуры STEP.

В таблицах 1–3 приведены значения коэффициентов трилинейной формы \mathbf{h} , полученные аналитически и численно методом STEP в оболочечной (конечный элемент первого порядка S4R программной системы ABAQUS) и объемной (элемент второго порядка C3D20R) конечно-элементных постановках, а также величины относительных погрешностей в сопоставлении с аналитическими значениями коэффициентов.

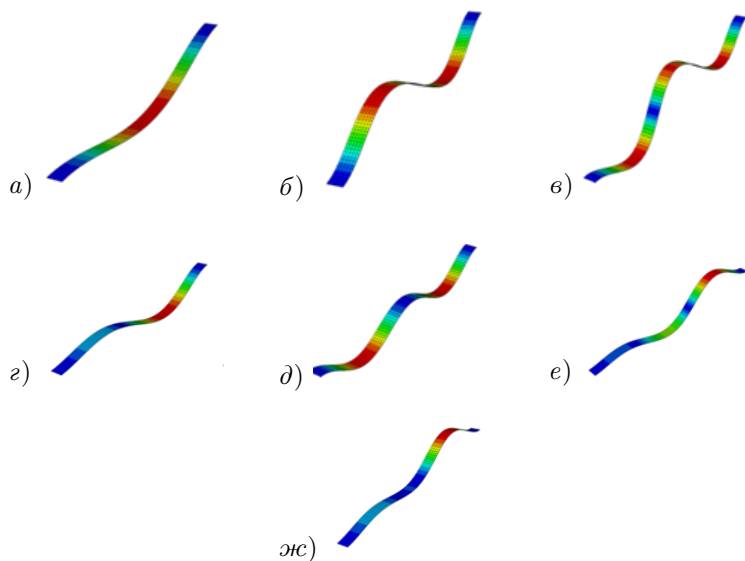


Рис. 1. Сценарии кинематического нагружения конструкции по её формам колебаний: а) $-\phi_1 q_1$; б) $-\phi_2 q_2$; в) $-\phi_3 q_3$; г) $-\phi_1 q_1 - \phi_2 q_2$; д) $-\phi_1 q_1 - \phi_3 q_3$; е) $\phi_3 q_3 + \phi_2 q_2$; ж) $\phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3$

Таблица 1. Коэффициенты нелинейной жесткости в модальных координатах по первой собственной форме

Форма		h_{111}	h_{113}	h_{122}	h_{223}	h_{333}
1	Аналитика	1334	-935,9	2432	-248,0	-14847
	Оболоч. КЭ	1332	-941,1	2416	-260,9	-15088
	δ , оболоч. КЭ	0,1%	0,6%	0,6%	5,2%	1,6%
	Объемн. КЭ	2645	-1857	4802	-490,3	-29552
	δ , объемн. КЭ	98,2%	98,4%	97,4%	97,7%	99,1%

Таблица 2. Коэффициенты нелинейной жесткости в модальных координатах по второй собственной форме

Форма		h_{112}	h_{222}	h_{132}
2	Аналитика	2432	21284	−248, 0
	Оболоч. КЭ	2432	21217	−263, 1
	δ , оболоч. КЭ	0, 01%	0, 3%	6, 1%
	Объемн. КЭ	4821	42032	−490, 6
	δ , объемн. КЭ	98, 2%	97, 5%	97, 8%

Таблица 3. Коэффициенты нелинейной жесткости в модальных координатах по третьей собственной форме

Форма		h_{111}	h_{113}	h_{133}	h_{223}	h_{333}
3	Аналитика	−936	7230	−14847	23971	95642
	Оболоч. КЭ	−937, 9	7257	−15028	23944	96930
	δ , оболоч. КЭ	0, 2%	0, 3%	1, 2%	0, 1%	1, 3%
	Объемн. КЭ	−1852	14333	−29469	41335	190132
	δ , объемн. КЭ	97, 9%	98, 2%	98, 5%	72, 4%	98, 8%

Из представленных результатов следует, что численная реализация процедуры STEP в применении к оболочечным конечным элементам характеризуется высокой точностью; наблюдаемые погрешности порядка долей и единиц процентов могут быть вызваны сеточной дискретизацией, с одной стороны, и кинематическими допущениями балочной модели Бернулли-Эйлера, с другой. В то же время расчет в объемной конечно-элементной постановке приводит к завышенным примерно в два раза значениям коэффициентов нелинейной жесткости. Это вызвано отмеченной выше существенной деформационной связанностью рассматриваемых нижних изгибных форм колебаний с множеством форм объемного деформирования твердого тела. Подробное обсуждение и теоретическое обоснование этих эффектов приведено в [15]. Ключевым соображением здесь является следующее: в оболочечной КЭ-постановке модель обладает существенно менее полным спектром собственных частот колебаний, по сравнению с объемной постановкой, за счет выполнения предположений применяемой теории

оболочек Рейсснера-Миндлина. Поэтому жесткое кинематическое нагружение конструкции по некоторой форме изгибных колебаний вызывает внутренние силы упругого сопротивления деформированию по меньшему для оболочечной постановки числу высших форм колебаний, чем в случае прямого трехмерного моделирования твердого тела.

Следует также отметить зависимость коэффициентов нелинейной жесткости от величины коэффициента Пуассона. На рис. 2 показано соотношение кубического коэффициента h_{111}^1 для оболочечной и объемной КЭ-постановок со своим аналитическим значением.

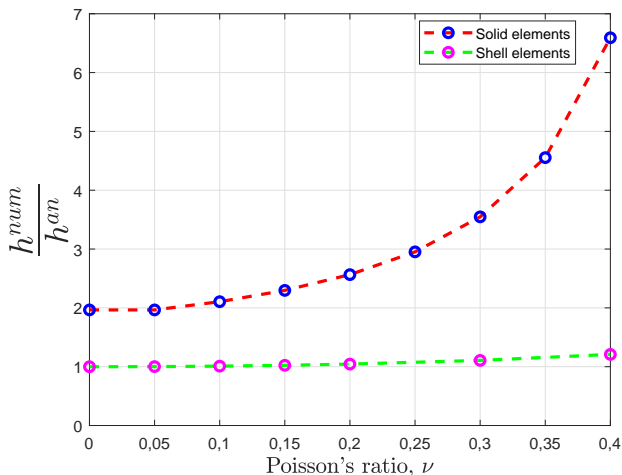


Рис. 2. Отношение кубического коэффициента h_{111}^1 к своему аналитическому значению h_{111}^{1an} при вариации коэффициента Пуассона

Таким образом, проведена верификация процедуры определения коэффициентов нелинейной восстанавливающей силы в модальном базисе STEP. Как отмечено ранее, наличие сильных нелинейных связей нижних изгибных форм колебаний с высокочастотными формами деформирования конструкций как в объемной, так и в оболочечной КЭ-постановках, приводит к медленной сходимости

сти модального разложения при определении нелинейной жесткостной характеристики. Далее выполняется верификация численного алгоритма построения прямой нормальной формы DNF, позволяющего строить корректные модели пониженного порядка для континуальных упругих систем.

7. ПРОЛЕТНАЯ БАЛКА: УЧЕТ РАСТЯЖИМОСТИ СРЕДИННОЙ ЛИНИИ

При рассмотрении изгибных колебаний тонких балок силы инерции в продольном направлении $m\ddot{u}$, в отсутствие внутренних комбинационных продольно-изгибных резонансов, являются пренебрежимо малыми. Это допущение позволяет квазистатически разрешить в (22) продольные перемещения u через поперечные перемещения v :

$$u'' = -\left(\frac{1}{2}v'^2\right)', \quad u = -\frac{1}{2} \int_0^x v'^2 ds + c_1(t)x + c_2(t), \quad (26)$$

что с учетом граничных условий $u(0, t) = u(1, t) = 0$ дает

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 ds. \quad (27)$$

Подстановка (26), (27) в (22) приводит к интегро-дифференциальному уравнению изгибных колебаний пролетной балки с учетом фактора растяжимости срединной линии:

$$\ddot{v} + v^{IV} = \frac{\beta}{2} \int_0^1 v'^2 dx \cdot v'' + f(x, t).$$

Применим модальную дискретизацию методом Галеркина. Функции поперечных перемещений представляются в виде ряда по собственным формам колебаний (см. (24)):

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{n_b} \Phi_i(x) \eta_i(t).$$

Приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений в модальных координатах:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{k=1}^{n_b} \Gamma_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k = Q_r, \quad r = 1, \dots, n_b, \quad (28)$$

где

$$\Gamma_{ijk}^r = -\frac{\beta}{2} \int_0^1 \Phi_r \Phi_i'' dx \int_0^1 \Phi_j' \Phi_k' dx.$$

Система (28) является конкретным примером уравнений типа (13), учитывающих квазистатический вклад деформирования по высшим формам колебаний в нелинейную динамику низкомодовых изгибных колебаний. Как показано ранее, такая модель является аналитическим эталоном для верификации численного алгоритма DNF построения нормальной формы Пуанкаре на базе метода конечных элементов.

В таблицах 4–6 приведены аналитические и численные (полученные методом DNF) значения коэффициентов Γ_{ijk}^r для модели пониженного порядка на основе трех нижних изгибных форм колебаний защемленной балки.

Таблица 4. Коэффициенты нелинейной жесткости в нормальных координатах инвариантного подмногообразия по первой собственной форме

Форма		Γ_{111}	Γ_{113}	Γ_{122}	Γ_{133}	Γ_{333}
1	Аналитика	908, 1	−718, 3	3399	7301	−5775
	Объемн. КЭ	900, 6	−715, 1	3351	7288	−5893
	δ	0, 8%	0, 4%	1, 4%	0, 2%	2, 0%

Таблица 5. Коэффициенты нелинейной жесткости в нормальных координатах инвариантного подмногообразия по второй собственной форме

Форма		Γ_{222}	Γ_{233}
2	Аналитика	12724	27327
	Объемн. КЭ	12454	27253
	δ	2, 1%	0, 2%

Таблица 6. Коэффициенты нелинейной жесткости в нормальных координатах инвариантного подмногообразия по третьей собственной форме

Форма		Γ_{111}	Γ_{113}	Γ_{122}	Γ_{133}	Γ_{333}
3	Аналитика	–718,3	568,1	–2689	–5775	58693
	Объемн. КЭ	–709,1	563,4	–2666	–5781	58901
	δ	1,2%	0,8%	0,8%	0,1%	0,3%

Как видно из таблиц, наблюдается хорошее совпадение аналитических и численных результатов (отклонение в значениях коэффициентов составляет не более 2,1%). Для диагональных коэффициентов нелинейной жесткости Γ_{rrr}^r можно заметить их существенное снижение по сравнению с результатами процедуры STEP (см. таблицы 1–3), что отражает факт сильного межмодального взаимодействия изгибных и объемных форм колебаний. Столь же заметны отличия в значениях и внедиагональных коэффициентов. В целом полученные результаты показывают на конкретном примере невозможность прямой редукции упругой системы к своему модальному линейному подпространству при исследовании нелинейной динамики и подтверждают точность и универсальность метода понижения порядка путем сведения многомерной динамической системы (конечно-элементной модели конструкции) к своему инвариантному подмногообразию, связанному с рабочими нелинейными нормальными модами.

8. НЕЛИНЕЙНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИИ НА ВНЕШНЕЕ СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Для демонстрации возможностей изложенных методов моделирования был проведен статический расчет рассмотренной тестовой конструкции (тонкой защемленной балки) на равномерно распределенное поперечное силовое воздействие. Расчет проводился классическим методом конечных элементов в ПС ABAQUS в геометрически линейной и нелинейной постановках, а также на основе рассмотренных вариантов синтеза компактных моделей: методом модальной редукции STEP в оболочечной и объемной КЭ-постановках

и методом построения прямой нормальной формы DNF на базе модели с объемными конечными элементами.

На рис. 3 приведено сравнение кривых «сила–перемещение» для перечисленных расчетных подходов. Прогиб в центральном сечении балки отнесен к её толщине; амплитуда внешней нагрузки указана в процентах по отношению к своему максимальному значению.

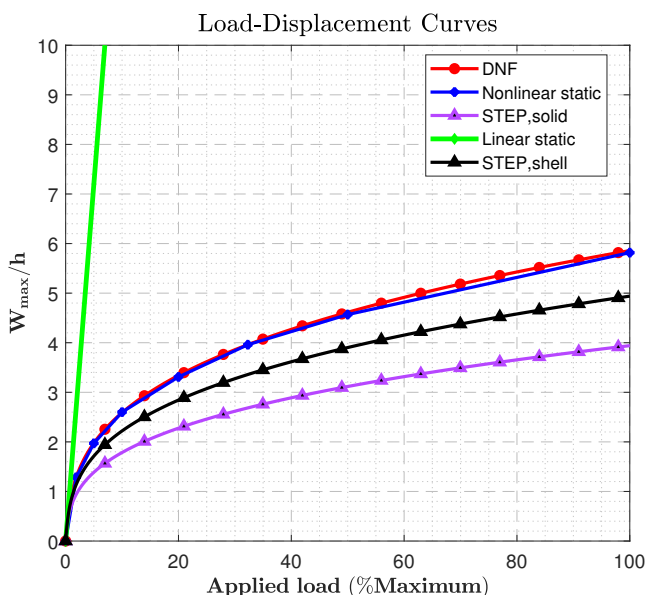


Рис. 3. Диаграмма «нагрузка–перемещение»

Как видно из рисунка, для рассмотренного диапазона величин прогиба фактор геометрической нелинейности имеет определяющее значение. При этом нелинейная жесткость конструкции, вычисленная по методу STEP, существенно превышает свою истинную величину (линия «Nonlinear static»). Также явно видно отмеченное ранее различие между оболочечной и объемной постановками при проведении прямой модальной редакции. Метод построения

нормальной формы демонстрирует, как и ожидалось, практически полное совпадение с результатом прямого нелинейного конечно-элементного расчета. При этом необходимо отметить вычислительную эффективность построенной модели пониженного порядка: её размерность в данном случае равна трем, в то время как исходная КЭ-модель имеет 8295 степеней свободы.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, была разработана и верифицирована методика автоматизированного синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке на базе метода конечных элементов. В основе рассмотренного подхода лежит идея идентификации нелинейной (квадратично-кубической) жесткостной характеристики упругой системы в её модальных координатах с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, касательного к выбранному модальному подпространству. Показано, что получаемая таким образом динамическая модель пониженного порядка учитывает нелинейную упругую связанность рабочих форм колебаний с высокочастотными продольными и объемными модами конструкции, что обеспечивает корректность вычисляемой нелинейной жесткостной характеристики системы по выбранным главным координатам. Разработанный алгоритм был применен к построению нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и её верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галеркина. Отмечена вычислительная эффективность, точность и универсальность реализованного подхода к построению моделей пониженного порядка для упругих конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Model Order Reduction. Volume 1. System- and Data-Driven Methods and Algorithms / P. Benner [et al.] – Berlin : De Gruyter, 2021. – 450 p.
2. Model Order Reduction. Volume 2. Snapshot-Based Methods and Algorithms / P. Benner [et al.] – Berlin : De Gruyter, 2021. – 480 p.

3. Model Order Reduction. Volume 3 Applications / P. Benner [et al.] – Berlin : De Gruyter, 2021. – 420 p.
4. Data-assisted non-intrusive model reduction for forced nonlinear finite elements models / M. Cenedese [et al.] // *Nonlinear Dynamics*. – 2024. – Vol. 112. – № 3. – P. 123–145.
5. Model order reduction of an electro-quasistatic problem using CLN method / W. Chen [et al.] // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2024. – Vol. 238. – P. 104185.
6. Reduced-order model of geometrically nonlinear flexible structures for fluid-structure interaction applications / T. Flament [et al.] // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2024. – Vol. 158. – P. 104587.
7. Reduced-order-model-based equivalent circuit for piezoelectric micro-electro-mechanical-system loudspeakers modeling / C. Gazzola [et al.] // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2024. – Vol. 155. – No. 2. – P. 1503–1514.
8. ГОСТ Р 57700.37–2021 Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения.
9. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
10. Muravyov A. A. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures / A. A. Muravyov, S. A. Rizzi // *Computers and Structures*. – 2003. – Vol. 81. – No. 15. – P. 1513–1523.
11. A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures / M. P. Mignolet [et al.] // *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332. – No. 10. – P. 2437–2460.
12. Touze C. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques / C. Touze, A. Vizzaccaro, O. Thomas // *Nonlinear Dynamics*. – 2021. – Vol. 105. – No. 2. – P. 1141–1190.
13. Perez R. Nonintrusive structural dynamic reduced order modeling for large deformations: Enhancements for complex structures / R. Perez, X. Q. Wang, M. P. Mignolet // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2014. – Vol. 9. – No. 3. – P. 031001.
14. On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models / A. Givois [et al.] // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 97. – No. 2. – P. 1747–1781.
15. Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements / A. Vizzaccaro [et al.] // *Computational Mechanics*. – 2020. – Vol. 66. – No. 6. – P. 1293–1319.
16. Kuznetsov Y. A. Elements of applied bifurcation theory / Y. A. Kuznetsov. – 4th ed. – Cham : Springer, 2023. – 600 p.

17. *Touze C.* Normal form theory and nonlinear normal modes: Theoretical settings and applications / C. Touze // CISM International Centre for Mechanical Sciences. – 2014. – Vol. 555. – P. 75–160.
18. *Ljapunov A. M.* Probleme general de la stabilité du mouvement / A. M. Lyapunov // Annales de la faculté des sciences de Toulouse. – 1907. – Vol. 9. – P. 203–474.
19. *Vakakis A. F.* Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system-I. Low energies / A. F. Vakakis, R. H. Rand // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1992. – Vol. 27. – No. 5. – P. 861–874.
20. *Shaw S.* Non-linear normal modes and invariant manifolds / S. W. Shaw, C. Pierre // Journal of Sound and Vibration. – 1991. – Vol. 150. – No. 1. – P. 170–173.
21. *Haller G.* Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction / G. Haller, S. Ponsioen // Nonlinear Dynamics. – 2016. – Vol. 86. – No. 3. – P. 1493–1534.
22. *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – 2-е изд. – М. : Ижевская республиканская типография, 2000. – 400 с.
23. *Nayfeh A. H.* The method of normal forms / A. H. Nayfeh. – 2nd ed. – Weinheim : Wiley-VCH, 2011. – 300 p.
24. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures / A. Vizzaccaro [et al.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2021. – Vol. 384. – P. 113957.
25. *Touze C.* Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes / C. Touze, O. Thomas, A. Chaigne // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 273. – No. 1–2. – P. 77–101.
26. *Nayfeh A. H.* Linear and nonlinear structural mechanics / A. H. Nayfeh, P. F. Pai. – Weinheim : Wiley, 2004. – 650 p.

ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ СОСУДА ПОД ДАВЛЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Р. В. ФЕДОРЕНКО, А. В. ЛУКИН

Работа посвящена исследованию приспособляемости сосуда под давлением в условиях термоциклического нагружения. Проблематика берет свое начало с конца 1960-х годов с работ отечественных ученых Д. А. Гохфельда и О. Ф. Чернявского, создавших теорию приспособляемости, и американского ученого J. Вгее, аналитически рассмотревшего сосуд под давлением из упруго-идеально-пластического материала под действием циклически изменяющегося градиента температуры по толщине стенки. Результатом данной работы является диаграмма характерных зон приспособляемости сосуда, которая в литературе получила название «диаграмма Бри». Дальнейшее развитие задачи отечественными и учеными с применением строгих и приближенных аналитических, а также численных методов позволило рассмотреть особенности приспособляемости при изменении различных параметров системы (вариация типа нагрузки, учет упрочнения материала и другие). В работе представлены результаты разработки компактной автоматизированной численной процедуры на базе программного средства Abaqus, позволяющей решать задачи приспособляемости при произвольных параметрах системы. Рассматривается вопрос влияния механизмов упрочнения материала (изотропного, кинематического и смешанного) на вид диаграммы приспособляемости и характер напряженно-деформированного состояния системы при термомеханических циклических нагрузках.

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день важнейшее направление развития российской атомной индустрии связано с созданием замкнутого топливного цикла, основным компонентом которого должен стать высокотемпературный реактор с жидкометаллическим теплоносителем [1]. Ключевая особенность работы таких реакторов заключается в значительных механических и температурных нагрузках, которым подвергаются корпуса реакторных установок, а также в

Доклад на семинаре 4 марта 2025 г.

© Р. В. Федоренко, А. В. Лукин, 2025.

циклическом характере этих нагрузок на протяжении всего срока эксплуатации энергоблока.

Кроме того, актуальным направлением в развитии современной энергетической сферы является поиск альтернатив традиционным видам топлива посредством замены ископаемых ресурсов экологически чистой энергией. Одним из решений этой задачи стало активное продвижение отечественных разработок высокотемпературного газоохлаждаемого реактора (ВТГР) с гелиевым теплоносителем, эксплуатация которого позволит производить водородное топливо [2]. Идея создания подобного реактора возникла еще в советские времена, в 60-х годах XX века, однако реализовать ее на практике пока не удалось. Основным достоинством такого реактора является повышенная безопасность эксплуатации, обусловленная отсутствием угрозы пароциркониевых реакций, так как в конструкции отсутствуют циркониевые сплавы и вода. Но вместе с тем высокая рабочая температура реактора (более 800°C) делает актуальной проблему эксплуатации материалов и обеспечение необходимой прочности элементов конструкции.

Современные стандарты проектирования атомных станций [3, 4] допускают оценку циклической прочности конструкций в условиях неупругого поведения материалов. Применяемые упрощенные расчетные схемы позволяют достаточно консервативно оценивать пригодность конструкций для работы под нагрузками, предусмотренными проектом. Основой этих схем является известная диаграмма приспособляемости [5, 6], применяемая для выявления особенностей приспособления сосудов давления к воздействию термоциклических нагрузок. В рамках указанного подхода неупругое поведение материала описывается формулами идеальной пластичности.

Если критерии циклической прочности не удовлетворяются упрощенными методами, допускается проводить пошаговые циклические расчеты, учитывая нелинейную природу деформаций материала с эффектом упрочнения. По результатам таких расчетов устанавливается величина накопленных неупругих деформаций, лимитируемая установленными нормами.

Вместе с тем нормативные документы не содержат четкого описания относительно выбора конкретного механизма упрочнения, подлежащего учету в расчетных моделях, что непосредственно ска-

зывается на итоговом значении накопленных неупругих деформаций. Цель настоящей работы – исследовать влияние механизма упрочнения материала на приспособляемость сосудов давления при условии термоциклического нагружения. Проведение исследования осуществляется с использованием специализированного инструмента конечно-элементного анализа Abaqus.

2. МЕХАНИЗМЫ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Известны три фундаментальных механизма повышения прочности материалов: изотропный, кинематический и комбинированный. В условиях циклического воздействия нагрузок при изотропном упрочнении наблюдается изменение размера области текучести без смещения её центральной точки в пространстве напряжений. Кинематическое упрочнение характеризуется смещением положения центра поверхности текучести в пространстве напряжений при сохранении постоянного радиуса данной поверхности (рис. 1) [7, 8].

Очевидно, что при изотропном механизме упрочнения зона упругих деформаций существенно расширяется начиная со второго цикла нагрузки, тогда как при кинематическом упрочнении подобного эффекта не отмечается. Реальные материалы демонстрируют смешанный характер упрочнения, сочетающий признаки обоих указанных механизмов [7, 8]. Применение такой модели усложняется необходимостью задания характеристик отдельных компонентов – изотропного и кинематического упрочнений, определяемых путем специальных экспериментов, данные которых часто отсутствуют для конкретных типов материалов. Вместе с тем для многих марок конструкционных сталей, применяемых в производстве элементов ядерных реакторов и энергетического оборудования, имеется достаточно обширная база экспериментальных данных, изложенных в ряде публикаций.

Описание нелинейного деформирования стали чаще всего основано на законе эволюции поверхности текучести по критерию Мизеса [9], который получил широкое распространение благодаря простоте реализации и универсальности и встроен почти во все современные программы для расчетов методом конечных элементов.

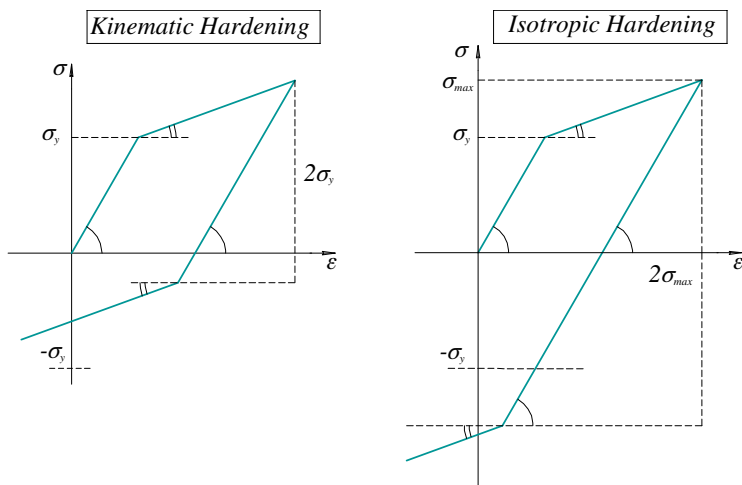


Рис. 1. Механизмы упрочнения на примере одноосного растяжения-сжатия

Поверхность Мизеса описывается соотношением

$$\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})} - R - \sigma_{y,0} = 0,$$

где $\boldsymbol{\sigma}'$ – девиатор тензора напряжений; $\sigma_{y,0}$ – начальный предел текучести материала; \mathbf{X} и R – переменные, описывающие эффекты кинематического и изотропного упрочнения соответственно.

Доля изотропной составляющей упрочнения закон изменения формы поверхности текучести может быть описан с помощью соотношения в форме закона нелинейного изотропного упрочнения Войса [10]:

$$\dot{R} = \sum_{i=1}^Z \dot{R}_i, \quad \dot{R}_i = b_i(R_{\infty,i} - R_i)\dot{p},$$

где $R_{\infty,i}$ – напряжение насыщения; b_i – скорость выхода на напряжение насыщения; p – накопленная пластическая деформация.

Для описания кинематической составляющей упрочнения принято использовать модель Ишлинского–Новожилова–Шабоша [9, 11–14], которая может быть представлена в виде соотношений

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^M \dot{\mathbf{X}}_i, \quad \dot{\mathbf{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\epsilon}_{pl} - \gamma_i \mathbf{X}_i \dot{p},$$

где C_i – модуль упрочнения; γ_i – параметр восстановления, который определяет скорость, с которой модуль упрочнения уменьшается по мере увеличения пластической деформации.

Первое слагаемое данного соотношения описывает линейную составляющую кинематического упрочнения по закону Прагера, второе слагаемое описывает мгновенную память формы (*evanescent strain memory*) [9].

Накопленная пластическая деформация p связана с пластической деформацией ϵ_{pl} по закону [9]:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{pl} : \dot{\epsilon}_{pl}}.$$

\mathbf{X} в общем случае является тензором второго ранга обратных напряжений [15], который в английской литературе имеет название *back stress tensor*.

Современные программные средства численного моделирования (*Ansys*, *Abaqus*, *LS-Dyna*) используют модель смешанного упрочнения при $Z = 1$ и произвольном M [16–18].

3. ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЗМА УПРОЧНЕНИЯ НА ХАРАКТЕР ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ СОСУДА ПОД ДАВЛЕНИЕМ

Решение классической задачи приспособляемости подробно представлено в [6, 19]. Во второй из указанных работ представлены результаты разработки автоматизированной процедуры построения диаграмм приспособляемости для сосудов высокого давления, реализованной посредством программы *Abaqus*, которая позволяет исследовать влияние изменения ряда факторов. Настоящее исследование дополняет данную методику введением характеристик

материалов, предложенных ранее, с акцентом на изучение воздействия механизмов повышения прочности на общий уровень приспособляемости конструкции. Постановка задачи изображена на рис. 2: исследуется сосуд, находящийся под действием постоянного внутреннего давления и подвергнутый циклическому изменению температурного градиента по толщине стенки.

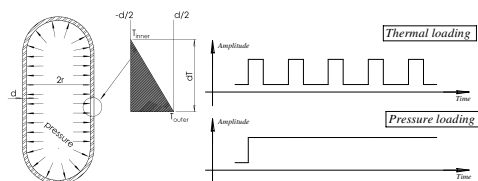


Рис. 2. Постановка задачи оценки приспособляемости

Классическая диаграмма Бри для оригинальной задачи [6] представлена на рис. 3. Данная диаграмма получена в условиях идеально пластичного материала без упрочнения под действием описанных ранее нагрузок [19].

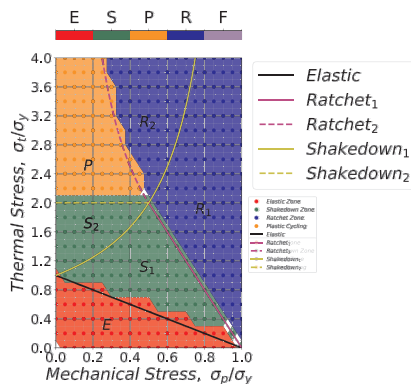


Рис. 3. Классическая диаграмма приспособляемости

Линиями на диаграмме нанесено аналитическое решение для границ зон характерной приспособляемости из [6]. На дальнейших диаграммах данные линии также будут отражены для отслеживания эволюции исходной диаграммы при наличии упрочнения. Каждая из зон определяет свое характерное поведение материала [19]:

- зона E соответствует полностью упругому состоянию конструкции;
- в зонах S_1 , S_2 – приспособляемость, упругая приспособляемость, приработка (*elastic* или *strict shakedown*). Такое поведение материала выражается в возникновении пластической деформации на первом цикле теплового нагружения и ее дальнейшей неизменности на протяжении жизненного цикла конструкции;
- в зоне P – знакопеременная пластичность, знакопеременное неупругое деформирование (*plastic cycling* или *global shakedown*), для которых характерно циклическое изменение пластической деформации в процессе расчета вокруг некоторого среднего значения, которое остается неизменным. Приращение пластической деформации от цикла к циклу отсутствует;
- в зонах R_1 , R_2 – рэтчетинг, непрекращающееся знакопеременное течение, прогрессирующая деформация (*ratcheting*) – неограниченный рост пластических деформаций под действием циклических нагрузок (от цикла к циклу существует ненулевое приращение пластической деформации).

Следует подчеркнуть, что характерная особенность упруго-идеально-пластического материала заключается в неизменности формы диаграммы приспособляемости независимо от числа циклов нагрузки. Вместе с тем ясно, что наличие упрочняющих свойств материала существенно влияет на итоговую форму диаграммы: значительное многократное нагружение способно привести к стабилизации циклических характеристик и прекращению изменений адаптивной способности материала.

На рис. 4 демонстрируются результаты расчета для случая изотропного типа упрочнения. Здесь применяется аналогичная ранее

рассмотренному случаю диаграмма деформации материала, подробное описание которой приведено в предшествующем разделе.

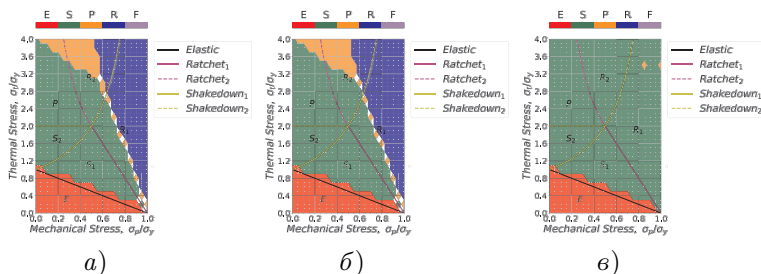


Рис. 4. Диаграммы Бри для изотропного упрочнения: а) – 1-й цикл; б) – 3-й цикл; в) – 15-й цикл

Как видно, для изотропного упрочнения характерен постепенный переход в зону приработки во всех точках диаграммы, что говорит о постепенном увеличении размера поверхности текучести, что для определенных амплитуд нагружения уже не дает прироста пластической деформации.

На рис. 5 представлены решения задачи для кинематического механизма упрочнения.

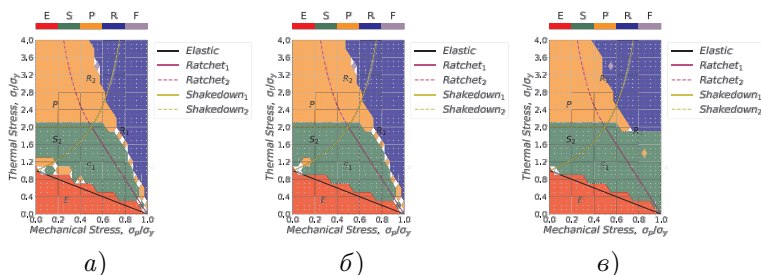


Рис. 5. Диаграммы Бри для кинематического упрочнения: а) – 1-й цикл; б) – 3-й цикл; в) – 15-й цикл

Видно, что в случае кинематического упрочнения в зону приработки переходит лишь часть диаграммы на уровне $\sigma_t/\sigma_y = 2$. При этом выше данного значения часть области рэтчетинга переходит в состояние знакопеременной пластичности. Данный результат хорошо коррелирует с исследованием [20].

На рис. 6 представлены решения задачи для смешанного механизма упрочнения.

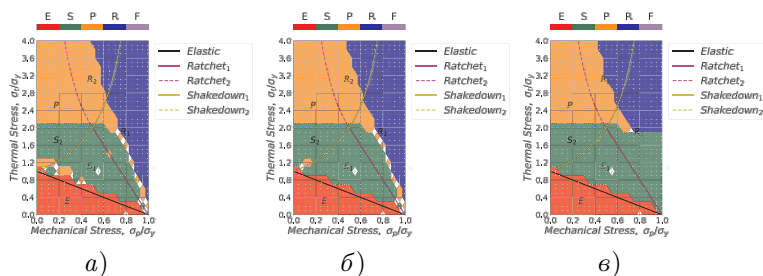


Рис. 6. Диаграммы Бри для смешанного упрочнения: а) – 1-й цикл; б) – 3-й цикл; в) – 15-й цикл

Видно, что итоговые данные для смешанного механизма упрочнения совпадают с результатами кинематического механизма. Процесс упрочнения для обеих моделей имеет сходство:

- в течение первого цикла наблюдается определенная степень повышения прочности материала;
- на следующем этапе при кинематическом упрочнении деформация протекает вдоль идентичной линии деформирования первому циклу, тогда как при смешанной модели – по немного видоизменённой, «усиленной» траектории, хотя разница настолько мала, что не влияет существенно на общую картину адаптивности материала.

Кроме особенностей локализации областей приспособляемости важным фактором является уровень деформаций, возникающих

внутри материала. На рис. 7 и 8 демонстрируются графики значений пластической деформации и её прироста для указанных механизмов упрочнения при начальном значении параметра $b = 5,76$.

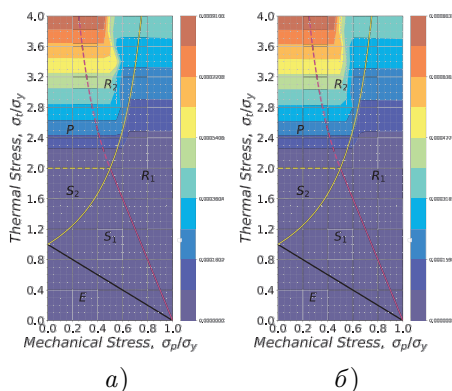


Рис. 7. Значение максимальной по толщине средней пластической деформации между циклами: а) – кинематическое упрочнение; б) – смешанное упрочнение

По диаграммам видно, что значение средних деформаций и приращения между двумя последними циклами нагружения имеют различие в абсолютных значениях: кинематический механизм упрочнения дает значение деформаций на 12% выше, чем смешанный механизм, за счет отсутствия составляющей изотропного упрочнения, повышающего прочностные характеристики материала.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с отечественными и международными стандартами проектирования АЭС проверка прочности конструкций и элементов реакторов при воздействии повторяющихся нагрузок с учётом нелинейного поведения материалов должна учитывать как предотвращение прогрессирующего накопления пластических деформаций (предотвращение ратчетинга), так и соблюдение предель-

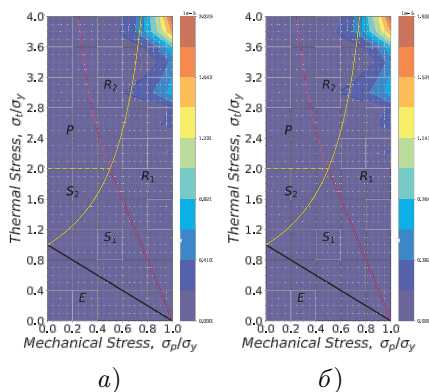


Рис. 8. Значение приращения пластической деформации между циклами: а) – кинематическое упрочнение; б) – смешанное упрочнение

ных норм общих остаточных деформаций. Эти условия применимы к комплексным расчетам, предусматривающим пошаговую симуляцию всех этапов нагрузки в течение всего срока эксплуатации оборудования. Такие расчёты проводятся, если стандартные приближённые методы оценки усталостной прочности не обеспечивают достаточной точности результатов.

Исходя из установленных нормативных требований и проведённого анализа, возможно сформулировать следующие заключения:

1. Изотропный механизм упрочнения непригоден для прямого циклического моделирования вследствие чрезмерного завышения показателей сопротивления нагрузкам, вызванного увеличением размеров области упругости материала.
2. Кинематическое упрочнение демонстрирует наибольший консерватизм, обеспечивая стабильную диаграмму приспособляемости даже при небольшом числе циклов нагрузки, которая остаётся неизменной при продолжительном нагружении. Среднее значение приростов и деформаций между циклами

оказывается выше, чем при смешанном механизме, что обеспечивает надёжность оценивания циклической долговечности по уровням деформаций.

3. Смешанное упрочнение лучше отражает действительное поведение материала при циклических нагрузках, однако его применение ограничено высокой потребностью в обширных экспериментальных исследованиях для калибровки параметров модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстрый реактор со свинцовым теплоносителем БРЕСТ: от концепции к реализации технологии / Е. О. Адамов [и др.] // Атомная энергия. – 2020. – Т. 129. – Вып. 4. – С. 185–194.
2. Шаманин И. В. Высокотемпературные ядерные энергетические технологии / И. В. Шаманин, П. М. Гаврилов // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – Вып. 4. – С. 5–9.
3. ГОСТ Р 59115.10-2021. Обоснование прочности оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. Уточненный поверочный расчет на стадии проектирования. Национальный стандарт РФ, 2021.
4. ASME BPVC.III.5-2015. Division 5 – High Temperature Reactors.
5. Гохфельд Д. А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен / Д. А. Гохфельд. – М. : Машиностроение, 1970. – 260 с.
6. Bree J. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subject to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements / J. Bree // Journal of Strain Analysis. – 1967. – Vol. 2. – No. 3. – P. 226–238.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 711 с.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1994. – Т. 1. – 528 с., Т. 2. – 560 с.
9. Lemaitre J. Mechanics of Solid Materials / J. Lemaitre, J. L. Chaboche // Cambridge University Press: Cambridge, UK. – 1990. – 556 p.
10. Pelegatti M. Cyclic plasticity and low cycle fatigue of an AISI 316l stainless steel: experimental evaluation of material parameters for durability / M. Pelegatti [et al.] // Materials. – 2021. – No. 14, 3588. – 20 p.
11. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением / А. Ю. Ишлинский // Укр. матем. журн. – 1954. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 314–324.

12. *Кадашев Ю. И.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера / Ю. И. Кадашев, В. В. Новожилов // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 117. – Вып. 4. – С. 586–588.
13. *Chaboche J. L.* Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity / J. L. Chaboche // Int. J. Plast. – 1986. – No. 2. – P. 149–188.
14. *Chaboche J. L.* A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories / J. L. Chaboche // Int. J. Plast. – 2008. – No. 24. – P. 1642–1693.
15. *Федоренков Д. И.* Методика определения констант и параметров модели накопления повреждений с изотропным и кинематическим упрочнением / Д. И. Федоренков, Д. А. Косов, А. В. Туманов // Физическая мезомеханика. – 2022. – Т. 26. – Вып. 6. – С. 63–74.
16. Ansys 2021R2 Theory Guide – Ansys Inc, 2021.
17. Abaqus 2017 Theory Guide – Dassault Systems, 2017.
18. *Ambroziak A.* Numerical modeling of elasto-viscoplastic Chaboche constitutive equations using MSC.MARC / A. Ambroziak // Task quarterly. – 2005. – Vol. 9. – No. 2. – P. 157–166.
19. *Морозов Н. Ф.* Численный метод анализа приспособляемости упруго-пластических тел при переменных нагрузках / Н. Ф. Морозов, Р. В. Федоренко, А. В. Лукин // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 69–84.
20. *Pei X.* The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries / X. Pei, P. Dong, J. Mei // Thin-Walled Structures. – 2021. – No. 159. – 159 p.

КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ С ПЛОСКОЙ КРЫШКОЙ

А. И. Доля

В работе исследуются свободные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной равномерно расположенными одинаковыми шпангоутами. Оболочка жестко заделана с одного края и сопряжена с тонкой круговой пластиной на другом. Исследуются различные формы собственных колебаний: «оболочечные», «пластиночные» и «балочные». С использованием асимптотических методов и метода осреднения получена формула для параметра «оболочечной» частоты. Построены графики частот для различных форм колебаний, спектр частот конструкции для оценки влияния шпангоута. Исследуется задача оптимизации спектра собственных частот, путем изменения толщины элементов конструкции и числа шпангоутов при сохранении ее суммарного веса. Под оптимальным набором параметров полагается такой, при котором минимальное значение собственной частоты конструкции максимально.

1. ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные оболочки и конструкции из них широко применяются на практике. Подобные конструкции нашли свое применение во многих областях, среди которых: отрасль газовой и нефтяной промышленности, где конструкции из тонких оболочек используются для хранения и транспортировки жидкостей и газов; аэрокосмическая промышленность – для создания корпусов; производство автомобилей – при проектировании газовых цилиндров, топливных баков и других компонентов. Во многом конструкции, состоящие из тонкостенных оболочек, применяются в условиях высоких динамических нагрузок, которые вызывают колебания и последующие деформацию и разрушение. Поэтому спектр частот свободных колебаний конструкций, содержащих тонкостенные элементы, – необходимая информация при проектировании этих конструкций, а исследования, посвященные его структуре, представляют большой интерес.

Доклад на семинаре 11 марта 2025 г.

© А. И. Доля, 2025.

Колебаниям тонкостенных конструкций посвящены книги [1–3], в них приведены основные теоретические и практические положения динамики оболочек и пластин, в частности, цилиндрических оболочек. В [2] исследованы свойства спектра собственных частот тонких оболочек вращения, в [1] развивается теория сопряженных оболочек – цилиндрических, конических и подкрепленных шпангоутами.

На практике чаще всего встречаются круговые цилиндрические оболочки, которые с целью увеличения их прочности подкрепляются ребрами жесткости (рис. 1). В зависимости от конкретного проекта и сферы применения, ребра жесткости могут быть продольными – стрингера, или круговыми поперечными – шпангоуты. При сохранении общей массы конструкции подкрепленные оболочки имеют большую частоту свободных колебаний. В [1] описаны условия сопряжения цилиндрической оболочки с тонким шпангоутом, рассмотрена краевая задача собственных колебаний шарнирно опертой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. Представляет интерес задача максимизации низшей фундаментальной частоты конструкции путем изменения различных параметров при сохранении массы конструкции. Например, в [4] исследуются различные функции распределения жесткостей шпангоутов по длине оболочки.



Рис. 1. Цилиндрические оболочки

Также стоит принять во внимание, что оболочка обычно сопряжена с пластиной на одном из краев. Граничные условия для пластины и оболочки в такой конструкции приводятся в [5], в ней же

описывается классификация собственных форм колебаний на «оболочечные», «пластиночные» и «балочные» (рис. 2). Спектр свободных колебаний конструкции, состоящей из гладкой оболочки с крышкой, подробно исследован в [6, 7]. В этих работах показано, что изменение кривизны крышки – очень эффективный способ увеличения низших частот «пластиночной» формы колебаний.

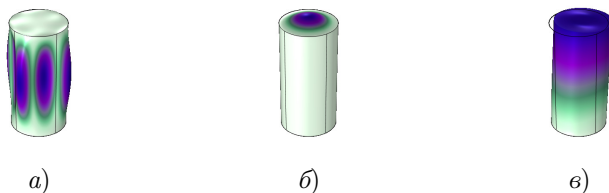


Рис. 2. Форма собственных колебаний конструкции: а) – «оболочечная»; б) – «пластиночная»; в) – «балочная»

Уравнения теории тонких оболочек содержат естественный малый параметр – толщина оболочки. Поэтому на практике оказывается эффективным использовать асимптотический метод разложения решения по малому параметру [8, 9]. Также для дальнейшего упрощения решения при рассмотрении подкрепленных оболочек удобно использовать метод осреднения [1, 10], согласно которому в некоторых случаях удастся свести сосредоточенные нагрузки в уравнениях к распределенной нагрузке.

2. Постановка задачи

Элементы конструкции выполнены из одного изотропного материала. E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала (рис. 3). В качестве характерного размера выбирается радиус оболочки R . Безразмерные параметры имеют вид:

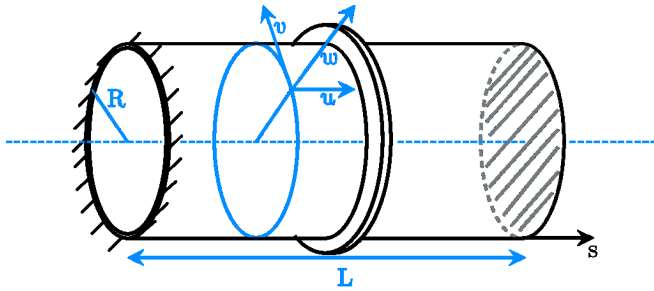


Рис. 3. Тонкая цилиндрическая оболочка, подкреплённая шпангоутом, с торцевой крышкой

$$h_s = \frac{H_s}{R}, \quad h_p = \frac{H_p}{R}, \quad l = \frac{L}{R}, \quad \lambda = (1 - \nu^2)\rho\omega^2 R^2 E^{-1},$$

$$\tilde{c} = \frac{m^8 \mu^4 l \eta}{1 - \nu^2},$$

где $\eta = \frac{12(1-\nu^2)J}{h_s^3 l}$. $J = \frac{a^3 b}{12}$ – момент инерции поперечного сечения; \tilde{c} – безразмерная жесткость шпангоута; a – относительная высота шпангоута; b – относительная ширина шпангоута; $\mu^4 = \frac{h_s^2}{12}$ – малый параметр (рис. 4).

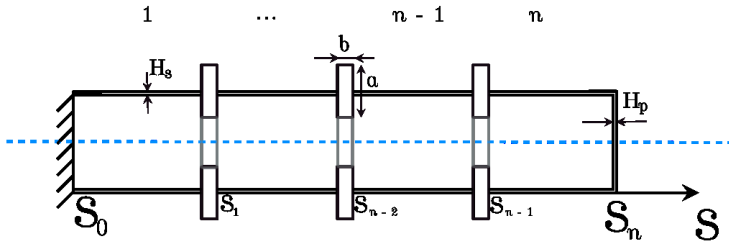


Рис. 4. Сечение конструкции плоскостью, проходящей через ось цилиндра

3. ЧАСТОТЫ «ОБОЛОЧЕЧНОЙ» ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В [2] рассмотрены низкочастотные колебания конических и цилиндрических оболочек, для которых $\lambda \sim h$, $m \sim h^{1/4}$. Для цилиндрической оболочки система сводится к уравнению

$$\frac{d^4 w}{ds^4} - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\lambda - \mu^4 m^8}{1 - \nu^2},$$

где s – осевая координата; w – проекция перемещения на направление нормали; m – число волн по параллели.

В случае, когда отношение толщин пластины и оболочки невелико ($\frac{h_p}{h_s} \sim 1$), граничное условие на краю, где оболочка сопряжена с пластиной [5]:

$$w = \frac{d^2 w}{ds^2} = 0.$$

С другого края оболочка жестко заделана, граничное условие

$$w = \frac{dw}{ds} = 0.$$

Учитывая условия сопряжения шпангоутов с цилиндрической оболочкой [1], краевая задача для определения собственных частот «оболочечной» формы собственных колебаний выглядит следующим образом:

$$\text{Уравнение: } \frac{d^4 w}{ds^4} - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\lambda - \mu^4 m^8}{1 - \nu^2}. \quad (1)$$

$$\text{Граничные условия: } w^{(0)} = \frac{dw^{(0)}}{ds} = 0, \quad s = s_0,$$

$$w^{(n-1)} = \frac{d^2 w^{(n-1)}}{ds^2} = 0, \quad s = s_n. \quad (2)$$

Условия сопряжения: $w^{(i)} = w^{(i-1)}, \quad \frac{dw^{(i)}}{ds} = \frac{dw^{(i-1)}}{ds},$
 $\frac{d^2 w^{(i)}}{ds^2} = \frac{d^2 w^{(i-1)}}{ds^2},$
 $\frac{d^3 w^{(i-1)}}{ds^3} - \frac{d^3 w^{(i)}}{ds^3} = -\tilde{c}w^{(i)},$
 $s = s_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$

Краевая задача (1)–(3) эквивалентна задаче о собственных поперечных колебаниях балки, зашеченной с одного края, шарнирно опертой с другого и подкреплённой пружинами жесткости \tilde{c} (рис. 5).

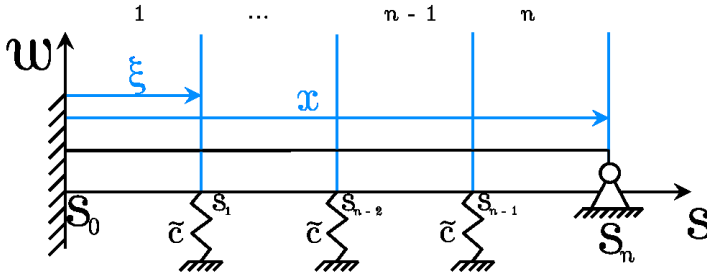


Рис. 5. Поперечные колебания балки, подкреплённой $n-1$ пружиной жесткости \tilde{c}

Если число шпангоутов велико ($n \gg 1$), а жесткость каждого из них мала ($\tilde{c} \sim 1/n$), то для приближенного определения собственных значений краевой задачи (1)–(3) можно использовать метод осреднения, основанный на выделении в решении медленной (конструктивно-ортотропной) и быстрой (периодической) составляющих [1].

Также в рамках используемой модели нужно учитывать, что сегмент облоочки, находящийся между шпангоутами, не должен быть слишком коротким, следовательно, выполняется условие $n \ll l/\mu$.

Добавим в уравнение (1) слагаемые, соответствующие действующим со стороны шпангоутов сосредоточенным нагрузкам:

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + cnw \sum_{i=1}^n \delta(\xi - i) = \kappa w, \quad \kappa = (\alpha l)^4, c = \tilde{c} l^3, \xi = nx, x = \frac{s - s_0}{l}, \quad (4)$$

где x – медленная переменная; ξ – быстрая переменная. Решение ищем в виде:

$$w(x, \xi) = w_0(x, \xi) + n^{-4} w_4(x, \xi) + \dots, \quad \kappa = \kappa_0 + n^{-4} \kappa_4 + \dots, \quad (5)$$

где $w_i(x, \xi) = w_i(x, \xi + 1)$.

Подставив (5) в (4), получим

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^4 w_4}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + cnw_0 \sum_{i=1}^n \delta(\xi - i) = \kappa_0 w_0. \quad (7)$$

Последовательно интегрируя уравнение (6) и применяя к нему оператор осреднения $\langle f \rangle = \int_0^1 f d\xi$, получим

$$w_0(x, \xi) = w_0(x).$$

Осредняя уравнение (7) и учитывая $w_0(x, \xi) = w_0(x)$:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + cnw_0 = \kappa_0 w_0$$

или

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \beta^4 w_0 = 0, \quad \beta^4 = \kappa_0 - cn. \quad (8)$$

Уравнение (8) описывает свободные поперечные колебания балки, жестко заделанной с одного края и шарнирно опертой с другого края. Характеристическое уравнение этой задачи имеет вид $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{th} \beta$. Корни уравнения можно определить по приближенной формуле $\beta_k = \pi/4 + \pi k$ при больших k . Однако уже при $k = 1$

приближенное значение корня $\frac{5\pi}{4} = 3,927$ с точностью до четырех знаков совпадает с точным значением $\beta_1 = 3,927$.

В разложении (5) представим w_4 в виде $w_4(x, \xi) = w_4(x) + \tilde{w}_4(x, \xi)$, где $\langle \tilde{w}_4 \rangle = 0$. Приравнивая слагаемые при соответствующих степенях малого параметра, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^4 w_4}{dx^4} + cnw_4 - \frac{c^2 n^2}{720} w_0 = \kappa_0 w_4 + \kappa_4 w_0. \quad (9)$$

Умножая уравнение (9) на w_0 и интегрируя его по частям, получаем следующее слагаемое в разложении $\kappa_4 = -\frac{c^2 n^2}{720}$. Таким образом, получена приближенная формула определения параметра κ для балки, жестко заделанной с одной стороны и шарнирно опертой с другой стороны:

$$\kappa_j \approx \kappa_0^j - \frac{c^2}{720n^2},$$

где $\kappa_0^j = \beta_j^4 + cn$. Таким образом, формула для частотного параметра «оболочечной» формы колебаний

$$\lambda_s^j \approx \frac{\kappa_j(1 - \nu^2)}{l^4 m^4} + \mu^4 m^4. \quad (10)$$

4. ЧАСТОТЫ «ПЛАСТИНОЧНОЙ» ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Свободные колебания круговой пластины, сопряженной с цилиндрической оболочкой, подробно исследованы в [5].

Собственная частота пластины определяется формулой

$$\lambda_p = \beta^4 \frac{h_p^2}{12}. \quad (11)$$

Параметр частоты β является решением уравнения

$$J_m(\beta)I_{m-1}(\beta) - J_{m-1}(\beta)I_m(\beta) - \frac{2\beta J_m(\beta)I_m(\beta)}{1 - \nu - k} = 0,$$

где $k = \frac{\sqrt{2}\sigma^{1/4}}{\mu\delta^3}$; $\delta = \frac{h_p}{h_s}$; $\sigma = 1 - \nu^2$; h_p – толщина пластины; h_s – толщина оболочки.

Уравнение отличается от уравнения в задаче о колебаниях жестко заделанной круговой пластины последним слагаемым в левой части. Это слагаемое характеризует различие между шарнирным опиранием и сопряжением с тонкой цилиндрической оболочкой. Для $\delta \rightarrow \infty$ получается уравнение для шарнирно опертой пластины, а при $\delta \rightarrow 0$ – жестко заделанной.

5. ЧАСТОТЫ «БАЛОЧНОЙ» ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Свободные колебания цилиндрической оболочки как консольной балки также рассмотрены в [5].

Параметр частоты Ω определяется формулой

$$\Omega = \frac{\alpha}{l} \sqrt[4]{\frac{3}{2}(1-\nu^2) \left(1 + \frac{4}{h_s^2}\right)}.$$

Параметр частоты α является решением уравнения:

$$\gamma \alpha (\cos(\alpha) \sinh(\alpha) - \cosh(\alpha) \sin(\alpha)) + \cosh(\alpha) \cos(\alpha) + 1 = 0,$$

где $\gamma = \frac{m}{M}$; m – масса пластины; M – масса оболочки, причем

$$\lambda_b = \Omega^4 \frac{h_s^2}{12}. \quad (12)$$

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Представленные далее вычисления были проведены для конструкции, у которой оболочка, пластина и шпангоуты сделаны из одного материала, с параметрами $E = 110$ [GPa], $\rho = 8960$ [kg/m³], $\nu = 0,35$, $R = 1$ [m], $L = 4$ [m], $a = 0,03$ [m], $b = 0,01$ [m], $e = 0$, $h_p = h_s = 0,01$ [m].

В таблице 1 приведены значения частотных параметров для одного и двух шпангоутов; λ_1 вычислено решением краевой задачи (1)–(3), а λ_2 по формуле (10). Можно отметить, что уже при одном

шпангоуте ($n = 2$) формула (10) дает значения, близкие к точным. При этом вычисление значения низшего параметра частоты по формуле (10) происходит значительно быстрее, чем построение определителя системы в краевой задаче (1)–(3) и последующего нахождения его корней, с целью вычислить частотный параметр. К тому же увеличение числа шпангоутов на 1 увеличивает количество условий сопряжения на 4, а следовательно, и размер определителя, что повышает сложность его вычисления.

Таблица 1. Значения λ_1 и λ_2 при наличии одного и двух шпангоутов

n	$\lambda_1 \cdot 10^2$	$\lambda_2 \cdot 10^2$
2	0,5448	0,5444
3	0,5506	0,5507

Далее проанализируем значения низшего параметра частоты «оболочечной» формы собственных колебаний, полученных при помощи формулы (10) и метода конечных элементов.

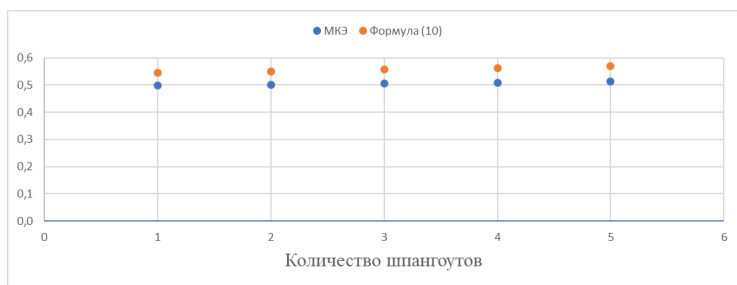


Рис. 6. Низший параметр «оболочечной» частоты при различном числе шпангоутов. Приведены значения $\lambda \cdot 10^2$

Из рис. 6 видно, что существует погрешность порядка 10%, которая, согласно результатам, приведенным в таблице 1, вызвана неточностью краевой задачи (1)–(3), построенной в нулевом приближении.

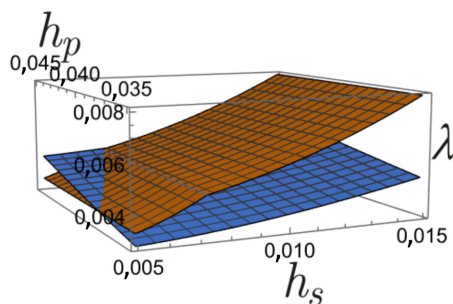


Рис. 7. Частоты колебаний «пластиночной» (синим) и «оболочечной» (оранжевым) форм собственных колебаний при наличии одного шпангоута в зависимости от относительных толщин пластины и оболочки

При близких толщинах оболочки и пластины низшая частота «пластиночной» собственной формы колебаний оказывается меньше (рис. 7). Однако, изменяя толщины, можно добиться оптимального случая, когда низшие частоты «оболочечной» и «пластиночной» форм колебаний совпадут, на рисунке это пересечение поверхностей. Подводя итог, часть материала оболочки можно использовать для увеличения толщины пластины и тем самым добиться увеличения низшей фундаментальной частоты конструкции. Вместе с тем обратим внимание на излом поверхности «оболочечных» форм колебаний, вызванный сменой числа волн по параллели, которому соответствует низшая частота «оболочечной» формы колебаний.

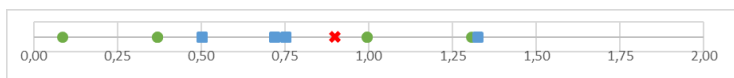


Рис. 8. Спектр частот конструкции без шпангоутов



Рис. 9. Спектр частот конструкции с 1 шпангоутом

Спектры частот на рис. 8 и 9 демонстрируют, что добавление шпангоутов в конструкцию позволяет увеличить частоту «оболочечной» формы собственных колебаний, тем самым освободив часть материала оболочки для дальнейшей оптимизации собственных частот.

7. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

7.1. Постановка задачи

Собственные частоты $\lambda_i(p_j)$ $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, m$ зависят от m параметров таких, что $p_j \in P_j$. Кроме того, задается условие $F(p_j) = 0$. Мы должны найти такой набор параметров p_j , который обеспечивает

$$\max_{p_j} \min_i \lambda_i(p_j) \quad p_j \in P_j \quad F(p_j) = 0.$$

В рамках поставленной задачи параметрами являются количество шпангоутов и соотношение толщин пластины и оболочки. Условием $F(p_j) = 0$ будет условие сохранения массы конструкции.

7.2. Оптимизация «пластиночной» и «оболочечной» частоты при наличии 1 шпангоута

Рассмотрим для начала упрощенную задачу, в которой участвует только один параметр – отношение толщин пластины и оболочки, а λ_i – частоты только «оболочечной» и «пластиночной» форм собственных колебаний. При этом добавляется только один шпангоут фиксированного размера. Отметим, что дальнейшие выражения

и используемые формулы позволяют исследовать оптимизационную задачу с большим количеством параметров, таких как количество шпангоутов, отношение модулей Юнга материалов оболочки и шпангоутов, отношение ширины и высоты поперечного сечения шпангоутов и так далее. Зафиксируем массу конструкции, где не было шпангоутов, а толщины оболочки h_s и пластины h_p совпадали ($h_s = h_p = h$). Далее часть материала используем для добавления шпангоута и увеличения толщины пластины. В этом случае уравнение сохранения массы

$$2lh + h = 2l\tilde{h} + \tilde{\delta}h + 2ba,$$

где \tilde{h} – новая толщина оболочки, $\tilde{\delta}$ – отношение новой толщины пластины к изначальной. Формула для толщины оболочки после добавления одного шпангоута и изменения толщины пластины в $\tilde{\delta}$ раз:

$$\tilde{h} = \frac{2lh + h - \tilde{\delta}h - 2ba}{2l},$$

если добавлен $n - 1$ шпангоут:

$$\tilde{h} = \frac{2lh + h - \tilde{\delta}h - 2ba(n - 1)}{2l}.$$

Используя формулы (10) и (11), найдем $\tilde{\delta}$, при котором низшие параметры частот «пластинчатой» и «оболочечной» собственных форм колебаний совпадают. При этом параметр $\tilde{\delta}$ связан с отношением толщины пластины к толщине оболочки уравнением $\delta = \frac{h_p}{h_s} = \frac{\tilde{\delta}h}{h}$. В результате, исследуя оптимальный случай при наличии одного шпангоута и не вводя в рассмотрение «балочную» форму собственных колебаний, получим аналитически $\delta \approx 4,106$ и методом конечных элементов $\delta \approx 3,949$. Погрешность аналитического решения $\approx 4\%$.

На рис. 10 представлен спектр собственных частот конструкции для аналитически рассчитанного оптимального параметра δ . Данный спектр рассчитан методом конечных элементов. Видно, что аналитическая оптимизация позволяет достаточно точно свести к равенству низшие частоты собственных колебаний пластины и оболочки. Однако в данном случае низшей становится частота «балочной» формы колебаний, которую нужно вводить в рассмотрение.

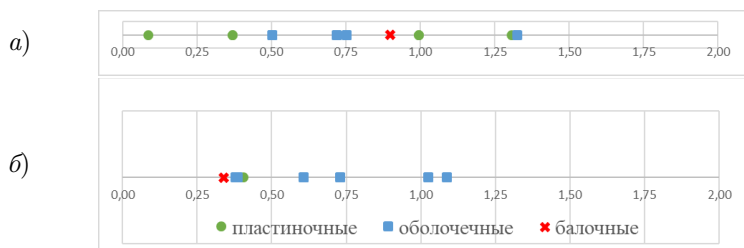


Рис. 10. Спектры частот конструкции: а) – без шпангоутов, б) – с одним шпангоутом и параметром $\delta = 4,106$. Приведены значения $\lambda \cdot 10^2$

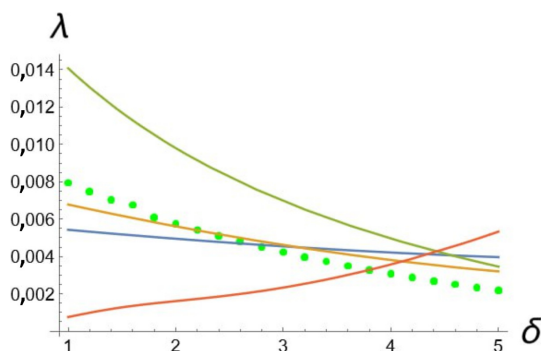


Рис. 11. Частоты колебаний: пластиночные (красным); оболочечные (1 шпангоут, $m = 4$ – синим, $m = 5$ – оранжевым); балочные (темно-зеленым по формуле (12), светло-зеленым МКЭ)

Анализ рис. 11 позволяет сделать несколько выводов:

1. Формула (12) дает высокую погрешность при данной длине оболочки для низшей частоты «балочной» формы собственных колебаний.
2. Аналитические формулы (10)–(12) позволяют определить порядок δ в оптимальном случае для дальнейшего приближения.

3. При наличии одного шпангоута оптимальный параметр δ может быть получен при равенстве «пластиночной» и «балочной» частот.

Проведенные вычисления показывают, что уже при наличии одного шпангоута заданных размеров низшая частота является одной из частот «пластиночной» или «балочной» формы собственных колебаний. Дальнейшая оптимизация требует увеличения частот этих форм колебаний, что не может быть достигнуто в рамках поставленной задачи.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Получена упрощенная формула (10) для определения параметра «оболочечной» частоты.
- Проведено сравнение частотного параметра λ для различного числа шпангоутов, полученного по упрощенной формуле, и с помощью точного решения краевой задачи нулевого приближения.
- Решена задача оптимизации при наличии одного шпангоута в зависимости от отношения толщин пластины и оболочки.
- Приведен график с низшими частотами, рассчитанными аналитически, для каждой из форм колебаний в зависимости от отношения толщин пластины и оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек / С. Б. Филиппов. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. – 196 с.
2. Гольденвейзер А. Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. / под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

4. Нестерчук Г. А. Собственные колебания тонкой защемленной цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами / Г. А. Нестерчук // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2022–2023 гг. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – С. 78–98.
5. Filippov S. B. Free vibrations of a cylindrical shell closed with cap / S. B. Filippov, G. A. Nesterchuk, A. L. Smirnov // Advances in Solid and Fracture Mechanics. A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov. – Cham, 2022. – P. 71–86.
6. Филиппов С. Б. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ / С. Б. Филиппов, А. Л. Смирнов, Г. А. Нестерчук // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2023. – Т. 10. – № 1. – С. 109–120.
7. Нестерчук Г. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. II. Анализ спектра / Г. А. Нестерчук, А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2023. – Т. 10. – № 2. – С. 334–343.
8. Асимптотические методы в механике твердого тела / С. М. Бауэр [и др.] – М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 356 с.
9. Tovstik P. E. Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells / P. E. Tovstik, A. L. Smirnov. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong : World Scientific Pub Co Inc, 2001. – 360 p.
10. Андрианов И. В. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек / И. В. Андрианов, В. А. Лесничая, Л. И. Маневич. – М. : Наука, 1985. – 224 с.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЙ ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

П. П. Удалов, А. В. Лукин, И. А. Попов

В настоящей работе исследуется нелинейная динамика и устойчивость движения проводящего тонкого кольца в электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. Анализ выполняется с применением асимптотических методов нелинейной механики. С помощью численных методов теории бифуркаций исследуется положение равновесия в пространстве ключевых параметров подвеса. В предположении о медленной эволюции квазистатического положения равновесия определены условия на возникновение и параметры дрейфа левитирующего твердого тела. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима стационарной левитации. Показано, что учет дрейфа положения равновесия системы приводит к дополнительному условию на устойчивость, связанному с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитный подвес – элемент навигационных, транспортных и электрических систем [1], работающий на основе принципа электромагнитной левитации (ЭЛ) и уравнивающий силу тяжести проводящего твердого тела (ТТ) пондеромоторными силами [2]. Схема работы устройств, основанных на принципе ЭЛ, позволяет достигать высокой надежности [3], стабильности [4] и т. д. Устройства на основе принципа ЭЛ нашли применение в навигационном приборостроении (микромеханические акселерометры [3], гироскопы [5], гравиметры/сейсмические датчики [6]) и т. д.

Аналитическому, численному и экспериментальному исследованиям режимов работы и характеристик электромагнитного подвеса посвящено множество работ. В [3] обсуждаются вопросы разработки инерциального датчика с чувствительным элементом в форме диска на основе электромагнитного подвеса. В [5] рассматривается экспериментальный прототип электромагнитного подвеса с

Доклад на семинаре 18 марта 2025 г.

© П. П. Удалов, А. В. Лукин, И. А. Попов, 2025.

объемными катушками индуктивности (соленоиды, спиральные катушки).

Основная цель настоящей работы заключается в аналитическом исследовании динамики ТТ, выполненного в форме кольца, в поле двух круговых катушек индуктивности в предположении о том, что высота левитации является медленно меняющейся функцией времени, т. е. дрейфующей вблизи своего среднего положения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается модель вертикальных движений ТТ неконтактного индукционного подвеса, выполненного в форме тонкого недеформируемого кольца прямоугольного сечения и находящегося в переменном электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивностей. Схематическое изображение рассматриваемого устройства представлено на рис. 1.

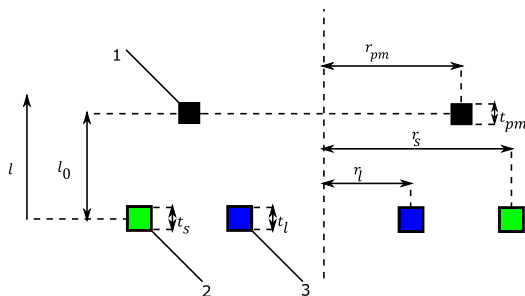


Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса

При подаче переменного тока $i_l = I_l \sin \omega t$ (I_l и ω – амплитуда и частота тока i_l) на левитационную катушку индуктивности среднего радиуса r_l толщины t_l (на рис. 1 она обозначена под номером 3) возникает переменное электромагнитное поле, взаимодействующее с полем вихревых токов в объеме ТТ, выполненного в форме квадратного кольца среднего радиуса r_{pm} и толщиной t_{pm} (на рис. 1 оно обозначено под номером 1). Сила Ампера между то-

ком i_l и индуцированным током i_{pm} может при определенных условиях приводить к левитации ТТ (компенсировать силу тяжести и обеспечивать устойчивость движения). Стабилизирующая катушка, по которой течет ток $i_s = I_s \sin \omega t$ (I_s и ω – амплитуда и частота тока i_s), обозначенная на рис. 1 под номером 2, препятствует боковым и угловым смещениям ТТ и обеспечивает пространственную устойчивость. Результирующее электромагнитное поле представляет собой суперпозицию электромагнитных полей левитационной и стабилизирующей катушек. Параметр I_s может принимать как положительные, так и отрицательные значения: $I_s/I_l = 1$ отвечает случаю синфазности токов i_l и i_s ; $I_s/I_l = -1$ – противофазности; $I_s/I_l = 0$ – отсутствию тока в стабилизирующей катушке. Изменение величины I_s обозначает изменение как амплитуды, так и направления тока i_s .

Система уравнений колебаний ТТ в безразмерном виде запишется следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}\xi_l'' + \varepsilon^2 \lambda \xi_l' &= \varepsilon^2 (\alpha m^{\xi_l} j_{pm} \sin \tau - 1), \\ j_{pm}' + r j_{pm} &= -m \cos \tau - m^{\xi_l} \xi_l' \sin \tau,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}\xi_l &= \frac{l}{r_l}, \quad \xi_{l0} = \frac{l_0}{r_l}, \quad j_s = \frac{I_s}{I_l}, \quad j_{pm} = \frac{i_{pm}}{I_l}, \quad \tau = \omega t, \\ \varepsilon^2 &= \frac{g}{\omega^2 r_l}, \quad \alpha = \frac{L_{pm} I_l^2}{\hat{m} g r_l}, \quad r = \frac{R_{pm}}{L_{pm} \omega}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_l}{\hat{m} \omega}, \quad b_l = \frac{r_{pm}}{r_l}, \quad b_s = \frac{r_{pm}}{r_s}, \\ \hat{\kappa}_l^2 &= \frac{4b_l}{(1+b_l)^2 + \xi_l^2}, \quad \hat{\kappa}_s^2 = \frac{4b_s}{(1+b_s)^2 + (\frac{b_s}{b_l})^2 \xi_l^2}, \\ m_{l,s|pm} &= \frac{M_{l|pm}}{L_{pm}} = \frac{w_{l,s}}{\hat{L}} \frac{\Phi(\hat{\kappa}_{l,s})}{\sqrt{b_{l,s}}}, \\ \Phi(\hat{\kappa}_{l,s}) &= \left(\frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} - \hat{\kappa}_{l,s} \right) K(\hat{\kappa}_{l,s}^2) - \frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} E(\hat{\kappa}_{l,s}^2), \\ m &= m_{l|pm} + j_s m_{s|pm}, \quad \hat{L} = \ln\left(\frac{8r_{pm}}{S_{pm}}\right) - 2, \quad S_{pm} = 0,44t_{pm}.\end{aligned}$$

Здесь t – время; g – ускорение свободного падения; \hat{m} – масса ТТ; R_{pm} – электрическое сопротивление ТТ; λ_l – коэффициент вязкой диссипации энергии в окружающую среду; $L_{pm} = \mu_0 r_{pm} \hat{L}$ – собственная индуктивность ТТ; $M_{l|pm}$ и $M_{s|pm}$ – величины взаимной индуктивности между левитационной катушкой и ТТ и между стабилизирующей катушкой и ТТ соответственно; $\hat{\kappa}_{l,s}$ – эллиптические модули; $K(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$, $E(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; $(\)' = \frac{\partial}{\partial \tau}$; $(\)^{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}$; l – вертикальные перемещения ТТ; l_0 – характерный масштаб вертикального перемещения, в дальнейшем принятый равным координате квазистатического положения равновесия.

При выборе рабочего режима подвеса стараются обеспечить разделение быстрых электрических и медленных механических движений, тогда параметр ε , выражающий отношение квадратов характерных частот механической и электрической природы, оказывается малым. Эта особенность основной системы уравнений позволяет применять для построения приближенного решения и анализа устойчивости асимптотические методы нелинейной механики.

3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Для нахождения равномерно пригодного решения системы (1) применим метод многих масштабов [8]. Для этого представим искомые функции в виде разложений по малому параметру ε :

$$j_{pm}(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) = j_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_2(T_0, T_1, T_2),$$

$$\xi_l(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) = \xi_{l0}(T_1, T_2) + \varepsilon \xi_{l1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_{l2}(T_0, T_1, T_2),$$

$$m(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) = m_0 + m_0^{\xi_l}(\xi_l - \xi_{l0}) + \frac{1}{2} m_0^{\xi_l \xi_l}(\xi_l - \xi_{l0})^2,$$

$$\tau = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots,$$

$$\text{где } T_n = \varepsilon^n \tau; D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}; m_0 = m(\xi_{l0}); m_0^{\xi_l} = m^{\xi_l}(\xi_{l0}); m_0^{\xi_l \xi_l} = m^{\xi_l \xi_l}(\xi_{l0}). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем системы дифференциальных уравнений для нахождения искомых величин.

Первое приближение дает

$$\xi_{l0} = \xi_{l0}(T_1, T_2), \quad j_0 = -m_0 \cos \gamma \sin(T_0 + \gamma),$$

где $\tan \gamma = r$.

Второе и третье приближения приводят к двум дифференциальным уравнениям:

$$D_1^2 \xi_{l0} = -\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0 m_0^{\xi_i} - 1 \quad (3)$$

и

$$2D_1 D_2 \xi_{l0} + \left(\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} (m_0^{\xi_i})^2 \right) D_1 \xi_{l0} = 0. \quad (4)$$

Оценка решения (3) вблизи положения равновесия ξ_{st} , определяемого из равенства нулю правой части равенства (3), имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{l0} &= \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(T_2)}{b}} \sin \sqrt{2b} T_1, \\ b &= \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{8} ((m^{\xi_i}(\xi_{st}))^2 + m(\xi_{st}) m^{\xi_i \xi_i}(\xi_{st})). \end{aligned} \quad (5)$$

Устойчивость положения равновесия ξ_{st} определяется из условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_{l0}} \left(m(\xi_{st}) m^{\xi_i}(\xi_{st}) + \frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma} \right) &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m^{\xi_i}(\xi_{st}))^2 + m(\xi_{st}) m^{\xi_i \xi_i}(\xi_{st}) &> 0. \end{aligned}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$D_2 \sqrt{h} = -\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} (m_0^{\xi_i})^2 \right) \sqrt{h}. \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно величины полной механической энергии h .

Положение равновесия уравнения h^* (6) определяется из равенства нулю его правой части:

$$h^* = 0,$$

чему соответствует $\xi_{l0} = \xi_{st}$.

Устойчивость положения равновесия h^* определяется из условия

$$\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} (m^{\xi_l}(\xi_{st}))^2 > 0. \quad (7)$$

Неравенство (7) определяет области в пространстве параметров системы, при которых полная механическая энергия (6) h не возрастает во времени.

Таким образом, асимптотическое приближение решения исходной задачи (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_l &= \xi_{st} + \frac{\varepsilon}{4 \cos \gamma} \cos(2T_0 + \gamma), \\ j_{pm} &= -m(\xi_{st}) \cos \gamma \sin(T_0 + \gamma). \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена аналитическая модель одномерных нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в форме тонкого кольца из токопроводящего материала. Приближенное решение задачи динамики найдено с применением асимптотических методов нелинейной механики. В предположении о медленной эволюции квазистатического положения равновесия определены условия на возникновение и параметры дрейфа левитирующего твердого тела. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима стационарной левитации. Показано, что учет дрейфа положения равновесия системы приводит к дополнительному условию на устойчивость, связанному с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях / Ю. Г. Мартыненко. – М. : Наука, 1988. – 368 с.
2. Скубов Д. Ю. Нелинейная электромеханика / Д. Ю. Скубов, К. Ш. Ходжаев. – М. : Физматлит, 2003. – 360 с.
3. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope / C. Shearwood [et al.] // Sensors and actuators A: physica. – 2000. – Vol. 83. – No. 1–3. P. 85–92.
4. Poletkin K. Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes / K. Poletkin // Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. – 2021. – P. 135–154.
5. A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics / K. Poletkin [et al.] // Journal of Microelectromechanical Systems. – 2015. – Vol. 24. – No. 5. – P. 1248–1250.
6. Tsai N. C. Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes / N. C. Tsai, W. M. Huang, C. W. Chiang // Microsystem technologies. – 2009. – Vol. 15. – P. 493–503.
7. Нелинейная динамика микромеханического неконтактного индукционного подвеса / Д. Ю. Скубов [и др.] // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 6. – С. 98–112.
8. Nayfeh A. H. Perturbation methods / A. H. Nayfeh. – New-York : John Wiley & Sons, 2008. – 425 p.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИЛЕТА

М. А. Ключин, С. А. Купреев, А. С. Лозовой,
А. С. Путилин, А. А. Тихонов

В работе изучаются особенности динамики гравилета, представляющего собой космический аппарат, содержащий длинный стержень с массами на концах. Идея использования такого космического аппарата для перемещения в околоземном пространстве заключается в возможности безреактивного изменения высоты орбиты за счет разности гравитационных сил, действующих на концевые массы системы.

Рассматривается движение гравилета в плоскости экваториальной околоземной орбиты и ставится задача об его ориентации для обеспечения желаемого увеличения или уменьшения высоты орбиты его центра масс. Проводится аналитическое исследование системы дифференциальных уравнений движения. С помощью разложения в ряд по малому параметру строится асимптотическое решение. На основе аналитического решения дается обоснование выбора положений равновесия для наиболее эффективного изменения высоты орбиты. Выполняется численное моделирование рассматриваемой задачи и проводится сравнение численных и аналитических результатов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод изменения параметров орбиты, основанный на управляемых вариациях гравитационной силы, предполагает использование зависимости силы тяготения от геометрических характеристик протяжённого тела, таких как его форма и линейные размеры. Путём целенаправленного изменения этих параметров возможно воздействовать на результирующую гравитационную силу, действующую на объект. При достаточной точности и согласованности таких вариаций возникает возможность существенного отклонения траектории от первоначальной.

Доклад на семинаре 25 марта 2025 г.

© М. А. Ключин, С. А. Купреев, А. С. Лозовой, А. С. Путилин, А. А. Тихонов, 2025.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

Космические аппараты, реализующие подобные принципы управления посредством вариации гравитационного воздействия, классифицируются как гравилеты. Впервые идея гравилета была предложена В. В. Белецким и М. Е. Гиверцем в виде пульсирующей гантели [1]. Затем было произведено множество улучшений и доработок: жесткая поворачивающаяся гантель М. Е. Гиверца [4], гравилет с изменяющейся геометрией масс В. Е. Маркова [6], гантель с маховиком С. А. Купреева [8]. Устройство и движение данных конструкций продолжительное время являются объектами исследований многих ученых. К числу публикаций на эту тему кроме упомянутых выше относятся также [2, 3, 5, 7].

Данное исследование направлено на развитие результатов, полученных С. А. Купреевым в [8]. Основное внимание уделяется аналитическому исследованию системы дифференциальных уравнений движения и построению ее решения с помощью асимптотического метода малого параметра.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАВИЛЕТА И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В центральном ньютоновском гравитационном поле Земли исследуется движение гравилета, основным элементом которого в рассматриваемой модели является так называемая гантель – абсолютно жёсткий невесомый стержень постоянной длины D с точечными массами m_1 и m_2 на концах. Исследование ограничивается изучением движения гравилета в плоскости орбиты (рис. 1).

Обозначим через C центр масс гантели, а через E – центр масс Земли. Введём радиус-вектор $\mathbf{R} = \overrightarrow{EC}$. Точки m_1 и m_2 расположены на концах стержня, симметрично или асимметрично (в зависимости от масс) относительно центра C . Обозначим расстояния от центра масс C до каждой из точек как: D_1 – от C до точки m_1 ; D_2 – от C до точки m_2 , причём, очевидно, $D = D_1 + D_2$.

На каждую из масс действует гравитационная сила со стороны Земли: \mathbf{G}_1 – на массу m_1 ; \mathbf{G}_2 – на массу m_2 .

Для описания ориентации гантели и удобства дальнейшего анализа введём подвижную орбитальную систему координат $C\xi\eta\zeta$ с

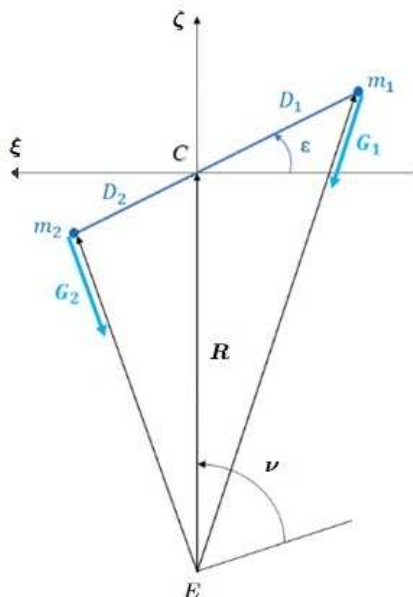


Рис. 1. Гравилет в плоскости орбиты

началом в точке C . Эта система строится следующим образом: ось $C\zeta$ направлена вдоль вектора \mathbf{R} ; ось $C\xi$ перпендикулярна оси $C\zeta$, лежит в плоскости траектории движения центра масс гантели C и направлена по направлению движения по орбите центра масс гантели C ; ось $C\eta$ перпендикулярна плоскости $C\xi\zeta$ и дополняет систему координат $C\xi\eta\zeta$ до правой. Положение гантели в орбитальной системе координат задаётся углом ε , который определяется как угол между направлением от точки C к массе m_2 и осью $C\xi$. Не умаляя общности, будем считать, что $\varepsilon \in [0; 2\pi]$.

Для описания движения центра масс гравилета по орбите используется истинная аномалия ν .

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИЛЕТА

В [8] получены уравнения движения гравилета, которые, с учетом исправления ошибок, в принятых обозначениях имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{R} - \dot{\nu}^2 R = -\frac{\mu_E}{R^2} + 3\mu_E \frac{D^2}{R^4} \frac{k}{(1+k)^2} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon \right), \\ R\ddot{\nu} + 2\dot{R}\dot{\nu} = -\frac{3}{2}\mu_E \frac{D^2}{R^4} \frac{k}{(1+k)^2} \sin(2\varepsilon), \\ \ddot{\varepsilon} = \frac{3}{2}\mu_E \frac{\sin(2\varepsilon)}{R^3} + \frac{3}{2}\mu_E \frac{D}{R^4} \frac{k-1}{k+1} \cos \varepsilon - \ddot{\nu}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mu_E = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – геоцентрическая гравитационная постоянная Земли, $D = D_1 + D_2$, $m = m_1 + m_2$, $k = m_2/m_1 = D_1/D_2$.

Подход к реализации идеи гравилета, описанный в [8], заключается в выводе гантели из устойчивого положения равновесия, соответствующего ориентации её штанги вдоль оси $C\zeta$. При фиксации оси гантели под углом ε , отличным от $\pi/2$, $3\pi/2$ (устойчивые положения равновесия) и 0 , π , 2π (неустойчивые положения равновесия), можно изменять орбиту – повышать или понижать её высоту в зависимости от величины угла ε . Для фиксации угла ε используется маховик, который имеет массу m_J , расположен в центре масс гравилета и создает уравновешивающий момент, противоположный гравитационному.

Предположим, что задача фиксации положения гравилета в орбитальной системе координат выполнена. Значит, $\varepsilon = \text{const}$ и дифференциальные уравнения движения гравилета (1) с учетом массы маховика принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{R} - \dot{\nu}^2 R = -\frac{\mu_E}{R^2} + 3\mu_E \frac{D^2}{R^4} \frac{k}{(1+k)^2} \frac{m}{(m+m_J)} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon \right), \\ R\ddot{\nu} + 2\dot{R}\dot{\nu} = -\frac{3}{2}\mu_E \frac{D^2}{R^4} \frac{k}{(1+k)^2} \frac{m}{(m+m_J)} \sin(2\varepsilon). \end{cases} \quad (2)$$

Идея гравилета интересна с точки зрения изменения параметров орбиты. В частности, интересна задача повышения орбиты. Отме-

тим, что изменение величины радиус-вектора центра масс гравилета мало по сравнению с размерами, характерными для орбитального движения. Предположим, что в начальный момент времени центр масс гравилета находился на круговой орбите радиуса R_0 и имел орбитальную угловую скорость ω_0 . Введем отклонения от этих величин:

$$R = R_0 + \Delta R, \quad \dot{\nu} = \omega_0 + \Delta\omega.$$

При этом, не теряя точности дифференциальных уравнений, можно полагать $\nu \approx \omega_0 t$. Введем малые безразмерные переменные $\rho = \Delta R/R_0$, $\sigma = \Delta\omega/\omega_0$ и безразмерное время $\tau = \omega_0 t$. Обозначая штрихом производную по τ , имеем равенства

$$\begin{aligned} R &= R_0(1 + \rho), & \dot{R} &= R_0\omega_0\rho', & \ddot{R} &= R_0\omega_0^2\rho'', \\ \dot{\nu} &= \omega_0(1 + \sigma), & \ddot{\nu} &= \omega_0^2\sigma'. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в систему (2) и пренебрегая членами второго и более высоких порядков малости, получим уравнения

$$\begin{cases} \rho'' - 3\rho - 2\sigma = 3\frac{D^2}{R_0^2} \frac{k}{(1+k)^2} \frac{m}{(m+m_J)} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right) (1 - 4\rho), \\ \sigma' + 2\rho' = -\frac{3}{2} \frac{D^2}{R_0^2} \frac{k}{(1+k)^2} \frac{m}{(m+m_J)} \sin(2\varepsilon) (1 - 4\rho). \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим $\lambda = \frac{D^2}{R_0^2} \frac{k}{(1+k)^2}$. Отметим, что данный безразмерный параметр является достаточно малым: примем $D = 4$ км, $R_0 = 6675$ км, $k = 1$. Тогда $\lambda \sim 9 \cdot 10^{-8}$.

Перепишем систему (4) в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho'' - 3\rho - 2\sigma = 3\lambda \frac{m}{(m+m_J)} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right) - \\ \quad - 12\lambda \frac{m}{(m+m_J)} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right) \rho, \\ \sigma' + 2\rho' = -\frac{3}{2}\lambda \frac{m}{(m+m_J)} \sin(2\varepsilon) + 6\lambda \frac{m}{(m+m_J)} \sin(2\varepsilon)\rho. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) представляет собой систему регулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Методом малого параметра найдем первое приближение решения системы (5). Для этого представим решение в виде степенного ряда по малому параметру λ [9], оценивая по совокупности члены второго и более высоких порядков малости:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1\lambda + O(\lambda^2), \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1\lambda + O(\lambda^2). \quad (6)$$

Будем считать, что в начальный момент времени орбита гравилета была круговой, то есть справедливы следующие условия:

$$\rho(0) = \rho'(0) = \sigma(0) = \sigma'(0) = 0. \quad (7)$$

Подставим (6) в (5) и приравняем коэффициенты при λ^0 . Получим систему уравнений для нулевого приближения:

$$\begin{cases} \rho_0'' - 3\rho_0 - 2\sigma_0 = 0, \\ \sigma_0' + 2\rho_0' = 0. \end{cases}$$

С учетом начальных условий (7) получим, что нулевое приближение тривиально:

$$\rho_0 = \sigma_0 = 0. \quad (8)$$

Найдем первое приближение решения. Подставим (6) в (5) и приравняем коэффициенты при λ . Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \rho_1'' - 3\rho_1 - 2\sigma_1 = 3\frac{m}{(m+m_J)}\left(\frac{1}{2} + \sin^2\varepsilon\right), \\ \sigma_1' + 2\rho_1' = -\frac{3}{2}\frac{m}{(m+m_J)}\sin(2\varepsilon). \end{cases} \quad (9)$$

Из системы (9) видно, что повышение орбиты центра масс гравилета происходит за счет ориентации оси гантели под постоянным углом $\varepsilon = 3\pi/4$.

Проинтегрируем второе уравнение системы (9) по τ с учетом начальных условий (7). Получим:

$$\sigma_1 = -2\rho_1 - \frac{3}{2}\frac{m}{(m+m_J)}\tau\sin(2\varepsilon). \quad (10)$$

Подставляя (10) в первое уравнение системы (9), получим:

$$\rho_1'' + \rho_1 = -\frac{3m \sin(2\varepsilon)}{(m + m_J)}\tau + 3\frac{m}{(m + m_J)}\left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right). \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) имеет следующий вид:

$$\rho_1 = A_1 \cos \tau + A_2 \sin \tau - \frac{3m \sin(2\varepsilon)}{(m + m_J)}\tau + \frac{3m}{(m + m_J)}\left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right).$$

С учетом начальных условий получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \frac{3m}{(m + m_J)} \bigg(\sin(2\varepsilon)(\sin \tau - \tau) + \\ + \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right)(1 - \cos \tau) \bigg). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда из (10) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{3m}{(m + m_J)} \bigg(\frac{3}{2}\tau \sin(2\varepsilon) - 2 \sin(2\varepsilon) \sin \tau - \\ - (1 + 2 \sin^2 \varepsilon)(1 - \cos \tau) \bigg). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, из (6), (8), (12), (13) с точностью $O(\lambda)$ получим:

$$\begin{cases} \rho = \lambda \frac{3m}{(m + m_J)} \bigg(\sin(2\varepsilon)(\sin \tau - \tau) + \\ + \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon\right)(1 - \cos \tau) \bigg), \\ \sigma = \lambda \frac{3m}{(m + m_J)} \bigg(\sin(2\varepsilon) \left(\frac{3}{2}\tau - 2 \sin \tau\right) - \\ - (1 + 2 \sin^2 \varepsilon)(1 - \cos \tau) \bigg). \end{cases}$$

Тогда закон изменения высоты орбиты центра масс гравилета имеет следующий вид:

$$\Delta R = \frac{3D^2}{R_0} \frac{k}{(1+k)^2} \frac{m}{(m+m_J)} \left(\sin(2\varepsilon)(\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varepsilon \right) (1 - \cos(\omega_0 t)) \right). \quad (14)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из уравнения (14) очевидно, что для наиболее эффективного увеличения высоты орбиты гравилета требуется стабилизация гантели под углом $\varepsilon = 3\pi/4$, а для наиболее эффективного уменьшения высоты орбиты гравилета – под углом $\varepsilon = \pi/4$. При этом нужно положить $k = 1$. В таком случае получим:

$$\begin{cases} \Delta R_{inc} = \frac{3D^2}{4R_0} \frac{m}{(m+m_J)} (\omega_0 t - \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + 1), \\ \Delta R_{dec} = \frac{3D^2}{4R_0} \frac{m}{(m+m_J)} (\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t - \cos(\omega_0 t) + 1), \end{cases} \quad (15)$$

где ΔR_{inc} – закон увеличения высоты орбиты гравилета; ΔR_{dec} – закон уменьшения высоты орбиты гравилета.

Для наглядного представления полученных в работе выражений приведём графики, иллюстрирующие поведение решений, и сравним аналитические результаты, полученные в рамках линейной модели, с решением, полученным численным интегрированием нелинейных уравнений движения (2). Интегрирование выполнялось методом Рунге–Кутты четвёртого порядка.

Представляется целесообразным оценить, насколько полученные приближённые решения в рамках линейной модели точно воспроизводят поведение системы. На рис. 2, 3 показаны графики изменения радиус-вектора орбиты ΔR_{inc} и ΔR_{dec} в зависимости от количества оборотов гравилета вокруг Земли. Красной сплошной линией обозначено численное решение, синей пунктирной линией – аналитическое решение, полученное в линейном приближении.

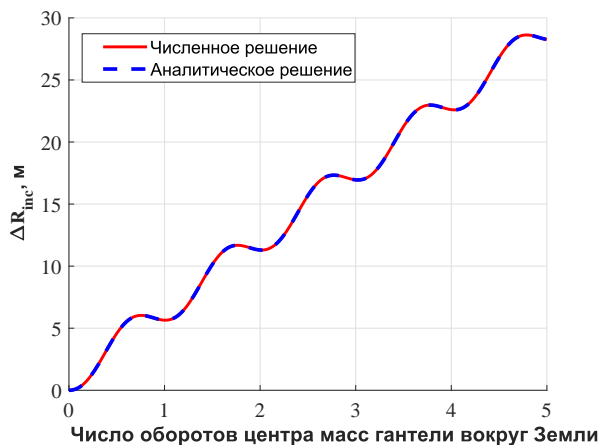


Рис. 2. Увеличение высоты орбиты

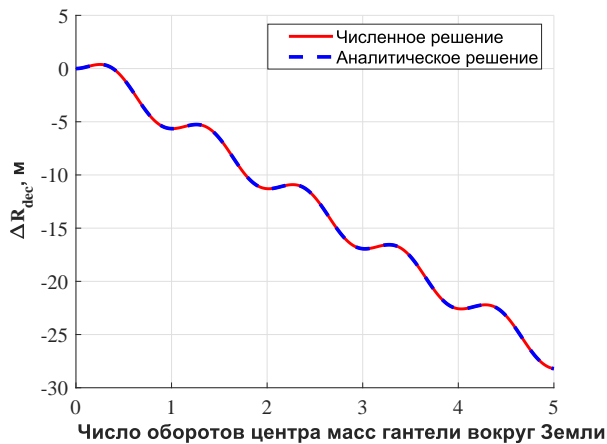


Рис. 3. Уменьшение высоты орбиты

На рис. 4 представлен график относительной ошибки, вычисляемой по формуле $\Delta R_{ош} = |(\Delta R_{ан} - \Delta R_{числ}) / \Delta R_{числ}| \cdot 100\%$, где

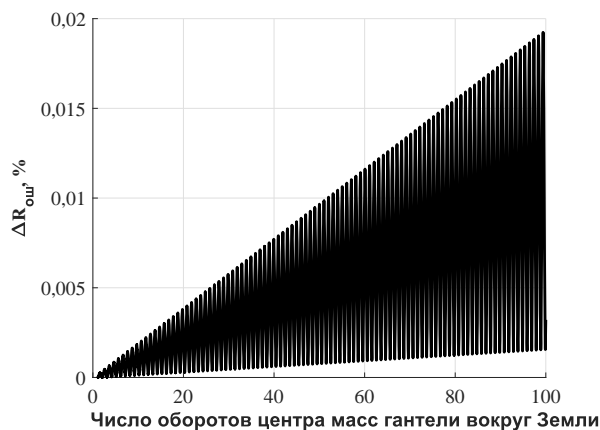


Рис. 4. Относительная ошибка

$\Delta R_{\text{ан}}$ – аналитическое решение (15), а $\Delta R_{\text{числ}}$ – соответствующее численное решение. Из представленных данных видно, что результаты, полученные на основе линейной модели, хорошо совпадают с результатами численного интегрирования исходной нелинейной модели. За 100 оборотов центра масс гантели вокруг Земли ошибка между решениями увеличивается лишь до 0,02%, что подтверждает высокую точность и практическую пригодность аналитических выражений, полученных в рамках линейного приближения. Эти результаты подчеркивают эффективность использования линейной модели при исследовании рассматриваемого класса задач.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведён детальный анализ уравнений движения гравилета с учётом ограничений, накладываемых на систему. С использованием асимптотического метода малого параметра получено решение, описывающее динамику гравилета в первом приближении.

Численное сравнение полученного решения с результатом численного интегрирования точных уравнений движения, а также анализ графических зависимостей показал, что полученное приближенное решение с высокой степенью точности воспроизводит поведение исходной нелинейной системы.

Результаты, полученные в рамках исследования, могут быть использованы при проектировании и анализе динамики космических аппаратов, движущихся в центральном гравитационном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. О движении пульсирующей системы в гравитационном поле / В. В. Белецкий, М. Е. Гиверц // Космические исследования. – 1968. – Т. 6. – № 2 – С. 304–306.
2. Окунев Ю. М. О возможных движениях длинной гантели в центральном поле сил / Ю. М. Окунев // Космические исследования. – 1969. – Т. 7. – № 5. – С. 637–642.
3. Донов А. Е. Теория полета гравилета / А. Е. Донов // Космические исследования. – 1971. – Т. 9. – № 3. – С. 392–396.
4. Гиверц М. Е. Один частный случай оптимизации управления гравилётом / М. Е. Гиверц // Космические исследования. – 1972. – Т. 10. – № 2. – С. 297–299.
5. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел / В. В. Белецкий // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». – 1972. – С. 243–255.
6. Марков В. Е. О выборе программы изменения геометрии масс гравилета / В. Е. Марков // Межвузовский сборник. – 1974. – № 6. – С. 79–82.
7. Пироженко А. В. Управление движением связки двух тел в гравитационном поле изменением длины связи / А. В. Пироженко // Космические исследования. – 1992. – Т. 30. – № 4. – С. 473–482.
8. Движение твердой гантели с маховиком в центральном гравитационном поле / С. А. Купреев [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2022. – Т. 23. – № 2. – С. 83–96.
9. Асимптотические методы в механике твердого тела / С. М. Бауэр [и др.] – М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. – 2007. – 360 с.

ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ СТЕРЖНЯХ

А. А. ЧЕРЕНКОВ

Рассматривается ряд динамических задач теории упругости, связанных с особенностями формирования волновых фронтов в квазиодномерных стержневых системах. Задачи решались аналитически и численно методом конечных элементов. Было показано, что фронты волн нагрузки и разгрузки в реальных стержнях формируются в течение конечного времени, что невозможно учесть в рамках одномерных моделей. Была предложена методика определения инкубационного времени разрушения в упруго-хрупких образцах посредством проведения эксперимента по статическому разрыву и аналогичного численного эксперимента. Установлено, что наличие винтового соединения в экспериментах по статическому разрыву не оказывает существенного влияния на формирование волнового фронта, инициированного разрушением образца. Было показано, что в численном эксперименте, моделирующем статический разрыв образца, при достаточно большом времени разгрузки системы стержней осцилляция напряжений пропадает.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире в условиях стремительного технологического прогресса перед инженерами все чаще ставятся задачи, связанные с обеспечением безопасности и надежности различного рода сооружений при их эксплуатации, в том числе в экстремальных условиях, или во время техногенных или экологических катастроф.

Проблема заключается в том, что общепринятые инженерные стандарты прочности хорошо применимы для случаев, когда воз-

Доклад на семинаре 1 апреля 2025 г.

© А. А. Черенков, 2025.

Исследование выполнено в лаборатории «Динамика и экстремальные характеристики перспективных наноструктурированных материалов» СПбГУ, созданной 30.06.2022 под руководством проф. Ли Баоцяня при поддержке Правительства РФ (Постановление № 220) в рамках Соглашения № 075-15-2022-1114 о предоставлении из федерального бюджета грантов в форме субсидий в соответствии с пунктом 4 статьи 78.1 Бюджетного кодекса РФ.

действие на конструкцию квазистатическое. Как оказывается, при кратковременных интенсивных нагрузках (например, ударные и взрывные воздействия) механическое поведение материалов существенно отличается от квазистатического режима и не может быть адекватно описано в рамках стандартных инженерных моделей. Более того, до сих пор не разработаны инженерные стандарты (ГОСТы) оценки прочностных характеристик конструкционных материалов.

Таким образом, большой интерес представляет задача исследования материалов на прочность в динамическом режиме нагружения. Данная проблема особенно актуальна в вопросах военной и атомной промышленности, авиакосмической отрасли, а также в градостроении.

1.1. Метод Гопкинсона–Кольского

Исторически изучение динамических свойств материалов было начато в конце XIX – начале XX века трудами отца и сына Дж. и Б. Гопкинсонов, предложивших использовать мерный стержень для измерения нагружающих импульсов. Затем данный подход был усовершенствован Г. Кольским для достижения высоких скоростей деформации [1]. В настоящее время метод Кольского с использованием разрезного стержня Гопкинсона (РСГ) стал инженерным стандартом для проведения динамических испытаний материалов благодаря простоте в реализации, теоретической обоснованности и информативности.

Традиционная испытательная схема РСГ (рис. 1) включает два длинных тонких стержня с высоким пределом текучести, между которыми располагается исследуемый образец малой длины, чей предел текучести меньше, чем у опорных стержней. Ударник налетает на один из стержней и порождает упругую волну, которая затем распространяется по стержню, достигает образца и частично проходит в него, частично отражается. Профили прямой, прошедшей и отраженной волн регистрируются с помощью тензодатчиков, расположенных на опорных стержнях. Далее на основе одномерной теории упругих волн строится динамическая диаграмма деформирования образца.

Метод РСГ имеет множество модификаций, позволяющих проводить испытания при различных видах напряжённо-деформированного состояния: растяжение [2], сжатие [3, 4], кручение [5], комбинированные режимы нагружения [6, 7], испытания при высоких температурах [8], циклическое нагружение [9, 10]. Также при использовании полимерных стержней [11] метод позволяет исследовать поведение материалов с низким акустическим импедансом.

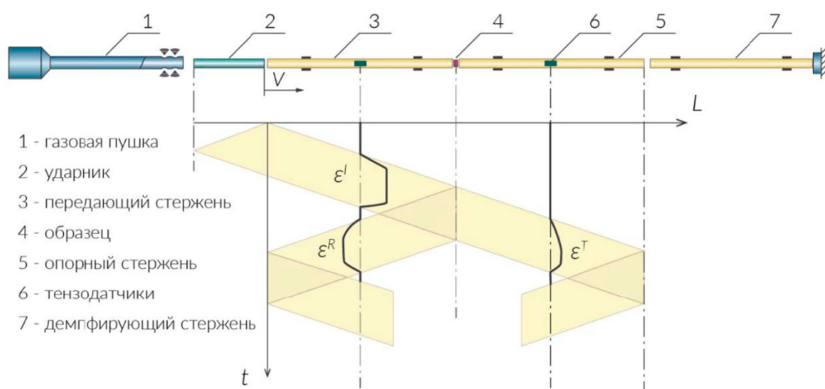


Рис. 1. Общий вид установки по динамическому нагружению образцов методом Гопкинсона-Кольского

Благодаря многочисленным модификациям метода имеется возможность получать широкий спектр результатов на основе РСГ, актуальных для задач динамической прочности. Таким образом, методику РСГ чаще всего используют для определения динамических прочностных и деформационных свойств широкого круга хрупких материалов [12–14]. Модифицированные схемы РСГ позволяют также оценивать динамическую трещиностойкость материалов [15, 16]. Наконец, данные, полученные методом РСГ, активно используются для вычисления параметров реологических моделей и определяющих соотношений [17]. Более подробно возможности данного метода описаны в [18].

1.2. Линейная механика разрушения

Современная линейная механика разрушения берет начало в работах А. Гриффитса и Г. Ирвина [19, 20]. Гриффитс предложил критерий хрупкого разрушения на основе энергетического баланса между уменьшением потенциальной энергии упругой деформации и затратами энергии на образование новой поверхности трещины:

$$-\frac{dU}{dt} \leq 2\gamma, \quad (1)$$

где U – упругая энергия; γ – удельная поверхностная энергия разрушения. Позднее Ирвин развил подход Гриффитса и переформулировал критерий разрушения (1) в терминах коэффициента интенсивности напряжений (КИН), характеризующего напряжения в окрестности вершины трещины. Было показано, что рост трещины начинается при достижении КИН некоторого критического значения:

$$K_I \leq K_{Ic}. \quad (2)$$

С точки зрения инженерной практики силовой критерий Ирвина (2) гораздо более удобен в применении. Благодаря этому появилась возможность анализировать сложные трещины в конструкциях с произвольной геометрией и различными условиями нагружения.

Таким образом, линейная механика разрушения предполагает, что для бездефектных материалов разрушение наступает мгновенно при достижении напряжениями критического значения σ_c , а для материалов с дефектами – при достижении критического значения КИН K_{Ic} . Примечательно, что критические значения указанных величин в рамках теории считаются константами материала.

Как отмечалось ранее, в динамическом режиме нагружения поведение материалов значительно отличается от квазистатического случая. В ряде работ различных авторов были получены результаты, необъяснимые с точки зрения классической механики разрушения: особенности зарождения трещины [21], расхождение между теоретическим и экспериментальным значением скорости трещины [22], динамическое повышение прочности и эффект запаздывания разрушения [23], неоднозначная зависимость коэффициента

интенсивности напряжений от скорости трещины [24, 25], влияние формы импульса на разрушение и многие другие эффекты.

Авторы уже ставшей классической работы [23] одними из первых провели систематическое изучение динамической прочности материалов. В данной работе экспериментально исследовались предельные значения напряжения до разрушения в алюминии и меди в зависимости от длительности прикладываемой нагрузки. Полученные данные позволили построить графики временной зависимости прочности, на которых отчетливо выделяются две области: «динамическая ветвь», соответствующая временам нагружения в микросекундном диапазоне, и «статическая ветвь», соответствующая более длительным нагрузкам. Такое разделение характерно тем, что на «статической ветви» прочность, то есть предельное значение напряжения до разрушения, практически не зависит от времени прикладываемой нагрузки. В свою очередь, на «динамической ветви» наблюдается сильная зависимость прочности от длительности импульса. Эти результаты продемонстрировали, что прочность материала не является константой.

1.3. Структурно-временной подход

Неудивительно, что классическая механика разрушения не дает ответа на вышеупомянутые вопросы, так как она основана на предположении, что разрушение происходит мгновенно. В действительности разрушение – это процесс, требующий времени. Так, был предложен структурно-временной подход, основанный на идее инкубационного времени разрушения материала, рассматриваемого как зависящая от масштаба постоянная материала [26–30]. Основной особенностью данного подхода является введение инкубационного времени в качестве характеристики динамической прочности материала, что позволяет анализировать как задачи инициирования роста трещины, так и задачи разрушения первоначально целых сред. Соответствующий критерий разрушения формулируется следующим образом:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\sigma(t')}{\sigma_c} \right)^\alpha dt' \leq 1, \quad (3)$$

где τ – инкубационное время разрушения, связанное с динамикой релаксационных процессов образования микротрещин в структуре материала; $\sigma(t')$ – локальное поле напряжений; σ_c – статическая прочность материала. Параметр α характеризует чувствительность материала к величине нагрузки, вызывающей разрушение. Момент разрушения t^* определяется как время, при котором неравенство (3) впервые обращается в равенство. Набор постоянных τ и α определяет процесс разрушения на заданном масштабном уровне.

Критерий (3) подразумевает, что макроразрушению материала предшествует процесс образования дефектов на микроуровне, происходящий в течение некоторого характерного для данного материала времени, что имеет место как в случае квазистатического нагружения, так и в случае быстрых ударных воздействий. Такой взгляд на разрушение позволил объяснить многие эффекты, наблюдаемые при динамическом нагружении материалов. Также структурно-временной подход был успешно применен для построения временных зависимостей прочности при нагружении образцов импульсами длительностью в наносекундном диапазоне [31] и при исследовании зависимости прочности от формы нагружающего импульса [32]. Примечательно, что концепция инкубационного времени нашла применение не только в механике разрушения. Например, на ее основе удалось описать кавитацию в жидкостях, явление электрического пробоя в диэлектриках [33].

Для иллюстрации понятия инкубационного времени рассмотрим пример хрупкого разрушения ($\alpha = 1$), вызванного медленно ($t^* \gg \tau$) линейно нарастающим растягивающим напряжением $\sigma(t) = \dot{\sigma}tH(t)$, где $\dot{\sigma}$ – константа; $H(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Используя критерий (3), можно вычислить время разрушения и значение напряжения в этот момент:

$$t^* = \frac{\sigma_c}{\dot{\sigma}} + 0,5\tau; \quad \sigma^* = \sigma(t^*) = \dot{\sigma}t^* = \sigma_c + 0,5\dot{\sigma}\tau.$$

Полученные выражения показывают, что в случае достаточно медленного роста напряжения $\dot{\sigma}\tau/\sigma_c \ll 1$ предельное значение напряжения в момент разрушения почти не отличается от статической прочности $\sigma^* \approx \sigma_c$. Примечательно, что материал остается целым, даже когда был достигнут статический предел прочности

($t_c = \sigma_c / \dot{\sigma}$). Существенно, что до начала макроскопического разрушения в структуре материала развиваются подготовительные процессы с характерным временем τ (рис. 2).

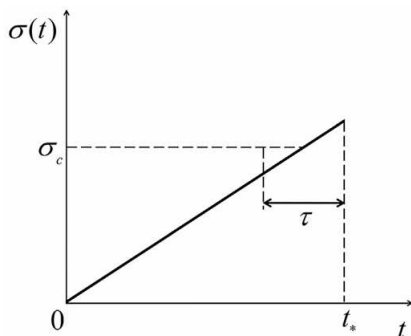


Рис. 2. Временной профиль напряжений при медленном нагружении

На данный момент не существует какой-либо методики определения инкубационного времени разрушения образцов, кроме подгонки теоретических кривых под экспериментальные данные. Рассмотрим возможный метод определения параметра τ посредством проведения статического эксперимента. Предположим, что стандартный образец на растяжение рвётся при напряжении P , которое возникает в некоторый момент времени $t = 0$: $F(t) = PH(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. При квазихрупком разрушении происходит разгрузка материала и напряжение в месте разрушения быстро (но не мгновенно) падает от значения P до нуля. Этот процесс приводит к возникновению волны разгрузки, распространяющейся по образцу. При этом изменение напряжения условно описывается зависимостью $\sigma(t) = P - Pf(t)$, где функция $f(t)$ изменяется от 0 до 1 в течение некоторого времени T (рис. 3).

Согласно представлениям классической теории прочности, разрушение наступает мгновенно ($T = 0$), что соответствует случаю $f(t) = H(t)$. На самом же деле процесс разрушения происходит в течение конечного времени и функция $f(t)$ описывает переход от

условно бездефектного состояния $f(0) = 0$ к полностью разрушенному состоянию $f(T) = 1$, соответствующему макроразрушению в рассматриваемой точке. Тогда, применяя критерий разрушения (3) на макроуровне ($\sigma(t) = F(t) = PH(t)$), получаем $T = \tau$ при $P = \sigma_c$, т. е. введённое инкубационное время равно периоду разрушения после достижения в материале напряжения, равного статической прочности. Этот период может быть измерен в экспериментах по статическому разрушению, например, путём измерения времени спада напряжения на фронте волны разгрузки.

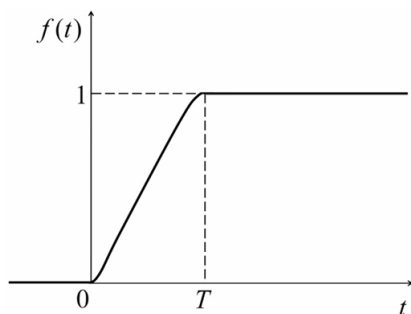


Рис. 3. Схема кинетики разрушения

На основе изложенных выше соображений представляется возможным модифицировать традиционный подход к испытаниям материалов на динамическую прочность. Как было показано, разрушение материала сопровождается формированием волны разгрузки, фронт которой содержит информацию о процессе разрушения. Однако в классической реализации метода РСГ эта волна остаётся вне поля наблюдения и анализа. Между тем, если проводить испытания в квазистатическом режиме при малых скоростях деформации и научиться регистрировать волну разгрузки, инициированную разрушением, появится возможность извлекать дополнительные сведения о динамических характеристиках материала. В этом контексте особый интерес представляет задача выделения и интерпретации параметров разгрузочной волны. Таким образом, данная работа посвящена исследованию особенностей формирования

волновых фронтов в конечномерных стержнях при ударном нагружении. Целью настоящей работы является разработка метода экспресс-оценки инкубационных характеристик разрушения упруго-хрупких образцов. Методы исследования основаны на аналитических и численных решениях, полученных методом конечных элементов, динамической системы уравнений теории упругости.

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА

При испытании материалов методом Гопкинсона–Кольского регистрируемые волны анализируются в рамках одномерной модели. Однако образцы и стержни в реальных физических экспериментах обладают трехмерной геометрией. В связи с этим возникает необходимость исследовать влияние трёхмерности задачи на процесс формирования волновых фронтов в стержнях.

2.1. Одномерный случай

Прежде всего рассмотрим простейшую динамическую задачу о продольном соударении одномерных стержневых элементов. Пусть одномерный упругий стержень длины l движется со скоростью v_0 и сталкивается с покоящимся одномерным упругим стержнем длины L . Стержни однородные, сделаны из одного материала, имеющего плотность ρ и модуль Юнга E . Необходимо найти профиль волн деформаций, распространяющихся по стержням.

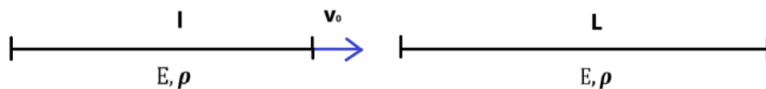


Рис. 4. Продольное соударение одномерных стержней

Для решения данной задачи запишем волновое уравнение и поставим граничные и начальные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x, t)|_{t=0} = 0 \equiv \phi(x), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = v_0 \equiv \psi(x) \quad \text{при } x \in [-l, 0], \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0 \equiv \psi(x) \quad \text{при } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=-l} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=L} = 0, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{x=0-} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{x=0+}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=0-} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=0+}. \end{array} \right.$$

Здесь использовано обозначение $c = \sqrt{E/\rho}$ для скорости стержневой волны. Представим решение в форме Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x + ct) - \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau) d\tau.$$

В силу начальных условий имеем:

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0 & \text{при } x \in [-l, 0] \\ 0 & \text{при } x \in (0, L] \end{cases} = v_0 H(-x); \quad \phi(x) \equiv 0 \text{ при } x \in [-l, L],$$

где использовано стандартное обозначение $H(x)$ для ступенчатой функции Хевисайда. Таким образом, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}(\psi(x + ct) + \psi(x - ct)), \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2c}(\psi(x + ct) - \psi(x - ct)). \end{array} \right. \quad (4)$$

Из краевых условий следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(-l + ct) = \psi(-l - ct), \\ \psi(L + ct) = \psi(L - ct). \end{array} \right.$$

Эти условия позволяют определить функцию $\psi(x)$ за промежуток $[-l, L]$. Теперь построим графики деформаций в стержнях. Для определенности положим $l = L = 1$ м, $v_0 = 10$ м/с, $c = 5000$ м/с (данная скорость характерна для стальных стержней), будем рассматривать время пробега упругой волны по одному из стержней.

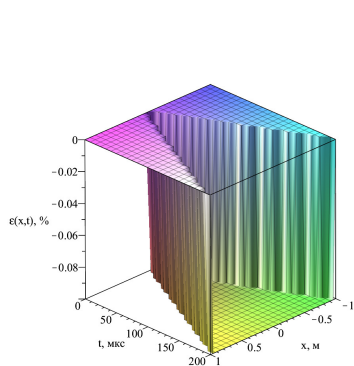


Рис. 5. График деформаций в пространстве-времени

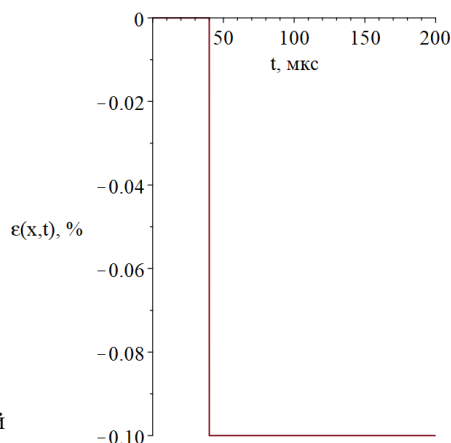


Рис. 6. График деформаций в произвольном сечении

Таким образом, профиль бегущей волны – прямоугольник, а импульс в стержнях формируется мгновенно. Этот вывод можно сделать и на основе формулы (4) для деформаций, которая представляет сумму двух функций Хевисайда.

2.2. Экспериментальные данные

Рассмотрим теперь экспериментальные данные, полученные из испытаний методом РСГ с тензодатчика, установленного на поверхности передающего стержня (см. рис. 1). В качестве материала мерных стержней и ударника была выбрана сталь Р6М5. Стержни имеют диаметр 2 см, длина ударника 60 см, длина передающего стержня – 2 м. При проведении испытаний скорость ударника варьировалась.

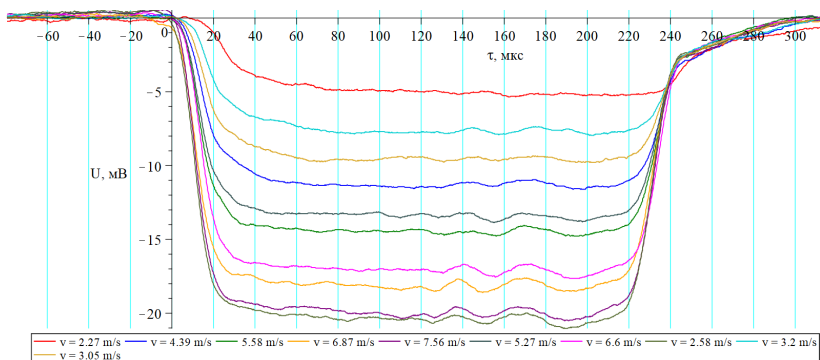


Рис. 7. Графики напряжения на тензодатчике в зависимости от времени при различной скорости ударника, найденные в эксперименте

Как видно из рис. 7, форму фронта волны нагрузки, инициированной ударником в передающем стержне, приблизительно можно считать трапецеидальной, то есть, в отличие от одномерного случая, импульс формируется в течение конечного времени. Это не удивительно, ведь в физическом эксперименте сигнал, регистрируемый датчиком, является результатом взаимодействия многих волн, возникших при ударе и испытавших множество отражений от боковой поверхности стержня. Таким образом, следует ожидать, что импульсу понадобится некоторое время, чтобы сформироваться в устойчивую стержневую волну.

Для того чтобы можно было говорить о времени формирования импульса, следует дать четкое определение, что под этим временем понимается. Договоримся проводить на нулевом уровне нагрузки и на уровне её амплитуды горизонтальные прямые. Затем наклонный участок графика приближается прямой. Разность абсцисс точек пересечения этой прямой с двумя горизонтальными и будем называть временем формирования импульса.

Таким образом, следуя данному определению, время формирования фронта волны нагрузки получается равным $t_l \approx 20$ мкс для всех скоростей ударника. Точно так же, независимо от скорости ударника, время формирования фронта волны разгрузки получается порядка $t_u \approx 22$ мкс.

Незначительное различие во временах формирования фронтов нагрузки и разгрузки можно связать с тем, что ударник передает часть своей энергии мерному стержню, поэтому отскок происходит чуть медленнее, чем налёт. Времена формирования волновых фронтов нагрузки и разгрузки не зависят от скорости ударника, так как она не меняет скорость и направление распространения упругих волн в стержне.

2.3. Моделирование

С использованием программного комплекса ANSYS было проведено численное моделирование данного эксперимента. Рассматривалась осесимметричная динамическая контактная задача о продольном ударе двух упругих однородных изотропных стержней постоянного кругового поперечного сечения. Решение задачи получено методом конечных элементов.

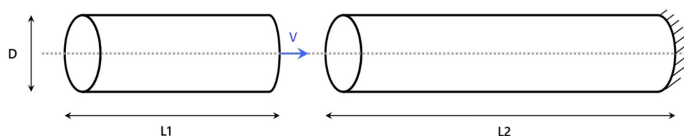


Рис. 8. Схема численного эксперимента по продольному удару стержней

При моделировании в качестве материалов стержней выбрана конструкционная сталь, имеющая модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, плотность $\rho = 7850$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Длина ударника $L_1 = 60$ см, длина мерного стержня $L_2 = 2$ м. Диаметры стержней равны, варьировались от 1 до 4 см. Ударник налетает со скоростью $v = 10$ м/с. Для однозначности решения дальний от места контакта конец мерного стержня закреплён. Продолжительность расчёта меньше времени пробега волны по длинному стержню, поэтому закрепление не сказывается на итоговых результатах. Контактное взаимодействие моделировалось без учёта трения.

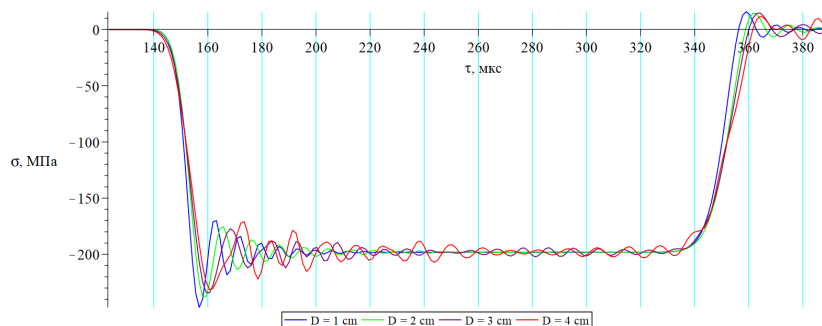


Рис. 9. Временные профили напряжения на боковой поверхности мерного стержня при различных диаметрах стержней

Таким образом, на рис. 9 приведены результаты численного моделирования для напряжений на боковой поверхности передающего стержня на расстоянии 25 см от места контакта. В таблице 1 представлены времена формирования волновых фронтов нагрузки и разгрузки в зависимости от диаметров стержней.

**Таблица 1. Времена формирования импульсов
в зависимости от диаметра стержней**

Диаметр стержней, см	1	2	3	4
Время формирования фронта волны нагрузки, мкс	9	10	11,3	12,6
Время формирования фронта волны разгрузки, мкс	12,1	13,7	15,8	19

Как можно видеть, форма импульса снова близка к трапециевидальной, а фронт нагрузки формируется быстрее, чем фронт разгрузки, что согласуется с результатами эксперимента, где наблюдался такой же эффект. Более того, полученные результаты демонстрируют, что с увеличением диаметров стержней время формирования волнового фронта так же увеличивается. Это отражает тот факт, что результирующая стержневая волна является суперпозицией многих волн в стержне. Действительно, при увеличении диаметра стержней волнам приходится проходить большее расстояние между отражениями от боковой поверхности, что увеличивает

время формирования импульса. Стоит отметить, что при моделировании времена формирования импульсов оказались меньше, чем в эксперименте. Это можно связать, во-первых, с неидеальностью эксперимента, во-вторых, с тем, что при моделировании рассматривается чисто упругая постановка задачи, в-третьих, с расхождением констант материала в эксперименте и моделировании. В остальном данные моделирования хорошо согласуются с данными физического эксперимента.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НАГРУЖЕНИЯ КВАЗИОДНОМЕРНОГО СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА

Далее методом конечных элементов была решена осесимметричная задача о динамической нагрузке квазиодномерного стержневого элемента. Данная задача является упрощением контактной задачи, так как удар стержней заменяется приложением давления к торцу стержня (рис. 10), что при численном решении позволяет управлять длительностью прикладываемого импульса.

Как и ранее, стержень упругий, однородный, изотропный, постоянного кругового поперечного сечения, выполнен из конструкционной стали. Длина стержня $L = 2$ м, диаметр $D = 2$ см. Один из концов жестко закреплен, к другому вдоль оси стержня прикладывается сжимающее давление. Рассматриваются случаи прямоугольного и трапециевидального профиля нагрузки амплитудой $P^* = 10$ МПа. Время расчета меньше времени пробега волны по стержню, поэтому закрепленный конец не влияет на результаты.

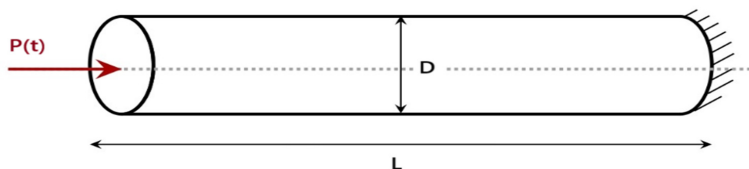


Рис. 10. Схема численного эксперимента по приложению ударной нагрузки к стержню

Графики напряжений на боковой поверхности стержня на расстоянии 25 см от места приложения нагрузки представлены на рис. 11, времена формирования импульсов вынесены в таблицу 2.

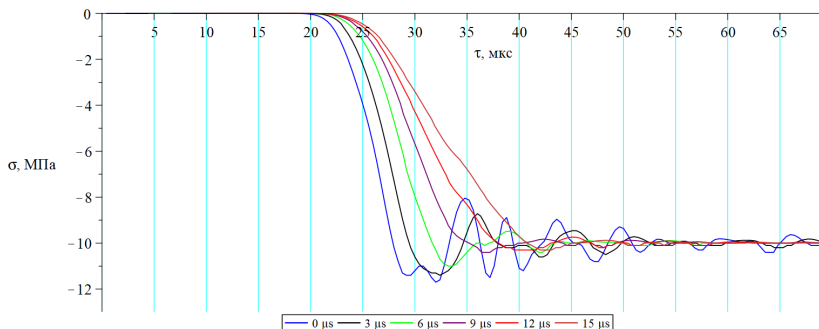


Рис. 11. Временной профиль напряжений на боковой поверхности стержня в зависимости от длительности прикладываемой нагрузки

**Таблица 2. Времена формирования импульсов
в зависимости от времени роста нагрузки**

Время роста нагрузки, мкс	0	3	6	9	12	15
Время формирования волнового фронта, мкс	4,5	5,5	7	10	12,7	15,5

На основе полученных результатов можно заключить, что время роста нагрузки напрямую влияет на время формирования импульса в стержне – чем дольше растет нагрузка, тем дольше формируется импульс. Примечательно, что даже в случае нагружения прямоугольным импульсом, волновой фронт в стержне формируется не сразу. Этот эффект еще раз подтверждает мысль, что в силу трехмерности задачи регистрируемая волна является результатом сложения множества волн. В первом приближении можно считать, что время формирования волнового фронта в стержне в случае нагружения прямоугольным импульсом является «эталонным временем», к которому добавляются времена роста нагрузки в остальных рассмотренных случаях. Времена формирования волнового фронта согласуются по порядку с рассмотренной ранее контактной задачей.

4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РАЗГРУЗКИ КВАЗИОДНОМЕРНОГО СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим теперь случай разгрузки стержня. Данная задача интересна тем, что она является упрощённой моделью эксперимента по квазистатическому разрушению. Действительно, в момент разрыва образца напряжения в сечении, где произошло разрушение, быстро убывают до нуля за конечное время, что порождает волну разгрузки, распространяющуюся вдоль образца.

Таким образом, при проведении численного эксперимента по сравнению с предыдущей задачей изменилось только условие нагружения – к одному из торцов стержня прикладывается статическая растягивающая нагрузка величиной $P^* = 10$ МПа, которая затем линейно убывает (рис. 12). Время разгрузки варьировалось.

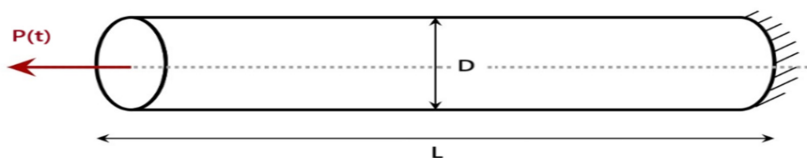


Рис. 12. Схема численного эксперимента по разгрузке стержня

Результаты численного моделирования представлены на рис. 13, времена формирования волнового фронта разгрузки в рассмотренных случаях занесены в таблицу 3. Напряжения снимались с боковой поверхности стержня на расстоянии 25 см от нагружаемого конца.

Полученные данные качественно и количественно согласуются с данными предыдущей задачи. Даже при мгновенной разгрузке стержня формирование волнового фронта занимает конечное «эталонное время», к которому добавляется длительность разгрузки в остальных рассмотренных случаях. Это наблюдение позволяет предложить методику оценки инкубационного времени разрушения.

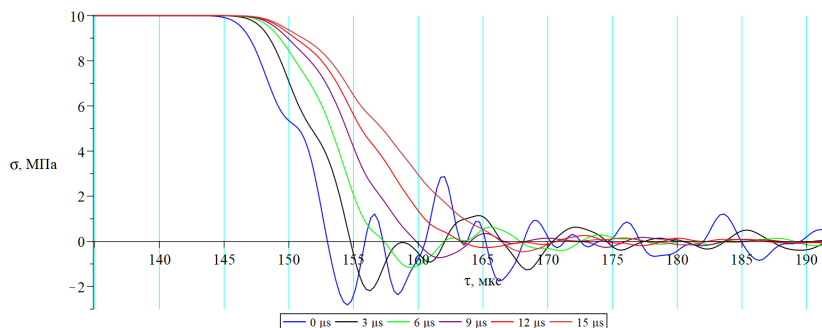


Рис. 13. Временной профиль напряжений на боковой поверхности стержня в зависимости от длительности разгрузки

**Таблица 3. Времена формирования импульсов
в зависимости от длительности разгрузки**

Время разгрузки, мкс	0	3	6	9	12	15
Время формирования волнового фронта, мкс	5,4	7,2	7,8	9,9	12,8	16

Пусть проведён статический эксперимент по разрыву некоторого хрупкого образца. Тензодатчик регистрирует волну разгрузки, вызванную разрушением, чей фронт формируется в течение времени t_{exp} . Из результатов моделирования следует, что это время будет складываться из времени τ , в течение которого происходит разрушение, и «эталонного времени» t_{mod} , необходимого волне разгрузки, чтобы сформироваться при распространении по данному стержню. Таким образом, проведя численные расчёты, можно вычислить время t_{mod} и определить инкубационное время разрушения:

$$\tau = t_{exp} - t_{mod}.$$

Как видно из результатов моделирования, представленных на рис. 14, для случая разгрузки длительностью 9 мкс при распространении вдоль стержня волновой фронт ведет себя стабильно, причём время его формирования одинаково для всех пробных точек. Следовательно, при проведении эксперимента можно располагать тензодатчик в любом месте по длине стержня.

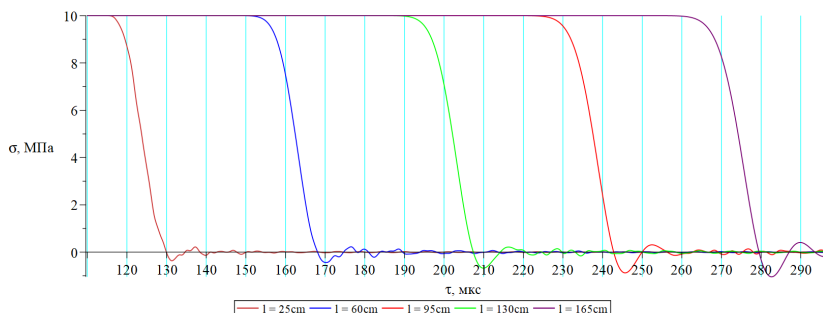


Рис. 14. Временной профиль напряжений в различных точках по длине стержня. Указанные в легенде расстояния измеряются от места приложения нагрузки

5. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РАЗГРУЗКИ СИСТЕМЫ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Как было сказано в предыдущем разделе, из данных эксперимента по статическому разрыву стержней имеется возможность извлекать инкубационное время разрушения. Естественным образом возникает необходимость провести моделирование данного эксперимента, так как предыдущая рассмотренная задача является сильным упрощением. Во-первых, в реальном эксперименте участвует несколько стержней – исследуемый образец и два опорных стержня, которые соединяются с образцом посредством винтовой резьбы. Во-вторых, появляется граничное условие в виде различных диаметров стержней. В-третьих, как правило, материалы стержней различны. Необходимо исследовать, как все эти факторы влияют на прохождение волны разгрузки, инициированной разрушением образца, в опорный стержень, на который размещают тензодатчик.

Таким образом, рассмотрим осесимметричную задачу о динамической разгрузке составной системы, состоящей из коаксиально соединенных квазиодномерных стержневых элементов различного диаметра. Общая схема численного эксперимента изображена на рис. 15. Геометрия и размеры стержня-образца представлены на

рис. 16 и соответствуют параметрам образцов на растяжение, используемых в физических экспериментах.

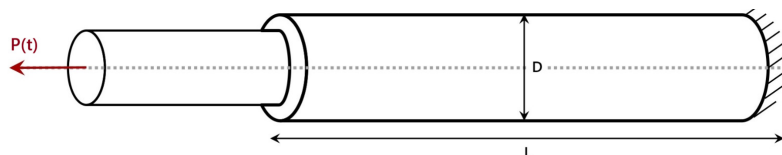


Рис. 15. Схема численного эксперимента по разгрузке системы стержней

Длина опорного стержня $L = 1$ м, диаметр $D = 2$ см, один из концов жестко закреплен. Стержни упругие, изотропные, однородные. К свободному концу меньшего стержня прикладывается статическая растягивающая нагрузка $P^* = 1$ МПа, которая затем линейно убывает до нулевого значения. Условие контакта задано без проскальзывания с коэффициентом трения $\mu = 0,3$. Напряжения на боковой поверхности опорного стержня снимались на расстоянии 25 см от места контакта, а напряжения на боковой поверхности образца — на расстоянии 1 см.

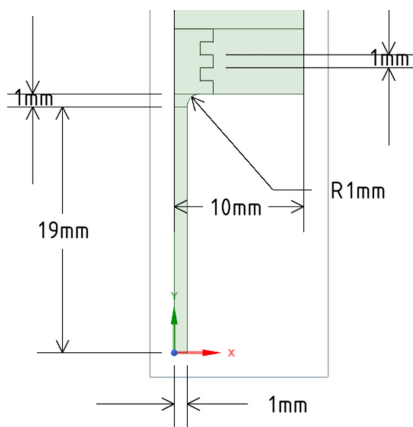


Рис. 16. Геометрия стержня-образца

5.1. Стальные стержни

Для начала проанализируем результаты моделирования в случае, когда материалом обоих стержней является конструкционная сталь. Рассматривались случаи 3, 4, 5 ступеней резьбы и случай, когда стержни единое целое тело, при этом время разгрузки системы оставалось постоянным и равным 10 мкс.

Данные, представленные на рис. 17 и 18, демонстрируют, что наличие винтового соединения не оказывает существенного влияния на распространение волны в опорном стержне и образце на ранних этапах. Заметные различия проявляются на поздних этапах движения волны. Так как в практических целях для определения инкубационного времени интерес представляет именно первый спад напряжений до нулевого значения, то можно утверждать, что вклад резьбы в процесс формирования волнового фронта пренебрежимо мал. Заметим также, что даже в случае отсутствия винтового соединения, когда стержни единое тело, наблюдаются осцилляции напряжений. Это говорит о том, что различные диаметры стержней играют роль граничного условия, и упругая волна испытывает отражения от границы, где сменяется диаметр.

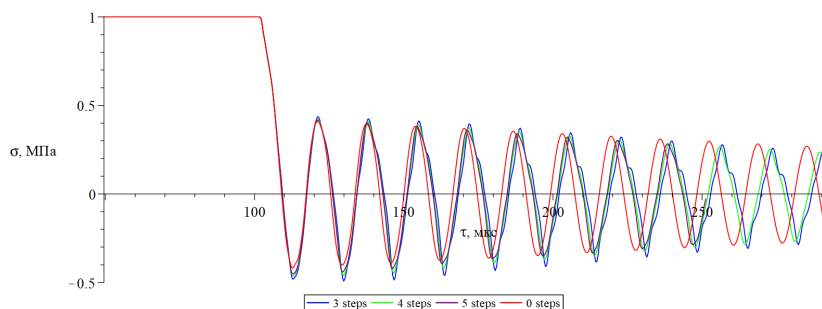


Рис. 17. Напряжения на боковой поверхности образца при различном количестве ступеней винтовой резьбы

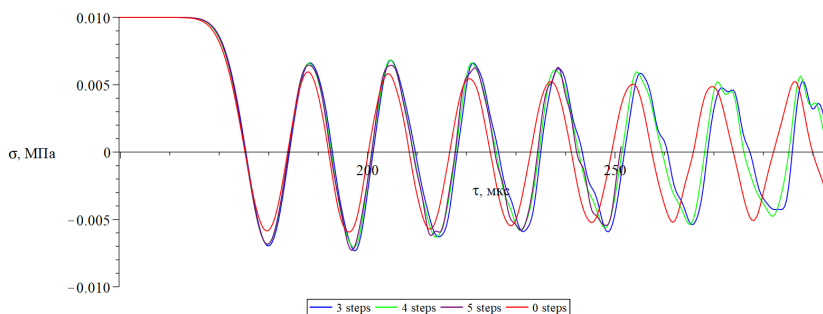


Рис. 18. Напряжения на боковой поверхности опорного стержня при различном количестве ступеней винтовой резьбы

Сопоставление графиков напряжений на боковой поверхности опорного стержня и образца после масштабирования представлены на рис. 19. Во всех рассмотренных случаях наклонные участки графиков, соответствующих первому падению напряжений до нулевого значения, совпадают, что говорит об одинаковом времени формирования волнового фронта. Это не удивительно, ведь оба стержня стальные, и волна беспрепятственно проходит из одного стержня в другой, не претерпевая изменений.

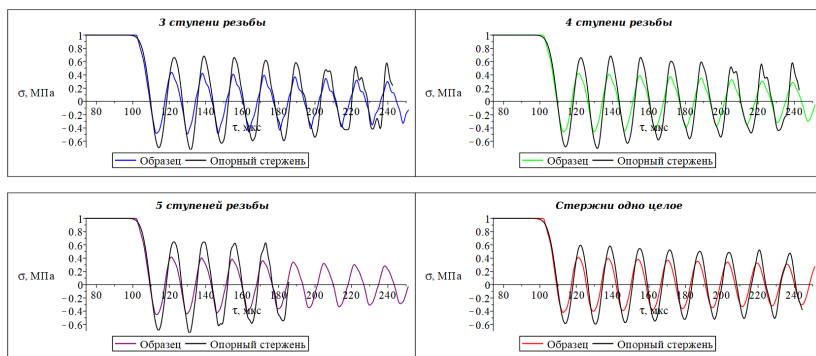


Рис. 19. Сравнение напряжений на боковой поверхности опорного стержня и образца

5.2. Сталь и оргстекло

Предложенная методика оценки инкубационного времени лучше всего будет работать для достаточно хрупких материалов, не подверженных большому пластическому течению. В связи с этим в качестве материала образца в эксперименте целесообразно использовать оргстекло. Рассмотрим результаты моделирования для случая, когда образец выполнен из оргстекла, а опорный стержень – из конструкционной стали. Стекло имеет плотность $\rho_g = 1850 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E_g = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu_g = 0,33$. Исследовался случай 3 ступеней резьбы, время разгрузки системы варьировалось.

Графики, представленные на рис. 20, демонстрируют, что при увеличении времени разгрузки системы стержней амплитуда колебаний напряжений уменьшается.

Можно сказать, что при достаточно долгой разгрузке задача в пределе принимает квазистатический характер, так как длина волны разгрузки становится гораздо больше размеров образца.

Примечательно, что если поменять местами материалы образца и опорного стержня, то осцилляции уровня напряжений быстро затухают для любого времени разгрузки (рис. 21). Эффект можно объяснить тем, что более мягкий опорный стержень выполняет роль демпфирующего устройства.

На данный момент имеется единственный успешно проведённый эксперимент по статическому разрыву стеклянного образца (рис. 22). Из полученных данных следует, что время формирования волнового фронта примерно равно $t_{exp} \approx 10 \text{ мкс}$. По результатам аналогичного численного эксперимента было определено «эталонное время» $t_{mod} \approx 3 \text{ мкс}$. Тогда, согласно ранее предложенной методике, инкубационное время разрушения составляет $\tau \approx 7 \text{ мкс}$. Полученная оценка оказалась заниженной по сравнению с типичными значениями 20–30 мкс. Такое расхождение объясняется тем, что при изготовлении образца на него наносилась резьба, что повлекло большое количество внутренних повреждений и, как следствие, уменьшение инкубационного времени разрушения.

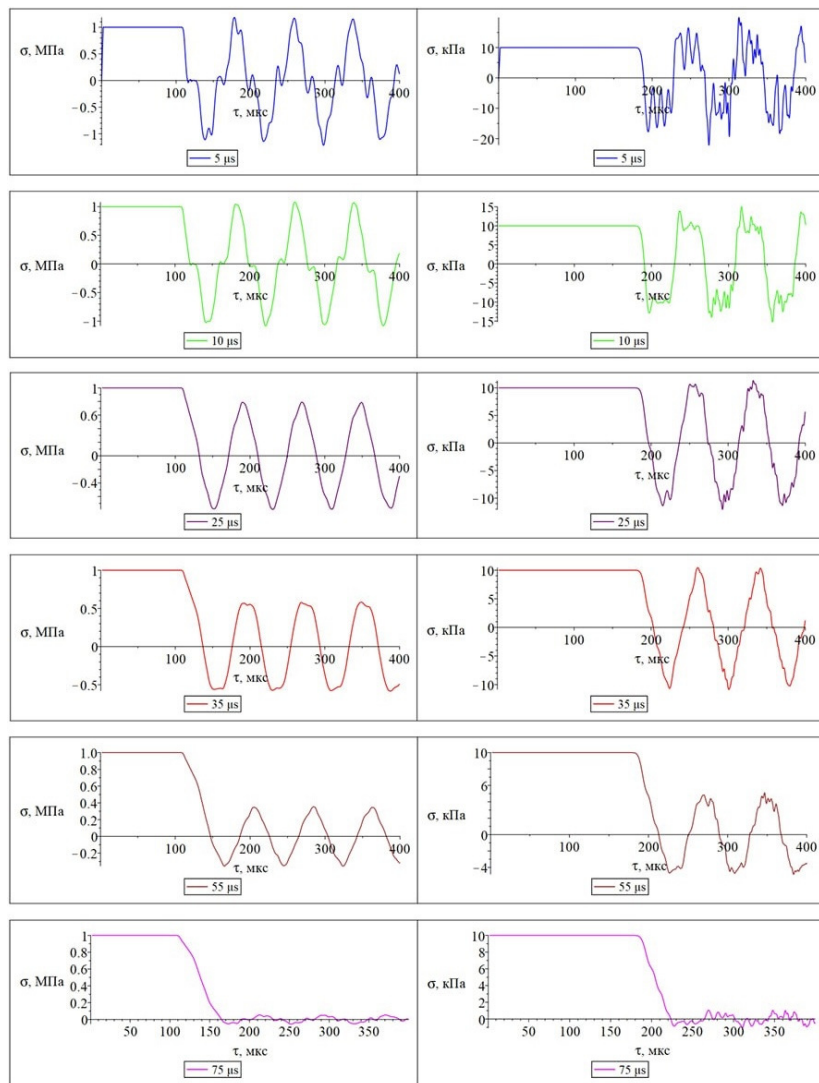


Рис. 20. Временной профиль напряжений в стеклянном образце (слева) и стальном опорном стержне (справа) при различном времени разгрузки

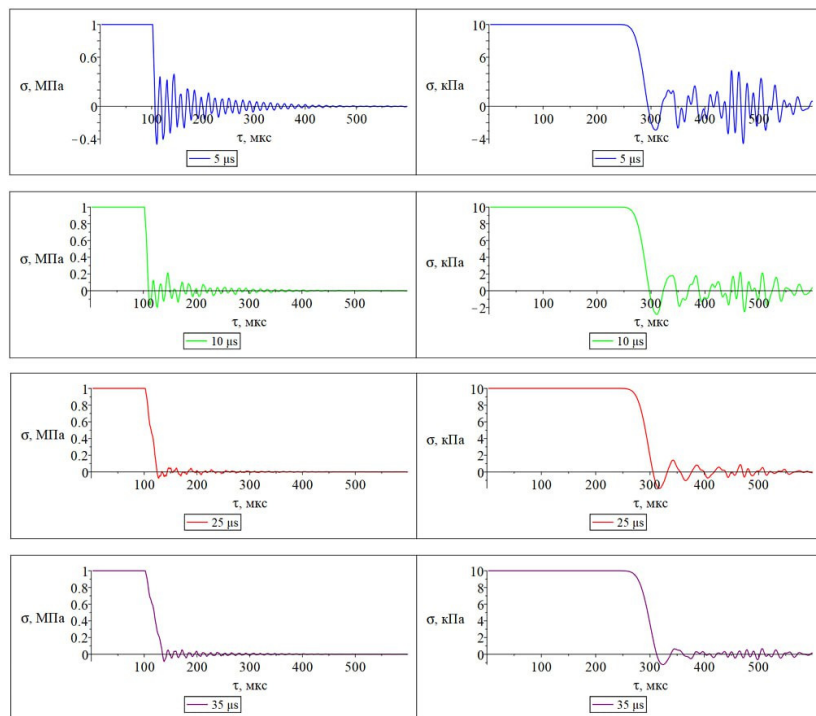


Рис. 21. Временной профиль напряжений в стальном образце (слева) и стеклянном опорном стержне (справа) при различном времени разгрузки

5.3. Сталь и алюминий

Еще один подходящий материал для исследований – алюминий и его сплавы. Было проведено моделирование задачи по разгрузке составной системы стержней, где опорный стержень выполнен из конструкционной стали, а образец – из алюминия плотностью $\rho_a = 2770 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E_a = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициентом Пуассона $\nu_a = 0,33$. Как и для стеклянного образца, исследовался случай 3 ступеней резьбы, время разгрузки системы стержней

варьировалось.

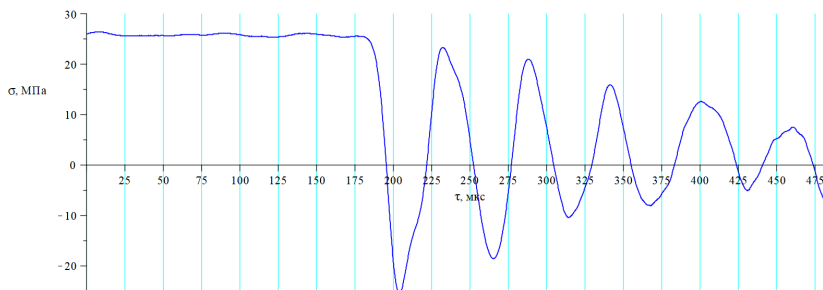


Рис. 22. Экспериментальные данные по статическому разрыву стеклянного образца

Результаты моделирования (рис. 23) в данном случае качественно повторяют результаты для оргстекла — с увеличением времени разгрузки амплитуда колебаний напряжений уменьшается, стремясь к нулевому значению.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование временных характеристик формирования волновых фронтов в конечномерных стержнях. По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. Было показано, теоретически и экспериментально, что в трехмерных стержнях фронты нагрузки и разгрузки формируются в течение конечного времени, что невозможно учесть в рамках одномерных моделей.
2. Результаты численного моделирования подтвердили, что стержневая волна является суперпозицией многих волн, инициированных при ударе, что отражается на времени формирования волнового фронта нагрузки при изменении диаметра стержня.

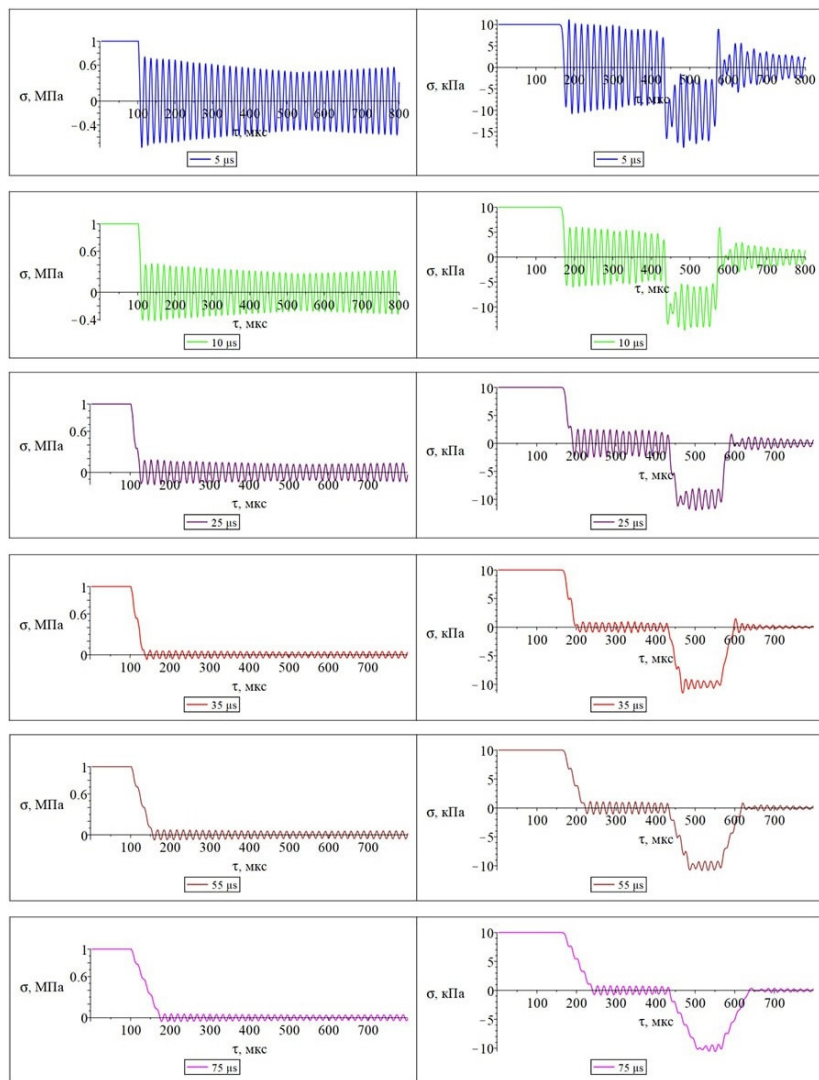


Рис. 23. Временной профиль напряжений в алюминиевом образце (слева) и стальном опорном стержне (справа) при различном времени разгрузки

3. Была предложена методика определения инкубационного времени разрушения в упруго-хрупких образцах, не подверженных большому пластическому течению. Для этого необходимо провести физический эксперимент по статическому разрыву образца и аналогичный численный эксперимент.
4. Посредством численного эксперимента было установлено, что наличие резьбы в экспериментах по статическому разрыву образцов не оказывает существенного влияния на формирование волнового фронта, инициированного разрушением образца, и ей можно пренебречь.
5. Было показано, что в численном эксперименте, моделирующем статический разрыв образца, при достаточно большом времени разгрузки системы стержней осцилляция напряжений пропадает. Это объясняется квазистатическим характером задачи в предельном случае достаточно длинных импульсов воздействия и малых размеров образца.

Автор выражает благодарность Лукашову Родиону Витальевичу за предоставленные экспериментальные данные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolsky H.* An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading / H. Kolsky // *Proceedings of the Physical Society. Section B.* – 1949. – Vol. 62. – No. 11. – P. 676–700.
2. *Lindholm U. S.* High strain-rate testing: tension and compression / U. S. Lindholm, L. M. Yeakley // *Experimental Mechanics.* – 1968. – Vol. 8. – No. 1. – P. 1–9.
3. *Davies R. M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar / R. M. Davies // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* – 1948. – Vol. 240. – P. 375–457.
4. *Davies R. M.* A simple modification of the Hopkinson pressure bar / R. M. Davies // *Proceedings of the 7th International Congress on Applied Mechanics.* – 1948. – Vol. 1. – P. 404.
5. *Даффи Дж.* О применении крутильного разрезного стержня Гопкинсона к исследованию влияния скорости нагружения на поведение алюминиевого сплава 1100-0 / Дж. Даффи, Дж. Кэмпбелл, Р. Хоули // *Прикл. механика.* Сер. Е. – М.: Мир, 1971. – № 1. – С. 81–90.

6. *Льюис Дж.* Двухосный стержень Гопкинсона для одновременного кручения и сжатия / Дж. Льюис, В. Гольдсмит // Приборы для научн. исследований. – 1973. – № 7. – С. 22–26.
7. *Stiebler K.* Plastic flow of a ferric mild steel and a high strength austenitic steel under dynamic biaxial loading / K. Stiebler, H. Kunze, Staskevich // International Conference on Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain. – Oxford, 1989. – P. 181–188.
8. *Samanta S.* Dynamic deformation of aluminium and copper at elevated temperatures / S. Samanta // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1979. – Vol. 19. – P. 117–135.
9. *Zhao H.* A three dimensional longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Application to experimental techniques / H. Zhao, G. Gary // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1335–1348.
10. *Брагов А. М.* Упругопластические свойства алюминиевого сплава АМг6М при высоких скоростях деформации / А. М. Брагов, А. К. Ломунов // ПМТФ. – 1988. – № 5. – С. 168–171.
11. *Юношев А. С.* Разработка методики полимерного разрезного стержня Гопкинсона / А. С. Юношев, В. В. Сильвестров // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – № 3. – С. 212–220.
12. *Albertini C.* Testing techniques based on the split Hopkinson bar / C. Albertini, M. Montagnani // Proceedings of the 2nd Conference on Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain. – 1974. – P. 22–32.
13. *Gong J. C.* Passively Confined Tests of Axial Dynamic Compressive Strength of Concrete / J. C. Gong, L. E. Malvern // Experimental Mechanics. – 1990. – P. 55–59.
14. *Morris D. R.* Dynamic properties of construction materials using a large diameter Kolsky bar / D. R. Morris, A. J. Watson // High Rates of Strain. – Oxford, 1989. – 519 p.
15. *Sharma S.* Application of Split Hopkinson Pressure Bar Test Setup for Determination of Fracture Toughness K_C at High Strain Rate Loading / S. Sharma, M. K. Samal // Materials Today: Proceedings. – 2022. – Vol. 56. – P. 1771–1775.
16. *Брагов А. М.* Использование метода Кольского для динамических испытаний конструкционных материалов / А. М. Брагов, А. К. Ломунов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Нижегородский ун-т. – 1995. – № 51. – С. 127–137.
17. *Al-Mousawi M. M.* A New Procedure to Evaluate Parameters of Johnson–Cook Elastic–Plastic Material Model from Varying Strain Rate Split Hopkinson Pressure Bar Tests / M. M. Al-Mousawi, A. M. Ahmed, M. H. Al-Khafaji // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2021. – Vol. 30. – No. 4. – P. 2503–2512.

18. Брагов А. М. Использование метода Кольского для исследования процессов высокоскоростного деформирования материалов различной физической природы / А. М. Брагов, А. К. Ломунов. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. – 148 с.
19. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids / A. A. Griffith // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. – 1921. – Vol. 221. – P. 163–198.
20. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irwin // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol. 24. – P. 361–364.
21. Kalthoff J. F. Instability of cracks under impulse loads / J. F. Kalthoff, D. A. Shockey // Journal of Applied Physics. – 1977. – Vol. 48. – P. 986–993.
22. Broberg K. B. On the speed of a brittle crack / K. B. Broberg // Journal of Applied Mechanics. – 1964. – Vol. 31. – P. 546–547.
23. Time dependence of the strength of metals having lifetimes in the microsecond range / N. A. Zlatin [et al.] // Fizika Tverdogo Tela. – 1975. – Vol. 17. – P. 2599–2602.
24. Dally J. W. On the uniqueness of the stress intensity factor–crack velocity relationship / J. W. Dally, W. L. Fournery, G. R. Irwin // International Journal of Fracture. – 1985. – Vol. 27. – P. 159–168.
25. Kalthoff J. F. On the measurement of dynamic fracture toughness – a review of recent work / J. F. Kalthoff // International Journal of Fracture. – 1985. – Vol. 27. – P. 277–298.
26. Petrov Yu. V. Dependence of the dynamic strength on loading rate / Yu. V. Petrov, A. A. Utkin // Materials Science. – 1989. – Vol. 25. – No. 2. – P. 153–156.
27. Petrov Yu. V. On “Quantum” Nature of Dynamic Fracture of Brittle Solids / Yu. V. Petrov // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1991. – Vol. 321. – No. 1. – P. 66–68.
28. Petrov Yu. V. On the modeling of fracture of materials under impact loading / Yu. V. Petrov, N. F. Morozov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1994. – Vol. 35. – No. 3. – P. 480–484.
29. Petrov Yu. V. On the modeling of fracture of brittle solids / Yu. V. Petrov, N. F. Morozov // Journal of Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 61. – P. 710–712.
30. Selyutina N. S. Fracture of saturated concrete and rocks under dynamic loading / N. S. Selyutina, Yu. V. Petrov // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – Vol. 225. – 106265.
31. Petrov Yu. V. Time dependence of the spall strength under nanosecond loading / Yu. V. Petrov, A. A. Utkin // Technical Physics. – 2015. – Vol. 60. – No. 8. – P. 1162–1166.

-
32. *Smirnov V. I.* Effect of Pulse Shape on Spall Strength / V. I. Smirnov, Yu. V. Petrov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2018. – Vol. 59. – No. 2. – P. 303–309.
 33. *Bratov V. A.* Dynamic Strength of Continuum / V. A. Bratov, N. F. Morozov, Yu. V. Petrov. – St. Petersburg : St. Petersburg University Press, 2009. – 223 p.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С УПРУГИМИ ШАРНИРАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ ПО МОДУЛЮ СИЛЫ

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

В статье изучаются вопросы устойчивости нижнего положения равновесия двойного математического маятника с упругими шарнирами, находящегося под действием сосредоточенной силы постоянного модуля. Рассматриваются четыре варианта действия этой силы в отклоненном положении, и для каждого из них устанавливается ее консервативность или неконсервативность. На основании этих заключений посредством статического или динамического подхода соответственно выявляются условия устойчивости в терминах двух безразмерных параметров задачи. Помимо этого, в неконсервативных случаях исследуется влияние диссипативных сил вязкого трения в шарнирах маятника на устойчивость равновесия. Полученные результаты приведены в графической форме в виде областей устойчивости на плоскости параметров. Они представляют интерес для аналитической механики и теории устойчивости, а также могут найти применение в инженерном деле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость положений равновесия двухзвенных конструкций в различных условиях их функционирования (в поле силы тяжести, при наличии упругих шарниров) под действием разнообразных нагрузок (мертвых, следящих) изучается во многих научных работах [1–4]. При этом особенно важным является вопрос о том, как влияет характер действия нагрузки в отклоненном положении системы на условие устойчивости, причем не только при отсутствии диссипативных сил в шарнирах, но и при исчезающе малом трении.

В силу сказанного, в данной работе рассматривается двойной гравитационный маятник с упругими шарнирами, находящийся под действием постоянной по модулю силы, направление которой в отклоненном положении может отвечать четырем различным вариантам, и решается вопрос о нахождении условия устойчивости нижнего положения равновесия системы в каждом из этих случаев.

Доклад на семинаре 8 апреля 2025 г.

© А. С. Смирнов, Б. А. Смольников, 2025.

2. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим двойной математический маятник, полагая, что его невесомые звенья являются идентичными и имеют длину l , концевые грузы также одинаковы и обладают массой m , а шарниры маятника являются упругими, причем жесткости соответствующих торсионов на поворот принимаются равными γ . Будем считать, что двойной маятник испытывает действие сосредоточенной силы \underline{P} , приложенной к концевому грузу второго звена, при этом ее модуль является постоянным и равным P , а в нижнем положении равновесия системы она действует так, как показано на рис. 1, а.

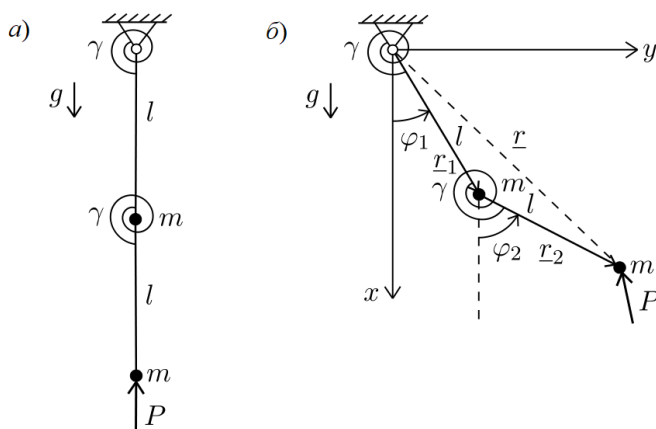


Рис. 1. Двойной маятник с упругими шарнирами и сосредоточенной силой: а) – в равновесном положении, б) – в отклоненном положении

Ясно, что в зависимости от того, как ведет себя эта сила при отклонении системы от нижнего положения равновесия (сохраняет вертикальное направление, т. е. является мертвой, или же не сохраняет, т. е. является следящей), она может быть как консервативной, так и неконсервативной, что в свою очередь влияет как на методы исследования устойчивости, так и на само условие устойчивости.

Для того чтобы установить консервативность или неконсервативность силы \underline{P} , следует записать элементарную работу этой силы на элементарном перемещении точки ее приложения $\delta \underline{r}$, где \underline{r} – радиус-вектор упомянутой точки, начало которого совпадает с точкой подвеса маятника (рис. 1, б). Ясно, что

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2, \quad \delta \underline{r} = \delta \underline{r}_1 + \delta \underline{r}_2, \quad (1)$$

где \underline{r}_1 и \underline{r}_2 – векторы, имеющие длину и направление стержней.

Для удобства дальнейших вычислений введем координатную систему в плоскости двойного маятника таким образом, чтобы ось x была направлена вертикально вниз, а ось y – горизонтально вправо (рис. 1, б). Принимая в качестве обобщенных координат углы отклонения звеньев маятника от вертикали φ_1 и φ_2 , будем иметь:

$$\underline{r}_1 = l (\cos \varphi_1 \underline{i} + \sin \varphi_1 \underline{j}), \quad \underline{r}_2 = l (\cos \varphi_2 \underline{i} + \sin \varphi_2 \underline{j}), \quad (2)$$

где \underline{i} и \underline{j} – орты введенной системы координат. Подставляя соотношения (2) во вторую формулу (1), будем иметь:

$$\delta \underline{r} = l [-(\sin \varphi_1 \delta \varphi_1 + \sin \varphi_2 \delta \varphi_2) \underline{i} + (\cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + \cos \varphi_2 \delta \varphi_2) \underline{j}]. \quad (3)$$

Силу \underline{P} также следует представить в этом базисе:

$$\underline{P} = P_x \underline{i} + P_y \underline{j},$$

где P_x и P_y – проекции этой силы на координатные оси.

В результате элементарная работа данной силы на элементарном перемещении (3) будет иметь вид [5]:

$$\delta' W = \underline{P} \cdot \delta \underline{r} = Q_{1P} \delta \varphi_1 + Q_{2P} \delta \varphi_2, \quad (4)$$

где обобщенные силы Q_{1P} и Q_{2P} , отвечающие силе \underline{P} , таковы:

$$Q_{1P} = l(-P_x \sin \varphi_1 + P_y \cos \varphi_1), \quad Q_{2P} = l(-P_x \sin \varphi_2 + P_y \cos \varphi_2). \quad (5)$$

Как известно, сила \underline{P} является консервативной, если столбцу обобщенных сил $\mathbf{Q}_P = [Q_{1P}, Q_{2P}]^T$ отвечает потенциальная энергия Π_P , такая, что $\mathbf{Q}_P = -\partial \Pi_P / \partial \boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ – столбец обобщенных координат, или в скалярном виде

$$Q_{1P} = -\frac{\partial \Pi_P}{\partial \varphi_1}, \quad Q_{2P} = -\frac{\partial \Pi_P}{\partial \varphi_2}. \quad (6)$$

Из соотношений (6) вытекает, что условие консервативности силы может быть представлено в форме, не содержащей \underline{P}_P :

$$\frac{\partial Q_{1P}}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial Q_{2P}}{\partial \varphi_1}. \quad (7)$$

Таким образом, вычисляя обобщенные силы Q_{1P} и Q_{2P} согласно (5) и проверяя, удовлетворяют ли они соотношению (7), можно установить консервативность или неконсервативность силы \underline{P} .

Если соотношение (7) выполняется, то имеет место консервативный случай, и в этой ситуации условие устойчивости нижнего положения равновесия системы $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ может быть определено стандартным методом исследования устойчивости равновесия консервативных систем при помощи теоремы Лагранжа–Дирихле [3]. Для этого необходимо вычислить суммарную потенциальную энергию системы $\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_\gamma + \Pi_P$, которая складывается из потенциальной энергии сил тяжести грузов Π_{mg} , потенциальной энергии упругих торсионов Π_γ и потенциальной энергии Π_P силы \underline{P} , а затем выяснить, когда Π имеет минимум в точке $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

Потенциальная энергия сил тяжести обоих грузов, а также ее квадратичная аппроксимация вблизи нижнего положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ имеют следующий вид [6]:

$$\Pi_{mg} = mgl(3 - 2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \approx \frac{1}{2}mgl(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad (8)$$

потенциальная энергия обоих упругих торсионов сразу определяется выражением, квадратичным по обобщенным координатам:

$$\Pi_\gamma = \frac{1}{2}\gamma [\varphi_1^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2] = \frac{1}{2}\gamma (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2), \quad (9)$$

и, наконец, формула для Π_P устанавливается из соотношений (6) по известным обобщенным силам Q_{1P} и Q_{2P} , после чего также потребуются вычисление ее квадратичной аппроксимации.

Для удобства дальнейших действий вычислим на основе (8) и (9) потенциальную энергию сил тяжести и упругости:

$$\begin{aligned} \Pi_{mg} + \Pi_\gamma &= \frac{1}{2}mgl [2(1 + \alpha)\varphi_1^2 + (1 + \alpha)\varphi_2^2 - 2\alpha\varphi_1\varphi_2] = \\ &= \frac{1}{2}\varphi^T \mathbf{C}\varphi, \quad \alpha = \frac{\gamma}{mgl}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем здесь введен безразмерный параметр α , представляющий собой безразмерную жесткость упругого торсиона, а \mathbf{C} – матрица квазиупругих коэффициентов, отвечающая силам тяжести и упругости:

$$\mathbf{C} = mgl \begin{bmatrix} 2(1 + \alpha) & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае положение равновесия, устойчивое при действии одних лишь консервативных сил, становится асимптотически устойчивым при добавлении в систему диссипативных сил с полной диссипацией, а при неустойчивости этого положения добавление диссипативных сил не может сделать его устойчивым [7]. Поэтому учет диссипативных эффектов в консервативном варианте никак не изменяет условие устойчивости, и рассматривать их дополнительно в данной ситуации не нужно.

В противном случае, когда соотношение (7) не имеет места, сила \underline{P} неконсервативна и исследование устойчивости положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ следует проводить уже при помощи не статического, а динамического подхода, т. е. путем анализа уравнений движения системы при малых отклонениях от указанного равновесного положения. С этой целью запишем выражение для кинетической энергии системы, а также сразу для ее квадратичной аппроксимации вблизи положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ [6]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] \approx \\ &\approx \frac{1}{2}ml^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \end{aligned}$$

где \mathbf{A} – матрица инерционных коэффициентов, которая определяется выражением

$$\mathbf{A} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Ясно, что уравнения движения системы вблизи нижнего положения равновесия системы $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, т. е. в рамках линейной модели могут быть записаны в следующей матричной форме [8]:

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{Q}_P, \quad (13)$$

где для столбца обобщенных сил \mathbf{Q}_P , отвечающего силе P , здесь должна быть приведена уже его линейная аппроксимация. Дальнейший анализ линейного уравнения (13) сводится к выводу соответствующего ему характеристического уравнения и анализу расположения его корней на комплексной плоскости, а именно, для устойчивости исследуемого положения равновесия эти корни должны располагаться в левой полуплоскости, включая мнимую ось.

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом неконсервативном случае диссипативные силы могут существенно влиять на условие устойчивости, при этом наибольший интерес представляет исследование варианта исчезающе малого трения. Как демонстрирует известный пример Г. Циглера, который рассматривал двухзвенную конструкцию с упругими шарнирами, нагруженную следящей силой на конце [1], критическая нагрузка при исчезающе малом трении оказывается меньше, чем критическая нагрузка, вычисленная при отсутствии трения [4]. Это явление получило название парадокса дестабилизации (или парадокса Циглера) [9].

Принимая во внимание сказанное, будем учитывать в случае неконсервативности силы P и наличие сил вязкого трения в обоих шарнирах двойного маятника, полагая диссипативные коэффициенты одинаковыми и равными b . Тогда диссипативная функция вязкого трения может быть представлена в следующей форме:

$$R = \frac{1}{2}b [\dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2] = \frac{1}{2}b (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varphi}},$$

причем матрица диссипативных коэффициентов \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B} = b \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Дополняя матричное уравнение (13) диссипативными силами, получим [8]:

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}_P. \quad (15)$$

Для выявления условия устойчивости вновь следует вывести характеристическое уравнение, отвечающее матричному уравнению (15), и потребовать расположения его корней в левой полуплоскости, при этом для случая исчезающе малого трения следует выполнить в найденном условии предельный переход $b \rightarrow 0$.

Рассмотрим четыре случая поведения силы \underline{P} , которые могут быть реализованы в данной задаче (рис. 2). В случае *а)* сила \underline{P} является мертвой и всегда направлена по вертикали. В случаях *б)*, *в)* и *г)* эта сила является следящей: в случае *б)* она направлена вдоль второго звена, в случае *в)* – вдоль первого звена, а в случае *г)* эта сила направлена в неподвижный шарнир. Как покажет дальнейший анализ, мертвая сила, конечно, является консервативной, тогда как следящая сила не обязательно неконсервативна.

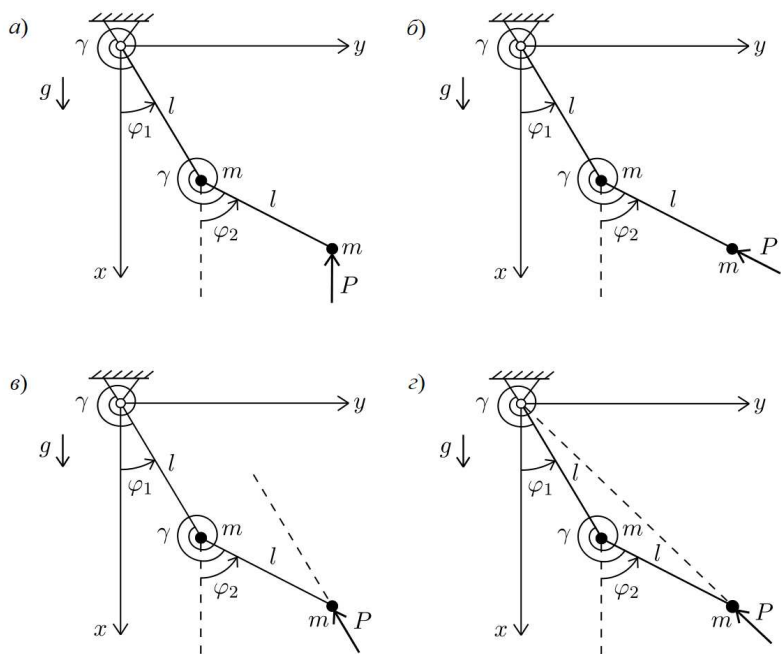


Рис. 2. Варианты действия сосредоточенной силы: *а)* – мертвая сила, направленная по вертикали; *б)* – следящая сила, направленная вдоль второго звена; *в)* – следящая сила, направленная вдоль первого звена; *г)* – следящая сила, направленная в неподвижный шарнир

3. ДЕЙСТВИЕ МЕРТВОЙ СИЛЫ, НАПРАВЛЕННОЙ ПО ВЕРТИКАЛИ

Сначала рассмотрим случай, представленный на рис. 2, а. В этой ситуации для проекций силы \underline{P} имеем, очевидно, следующие выражения:

$$P_x = -P, \quad P_y = 0,$$

так что обобщенные силы, отвечающие силе \underline{P} , согласно (5) будут определяться формулами

$$Q_{1P} = Pl \sin \varphi_1, \quad Q_{2P} = Pl \sin \varphi_2. \quad (16)$$

Легко видеть, что выражения (16) удовлетворяют соотношению (7), поэтому сила \underline{P} здесь является консервативной, как того и следовало ожидать. Подставляя далее формулы (16) в соотношения (6), нетрудно построить и потенциальную энергию Π_P :

$$\Pi_P = Pl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 - 2) \approx -\frac{1}{2}Pl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad (17)$$

где аддитивная постоянная добавлена для удобства, чтобы было $\Pi_P = 0$ в положении равновесия $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$, а также сразу выписана квадратичная аппроксимация полученного выражения вблизи указанного положения. А тогда суммарная потенциальная энергия $\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_\gamma + \Pi_P$ согласно (10) и (17) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}mgl \left[(2 + 2\alpha - \delta)\varphi_1^2 + (1 + \alpha - \delta)\varphi_2^2 - 2\alpha\varphi_1\varphi_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^T \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi}, \quad \delta = \frac{P}{mg}, \end{aligned} \quad (18)$$

где введен еще один безразмерный параметр δ , представляющий собой в обезразмеренном варианте модуль P действующей силы \underline{P} , а $\tilde{\mathbf{C}}$ – это результирующая матрица квазиупругих коэффициентов, отвечающая силам тяжести, силам упругости и силе \underline{P} , причем

$$\tilde{\mathbf{C}} = mgl \begin{bmatrix} 2 + 2\alpha - \delta & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha - \delta \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Как уже было сказано ранее, для устойчивости положения равновесия системы $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ в консервативном случае следует

установить, при каком соотношении параметров α и δ потенциальная энергия (18) имеет минимум в этом положении. Это означает, что квадратичная форма потенциальной энергии должна быть положительно определенной, т. е. должна быть положительно определенной матрица $\tilde{\mathbf{C}}$ согласно (19). Записывая условия положительной определенности этой матрицы при помощи критерия Сильвестра, приходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha - \delta > 0, \\ (2 + 2\alpha - \delta)(1 + \alpha - \delta) - \alpha^2 > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Второе из этих неравенств нетрудно привести к виду

$$Q(\delta) = \delta^2 - 3(1 + \alpha)\delta + \alpha^2 + 4\alpha + 2 > 0, \quad (21)$$

причем квадратный трехчлен $Q(\delta)$ имеет следующие корни:

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[3(1 + \alpha) \pm \sqrt{5\alpha^2 + 2\alpha + 1} \right],$$

где под δ_1 понимается меньший, а под δ_2 – больший корень. Поэтому система неравенств (20) преобразуется к форме

$$\begin{cases} \delta < 2(1 + \alpha), \\ \left[\begin{array}{l} \delta < \delta_1, \\ \delta > \delta_2. \end{array} \right] \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя значение $\delta = 2(1 + \alpha)$ в выражение (21), получим после элементарных вычислений, что

$$Q(\delta = 2(1 + \alpha)) = -\alpha^2 < 0,$$

откуда вытекает, что $\delta_1 < 2(1 + \alpha) < \delta_2$. Таким образом, решением системы неравенств (22) и, соответственно, условием устойчивости положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ будет неравенство

$$\delta < \frac{1}{2} \left[3(1 + \alpha) - \sqrt{5\alpha^2 + 2\alpha + 1} \right] = \delta_1(\alpha). \quad (23)$$

Из (23) видно, что при $\alpha = 0$, т. е. при отсутствии в расчетной схеме обоих упругих торсионов, будем иметь условие устойчивости в виде $\delta < 1$, или $P < mg$ в исходных величинах.

Что касается поведения зависимости $\delta_1(\alpha)$, которая соответствует границе области устойчивости на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$, при $\alpha \rightarrow +\infty$, то она будет иметь в этих условиях наклонную асимптоту $\delta_{1\infty} = K\alpha + B$, причем

$$K = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\delta_1(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{3}{\alpha} - \sqrt{5 + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}} \right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

$$B = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [\delta_1(\alpha) - K\alpha] = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2\alpha + 1}{\sqrt{5\alpha} + \sqrt{5\alpha^2 + 2\alpha + 1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right),$$

так что искомая наклонная асимптота примет вид

$$\delta_{1\infty} = \frac{1}{2} \left[(3 - \sqrt{5})\alpha + 3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right]. \quad (24)$$

На рис. 3 выделена область устойчивости положения равновесия на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$ согласно (23), которая расположена ниже кривой, приведенной синим цветом, а пунктирной линией обозначена наклонная асимптота (24) этой кривой.

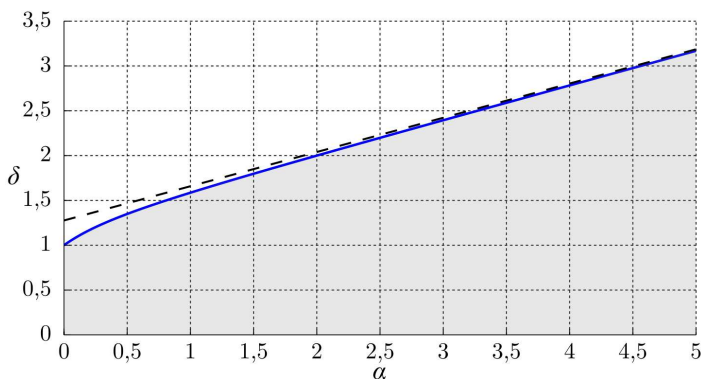


Рис. 3. Область устойчивости в случае а)

4. ДЕЙСТВИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ, НАПРАВЛЕННОЙ ВДОЛЬ ВТОРОГО ЗВЕНА

Перейдем теперь к случаю, представленному на рис. 2, б. Тогда для проекций силы \underline{P} можно записать выражения

$$P_x = -P \cos \varphi_2, \quad P_y = -P \sin \varphi_2,$$

поэтому обобщенные силы, отвечающие силе \underline{P} , согласно (5) будут

$$Q_{1P} = Pl \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q_{2P} = 0. \quad (25)$$

Подчеркнем, что второе из равенств (25) является очевидным. В самом деле сила \underline{P} в рассматриваемом случае (рис. 2, б) перпендикулярна вектору элементарного перемещения $\delta \underline{r}_2$, т. е. $\underline{P} \cdot \delta \underline{r}_2 = 0$, так что ее элементарная работа на этом перемещении равна нулю [3]. Если принять во внимание, что согласно (2) величина $\delta \varphi_1$ содержится только в выражении для $\delta \underline{r}_1$, а величина $\delta \varphi_2$ — только в выражении для $\delta \underline{r}_2$, то элементарная работа силы \underline{P} на перемещении $\delta \underline{r}$, равная $\delta'W = \underline{P} \cdot \delta \underline{r}_1$, будет содержать только слагаемое с $\delta \varphi_1$. С учетом формулы (4) это и означает, что $Q_{2P} = 0$.

Подставляя теперь выражения (25) в условие (6), видим, что оно не выполняется. Это означает, что сила \underline{P} здесь является неконсервативной и для исследования устойчивости положения равновесия $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ следует обратиться к линейному динамическому уравнению (13). Для его использования сначала запишем выражение для столбца $\mathbf{Q}_P = [Q_{1P}, Q_{2P}]^T$ и его линейную аппроксимацию при малых отклонениях, опираясь на формулы (25):

$$\mathbf{Q}_P = Pl \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \approx Pl \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{K}\varphi, \quad (26)$$

где матрица \mathbf{K} определяется выражением

$$\mathbf{K} = Pl \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Подставляя (26) в уравнение (13), приведем его к форме

$$\mathbf{A}\ddot{\varphi} + (\mathbf{C} + \mathbf{K})\dot{\varphi} = 0, \quad (28)$$

традиционной для задач о движении системы вблизи положения равновесия, однако перед столбцом обобщенных координат здесь стоит несимметричная матрица $\mathbf{C} + \mathbf{K}$.

Разыскивая решение уравнения (28) в виде $\varphi = \Phi e^{\lambda t}$, приходим к матричному алгебраическому уравнению относительно неизвестного столбца Φ :

$$(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C} + \mathbf{K})\Phi = 0,$$

которое имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда определитель матрицы этого уравнения равен нулю, т. е.

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) представляет собой характеристическое уравнение системы, и с учетом выражений (12), (11) и (27) для матриц \mathbf{A} , \mathbf{C} и \mathbf{K} соответственно оно приводится к биквадратному уравнению относительно λ :

$$\lambda^4 + 2(2 + 3\alpha - \delta)k^2\lambda^2 + (\alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta)k^4 = 0, \quad (30)$$

в котором сделано обозначение $k = \sqrt{g/l}$ для частоты малых колебаний обычного математического маятника длиной l .

Вводя новую переменную по формуле $z = \lambda^2/k^2$, приведем уравнение (30) к квадратному уравнению относительно z :

$$z^2 + 2(2 + 3\alpha - \delta)z + \alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta = 0. \quad (31)$$

Ясно, что для устойчивости исследуемого положения равновесия корни уравнения (31) должны быть вещественными и отрицательными, и тогда корни исходного уравнения (30) будут чисто мнимыми, что и свидетельствует о неасимптотической устойчивости. В противном случае среди корней уравнения (30) найдется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, что будет означать неустойчивость. Нетрудно понять, что корни z_1 и z_2 квадратного уравнения (31) являются вещественными и отрицательными, если выполнены следующие неравенства:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2(2 + 3\alpha - \delta) < 0, \\ z_1 z_2 = \alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta > 0, \\ D/4 = (2 + 3\alpha - \delta)^2 - (\alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta) > 0, \end{cases} \quad (32)$$

где при записи выражений для суммы и произведения корней здесь использована теорема Виета, а D – дискриминант квадратного уравнения (31). Последнее из условий (32) преобразуется к виду

$$\delta^2 - 3(1 + 2\alpha)\delta + 2(1 + 2\alpha)^2 = [\delta - (1 + 2\alpha)][\delta - 2(1 + 2\alpha)] > 0,$$

вследствие чего система неравенств (32) становится следующей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta < 2 + 3\alpha, \\ \delta < \alpha^2 + 4\alpha + 2, \\ \left[\begin{array}{l} \delta < 1 + 2\alpha, \\ \delta > 2(1 + 2\alpha). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (33)$$

Нетрудно понять, что имеет место цепочка неравенств

$$1 + 2\alpha < 2 + 3\alpha < 2(1 + 2\alpha) < \alpha^2 + 4\alpha + 2, \quad (34)$$

так что из системы (33) находим искомое условие устойчивости:

$$\delta < 1 + 2\alpha. \quad (35)$$

Из (35) вытекает, что при $\alpha = 0$ условие устойчивости принимает вид $\delta < 1$, т. е. $P < mg$, как это было и для случая a).

Отметим, что аналогичный результат (35) был получен для данной задачи в [3], однако он относится лишь к тому случаю, когда не учитываются силы трения, которые, как было сказано ранее, могут существенно влиять на условие устойчивости при наличии неконсервативных нагрузок. Чтобы разобраться в этом, обратимся к матричному уравнению (15), которое с учетом (26) примет вид

$$\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{B}\dot{\varphi} + (\mathbf{C} + \mathbf{K})\varphi = 0. \quad (36)$$

Нетрудно понять по аналогии, что характеристическое уравнение теперь вместо (29) примет следующую форму:

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0. \quad (37)$$

Подставляя в него выражения (12), (14), (11) и (27) для матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{K} соответственно, получим уже полное уравнение четвертой степени, записанное сразу относительно безразмерной величины $\xi = \lambda/k$:

$$\xi^4 + 12\nu\xi^3 + 2(2 + 3\alpha - \delta + 2\nu^2)\xi^2 + 4\nu(2 + \alpha)\xi + \alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta = 0, \quad (38)$$

причем здесь введен безразмерный диссипативный параметр по формуле $\nu = b/(2ml^2k)$. Поскольку в этом случае для устойчивости исследуемого положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ следует потребовать отрицательности вещественных частей всех корней уравнения (38), то целесообразно воспользоваться условиями критерия Льенара–Шипара. Как известно, этот критерий накладывает ограничения на коэффициенты уравнения (38):

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 12\nu, & a_2 &= 2(2 + 3\alpha - \delta + 2\nu^2), \\ a_3 &= 4\nu(2 + \alpha), & a_4 &= \alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta, \end{aligned} \quad (39)$$

а именно, для уравнения четвертой степени его условия таковы [3]:

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, & a_1 &> 0, & a_2 &> 0, & a_3 &> 0, & a_4 &> 0, \\ a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 &> 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Ясно, что условия $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$ при $\nu > 0$ выполняются автоматически, а из условий $a_2 > 0$, $a_4 > 0$ и последнего условия (40), разделенного на $\nu^2 > 0$, вытекает система неравенств:

$$\left\{ \begin{aligned} 2 + 3\alpha - \delta + 2\nu^2 &> 0, \\ \alpha^2 + 4\alpha + 2 - \delta &> 0, \\ 2(1 + 2\alpha)^2 + 12(2 + \alpha)\nu^2 - 3\delta(1 + 2\alpha) &> 0. \end{aligned} \right. \quad (41)$$

Интересуясь случаем исчезающе малого трения, выполним в системе (41) предельный переход при $\nu \rightarrow 0$, вследствие чего она приведет к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &< 2 + 3\alpha, \\ \delta &< \alpha^2 + 4\alpha + 2, \\ \delta &< \frac{2}{3}(1 + 2\alpha), \end{aligned} \right.$$

а решением данной системы с учетом (34) будет неравенство

$$\delta < \frac{2}{3}(1 + 2\alpha), \quad (42)$$

которое и является условием устойчивости при исчезающе малом трении. Сопоставляя его с условием устойчивости (35), полученным

ранее при рассмотрении системы без трения, видим, что условие (42) является более жестким, как этого и можно было ожидать исходя из сказанного ранее. В частности, при $\alpha = 0$ из (42) находим, что для устойчивости должно быть $\delta < 2/3$, т. е. $P < 2/3mg$.

Остается подчеркнуть, что никакой парадоксальности здесь на самом деле не наблюдается, поскольку, принимая с самого начала $\nu = 0$, мы привязываем наше исследование исключительно к этому варианту и никак не можем судить об изменении корней характеристического уравнения при введении в систему сил трения, т. к. для этого необходим анализ полного уравнения при $\nu \neq 0$, который и выявляет возникающие при этом нетривиальные, но отнюдь не парадоксальные особенности [9].

На рис. 4 выделена область устойчивости положения равновесия на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$ при изначальном неучете сил трения согласно (35), и она расположена ниже прямой, приведенной синим цветом. Кроме того, для случая исчезающе малого трения область устойчивости, отвечающая неравенству (42) и расположенная ниже прямой, приведенной красным цветом, затемнена на рис. 4, и она является более узкой, чем область устойчивости, полученная при исследовании модели без трения.

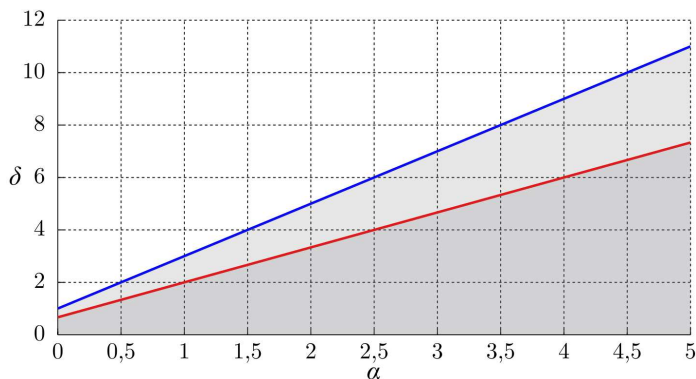


Рис. 4. Область устойчивости в случае б) при неучете сил трения и при исчезающе малом трении

5. ДЕЙСТВИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ, НАПРАВЛЕННОЙ ВДОЛЬ ПЕРВОГО ЗВЕНА

Далее обратимся к случаю, приведенному на рис. 2, в. В этой ситуации для проекций силы \underline{P} получим выражения

$$P_x = -P \cos \varphi_1, \quad P_y = -P \sin \varphi_1,$$

а обобщенные силы, отвечающие силе \underline{P} , согласно (5) будут

$$Q_{1P} = 0, \quad Q_{2P} = Pl \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (43)$$

Здесь первое из равенств (43) также очевидно, т. к. в данном случае (рис. 2, в) сила \underline{P} перпендикулярна вектору элементарного перемещения $\delta \underline{r}_1$, т. е. $\underline{P} \cdot \delta \underline{r}_1 = 0$, и элементарная работа силы \underline{P} на перемещении $\delta \underline{r}$ равна $\delta'W = \underline{P} \cdot \delta \underline{r}_2$. Это означает, что она, как и $\delta \underline{r}_2$, будет содержать только слагаемое с $\delta \varphi_2$, а потому $Q_{1P} = 0$.

Подставляя выражения (43) в условие (6), легко видеть, что оно не выполняется, так что и в этом случае сила \underline{P} является неконсервативной. Нетрудно понять, что линейная аппроксимация для столбца $\mathbf{Q}_P = [Q_{1P}, Q_{2P}]^T$ будет иметь вид $\mathbf{Q}_P = -\mathbf{K}\varphi$, аналогичный (26), однако теперь для матрицы \mathbf{K} вместо (27) получим выражение

$$\mathbf{K} = Pl \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Обращаясь к матричному уравнению (28) и отвечающему ему характеристическому уравнению (29), подставим в последнее из них выражения (12), (11) и (44) соответственно для матриц \mathbf{A} , \mathbf{C} и \mathbf{K} и приведем его к биквадратному уравнению относительно λ :

$$\lambda^4 + (4 + 6\alpha - 3\delta)k^2\lambda^2 + [\alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta]k^4 = 0,$$

которое с учетом введения переменной $z = \lambda^2/k^2$ можно представить как квадратное уравнение относительно z :

$$z^2 + (4 + 6\alpha - 3\delta)z + \alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta = 0. \quad (45)$$

Как и прежде, для устойчивости положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ корни z_1 и z_2 уравнения (45) должны быть вещественными

и отрицательными, т. е. должны быть выполнены неравенства:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -(4 + 6\alpha - 3\delta) < 0, \\ z_1 z_2 = \alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta > 0, \\ D = (4 + 6\alpha - 3\delta)^2 - 4[\alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta] > 0. \end{cases} \quad (46)$$

Последнее из этих условий нетрудно преобразовать к виду

$$9\delta^2 - 16(1 + 2\alpha)\delta + 8(1 + 2\alpha)^2 > 0. \quad (47)$$

Чтобы выяснить, имеет ли это неравенство вещественные корни, вычислим четверть его дискриминанта \tilde{D} :

$$\frac{\tilde{D}}{4} = -8(1 + 2\alpha)^2 < 0,$$

откуда вытекает, что неравенство (47) не имеет вещественных корней, а поскольку его старший коэффициент положителен, то оно будет выполняться всегда. В результате система (46) примет вид

$$\begin{cases} \delta < \frac{4}{3} + 2\alpha = \delta_1, \\ \delta < \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{\alpha + 2} = \delta_2. \end{cases} \quad (48)$$

Чтобы разобраться, какое из значений δ_1 и δ_2 является меньшим, вычислим их разность:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}{3(\alpha + 2)} > 0, \quad (49)$$

и отсюда следует, что $\delta_1 > \delta_2$ при любых значениях параметра α . Это означает, что решением системы неравенств (48) и, соответственно, искомым условием устойчивости является неравенство

$$\delta < \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{\alpha + 2} = \alpha + 2 - \frac{2}{\alpha + 2} = \delta_2(\alpha). \quad (50)$$

Из (50) следует, что при $\alpha = 0$ условие устойчивости принимает вид $\delta < 1$, т. е. $P < mg$, причем оно является таким же, как и для ранее рассмотренных случаев a) и b) при неучете сил трения.

Помимо этого, отметим, что зависимость $\delta_2(\alpha)$, соответствующая границе области устойчивости на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$, при $\alpha \rightarrow +\infty$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой $\delta_{2\infty} = \alpha + 2$ легко устанавливается из (50).

Поскольку в рассматриваемом варианте сила P является неконсервативной, то произведем учет сил трения, обращаясь к матричному уравнению движения (15) и характеристическому уравнению (37). Подставляя в последнее из них выражения (12), (14), (11) и (44) для матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{K} , получим полное уравнение четвертой степени относительно безразмерной величины $\xi = \lambda/k$:

$$\xi^4 + 12\nu\xi^3 + (4 + 6\alpha - 3\delta + 4\nu^2)\xi^2 + 2\nu(4 + 2\alpha - \delta)\xi + \alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta = 0,$$

коэффициенты которого имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 12\nu, & a_2 &= 4 + 6\alpha - 3\delta + 4\nu^2, \\ a_3 &= 2\nu(4 + 2\alpha - \delta), & a_4 &= \alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta. \end{aligned} \quad (51)$$

Подставляя выражения (51) в условия Лъенара–Шипара (40), замечаем, что условия $a_0 > 0$ и $a_1 > 0$ при $\nu > 0$ выполняются автоматически, тогда как из условия $a_2 > 0$, условия $a_3 > 0$, разделенного на $\nu > 0$, условия $a_4 > 0$ и последнего условия (40), разделенного на ν^2 , вытекает следующая система неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 + 6\alpha - 3\delta + 4\nu^2 > 0, \\ 4 + 2\alpha - \delta > 0, \\ \alpha^2 + 4\alpha + 2 - (2 + \alpha)\delta > 0, \\ 17\delta^2 - 16(1 + 2\alpha)\delta + 8(1 + 2\alpha)^2 + 24\nu^2(4 + 2\alpha - \delta) > 0. \end{array} \right. \quad (52)$$

Рассматривая случай исчезающе малого трения и выполняя в системе (52) предельный переход при $\nu \rightarrow 0$, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta < \frac{4}{3} + 2\alpha = \delta_1, \\ \delta < 4 + 2\alpha, \\ \delta < \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{\alpha + 2} = \delta_2, \\ 17\delta^2 - 16(1 + 2\alpha)\delta + 8(1 + 2\alpha)^2 > 0. \end{array} \right. \quad (53)$$

Нетрудно установить, что последнее из неравенств (53) не имеет вещественных корней, поскольку четверть его дискриминанта \tilde{D} отрицательна:

$$\frac{\tilde{D}}{4} = -72(1 + 2\alpha)^2 < 0,$$

а ввиду того, что его старший коэффициент положителен, оно всегда выполняется. Наконец, поскольку первое неравенство системы (53) сильнее второго, а между величинами δ_1 и δ_2 согласно (49) имеет место соотношение $\delta_2 < \delta_1$, то решением системы (54) будет являться неравенство (50).

Таким образом, для случая в), в отличие от случая б), условие устойчивости при исчезающе малом трении оказывается точно таким же, как и при неучете сил трения, хотя в обоих вариантах сила \underline{P} является неконсервативной. Это обстоятельство еще раз наглядно иллюстрирует отличительные особенности обсуждаемых задач.

На рис. 5 выделена область устойчивости положения равновесия на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$ согласно (50), которая расположена ниже кривой, приведенной синим цветом, при этом пунктирной линией обозначена наклонная асимптота этой кривой $\delta_{2\infty} = \alpha + 2$.

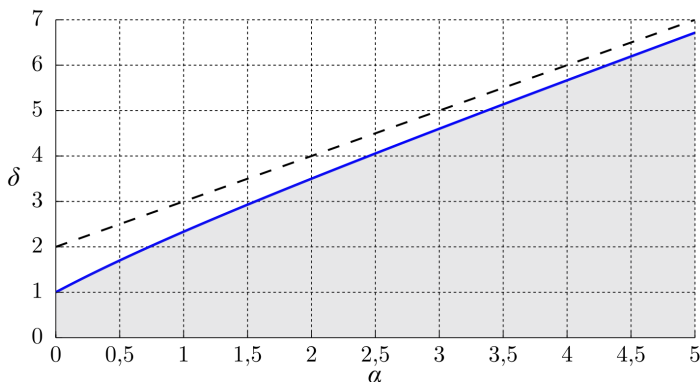


Рис. 5. Область устойчивости в случае в)

6. ДЕЙСТВИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ, НАПРАВЛЕННОЙ В НЕПОДВИЖНЫЙ ШАРНИР

В заключение рассмотрим случай, представленный на рис. 2, *г*. Тогда проекции силы \underline{P} имеют представления:

$$P_x = -P \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad P_y = -P \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

поэтому отвечающие им обобщенные силы согласно (5) будут

$$Q_{1P} = -Pl \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad Q_{2P} = Pl \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}. \quad (54)$$

Ясно, что выражения (54) удовлетворяют условию (7), так что сила \underline{P} здесь является консервативной, несмотря на то, что она является следящей. Подставляя формулы (54) в соотношения (6), легко построим и потенциальную энергию Π_P :

$$\Pi_P = 2Pl \left(\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - 1 \right) \approx -\frac{1}{4}Pl(\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (55)$$

где аддитивная постоянная добавлена из тех же соображений, что и в случае *a*), а также сразу выписана квадратичная аппроксимация Π_P вблизи положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

Следует подчеркнуть, что консервативность силы \underline{P} в рассматриваемой схеме легко установить, если заменить ее эквивалентной в статическом отношении схемой, представленной на рис. 6. В ней вместо силы \underline{P} присутствует нить, прикрепленная одним концом ко второму концевому грузу двойного маятника, перекинута через блок и несущая на другом своем конце точечный груз массой M , причем $P = Mg$. Это означает, что сила \underline{P} трансформируется в силу тяжести противовеса массой M и, очевидно, она является консервативной. Поэтому в исходной схеме (рис. 2, *г*) сила \underline{P} также консервативна, хотя она и является следящей. Таким образом, данный пример иллюстрирует то обстоятельство, что следящая сила не обязательно является неконсервативной.

Разумеется, потенциальную энергию (55) можно получить и из указанных ранее соображений, вычисляя в рамках расчетной схемы

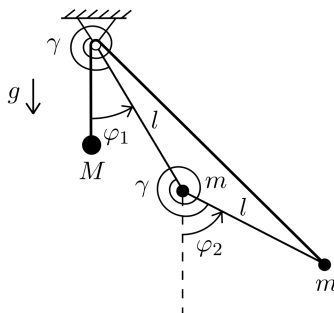


Рис. 6. Замена следящей силы, направленной в неподвижный шарнир, нитью с грузом, перекинутой через блок

с рис. 6 потенциальную энергию силы тяжести противовеса массой M . В самом деле эта потенциальная энергия есть $\Pi_M = -Mg\Delta$, где под Δ подразумевается расстояние, на которое опускается данный груз при отклонении системы от положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Учитывая, что в отклоненном положении стержни маятника и наклонный участок нити образуют равнобедренный треугольник, нетрудно вычислить длину его основания, после чего определить и величину Δ :

$$\Delta = 2l - 2l \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 2l \left(1 - \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right). \quad (56)$$

Поэтому выражение $\Pi_M = -Mg\Delta$ с учетом (56) и того, что $P = Mg$, полностью переходит в ранее найденную формулу (55).

В результате суммарная потенциальная энергия системы, равная $\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_\gamma + \Pi_P$, согласно (10) и (55) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} mgl \left[\left(2 + 2\alpha - \frac{\delta}{2} \right) \varphi_1^2 + \left(1 + \alpha - \frac{\delta}{2} \right) \varphi_2^2 + (\delta - 2\alpha) \varphi_1 \varphi_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

где результирующая матрица квазиупругих коэффициентов $\tilde{\mathbf{C}}$,

отвечающая силам тяжести, силам упругости и силе \underline{P} , имеет вид

$$\tilde{\mathbf{C}} = mgl \begin{bmatrix} 2 + 2\alpha - \frac{\delta}{2} & \frac{\delta}{2} - \alpha \\ \frac{\delta}{2} - \alpha & 1 + \alpha - \frac{\delta}{2} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Для нахождения условия устойчивости положения равновесия системы $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ в рассматриваемом консервативном случае следует потребовать положительной определенности матрицы (57), что в свою очередь диктуется условиями критерия Сильвестра:

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha - \frac{\delta}{2} > 0, \\ \left(2 + 2\alpha - \frac{\delta}{2}\right) \left(1 + \alpha - \frac{\delta}{2}\right) - \left(\frac{\delta}{2} - \alpha\right)^2 > 0. \end{cases}$$

Преобразуя эти неравенства, приведем их к виду

$$\begin{cases} \delta < 4(1 + \alpha) = \delta_1, \\ \delta < \frac{2(\alpha^2 + 4\alpha + 2)}{\alpha + 3} = \delta_2. \end{cases} \quad (58)$$

Вычисляя разность величин δ_1 и δ_2 , устанавливаем, что

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{2}{\alpha + 3} + 2(1 + \alpha) > 0,$$

поэтому $\delta_1 > \delta_2$ при любых значениях α . Таким образом, решением системы неравенств (58), а стало быть, и искомым условием устойчивости будет

$$\delta < \frac{2(\alpha^2 + 4\alpha + 2)}{\alpha + 3} = 2(\alpha + 1) - \frac{2}{\alpha + 3} = \delta_2(\alpha). \quad (59)$$

Из (59) вытекает, что при $\alpha = 0$ условие устойчивости принимает вид $\delta < 4/3$, т. е. $P < 4/3mg$, причем оно не совпадает с условием устойчивости $\delta < 1$, т. е. $P < mg$, полученным для ранее рассмотренных случаев а), б) и в) при неучете сил трения, которое для этих трех последних вариантов оказалось одинаковым.

Кроме того, зависимость $\delta_2(\alpha)$, соответствующая границе области устойчивости на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$, при $\alpha \rightarrow +\infty$ имеет согласно (59) наклонную асимптоту $\delta_{2\infty} = 2(\alpha + 1)$.

На рис. 7 выделена область устойчивости положения равновесия на плоскости безразмерных параметров $\alpha\delta$ согласно (59), которая расположена ниже кривой, приведенной синим цветом, а наклонная асимптота этой кривой $\delta_{2\infty} = 2(\alpha + 1)$ дана пунктирной линией.

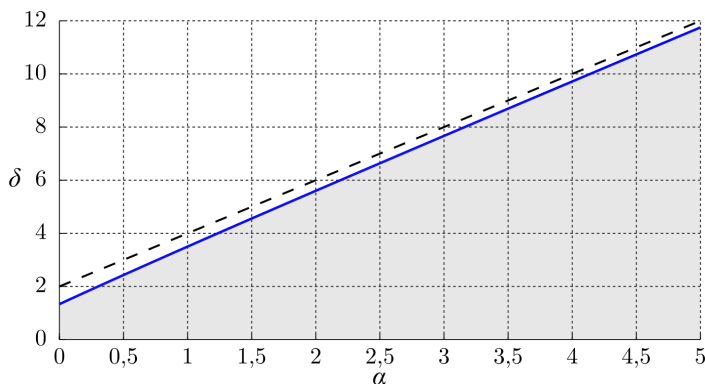


Рис. 7. Область устойчивости в случае $г$)

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для полноты картины представим графическое сопоставление результатов, полученных при решении рассмотренных ранее четырех задач. Напомним, что в случае $а$) сила \underline{P} является консервативной, и условие устойчивости имеет вид (23). В случае $б$) сила \underline{P} оказывается неконсервативной и при неучете сил трения условие устойчивости определяется неравенством (35), а при исчезающе малом трении — неравенством (42). В случае $в$) сила \underline{P} также является неконсервативной, однако условие устойчивости как при неучете сил трения, так и при исчезающе малом трении имеет один и тот же вид (50). Наконец, в случае $г$) сила \underline{P} оказывается консервативной

и условие устойчивости определяется неравенством (59). На рис. 8 приведены границы областей устойчивости для всех четырех задач, где отчетливо видно их расположение друг относительно друга.

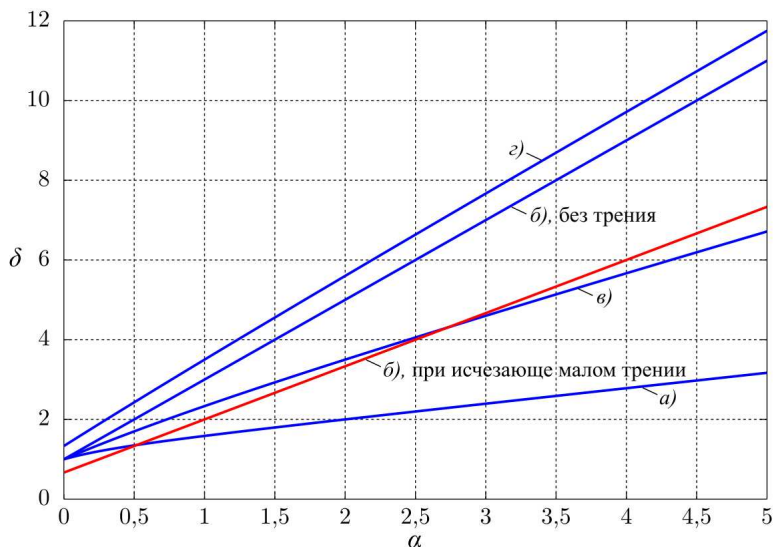


Рис. 8. Границы областей устойчивости в случаях а), б), в) и г)

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен вопрос о нахождении условий устойчивости нижнего положения равновесия двойного математического маятника с упругими шарнирами, находящегося под действием постоянной по модулю силы, которая может иметь различное поведение при отклонениях системы от этого положения. Для каждого из принятых четырех вариантов действия данной силы было выявлено, является ли она консервативной или нет, что в свою очередь определило, достаточно ли при исследовании устойчивости использования статического подхода, основанного на ана-

лизе потенциальной энергии системы, или же необходимо прибегать к динамическому подходу, требующему составления и анализа уравнений движения. При этом было отмечено, что в случае неконсервативности действующей силы следует также производить учет сил вязкого трения в шарнирах, которые могут оказывать существенное влияние на условие устойчивости. В результате проведенного детального исследования в каждом из вариантов действия силы были получены условия устойчивости в терминах двух безразмерных параметров задачи, пропорциональных жесткости упругих торсионов и действующей силе, а также построены отвечающие им области устойчивости на плоскости этих параметров. Полученные решения представляют интерес для педагогической практики и могут найти применение в задачах робототехники и биомеханики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций / Г. Циглер. – М. : Мир, 1971. – 190 с.
2. Агафонов С. А. Об устойчивости и автоколебаниях двойного маятника с упругими элементами, находящегося под действием следящей силы / С. А. Агафонов // Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 185–190.
3. Теория устойчивости в примерах и задачах / Д. Р. Меркин [и др.]. – М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 208 с.
4. Палош В. Е. Устойчивость двойного маятника с вязкоупругими элементами, нагруженного следящей и консервативной силами / В. Е. Палош // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2008. – № 1. – С. 87–98.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
6. Смирнов А. С. Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах / А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2016–2017 гг. – СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2018. – С. 23–39.
7. Берёзкин Е. Н. Курс теоретической механики / Е. Н. Берёзкин. – М. : Изд-во Московского ун-та, 1974. – 647 с.
8. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.
9. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, 1985. – 288 с.

Памяти С. Б. Филиппова (1946–2025)



24 февраля 2025 года скончался доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета Сергей Борисович Филиппов.

После окончания знаменитой ленинградской школы № 239 вся профессиональная жизнь Сергея Борисовича была связана с математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета, где он прошел путь от студента первого курса до профессора, заведующего кафедрой.

Сергей Борисович был прекрасным ученым, замечательным преподавателем и скромным, интеллигентным человеком. Он был автором множества статей, опубликованных в основных российских и международных журналах, и девяти книг, опубликованных в России и за рубежом.

Основные научные интересы С. Б. Филиппова лежали в области исследования колебаний и устойчивости тонкостенных конструкций, где он развивал методы и подходы, характерные для школы его замечательного учителя П. Е. Товстика. Им были исследованы

колебания и устойчивость тонкостенных конструкций переменной толщины, многослойных оболочек, подкрепленных и сопряженных оболочек, решены задачи оптимизации подкрепленных тонкостенных конструкций.

Много лет он читал основной курс теоретической механики студентам отделения механики математико-механического факультета и разнообразные специальные курсы по теории колебаний и устойчивости, вел специальные семинары. Трудно сосчитать студентов, у которых он был руководителем выпускных работ. Под его руководством было защищено десять кандидатских диссертаций.

Сергей Борисович был участником и организатором многих научных конференций и семинаров в разных странах. Он был членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике и Американского математического общества.

С самого начала работы семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» в 2004 году Сергей Борисович был руководителем и участником семинара, членом редколлегии Трудов семинара. Трудно представить работу семинара без его участия и участия учеников его школы.

Смерть Сергея Борисовича – большое горе для его коллег, учеников и друзей.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

Численное моделирование электрокоалесценции и декоалесценции капель воды

В. В. Луцек

Доклад на семинаре 1 октября 2024 г.

Исследуется электрокоалесценция капель – процесс слияния капель жидкости под воздействием электрического поля. Этот процесс играет важную роль в различных технологических приложениях, включая обработку жидкостей, разделение эмульсий и очистку топлива.

Цель работы – изучить, как различие в размерах капель влияет на их взаимодействие в электрическом поле, и определить условия, при которых капли сливаются полностью, частично или остаются разьединенными. С этой целью была усовершенствована и применена численная модель, способная точно описывать деформацию и движение капель разного радиуса.

В ходе исследования была создана карта режимов взаимодействия капель, показывающая как форма слияния капель зависит от напряженности электрического поля и соотношения размеров капель.

Экспериментальное изучение колебаний параллелепипеда в воздушном потоке

А. Д. Тупицына

Доклад на семинаре 5 ноября 2024 г.

Работа посвящена экспериментальному изучению колебаний параллелепипеда в воздушном потоке. Плохо обтекаемые тела подобной формы, служащие частями мостов или высотных сооружений, способны подвергаться колебаниям различного типа в набегающем ветровом потоке.

В исследовании параллелепипед с концевыми шайбами закреплялся в рабочей части аэродинамической трубы на подвесках двух типов, содержащих пружины. У тела на подвеске, содержащей восемь пружин, наблюдались только установившиеся поступательные колебания в направлении, перпендикулярном скорости набегающего потока. У тела на подвеске, содержащей две пружины, при достаточно больших скоростях потока наблюдались только вращательные колебания с постоянной амплитудой. Хотя под действием воздушного потока параллелепипед может совершать как поступательные, так и вращательные

колебания, возникновение и поступательных, и вращательных колебаний на одной подвеске не наблюдалось.

С использованием методов тензометрических измерений нестационарных сил в аэродинамическом эксперименте после обработки данных было обнаружено, что квадрат амплитуды колебаний линейно зависит от числа Струхала.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ РАБОТЫ УМЕРЕННО НАГРУЖЕННОГО САМОЛЕТНОГО СООСНОГО ВИНТА

М. И. Иванов

Доклад на семинаре 19 ноября 2024 г.

Самолетный соосный винт при правильном проектировании является высокоэффективным воздушным движителем. Современный подход к проектированию таких винтов сводится к анализу созданных ранее успешных конструкций и их модификации. В данной работе сформулирован, реализован в виде компьютерной программы и валидирован метод расчета коэффициентов тяги и мощности соосного самолетного винта, подходящий для режимов слабой и умеренной нагруженности винта.

Основываясь на методах, предложенных Г. И. Майкопаром, Д. В. Хелезовым и Л. Я. Крупениным для аэродинамического расчета соосных винтов и А. М. Лепилкиным для аэродинамического расчета тяжело нагруженного воздушного винта, предложена идея нового метода, реализованная далее с помощью подходящих вычислительных схем. Проведена валидация нового метода через сравнение расчетных и экспериментальных характеристик соосных винтов ЗСВ-3. Валидация показала хорошее совпадение расчета и эксперимента для областей слабой и умеренно нагруженной работы винта.

Поскольку в исследовании раскрыта лишь часть потенциала базовых методов, оно главным образом полезно для демонстрации перспективности предлагаемого подхода и обоснования целесообразности работы в этом направлении.

ИЗГИБ ЛЕДЯНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Н. Д. Трегулов

Доклад на семинаре 25 февраля 2025 г.

В докладе обсуждается задача гидростатики: изгиб тонкой ледяной пластины на упругом основании под действием сосредоточенной вертикальной нагрузки, которая моделирует посадку и взлёт вертолётков. Проводится расчёт минимальной толщины льда, необходимой для безопасной посадки, а также анализ напряжённо-деформированного состояния (НДС) льда. Лёд рассматривается как плавающая пластина или балка. Эта задача аналогична классической задаче Герца – изгибу круглой тонкой пластины под действием вертикальной нагрузки, приложенной к центру её верхней поверхности.

Задача изгиба ледяной пластины рассматривается в двух вариантах. В первом варианте пластина жёстко закреплена по краям. Во втором – пластина также закреплена по краям, но лежит на упругом основании, которое моделирует воду подо льдом. Математическое моделирование и расчёты проводятся в программе ANSYS 15.0 методом конечных элементов для двух типов нагрузки: сначала пластина нагружается в центре, затем нагрузка прикладывается в трёх точках, что соответствует реальным условиям посадки вертолёта на лёд.

Сравниваются две модели: феноменологическая, созданная на основе экспериментальных данных, и математическая, реализованная в программе ANSYS с использованием метода конечных элементов. Результаты показывают качественное совпадение.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕСНОЙ ПЛАТФОРМЫ С МАЯТНИКАМИ

Г. А. КУТЕЕВА

Доклад на семинаре 13 мая 2025 г.

В докладе обсуждаются несколько модельных задач об управлении платформы, с прикрепленным математическим маятником или двойным маятником. Рассматриваются малые колебания. Оптимальное управление – сила, действующая горизонтально на платформу, или момент, действующий на ведущие колеса платформы. Отдельно обсуждается модель ведущего колеса. Платформа переводится за заданное время прямолинейно из состояния покоя на заданное расстояние в состояние покоя. Рассматривается минимизация энергетических затрат. Происходит гашение колебаний. Находятся выражения для оптимального управления методом максимума Понтрягина и с помощью обобщенного принципа Гаусса.

Рассматривается несколько задач в зависимости от того, как расположен и прикреплен маятник.

1. Первоначальное положение математического маятника – вертикально вверх (неустойчивое положение маятника). Маятник крепится к платформе шарнирно.

2. Положение равновесия маятника и первоначальное положение – вертикально вниз.

3. Маятник обращен вверх, прикреплен к платформе вместе со спиральной пружиной. Положение равновесия маятника отклонено от вертикали на заданный угол. В задаче учитываются масса тележки, масса колес, масса моторов, прикрепленных к колесам, масса груза маятника, масса стержня маятника.

4. К платформе прикреплен манипулятор, состоящий из двух весомих стержней и груза на конце. Нижний стержень крепится к платформе вместе со спиральной пружиной, второй стержень крепится к первому либо жестко, либо со спиральной пружиной. В отличие от предыдущих модельных задач число степеней свободы увеличивается.

ОБ АВТОРАХ

Антуфьев Денис Викторович – инженер Передовой инженерной школы (ПИШ) «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, вычислительная механика, электроупругость, модели пониженного порядка. E-mail: antufiev_dv@spbstu.ru.

Доля Алексей Игоревич – студент теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теория оболочек, асимптотические методы, колебания тонкостенных конструкций. Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. А. Л. Смирнов. E-mail: st085349@student.spbu.ru.

Егорова Надежда Константиновна – аспирантка 2 курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: моделирование биомеханических систем. Автор 6 научных статей по указанному направлению. Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. С. М. Бауэр. E-mail: nadezhda_ego@mail.ru.

Иванов Матвей Игоревич – магистрант 1 курса кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: аэродинамика дозвуковых беспилотных летательных аппаратов, аэродинамика парашютов. E-mail: st059257@student.spbu.ru.

Клюшин Максим Александрович – ассистент кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: динамика космических аппаратов, управление движением. Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. А. А. Тихонов. E-mail: m.klyushin@spbu.ru.

Купреев Сергей Алексеевич – доктор технических наук, профессор департамента механики и процессов управления, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов. Область научных интересов: динамика космических аппаратов, управление движением. E-mail: kupreevsa@rudn.ru.

Кутеева Галина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: управление движением механической системы, история механики и другие. E-mail: g.kuteeva@spbu.ru.

Лозовой Алексей Сергеевич – студент 3 курса специалитета кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: динамика космических аппаратов, управление движением. Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. А. А. Тихонов. E-mail: st106433@student.spbu.ru.

Лукин Алексей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: аналитическая механика, нелинейная механика, вычислительная механика, теория устойчивости, управление механическими системами. E-mail: lukin_av@spbstu.ru.

Луцек Василий Владимирович – студент 1 курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: откольное разрушение в твердых материалах. Научные руководители – к.ф.-м.н., доц. В. А. Чирков и д.ф.-м.н., проф. Ю. В. Петров. E-mail: vvlouka8@gmail.com.

Пискун Никита Дмитриевич – инженер Передовой инженерной школы (ПИШ) «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, вычислительная механика, нелинейные динамические системы. Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. А. В. Лукин. E-mail: piskun_nd@spbstu.ru.

Попов Иван Алексеевич – инженер-исследователь Передовой инженерной школы (ПИШ) «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: аналитическая механика, нелинейная механика, вычислительная механика, теория устойчивости, управление механическими системами. E-mail: popov_ia@spbstu.ru.

Путилин Андрей Сергеевич – студент 5 курса специалитета кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: динамика космических аппаратов, управление движением. Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. А. А. Тихонов. E-mail: st087051@student.spbu.ru.

Смирнов Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук. Область научных интересов: аналитическая механика, теория механических колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, управление механическими системами, оптимизация в механике. Автор 3 книг и свыше 100 научных статей по указанным направлениям. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com.

Смольников Борис Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, старший научный сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук. Область научных интересов: общая механика, биомеханика и робототехника, динамика твердого тела, теория устойчивости движения, движение космических объектов, теория управления, эволюционная динамика. Автор 6 книг и свыше 100 научных статей, а также 22 изобретений. E-mail: smolnikovba@yandex.ru.

Тихонов Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов:

динамика твердого тела, динамика космических аппаратов, аналитическая механика, нелинейные колебания, управление движением, устойчивость движения. E-mail: a.tikhonov@spbu.ru.

Трегулов Никита Дамирович – студент 5 курса специалитета по направлению «Фундаментальная механика» математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: вычислительная механика твердого тела. Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. Г. В. Павилайнен. E-mail: st077176@student.spbu.ru.

Тупицына Анна Дмитриевна – студентка 1 курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: экспериментальная аэродинамика малых скоростей. Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. А. Н. Рябинин. E-mail: an.tupitsyna2017@yandex.ru.

Удалов Павел Павлович – аспирант Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института, инженер-исследователь Передовой инженерной школы «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: нелинейная динамика и теория колебаний, вычислительная механика, теория нано- и микроэлектромеханических систем. Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. А. В. Лукин. E-mail: pp_udalov@mail.ru.

Федоренко Роман Валерьевич – инженер-исследователь Передовой инженерной школы (ПИШ) «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: теория пластичности, вычислительная механика, численные подходы моделирования железобетонных конструкций. Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. А. В. Лукин. E-mail: fedorenko_rv@spbstu.ru.

Чернов Александр Антонович – студент кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика ударно-волновых процессов, динамика деформирования и разрушения сплошных сред, вычислительная механика деформируемого твердого тела. Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф., академик РАН Ю. В. Петров. E-mail: st087010@student.spbu.ru.

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2024–2025 гг.**

Нестерчук Григорий Анатольевич – канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, 2024. Научный руководитель – проф. С. Б. Филиппов.

Смирнов Алексей Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, 2025. Научный руководитель – доц. Б. А. Смольников.

SUMMARIES

Smirnov A. S. Dynamics of controlled motions of a spatial double pendulum in the presence of dissipative forces

The paper is devoted to the analysis of the dynamic behavior of a spatial double pendulum whose joint axes are not collinear to each other. It is assumed that the control moments formed according to the principle of collinear control act in the pendulum joints, and the presence of dissipative viscous friction forces in the joints is also taken into account. The analytical solution obtained in the linear model allows to identify the combined influence of control actions and dissipative effects on the dynamics of the system, as well as to classify possible regimes of its motion and construct a diagram of regimes on the plane of dimensionless parameters of the problem.

MSC class: 70J35

Keywords: spatial double pendulum, collinear control, viscous friction, diagram of motion regimes.

REFERENCES

1. *Agareva O. Yu.* Relative equilibria of a double spherical pendulum and their stability / O. Yu. Agareva // Dep. v VINITI 4.12.1996. – 1996. – N3493-B96. [in Russian].
2. *Xinjilefu.* Stabilization of the spatial double inverted pendulum using stochastic programming seen as a model of standing postural Control / Xinjilefu, V. Hayward, H. Michalska // 9th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. – 2009. – P. 367–372.
3. *Ludwicki M.* Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up / M. Ludwicki, J. Awrejcewicz, G. Kudra // International Journal of Dynamics and Control. – 2015. – Vol. 3. – P. 1–8.
4. *Bendersky S.* Investigation of a spatial double pendulum: an engineering approach / S. Bendersky, B. Sandler // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2006. – P. 1–22.
5. *Smirnov A. S.* Dissipative model of double mathematical pendulum with noncollinear joints / A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engi-

- neering: Science and Education". Saint Petersburg, Russia, June 2021. – 2022. – P. 38–47.
6. *Smirnov A. S.* Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain / A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // *Cybernetics and Physics*. – 2021. – Vol. 10. – No. 2. – P. 90–96.
 7. *Lurie A. I.* Analytical mechanics / A. I. Lurie. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. – 846 p.
 8. *Smirnov A. S.* Optimization of oscillation damping modes of a spatial double pendulum: 1. Formulation of the problem / A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*. – 2022. – Vol. 55. – No. 2. – P. 243–248.
 9. *Gantmakher F. R.* Lectures on analytical mechanics / F. R. Gantmakher. – Moscow : Nauka, 1966. – 300 p. [in Russian].
 10. *Biderman V. L.* The theory of mechanical oscillations / V. L. Biderman. – Moscow : Vyshaya shkola, 1980. – 480 p. [in Russian].
 11. *Leontev V. A.* Collinear control of dissipative double pendulum / V. A. Leontev, A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // *Robotics and Technical Cybernetics*. – 2019. – Vol. 7. – No. 1. – P. 65–70. [in Russian].

***Egorova N. K.* Simulation of the human body in vibration conditions**

The paper discusses a number of issues related to modeling the human body in vibration conditions. In particular, the question of the uniqueness of the set of parameters of mechanical models, taking into account the influence of the multi-articular muscles of the spine, which largely determine the mechanical properties of the spine, taking into account the actual mechanical properties of intervertebral discs.

MSC class: 92C10, 70E55

Keywords: mechanical model, human body, vibration, transfer function, amplitude-frequency response, multi-articular muscles, a non-integer number of degrees of freedom.

REFERENCES

1. *Paddan G. S.* The transmission of translational seat vibration to the head. – I. Vertical seat vibration / G. S. Paddan, M. J. Griffin // *Journal of Biomechanics*. – 1988. – Vol. 21. – Iss. 3. – P. 191–197.

2. Vibrations in technology. In 6 volumes. Vol. 6. Protection from vibration and shock / Ed. by K. V. Frolov. – Moscow : Mechanical Engineering, 1995. – 456 p. [in Russian].
3. CH 2.2.4/2.1.8.566-96 "Federal sanitary rules, norms and hygienic standards. Industrial vibration, vibration in residential and public buildings". – Moscow, 1997. – 20 p. [in Russian].
4. *Potemkin B. A.* Construction of a dynamic model of a human operator's body exposed to broadband random vibrations / B. A. Potemkin, K. V. Frolov // Vibration isolation of machines and vibration protection of the human operator. – 1973. – P. 17–30. [in Russian].
5. *Tregubov V. P.* Problems of mechanical model identification for human body under vibration / V. P. Tregubov // Mechanism and Machine Theory. – 2000. – Vol. 35. – P. 491–504.
6. On 4-degree-of-freedom biodynamic models of seated occupants: Lumped-parameter modeling / Bai Xian-Xu [et al.] // J. Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 402. – Iss. 18. – P. 122–141.
7. Optimization of biodynamic seated human models using genetic algorithms / W. Abbas [et al.] // Engineering. – 2010. – Vol. 2. – P. 710–719.
8. *Boileau P. E.* Whole-body vertical biodynamic response characteristics of the seated vehicle driver: measurement and model development / P. E. Boileau, S. Rakheja // Int. J. Ind. Ergonomics. – 1998. – Vol. 22. – P. 449–472.
9. Dynamic modeling and vibration characteristics of multi-DOF upper part system of seated human body / Zhang E. [et al.] // Chine J. Engineering Design. – 2008. – Vol. 15. – P. 244–249.
10. *Grafeev E. V.* Problems of determining the structure and parameters of mechanical models of the human body exposed to vibration / E. V. Grafeev, V. P. Tregubov // Dynamics and stability of mechanical systems. Applied mechanics. – 1995. – Iss. 9. – P. 47–57. [in Russian].
11. *Tregubov V. P.* Mathematical modeling of dynamics of the cervical spine under impulse effects / V. P. Tregubov, N. A. Selezneva // Vestn. St. Petersburg University. Ser. 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2016. – Iss. 1. – P. 53–65. [in Russian].
12. *Glukharev K. K.* Features of the biodynamics of the human body during vibrations / K. K. Glukharev, B. A. Potemkin, K. V. Frolov // Vibration protection of a human operator and issues of modeling / Ed. by K. V. Frolov. – Moscow : Nauka. – 1973. – P. 22–28. [in Russian].
13. *Orne D.* The in vivo driving-point impedance of the human ulna – a viscoelastic beam modal / D. Orne // J. Biomechanics. – 1974. – Vol. 7. – P. 249–257.
14. *Andronov A. A.* Theory of oscillations / A. A. Andronov, S. E. Khaykin. Moscow : ONTI, 1937. – 519 p. [in Russian].

15. *Matsumoto Y.* Non-Linear Characteristics in the Dynamic Responses of Seated Subjects Exposed to Vertical Whole-Body Vibration / Y. Matsumoto, M. J. Griffin // *J. of Biomech. Engineering.* – 2002. – Vol. 124(5). – P. 527–532.
16. Experimental and numerical investigations of C5-C6 cervical spinal segment before and after discectomy using the Cloward operation technique / M. Ciach [et al.] // *Acta of Bioengineering and Biomechanics.* – 1999. – Vol. 1. – No. 1. – P. 101–105.

***Lukin A. V., Popov I. A., Antufiev D. V., Piskun N. D.* Synthesis of geometrically nonlinear reduced order models for distributed elastic systems based on the finite element method**

The paper considers the problem of synthesizing reduced-order dynamic models for continuous elastic systems in a geometrically nonlinear formulation (primarily thin-walled structures: strings, membranes, beams, plates, shells) based on the finite element method. The approaches under consideration are based on the idea of identifying a nonlinear (quadratic-cubic) stiffness characteristic of an elastic system in its modal coordinates with subsequent application of the apparatus of the theory of nonlinear normal modes and Poincaré normal forms to construct an invariant manifold tangent to the selected modal subspace. The resulting reduced-order dynamic model takes into account the nonlinear elastic coupling of the primary vibration modes with high-frequency longitudinal and volumetric modes of the structure, which ensures the correctness of the calculated nonlinear stiffness characteristic of the system for the selected principal coordinates. The developed algorithm is applied to constructing a nonlinear model of longitudinal-flexural vibrations of a clamped-clamped beam and its verification based on an approximate analytical solution using the Galerkin method. The features of the software implementation of the presented method based on the ABAQUS finite element analysis software system are discussed.

MSC class: 74H10

Keywords: nonlinear elasticity theory, nonlinear normal modes, Poincaré normal form, nonlinear modal interaction, reduced-order models, model order reduction, nonlinear dynamics.

REFERENCES

1. Model Order Reduction. Volume 1. System- and Data-Driven Methods and Algorithms / P. Benner [et al.] – Berlin : De Gruyter, 2021. – 450 p.
2. Model Order Reduction. Volume 2. Snapshot-Based Methods and Algorithms / P. Benner [et al.] – Berlin : De Gruyter, 2021. – 480 p.
3. Model Order Reduction. Volume 3 Applications / P. Benner [et al.] – Berlin : De Gruyter, 2021. – 420 p.
4. Data-assisted non-intrusive model reduction for forced nonlinear finite elements models / M. Cenedese [et al.] // *Nonlinear Dynamics*. – 2024. – Vol. 112. – № 3. – P. 123–145.
5. Model order reduction of an electro-quasistatic problem using CLN method / W. Chen [et al.] // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2024. – Vol. 238. – P. 104185.
6. Reduced-order model of geometrically nonlinear flexible structures for fluid-structure interaction applications / T. Flament [et al.] // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2024. – Vol. 158. – P. 104587.
7. Reduced-order-model-based equivalent circuit for piezoelectric micro-electro-mechanical-system loudspeakers modeling / C. Gazzola [et al.] // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2024. – Vol. 155. – No. 2. – P. 1503–1514.
8. GOST R 57700.37-2021 Computer models and simulation. Digital twins of products. General provisions [in Russian].
9. *Lurie A. I. Nonlinear Theory of Elasticity* / A. I. Lurie. – Moscow : Nauka, 1980. – 512 p. [in Russian].
10. *Muravyov A. A. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures* / A. A. Muravyov, S. A. Rizzi // *Computers and Structures*. – 2003. – Vol. 81. – No. 15. – P. 1513–1523.
11. A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures / M. P. Mignolet [et al.] // *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332. – No. 10. – P. 2437–2460.
12. *Touze C. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques* / C. Touze, A. Vizzaccaro, O. Thomas // *Nonlinear Dynamics*. – 2021. – Vol. 105. – No. 2. – P. 1141–1190.
13. *Perez R. Nonintrusive structural dynamic reduced order modeling for large deformations: Enhancements for complex structures* / R. Perez, X. Q. Wang, M. P. Mignolet // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2014. – Vol. 9. – No. 3. – P. 031001.
14. On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models / A. Givois [et al.] // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 97. – No. 2. – P. 1747–1781.

15. Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements / A. Vizzaccaro [et al.] // Computational Mechanics. – 2020. – Vol. 66. – No. 6. – P. 1293–1319.
16. *Kuznetsov Y. A.* Elements of applied bifurcation theory / Y. A. Kuznetsov. – 4th ed. – Cham : Springer, 2023. – 600 p.
17. *Touze C.* Normal form theory and nonlinear normal modes: Theoretical settings and applications / C. Touze // CISM International Centre for Mechanical Sciences. – 2014. – Vol. 555. – P. 75–160.
18. *Ljapunov A. M.* Probleme general de la stabilite du mouvement / A. M. Lyapunov // Annales de la faculte des sciences de Toulouse. – 1907. – Vol. 9. – P. 203–474.
19. *Vakakis A. F.* Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system-I. Low energies / A. F. Vakakis, R. H. Rand // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1992. – Vol. 27. – No. 5. – P. 861–874.
20. *Shaw S.* Non-linear normal modes and invariant manifolds / S. W. Shaw, C. Pierre // Journal of Sound and Vibration. – 1991. – Vol. 150. – No. 1. – P. 170–173.
21. *Haller G.* Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction / G. Haller, S. Ponsioen // Nonlinear Dynamics. – 2016. – Vol. 86. – No. 3. – P. 1493–1534.
22. *Arnold V. I.* Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations / V. I. Arnold. – 2nd ed. – Moscow : Izhevskaya respublikanskaya tipografiya, 2000. – 400 p. [in Russian].
23. *Nayfeh A. H.* The method of normal forms / A. H. Nayfeh. – 2nd ed. – Weinheim : Wiley-VCH, 2011. – 300 p.
24. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures / A. Vizzaccaro [et al.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2021. – Vol. 384. – P. 113957.
25. *Touze C.* Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes / C. Touze, O. Thomas, A. Chaigne // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 273. – No. 1–2. – P. 77–101.
26. *Nayfeh A. H.* Linear and nonlinear structural mechanics / A. H. Nayfeh, P. F. Pai. – Weinheim : Wiley, 2004. – 650 p.

***Fedorenko R. V., Lukin A. V.* Adaptability of a vessel under pressure and thermocyclic loads**

The research is devoted to the study of the adaptability of a vessel under pressure and thermocyclic loads. The problem was posed in the

late 1960s in the work of J. Bree, who built an analytical solution for a vessel made of an elastically ideal plastic material under pressure with a temperature gradient cyclically varying in wall thickness. The result of the work was a diagram of the characteristic zones of vessel adaptability (ratcheting), which in the literature was called the "Bree diagram". Further development of the problem by Russian and international scientists using rigorous and approximate analytical, as well as numerical methods, allowed us to consider the features of adaptability (ratcheting) when changing various system parameters (variation in the type of load, taking into account the hardening of the material, and others). The paper presents the results of the development of a compact numerical procedure based on the Abaqus software, which allows solving adaptability (ratcheting) problems with arbitrary system parameters. The issue of the influence of material hardening mechanisms (isotropic, kinematic, and mixed) on the type of adaptability (ratcheting) diagram and the nature of the stress-strain state of the system under thermomechanical cyclic loads is considered.

MSC class: 74C15, 74S05

Keywords: ratcheting, shakedown, plastic cycling, cyclic loads, pressure vessel, thermal cyclic loads, plastic strain, nuclear power plant.

REFERENCES

1. BREST fast reactor with lead coolant: from concept to technology implementation / E. O. Adamov [et al.] // *Atomnaya energiya*. – 2020. – Vol. 129. – No. 4. – P. 185–194. [in Russian].
2. *Shamanin I. V.* High-temperature nuclear energy technologies / I. V. Shamanin, P. M. Gavrilov // *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta*. – 2010. – Vol. 316, No. 4. – P. 5–9. [in Russian].
3. GOST R 59115.10-2021. Substantiation of the strength of equipment and pipelines of nuclear power plants. An updated verification calculation at the design stage. The national standard of the Russian Federation, 2021. [in Russian].
4. ASME BPVC.III.5-2015. Division 5 – High Temperature Reactors.
5. *Gohfeld D. A.* The bearing capacity of structures in heat exchange conditions / D. A. Gohfeld. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1970. – 260 p. [in Russian].

6. *Bree J.* Elastic-plastic behaviour of thin tubes subject to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements / J. Bree // *Journal of Strain Analysis*. – 1967. – Vol. 2. – No. 3. – P. 226–238.
7. *Rabotnov Ju. N.* Solid mechanics / Ju. N. Rabotnov. – Moscow: Nauka, 1988. – 711 p. [in Russian].
8. *Sedov L. I.* Mechanics of Continuous Media / L. I. Sedov. – Moscow: Nauka, 1994. – Vol. 1. – 528 p., Vol. 2. – 560 p. [in Russian].
9. *Lemaitre J.* Mechanics of Solid Materials / J. Lemaitre, J. L. Chaboche // Cambridge University Press: Cambridge, UK. – 1990. – 556 p.
10. *Pelegatti M.* Cyclic plasticity and low cycle fatigue of an AISI 316L stainless steel: experimental evaluation of material parameters for durability / M. Pelegatti et al. // *Materials*. – 2021. – No. 14, 3588. – 20 p.
11. *Ishlinskij A. Ju.* General theory of plasticity with linear hardening / A. Ju. Ishlinskij // *Ukr. matem. zhurn.* – 1954. – Vol. 6. – No. 3. – P. 314–324. [in Russian].
12. *Kadashevich Ju. I.* The theory of plasticity, taking into account the Bauschinger effect / Ju. I. Kadashevich, V. V. Novozhilov // *Dokl. AN SSSR*. – 1957. – Vol. 117. – No. 4. – P. 586–588. [in Russian].
13. *Chaboche J. L.* Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity / J. L. Chaboche // *Int. J. Plast.* – 1986. – No. 2. – P. 149–188.
14. *Chaboche J. L.* A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories / J. L. Chaboche // *Int. J. Plast.* – 2008. – No. 24. – P. 1642–1693.
15. *Fedorenkov D. I.* A method for determining the constants and parameters of a damage accumulation model with isotropic and kinematic hardening / D. I. Fedorenkov, D. A. Kosov, A. V. Tumanov // *Physical Mesomechanics*. – 2022. – Vol. 26. – No. 6. – P. 63–74. [in Russian].
16. *Ansys 2021R2 Theory Guide* – Ansys Inc, 2021.
17. *Abaqus 2017 Theory Guide* – Dassault Systems, 2017.
18. *Ambroziak A.* Numerical modeling of elasto-viscoplastic Chaboche constitutive equations using MSC.MARC / A. Ambroziak // *Task quarterly*. – 2005. – Vol. 9. – No. 2. – P. 157–166.
19. *Morozov N. F.* Computational method for ratcheting analysis of the elasto-plastic bodies under cyclic loads / N. F. Morozov, R. V. Fedorenko, A. V. Lukin // *Composites and Nanostructures*. – 2024. – Vol. 16. – No. 1. – P. 69–84. [in Russian].
20. *Pei X.* The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries / X. Pei, P. Dong., J. Mei // *Thin-Walled Structures*. – 2021. – No. 159. – 159 p.

Dolya A. I. Vibrations of a reinforced cylindrical shell with a flat lid

Free vibrations of a thin cylindrical shell supported by uniformly spaced identical rings are investigated. The shell is clamped at one end and joint with the thin circular plate at the other. Various forms of natural oscillations are investigated: shell-like, plate-like and beam-like. The formula for the eigenfrequency parameter is derived by means of asymptotic and averaging methods. Frequency graphs for various eigenforms and the eigenfrequency spectrum of the structure are plotted. The problem of optimizing the eigenfrequency spectrum is investigated by varying the thickness of the structural elements and the number of rings while maintaining its total weight. The optimal set of parameters is one in which the minimum value of the eigenfrequency of the structure is maximum.

MSC class: 74H45, 74K25

Keywords: reinforced shells, free vibrations, averaging method, optimization.

REFERENCES

1. *Filippov S. B.* The Theory of Conjugated and Reinforced Shells / S. B. Filippov. – St. Petersburg : St. Petersburg University Press, 1998. – 196 p. [in Russian].
2. *Goldenveizer A. L.* Free Vibrations of Thin Elastic Shells / A. L. Goldenveizer, V. B. Lidskii, P. E. Tovstik. – Moscow : Nauka, 1979. – 384 p. [in Russian].
3. Strength. Stability. Vibrations. Vol. 3. / ed. by I. A. Birger, Ya. G. Panovko. – Moscow : Mashinostroenie, 1968. – 567 p. [in Russian].
4. *Nesterchuk G. A.* Natural vibrations of a thin clamped cylindrical shell conjugated with ring plates / G. A. Nesterchuk // Proceedings of the Seminar “Computer Methods in Mechanics of Continua” 2022–2023. – Saint Petersburg : POLITEKH-PRESS, 2023. – Pp. 78–98. [in Russian].
5. *Filippov S. B.* Free vibrations of a cylindrical shell closed with cap / S. B. Filippov, G. A. Nesterchuk, A. L. Smirnov // Advances in Solid and Fracture Mechanics. A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov. – Cham, 2022. – P. 71–86.
6. *Filippov S. B.* Free vibrations of a cylindrical shell with a cap. I. Asymptotic analysis / S. B. Filippov, A. L. Smirnov, G. A. Nesterchuk // Vestnik of

- Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 2023. – Vol. 10. – No. 1. – Pp. 109–120. [in Russian].
7. *Nesterchuk G. A.* Free vibrations of a cylindrical shell with a cap. II. Analysis of the spectrum / G. A. Nesterchuk, A. L. Smirnov, S. B. Filippov // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 2023. – Vol. 10. – No. 2. – Pp. 334–343. [in Russian].
 8. *Asymptotic Methods in Mechanics of Solids* / S. M. Bauer [et al.] – Moscow; Izhevsk : Regular and Chaotic Dynamics, 2007. – 356 p. [in Russian].
 9. *Tovstik P. E.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells / P. E. Tovstik, A. L. Smirnov. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong : World Scientific Pub Co Inc, 2001. – 360 p.
 10. *Andrianov I. V.* Averaging Method in Statics and Dynamics of Ribbed Shells / I. V. Andrianov, V. A. Lesnichaya, L. I. Manevich. – Moscow : Nauka, 1985. – 224 p. [in Russian].

***Udalov P. P., Lukin A. V., Popov I. A.* Nonlinear dynamics and stability of conducting body motions in an alternating magnetic field**

In the present work, the nonlinear dynamics and stability of the motion of a conducting thin ring in the electromagnetic field of two circular inductance coils are investigated. The analysis is performed using asymptotic methods of nonlinear mechanics. Using numerical methods of bifurcation theory, the equilibrium position in the space of key suspension parameters is investigated. Under the assumption of slow evolution of the quasi-static equilibrium position, the conditions for the occurrence and drift parameters of the levitating rigid body are determined. In a refined asymptotic formulation, the stability of the stationary levitation regime is investigated. It is shown that taking into account the drift of the equilibrium position of the system leads to an additional condition for stability related to the relation between dissipation of mechanical and electrical nature.

MSC class: 70K25

Keywords: electromagnetism, electromagnetic suspension, induction suspension, induced currents, nonlinear dynamics, oscillations stability.

REFERENCES

1. *Martinenko Y. G.* Motion of a solid body in electric and magnetic fields / Y. G. Martinenko. – Moscow : Nauka, 1988. – 368 p. [in Russian].
2. *Skubov D. Yu.* Nonlinear electromechanics / D. Yu. Skubov, K. Sh. Khodjaev. – Moscow : Fizmatlit, 2003. – 360 p. [in Russian].
3. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope / C. Shearwood [et al.] // Sensors and actuators A: physica. – 2000. – Vol. 83. – No. 1–3. P. 85–92.
4. *Poletkin K.* Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes / K. Poletkin // Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. – 2021. – P. 135–154.
5. A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics / K. Poletkin [et al.] // Journal of Microelectromechanical Systems. – 2015. – Vol. 24. – No. 5. – P. 1248–1250.
6. *Tsai N. C.* Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes / N. C. Tsai, W. M. Huang, C. W. Chiang // Microsystem technologies. – 2009. – Vol. 15. – P. 493–503.
7. Nonlinear dynamics of micromechanical non-contact induction suspension / D. Yu. Skubov [et al.] // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics. – 2023. – No. 6. – P. 98–112. [in Russian].
8. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods / A. H. Nayfeh. – New-York : John Wiley & Sons, 2008. – 425 p.

Klyushin M. A., Kupreev S. A., Lozovoy A. S., Putilin A. S., Tikhonov A. A. **Analytical study of a graviplane motion**

The paper discusses the peculiarities of the dynamics of a graviplane, which is a spacecraft consisting of two masses connected by a long tether. The idea of using such a spacecraft is the possibility of thrustless change of the orbit altitude due to the difference of gravitational forces acting on the end masses of the system. The motion of a graviplane in the equatorial plane is studied. The problem of a graviplane orientation to provide the desired change of the orbital altitude of its center of mass is considered. An analytical study of the system of differential equations of motion is carried out. The asymptotic solution is obtained using a series expansion by a small parameter. The justification of the choice of the equilibrium positions for the most effective change of the orbit altitude is given based on the analytical solution. Numerical

modeling of the considered problem is carried out. The obtained results are compared.

MSC class: 34E05, 70E55, 70F15, 70Q05

Keywords: non-reactive motion, space flight, graviplane, gravitational field, small parameter method.

REFERENCES

1. *Beletsky V. V.* On the motion of a pulsating system in a gravitational field / V. V. Beletsky, M. E. Givertz // *Cosmic Research*. – 1968. – Vol. 6. – No. 2. – P. 304–306. [in Russian].
2. *Okunev Yu. M.* On possible motions of a long dumbbell in a central force field / Yu. M. Okunev // *Cosmic Research*. – 1969. – Vol. 7. – No. 5. – P. 637–642. [in Russian].
3. *Donov A. E.* Theory of gravilet flight / A. E. Donovan // *Cosmic Research*. – 1971. – Vol. 9. – No. 3. – P. 392–396. [in Russian].
4. *Givertz M. E.* A particular case of control optimization of a gravilet / M. E. Givertz // *Cosmic Research*. – 1972. – Vol. 10. – No. 2. – P. 297–299. [in Russian].
5. *Beletsky V. V.* Essays on the motion of space bodies / V. V. Beletsky // Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature, Nauka Publishers. – 1972. – P. 243–255. [in Russian].
6. *Markov V. E.* On the choice of the mass geometry change program for a gravilet / V. E. Markov // *Interuniversity Collection*. – 1974. – No. 6. – P. 79–82. [in Russian].
7. *Pirozhenko A. V.* Motion control of a two-body tethered system in a gravitational field by varying the tether length / A. V. Pirozhenko // *Cosmic Research*. – 1992. – Vol. 30. – No. 4. – P. 473–482. [in Russian].
8. Motion of a rigid dumbbell with a flywheel in a central gravitational field / S. A. Kupreev [et al.] // *Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Series: Engineering Research*. – 2022. – Vol. 23. – No. 2. – P. 83–96. [in Russian].
9. *Asymptotic methods in solid mechanics* / S. M. Bauer [et al.] – Moscow; Izhevsk : Center for Regular and Chaotic Dynamics, Institute for Computer Research. – 2007. – 360 p. [in Russian].

Cherenkov A. A. Temporal properties of wave front formation in finite-dimensional rods

A series of dynamic problems in the theory of elasticity related to the formation of wave fronts in quasi-one-dimensional rod systems is considered. The problems were solved both analytically and numerically using the finite element method. It was shown that loading and unloading wave fronts in real rods form over a finite period of time, which cannot be accounted for within the framework of one-dimensional models. A method was proposed for determining the incubation time of fracture in elastic-brittle specimens by conducting a static tension experiment and a corresponding numerical simulation. It was established that the presence of a threaded connection in static tension experiments does not significantly affect the formation of the wave front initiated by specimen fracture. It was also shown that in the numerical experiment simulating static fracture, stress oscillations vanish if the unloading time of the rod system is sufficiently long.

MSC class: 74-05, 74M20, 74K10, 74R10, 74S05

Keywords: rods, finite element method, wave fronts, dynamic strength, incubation time of fracture.

REFERENCES

1. *Kolsky H.* An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading / H. Kolsky // Proceedings of the Physical Society. Section B. – 1949. – Vol. 62. – No. 11. – P. 676–700.
2. *Lindholm U. S.* High strain-rate testing: tension and compression / U. S. Lindholm, L. M. Yeakley // Experimental Mechanics. – 1968. – Vol. 8. – No. 1. – P. 1–9.
3. *Davies R. M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar / R. M. Davies // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. – 1948. – Vol. 240. – P. 375–457.
4. *Davies R. M.* A simple modification of the Hopkinson pressure bar / R. M. Davies // Proceedings of the 7th International Congress on Applied Mechanics. – 1948. – Vol. 1. – P. 404.
5. *Duffy J.* On the application of the torsional split Hopkinson bar to the study of the rate sensitivity of 1100-0 aluminum / J. Duffy, J. Campbell, R. Hawley // Applied Mechanics. Ser. E. – Moscow : Mir, 1971. – No. 1. – P. 81–90. [in Russian].

6. *Lewis J.* Biaxial Hopkinson bar for simultaneous torsion and compression / J. Lewis, W. Goldsmith // Instruments for Scientific Research. – 1973. – No. 7. – P. 22–26. [in Russian].
7. *Stiebler K.* Plastic flow of a ferric mild steel and a high strength austenitic steel under dynamic biaxial loading / K. Stiebler, H. Kunze, Staskevich // International Conference on Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain. – Oxford, 1989. – P. 181–188.
8. *Samanta S.* Dynamic deformation of aluminium and copper at elevated temperatures / S. Samanta // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1979. – Vol. 19. – P. 117–135.
9. *Zhao H.* A three dimensional longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Application to experimental techniques / H. Zhao, G. Gary // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1335–1348.
10. *Bragov A. M.* Elasto-plastic properties of AMg6M aluminum alloy at high strain rates / A. M. Bragov, A. K. Lomunov // PMTF. – 1988. – No. 5. – P. 168–171. [in Russian].
11. *Yunoshev A. S.* Development of a method for polymer split Hopkinson bar / A. S. Yunoshev, V. V. Silvestrov // PMTF. – 2001. – Vol. 42. – No. 3. – P. 212–220. [in Russian].
12. *Albertini C.* Testing techniques based on the split Hopkinson bar / C. Albertini, M. Montagnani // Proceedings of the 2nd Conference on Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain. – 1974. – P. 22–32.
13. *Gong J. C.* Passively Confined Tests of Axial Dynamic Compressive Strength of Concrete / J. C. Gong, L. E. Malvern // Experimental Mechanics. – 1990. – P. 55–59.
14. *Morris D. R.* Dynamic properties of construction materials using a large diameter Kolsky bar / D. R. Morris, A. J. Watson // High Rates of Strain. – Oxford, 1989. – 519 p.
15. *Sharma S.* Application of Split Hopkinson Pressure Bar Test Setup for Determination of Fracture Toughness K_C at High Strain Rate Loading / S. Sharma, M.K. Samal // Materials Today: Proceedings. – 2022. – Vol. 56. – P. 1771–1775.
16. *Bragov A. M.* Use of Kolsky method for dynamic testing of structural materials / A. M. Bragov, A. K. Lomunov // Applied Problems of Strength and Plasticity: All-Union Interuniversity Collection / Nizhny Novgorod Univ. – 1995. – No. 51. – P. 127–137. [in Russian].
17. *Al-Mousawi M. M.* A New Procedure to Evaluate Parameters of Johnson–Cook Elastic–Plastic Material Model from Varying Strain Rate Split Hopkinson Pressure Bar Tests / M. M. Al-Mousawi, A. M. Ahmed, M. H. Al-Khafaji // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2021. – Vol. 30. – No. 4. – P. 2503–2512.

18. *Bragov A. M.* Use of Kolsky method for the study of high-speed deformation processes in materials of various physical nature / A. M. Bragov, A. K. Lomunov. – Nizhny Novgorod : NNSU Publishing, 2017. – 148 p. [in Russian].
19. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids / A. A. Griffith // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* – 1921. – Vol. 221. – P. 163–198.
20. *Irwin G. R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irwin // *Journal of Applied Mechanics.* – 1957. – Vol. 24. – P. 361–364.
21. *Kalthoff J. F.* Instability of cracks under impulse loads / J. F. Kalthoff, D. A. Shockey // *Journal of Applied Physics.* – 1977. – Vol. 48. – P. 986–993.
22. *Broberg K. B.* On the speed of a brittle crack / K. B. Broberg // *Journal of Applied Mechanics.* – 1964. – Vol. 31. – P. 546–547.
23. Time dependence of the strength of metals having lifetimes in the microsecond range / N. A. Zlatin [et al.] // *Fizika Tverdogo Tela.* – 1975. – Vol. 17. – P. 2599–2602.
24. *Dally J. W.* On the uniqueness of the stress intensity factor–crack velocity relationship / J. W. Dally, W. L. Fournery, G. R. Irwin // *International Journal of Fracture.* – 1985. – Vol. 27. – P. 159–168.
25. *Kalthoff J. F.* On the measurement of dynamic fracture toughness – a review of recent work / J. F. Kalthoff // *International Journal of Fracture.* – 1985. – Vol. 27. – P. 277–298.
26. *Petrov Yu. V.* Dependence of the dynamic strength on loading rate / Yu. V. Petrov, A. A. Utkin // *Materials Science.* – 1989. – Vol. 25. – No. 2. – P. 153–156.
27. *Petrov Yu. V.* On “Quantum” Nature of Dynamic Fracture of Brittle Solids / Yu. V. Petrov // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* – 1991. – Vol. 321. – No. 1. – P. 66–68.
28. *Petrov Yu. V.* On the modeling of fracture of materials under impact loading / Yu. V. Petrov, N. F. Morozov // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 1994. – Vol. 35. – No. 3. – P. 480–484.
29. *Petrov Yu. V.* On the modeling of fracture of brittle solids / Yu. V. Petrov, N. F. Morozov // *Journal of Applied Mechanics.* – 1994. – Vol. 61. – P. 710–712.
30. *Selyutina N. S.* Fracture of saturated concrete and rocks under dynamic loading / N. S. Selyutina, Yu. V. Petrov // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2020. – Vol. 225. – 106265.
31. *Petrov Yu. V.* Time dependence of the spall strength under nanosecond loading / Yu. V. Petrov, A. A. Utkin // *Technical Physics.* – 2015. – Vol. 60. – No. 8. – P. 1162–1166.

32. *Smirnov V. I.* Effect of Pulse Shape on Spall Strength / V. I. Smirnov, Yu. V. Petrov // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 2018. – Vol. 59. – No. 2. – P. 303–309.
33. *Bratov V. A.* Dynamic Strength of Continuum / V. A. Bratov, N. F. Morozov, Yu. V. Petrov. – St. Petersburg : St. Petersburg University Press, 2009. – 223 p.

Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Stability of equilibrium of a double pendulum with elastic joints under the action of a force of constant modulus

The paper studies the stability of the lower equilibrium position of a double mathematical pendulum with elastic joints under the action of a concentrated force of constant modulus. Four variants of the action of this force in a deflected position are considered, and its conservatism or nonconservatism is established for each of them. Based on these conclusions, the stability conditions are identified in terms of two dimensionless parameters of the problem using a static or dynamic approach, respectively. In addition, the effect of dissipative viscous friction forces in the pendulum joints on the stability of equilibrium is investigated in nonconservative cases. The results obtained are presented in graphical form as stability regions on the parameter plane. They are of interest for analytical mechanics and stability theory, and can also find application in engineering.

MSC class: 70J25

Keywords: double pendulum, elastic joints, equilibrium stability, potential energy, viscous friction, characteristic equation, stability condition, stability region.

REFERENCES

1. *Ziegler H.* Principles of structural stability / H. Ziegler. – Waltham, Massachusetts, Toronto, London : Blaisdell Publishing Company, 1968. – 150 p.
2. *Agafonov S. A.* On the stability and self-oscillations of a double pendulum with elastic elements under the action of a tracking force / S. A. Agafonov // *Mechanics of a solid body.* – 1992. – No. 5. – P. 185–190. [in Russian].

-
3. The theory of stability in examples and problems / D. R. Merkin [et al.] – Moscow; Izhevsk : Regular and Chaotic Dynamics, 2007. – 208 p. [in Russian].
 4. *Palosh V. E.* Stability of dual pendulum with viscous-elastic elements under loading by tracking and conservative forces / V. E. Palosh // Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series "Natural sciences". – 2008. – No. 1. – P. 87–98. [in Russian].
 5. *Lurie A. I.* Analytical mechanics / A. I. Lurie. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. – 846 p.
 6. *Smirnov A. S.* Resonance oscillations control in the nonlinear mechanical systems / A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov // Proceedings of the seminar "Computer methods in continuum mechanics" 2016–2017. – St. Petersburg : St. Petersburg University, 2018. – P. 23–39. [in Russian].
 7. *Berezkin E. N.* Course of theoretical mechanics / E. N. Berezkin. – Moscow : Moscow University, 1974. – 647 p. [in Russian].
 8. *Biderman V. L.* Theory of mechanical oscillations / V. L. Biderman. – Moscow : Vyshaya shkola, 1980. – 408 p. [in Russian].
 9. *Panovko Ya. G.* Mechanics of a deformable solid body / Ya. G. Panovko. – Moscow : Nauka, 1985. – 288 p. [in Russian].

РЕФЕРАТЫ

УДК 531.53

Смирнов А. С. Динамика управляемых движений пространственного двойного маятника при наличии диссипативных сил / А. С. Смирнов // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 3–13.

Статья посвящена анализу динамического поведения пространственного двойного маятника, шарнирные оси которого не коллинеарны друг другу. Предполагается, что в шарнирах маятника действуют управляющие моменты, сформированные по принципу коллинеарного управления, а также учитывается наличие диссипативных сил вязкого трения в шарнирных сочленениях. Полученное в рамках линейной модели аналитическое решение позволяет выявить совместное влияние управляющих воздействий и диссипативных эффектов на динамику системы, а также дать классификацию возможных режимов ее движения и построить диаграмму режимов на плоскости безразмерных параметров задачи.

Библиогр. 11 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: пространственный двойной маятник, коллинеарное управление, вязкое трение, диаграмма режимов движения.

УДК 531, 51-7, 612.76

Егорова Н. К. Моделирование тела человека в условиях вибрации / Н. К. Егорова // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 14–47.

В работе обсуждается ряд вопросов, связанных с моделированием тела человека в условиях вибрации. В частности, вопрос о единственности набора параметров механических моделей, учет влияния многосуставных мышц позвоночника, которые в значительной степени определяют механические свойства позвоночника, учет реальных механических свойств межпозвонковых дисков.

Библиогр. 16 назв. Ил. 12.

Ключевые слова: механическая модель, тело человека, вибрация, передаточная функция, амплитудно-частотная характеристика, многосуставные мышцы, нецелое число степеней свободы.

УДК 531/534

Синтез геометрически нелинейных моделей пониженного порядка для распределенно-упругих систем на основе метода конечных элементов / А. В. Лукин [и др.] // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 48–77.

Рассматривается проблема синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке (прежде всего – тонкостенных конструкций: струн, мембран, балок, пластинок, оболочек) на базе метода конечных элементов. В основе рассматриваемых подходов лежит идея идентификации нелинейной (квадратично-кубической) жесткостной характеристики упругой системы в её модальных координатах с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, касательного к выбранному модальному подпространству. Получаемая таким образом динамическая модель пониженного порядка учитывает нелинейную упругую связанность рабочих форм колебаний с высокочастотными продольными и объемными модами конструкции, что обеспечивает корректность вычисляемой нелинейной жесткостной характеристики системы по выбранным главным координатам. Разработанный алгоритм применяется к построению нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и её верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галеркина. Обсуждаются особенности программной реализации представленного метода на основе программной системы конечно-элементного анализа ABAQUS.

Библиогр. 26 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, нелинейные нормальные моды, нормальная форма Пуанкаре, нелинейное модальное взаимодействие, редуцированные модели, нелинейная динамика.

УДК 004.942, 539.3, 621.039

Федоренко Р. В. Приспособляемость сосуда под давлением в условиях термоциклического нагружения / Р. В. Федоренко, А. В. Лукин // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 78–90.

Доклад посвящен исследованию приспособляемости сосуда под давлением в условиях термоциклического нагружения. Проблема была поставлена в конце 1960-х годов в работе Дж. Бри, который построил аналитическое решение для сосуда из упруго-идеально-пластического материала под давлением при циклически изменяющемся по толщине стенки градиенте температуры. Результатом работы явилась диаграмма характерных зон приспособляемости сосуда, которая в литературе получила название «диаграмма Бри». Дальнейшее развитие задачи отечественными и зарубежными учеными с применением строгих и приближенных аналитических, а также численных методов позволило рассмотреть особенности приспособляемости при изменении различных параметров системы (вариация типа нагрузки, учет упрочнения материала и другие).

В работе представлены результаты разработки компактной автоматизированной численной процедуры на базе программного средства Abaqus, позволяющей решать задачи приспособляемости при произвольных параметрах системы. Рассматривается вопрос влияния механизмов упрочнения материала (изотропного, кинематического и смешанного) на вид диаграммы приспособляемости и характер напряженно-деформированного состояния системы при термомеханических циклических нагрузках.

Библиогр. 20 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: приспособляемость, рэтчетинг, приработка, циклическое нагружение, сосуд под давлением, термоциклические нагрузки, пластические деформации, атомные станции.

УДК 539.3, 534.1

Доля А. И. Колебания подкрепленной цилиндрической оболочкой, сопряженной с плоской крышкой / А. И. Доля // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 91–106.

В данной работе исследуются свободные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной равномерно расположенными одинаковыми шпангоутами. Оболочка жестко заделана с одного края и сопряжена с тонкой круговой пластиной на другом. Исследуются различные формы собственных колебаний: «оболочечные», «пластиночные» и «балочные». С использованием асимптотических методов и метода осреднения получена формула для параметра «оболочечной» частоты. Построены графики частот для различных форм колебаний, спектр частот конструкции для оценки влияния шпангоута. Исследуется задача оптимизации спектра собственных частот, путем изменения толщин элементов конструкции и числа шпангоутов при сохранении ее суммарного веса. Под оптимальным набором параметров полагается такой, при котором минимальное значение собственной частоты конструкции максимально.

Библиогр. 10 назв. Ил. 10.

Ключевые слова: подкрепленные оболочки, собственные колебания, метод осреднения, оптимизация.

УДК 531.37

Удалов П. П. Нелинейная динамика и устойчивость движений проводящего тела в переменном магнитном поле / П. П. Удалов, А. В. Лукин, И. А. Попов // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 107–113.

В настоящей работе исследуется нелинейная динамика и устойчивость движения проводящего тонкого кольца в электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. Анализ выполняется с применением асимптотических методов нелинейной механики. С помощью численных методов теории бифуркаций исследуется положение равновесия в пространстве ключевых параметров подвеса. В предположении о медленной эволюции квазистатического положения равновесия определены условия на возникновение и параметры дрейфа левитирующего твердого тела. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима стационарной левитации. Показано, что учет дрейфа положения равновесия системы приводит к дополнительному условию

на устойчивость, связанному с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

Библиогр. 6 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: электромагнетизм, электромагнитный подвес, индукционный подвес, наведенные токи, нелинейная динамика, устойчивость колебаний.

УДК 517.928, 531.35, 629.78

Аналитическое исследование движения гравилета / М. А. Ключин [и др.] // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 114–124.

В работе изучаются особенности динамики гравилета, представляющего собой космический аппарат, состоящий из двух масс, соединенных длинным стержнем. Идея использования такого космического аппарата заключается в возможности безреактивного изменения высоты орбиты за счет разности гравитационных сил, действующих на концевые массы системы.

Рассматривается движение гравилета в экваториальной плоскости и ставится задача об его ориентации для обеспечения желаемого увеличения и уменьшения высоты орбиты его центра масс. Проводится аналитическое исследование системы дифференциальных уравнений движения. С помощью разложения в ряд по малому параметру строится асимптотическое решение. На основе аналитического решения дается обоснование выбора положений равновесия для наиболее эффективного изменения высоты орбиты. Выполняется численное моделирование рассматриваемой задачи, и проводится сравнение полученных результатов.

Библиогр. 9 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: нереактивное движение, космический полет, гравилет, гравитационное поле, метод малого параметра.

УДК 539.3, 539.4

Временные характеристики формирования волновых фронтов в конечномерных стержнях / А. А. Черенков // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 125–155.

Рассматривается ряд динамических задач теории упругости, связанных с особенностями формирования волновых фронтов в квазиодномерных стержневых системах. Задачи решались аналитически и численно методом конечных элементов. Было показано, что фронты волн нагрузки и разгрузки в реальных стержнях формируются в течение конечного времени, что невозможно учесть в рамках одномерных моделей. Была предложена методика определения инкубационного времени разрушения в упруго-хрупких образцах посредством проведения эксперимента по статическому разрыву и аналогичного численного эксперимента. Установлено, что наличие винтового соединения в экспериментах по статическому разрыву не оказывает существенного влияния на формирование волнового фронта, инициированного разрушением образца. Было показано, что в численном эксперименте, моделирующем статический разрыв образца, при достаточно большом времени разгрузки системы стержней осцилляция напряжений пропадает.

Библиогр. 33 назв. Ил. 23.

Ключевые слова: стержни, метод конечных элементов, волновые фронты, динамическая прочность, инкубационное время разрушения.

УДК 531.53

Смирнов А. С. Устойчивость равновесия двойного маятника с упругими шарнирами под действием постоянной по модулю силы / А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2024–2025 гг. – С. 156–180.

В статье изучаются вопросы устойчивости нижнего положения равновесия двойного математического маятника с упругими шарнирами, находящегося под действием сосредоточенной силы постоянного модуля. Рассматриваются четыре варианта действия этой силы в отклоненном положении, и для каждого из них устанавливается ее консервативность или неконсервативность. На основании этих заключений посредством статического или динамического подхода соответственно выявляются условия устойчивости в терминах двух безразмерных параметров задачи. Помимо этого, в неконсервативных случаях исследуется влияние диссипативных

сил вязкого трения в шарнирах маятника на устойчивость равновесия. Полученные результаты приведены в графической форме в виде областей устойчивости на плоскости параметров. Они представляют интерес для аналитической механики и теории устойчивости, а также могут найти применение в инженерном деле.

Библиогр. 9 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: двойной маятник, упругие шарниры, устойчивость равновесия, потенциальная энергия, вязкое трение, характеристическое уравнение, условие устойчивости, область устойчивости.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>А. С. Смирнов. Динамика управляемых движений пространственного двойного маятника при наличии диссипативных сил</i>	3
1. Введение	3
2. Вывод уравнений движения системы	4
3. Построение и анализ режимов движения	5
4. Заключение	12
<i>Н. К. Егорова. Моделирование тела человека в условиях вибрации</i>	14
1. Введение	14
2. Проблема единственности решения задачи определения параметров механических моделей тела человека, подверженного вибрационному воздействию	18
2.1. Система с двумя степенями свободы	18
2.2. Система с тремя степенями свободы	23
3. Исследование влияния многозвенных соединений на динамику модели тела человека в условиях вибраций	27
3.1. Система с двумя степенями свободы и двухзвенным соединением	28
3.2. Модель с произвольным числом степеней свободы и одним многозвенным соединением	30
3.3. Модель с произвольным числом степеней свободы и произвольным числом многозвенных соединений ..	31
3.4. Определение числа антирезонансных частот	33
3.5. Перспективы дальнейшего развития моделей тела человека с многозвенными соединениями	36
4. Моделирование биомеханических систем с нецелым числом степеней свободы	37
4.1. Система с полутора степенями свободы	37
4.2. Двухмассовая система с нецелым числом степеней свободы	40
4.3. Перспективы: моделирование поясничного отдела позвоночника с использованием моделей с многозвенными соединениями и моделей с нецелым числом степеней свободы	43
5. Заключение	45
<i>А. В. Лукин, И. А. Попов, Д. В. Антуфьев, Н. Д. Пискун. Синтез геометрически нелинейных моделей понижен-</i>	

ного порядка для распределенно-упругих систем на основе метода конечных элементов	48
1. Введение	48
2. Постановка задачи	50
3. Процедура идентификации нелинейной жесткостной характеристики	53
4. Особенности нелинейных модальных взаимодействий в упругих системах	55
5. Нормальная форма Пуанкаре как модель пониженного порядка	58
6. Пролетная балка: модель продольно-изгибных колебаний 64	
7. Пролетная балка: учет растяжимости срединной линии	71
8. Нелинейный статический расчет конструкции на внешнее силовое воздействие	73
9. Заключение	75
Р. В. Федоренко, А. В. Лукин. Приспособляемость сосуда под давлением в условиях термоциклического нагружения	78
1. Введение	78
2. Механизмы упрочнения материала	80
3. Влияние механизма упрочнения на характер приспособляемости сосуда под давлением	82
4. Заключение	87
А. И. Доля. Колебания подкрепленной цилиндрической оболочки, сопряженной с плоской крышкой	91
1. Введение	91
2. Постановка задачи	93
3. Частоты «оболочечной» формы собственных колебаний	95
4. Частоты «пластиночной» формы собственных колебаний 98	
5. Частоты «балочной» формы собственных колебаний ...	99
6. Численное решение	99
7. Задача оптимизации	102
7.1. Постановка задачи	102
7.2. Оптимизация «пластиночной» и «оболочечной» частоты при наличии 1 шпангоута	102
8. Заключение	105

<i>П. П. Удалов, А. В. Лукин, И. А. Попов.</i> Нелинейная динамика и устойчивость движений проводящего тела в переменном магнитном поле	107
1. Введение	107
2. Математическая модель	108
3. Построение асимптотического решения	110
4. Заключение	112
<i>М. А. Ключин, С. А. Купреев, А. С. Лозовой, А. С. Путилин, А. А. Тихонов.</i> Аналитическое исследование движения гравилета	114
1. Введение	114
2. Математическая модель гравилета и основные обозначения	115
3. Аналитическое исследование уравнений движения гравилета	117
4. Обсуждение результатов	121
5. Заключение	123
<i>А. А. Черенков.</i> Временные характеристики формирования волновых фронтов в конечномерных стержнях	125
1. Введение	125
1.1. Метод Гопкинсона–Кольского	126
1.2. Линейная механика разрушения	128
1.3. Структурно-временной подход	129
2. Динамическая контактная задача	133
2.1. Одномерный случай	133
2.2. Экспериментальные данные	135
2.3. Моделирование	137
3. Динамическая задача нагружения квазиодномерного стержневого элемента	139
4. Динамическая задача разгрузки квазиодномерного стержневого элемента	141
5. Динамическая задача разгрузки системы квазиодномерных стержневых элементов	143
5.1. Стальные стержни	145
5.2. Сталь и оргстекло	147
5.3. Сталь и алюминий	149
6. Заключение	150

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников. Устойчивость равновесия двойного маятника с упругими шарнирами под действием постоянной по модулю силы	156
1. Введение	156
2. Расчетная схема и вывод уравнений движения	157
3. Действие мертвой силы, направленной по вертикали ...	163
4. Действие следящей силы, направленной вдоль второго звена	166
5. Действие следящей силы, направленной вдоль первого звена	171
6. Действие следящей силы, направленной в неподвижный шарнир	175
7. Сопоставление результатов	178
8. Заключение	179
Памяти С. Б. Филиппова (1946–2025)	181
Резюме докладов, не вошедших в сборник	183
Об авторах	186
Summaries	191
Рефераты	208

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2024–2025 гг.

*Утверждено к печати
Редакционно-издательским советом
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
и Ученым советом Института проблем машиноведения
Российской академии наук*

Корректор *Н. Б. Цветкова*

Отпечатано с готового оригинал-макета.

Подписано в печать XX.XX.2025. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Печать офсетная.

Усл.-печ. л. XX

Тираж 110. Заказ № 3240.