

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

MSC 93A30, 65K10, 49M25

## Поиск оптимального маршрута в трехмерном пространстве

М. Э. Аббасов, М. Ю. Лаврухин, А. А. Горбунова

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Аббасов М. Э., Лаврухин М. Ю., Горбунова А. А. Поиск оптимального маршрута в трехмерном пространстве // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 3. С. 318–328. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.301>

Впервые исследуется трехмерная математическая модель построения оптимальной траектории, которая была предложена и ранее рассматривалась авторами лишь для двумерного случая. Построен интегральный функционал стоимости траектории, выведено необходимое условие его минимума. Получающееся таким образом интегродифференциальное уравнение решается с помощью методов Галёркина и коллокаций. Также предложен генетический алгоритм для решения проблемы. Классические методы, основанные на необходимом условии экстремума, хорошо подходят для поиска локальных оптимумов в гладких задачах, в то время как генетический алгоритм удобен для задач, в которых точные методы недоступны: он способен выходить из локальных экстремумов и часто находит решения, близкие к глобальному оптимуму. Приводятся результаты вычислительных экспериментов. Предложены направления дальнейших исследований, связанные с улучшением численных схем и гибридизацией методов.

**Ключевые слова:** оптимальная траектория, математическое моделирование, проекционные методы, метод Галёркина, метод коллокаций, генетический алгоритм.

**1. Введение.** Проблемы поиска оптимальных в том или ином смысле траекторий является типичной задачей, возникающей в рамках гражданского строительства при проектировании прокладки дорог, железнодорожных путей, трубопроводов. К используемым для решения таких проблем методам относится *анализ стоимости расстояния* (*cost distance analysis*), используемый в географических информационных системах (ГИС) для определения оптимальных маршрутов с учетом пространственно изменяющихся затрат на перемещение. Реализация анализа стоимости расстояния осуществляется посредством специализированного программного обеспечения, такого как GRASS GIS, ArcGIS и TerrSet, которое предоставляет инструменты для построения поля накопленных затрат, определения оптимального маршрута и анали-

за коридоров. Этот метод в настоящее время один из основных для решения задач оптимизации маршрутов, позволяющий учитывать пространственную изменчивость затрат и находить наиболее эффективные пути в сложных условиях.

Анализ стоимости расстояния основывается на принципе *трения расстояния* (*friction of distance*), согласно которому перемещение сопряжено с затратами, пропорциональными пройденному расстоянию, модифицированным рядом факторов. Цель метода заключается в минимизации суммарных затрат на маршрут через создание так называемого поля затрат. При этом исследуемая область делится на подобласти, а далее строится *сетка стоимости* (*cost raster*), в которой каждой ячейке соответствует значение, характеризующее стоимость пересечения данной подобласти. Далее запускается графовый метод получения оптимальной траектории, с его помощью и получают итоговое решение. При небольшом размере сетки стоимости удается запустить алгоритм Дейкстры. Однако при попытке получения более точного решения, которое неизбежно сопряжено с ростом размерности сетки, приходится использовать эвристические модификации алгоритма Дейкстры, такие как, например,  $A^*$ ,  $D^*$ . Это связано с драматическим ростом вычислительной сложности алгоритмов полного перебора. Подробнее познакомится с основными подходами, применяемыми в ГИС, можно в работе [1].

Таким образом, получается в некотором роде противоречивая ситуация: для более точного решения можно использовать лишь эвристические алгоритмы, которые выдают, вообще говоря, лишь квазиоптимальные решения, а значит, рассчитывать на их высокую точность нельзя. Для разрешения данной проблемы в [2] был предложен новый подход, позволяющий сводить задачу поиска оптимального пути к задаче вариационного исчисления с закрепленными концами, что дало возможность применить богатый теоретический арсенал этой области, а также построить сеточный метод решения исходной задачи, который позволяет быстро находить решение с любой требуемой точностью [3]. В настоящей работе будем продолжать развивать предложенную модель, в том числе обобщая на трехмерное пространство.

Отметим, что похожие подходы развиваются и в работах других исследователей. В [4] авторы рассматривают задачу выбора траектории в период короткого навигационного периода в канадской Арктике и сводят эту проблему к задаче оптимального быстрогодействия. В [5] предлагается решать задачу многокритериальной оптимизации для получения траектории дороги, которая являлась бы компромиссом между затратами на строительство и расходом топлива автомобилей, которые будут по ней ездить.

**2. Постановка задачи и существование решения.** Рассмотрим задачу поиска оптимальной по стоимости строительства траектории, соединяющей две точки на местности. Положим, что исходная точка совпадает с началом координат. Считая, что подвоз строительных материалов осуществляется по готовому участку дороги, а сама стоимость дороги складывается из стоимости доставки строительных материалов и их укладки, рассмотрим интегральный функционал стоимости

$$J(y) = \int_0^l \alpha(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} \left( \int_0^x \sqrt{1 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau \right) dx + \\ + \int_0^l \beta(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx, \quad (1)$$

где  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, задающая траекторию дороги;  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — стоимость доставки, приходящейся на единицу длины пути (от начала координат) и объема строительных материалов, необходимых для укладки единицы длины дороги в данной точке;  $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — стоимость строительных работ за единицу длины пути в данной точке траектории.

Подробное описание вывода функционала стоимости приведено в работе [2].

Так как дорога проходит через заданные начальную и конечную точки, то должны выполняться граничные условия

$$y(0) = 0, \quad y(l) = y_l. \quad (2)$$

Предполагая рельеф местности заданным непрерывно дифференцируемой функцией  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , находим, что

$$z'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x). \quad (3)$$

Таким образом, приходим к задаче минимизации функционала (1), где  $z'(x)$  определяется (3), при выполнении граничных условий (2).

Отметим, что в [2] был построен интегральный функционал стоимости в случае, когда перепад высот на исследуемой местности незначителен. Это предположение приводило к двумерной задаче. В данной работе рассматривается более общая постановка, в рамках которой учитывается и высота, что находит отражение в появлении переменной  $z$  в функционале (1).

Опишем условия, при выполнении которых можно гарантировать существование решения полученной задачи вариационного исчисления с закрепленными концами.

**Теорема 1.** Пусть

$$\Omega_L = \{y \in \mathbb{C}_L^1[0, l], \quad y(0) = 0, \quad y(l) = y_l \mid |y'(0)| \leq L\},$$

где  $L$  — некоторая конечная константа;  $\mathbb{C}_L^1[0, l]$  — множество непрерывно дифференцируемых на  $[0, l]$  функций, производные которых удовлетворяют условию Липшица с константой  $L$ :

$$\mathbb{C}_L^1[0, l] = \{y \in \mathbb{C}^1[0, l] \mid |y'(x_1) - y'(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, l]\}.$$

Тогда задача минимизации функционала (1), где  $z'(x)$  определяется (3), при выполнении граничных условий (2) имеет решение на множестве  $\Omega_L$ .

**Доказательство.** По теореме о среднем для любой функции  $y \in \Omega_L$  и точки  $x$  из отрезка  $[0, l]$  выполняется равенство

$$y(x) = y'(x_{c_1})x, \quad x_{c_1} = \theta x, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (4)$$

Найдем оценку для модуля производной функции  $y$  в произвольной точке  $x \in [0, l]$ :

$$|y'(x)| \leq |y'(x) - y'(0)| + |y'(0)| \leq L(l + 1). \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует справедливость оценки

$$|y(x)| \leq L(l + 1) \quad \forall x \in [0, l]. \quad (6)$$

Используя (5), можем для любых  $x_1, x_2$  из  $[0, l]$  записать

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |y'(x_{c_2})| |x_1 - x_2| \leq L(l + 1) |x_1 - x_2|,$$

где  $x_{c_2} = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$ ,  $\theta \in [0, 1]$ .

Следовательно, и функция  $y$ , и ее производная удовлетворяют условию Липшица, что влечет равностепенную непрерывность семейства функций  $\Omega_L$  в норме пространства  $\mathbb{C}^1[0, l]$ . Кроме того, из (5) и (6) следует равномерная ограниченность семейства функций  $\Omega_L$  в норме того же пространства. Таким образом, множество  $\Omega_L$  удовлетворяет теореме Арцела в пространстве  $\mathbb{C}^1[0, l]$  (см. [3]) и, значит, является компактным. Легко убедиться также, что предел любой последовательности функций из  $\Omega_L$  в пространстве  $\mathbb{C}^1[0, l]$  тоже принадлежит этому множеству, потому  $\Omega_L$  компактно в себе.

Функционал  $J(y)$  непрерывно зависит от  $y$  в норме пространства  $\mathbb{C}^1[0, l]$ . Утверждение теоремы вытекает теперь из теоремы Вейерштрасса.  $\square$

**3. Необходимое условие минимума.** В дальнейшем будем предполагать, что  $\alpha = \text{const}$ . Это выполняется, например, в случае, когда технология строительства в любой точке траектории одна и та же, а значит, требуется одно и то же количество материалов для строительства в любой точке пути. При сделанном предположении можно свести функционал  $J$  к виду

$$J(y) = \frac{\alpha}{2} \left( \int_0^l \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx \right)^2 + \int_0^l \beta(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx. \quad (7)$$

Сформулируем и докажем необходимые условия минимума для этого функционала.

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi$  непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно, функция  $\beta$  непрерывна вместе со своими частными производными. Для того чтобы на кривой  $y_*(x) \in \mathbb{C}^1[0, l]$ , удовлетворяющей граничным условиям (2), достигался минимум функционала стоимости  $J$ , необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Q^2(x, y_*)} \left( \alpha \int_0^l Q(\tau, y_*) d\tau + \beta(x, y_*) \right) \cdot \left( -y_*''(x) \left( 1 + \varphi_x^2(x, y_*(x)) + \varphi_y^2(x, y_*(x)) \right) + \right. \\ & + \varphi_x(x, y_*(x)) \varphi_{yy}(x, y_*(x)) y_*'^3(x) + y_*'^2(x) \left( 2\varphi_x(x, y_*(x)) \varphi_{xy}(x, y_*(x)) - \right. \\ & - \varphi_y(x, y_*(x)) \varphi_{yy}(x, y_*(x)) + 2\varphi_x^2(x, y_*(x)) \varphi_y(x, y_*(x)) \varphi_{yy}(x, y_*(x)) \Big) + \\ & + y_*'(x) \left( \varphi_x(x, y_*(x)) \varphi_{xx}(x, y_*(x)) - 2\varphi_y(x, y_*(x)) \varphi_{xy}(x, y_*(x)) \right) - \\ & - \varphi_y(x, y_*(x)) \varphi_{xx}(x, y_*(x)) \Big) + \beta_y(x, y_*(x)) \left( 1 + \varphi_x^2(x, y_*(x)) + \right. \\ & + \varphi_x(x, y_*(x)) \varphi_y(x, y_*(x)) y_*'(x) \Big) - \beta_x(x, y_*(x)) \left( y_*'(x) + \right. \\ & + \varphi_x(x, y_*(x)) \varphi_y(x, y_*(x)) + \varphi_y^2(x, y_*(x)) y_*'(x) \Big) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$Q(x, y_*) = \sqrt{1 + y_*'^2(x) + (\varphi_x(x, y_*(x)) + \varphi_y(x, y_*(x)) y_*'(x))^2}, \quad (9)$$

$$\varphi_x(x, y_*(x)) = \frac{\partial \varphi(x, y_*(x))}{\partial x}, \quad \varphi_y(x, y_*(x)) = \frac{\partial \varphi(x, y_*(x))}{\partial y},$$

а  $\varphi_{xx}(x, y_*(x))$ ,  $\varphi_{xy}(x, y_*(x))$ ,  $\varphi_{yy}(x, y_*(x))$  — частные производные второго порядка функции  $\varphi$ .

**Доказательство.** Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию  $\delta: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , обращающуюся в нуль на концах отрезка  $[0, l]$ :

$$\delta(0) = \delta(l) = 0.$$

Пусть  $\varepsilon$  — скалярный параметр. Для того чтобы допустимая кривая  $y_*$  доставляла минимум функционалу  $J$ , необходимо [6], чтобы первая вариация функционала  $J$  была равна нулю:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(y_* + \varepsilon\delta) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Таким образом, с учетом (7) и (3), (9) получаем, что

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{\alpha}{2} \left( \int_0^l Q(x, y_* + \varepsilon\delta) dx \right)^2 + \int_0^l \beta(x, y_* + \varepsilon\delta) Q(x, y_* + \varepsilon\delta) dx \right] \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (10)$$

В дальнейшем для удобства будем опускать обозначения аргументов функций везде, где это возможно без ущерба для восприятия выкладок.

Из (10) имеем уравнение

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^l \frac{dQ(x, y_* + \varepsilon\delta)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_0^l Q(\xi, y_*) d\xi dx + \\ & + \int_0^l \left( \beta_y(x, y_*) Q(x, y_*) \delta + \beta(x, y_*) \frac{dQ(x, y_* + \varepsilon\delta)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon} \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Легко убедиться в справедливости равенства

$$\left. \frac{dQ(x, y_* + \varepsilon\delta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\sqrt{Q}} ((\varphi_x + \varphi_y y'_*) (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y'_*) \delta + (y'_* + \varphi_y (\varphi_x + \varphi_y y'_*)) \delta'),$$

подставляя которое в (11) и используя интегрирование по частям, приходим к равенству

$$\int_0^l \left( - \int_0^x f_1(\zeta) d\zeta + f_2(x) \right) \delta'(x) dx = 0, \quad (12)$$

в котором

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\alpha}{\sqrt{Q}} ((\varphi_x + \varphi_y y'_*) (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y'_*)) \left( \int_0^l Q dx \right) + \\ &+ \beta_y Q + \frac{\beta}{\sqrt{Q}} ((\varphi_x + \varphi_y y'_*) (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y'_*)), \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{Q}} (y'_* + \varphi_y (\varphi_x + \varphi_y y'_*)) \left( \int_0^l Q dx \right) + \frac{\beta}{\sqrt{Q}} \varphi_y (\varphi_x + \varphi_y y'_*).$$

В силу произвольности  $\delta(x)$ , применяя лемму Дю-Буа—Реймонда [6] к (12), приходим к условию

$$f_2(x) - \int_0^x f_1(\zeta) d\zeta = c, \quad (13)$$

где  $c = \text{const}$ . Равенство (13) есть интегральная форма необходимых условий минимума функционала  $J$ . Очевидно,  $\int_0^x f_1(\zeta) d\zeta$  — непрерывно дифференцируемая по  $x$  функция, поэтому и  $f_2(x) = c + \int_0^x f_1(\zeta) d\zeta$  непрерывно дифференцируема:

$$\frac{d}{dx} f_2(x) = f_1(x). \quad (14)$$

Подставляя в (14) выражения для  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  и проводя преобразования, приходим к (8).

Отметим, что существование второй производной функции  $y_*(x)$  является следствием непрерывной дифференцируемости функции  $f_2(x)$ .  $\square$

**4. Решение полученного интегродифференциального уравнения.** Обозначим  $L: \mathcal{L}_2[0, l] \rightarrow \mathcal{L}_2[0, l]$  интегродифференциальный оператор, который должна обращать в нуль оптимальная траектория. Тогда необходимое условие минимума (8) запишется следующим образом:

$$L(y) = 0.$$

Для решения этого уравнения применим метод Галёркина. Функцию  $y(x)$  будем искать в виде

$$y_{\mathbf{a}}(x) = \frac{y_l}{l} x + \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x), \quad (15)$$

где  $m$  — некоторое целое число, система функций  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$  такова, что множество всевозможных линейных комбинаций функций этого семейства всюду плотно в  $\mathcal{L}_2[0, l]$ , а каждая функция семейства удовлетворяет нулевым граничным условиям, т. е. для любого натурального  $k$  справедливы равенства

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0.$$

Например, можно выбрать  $\varphi_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x$  или  $\varphi_k(x) = x^k(x-l)$  (см. [7]). Необходимым и достаточным условием того, что  $L(y)$  есть нулевая функция, является равенство нулю скалярного произведения  $L(y)$  на любую функцию семейства  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ . Учитывая, что нас интересуют лишь первые  $m$  элементы семейства, приходим к системе  $m$  нелинейных уравнений, из которых определяются коэффициенты  $a_1, \dots, a_m$  разложения (15):

$$\int_0^l L(y_{\mathbf{a}}(x)) \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Используя представление (15), можно потребовать обращения в нуль  $L(y_a(x))$  в узлах

$$x_k = \frac{k}{m+1}l, \quad k = 1, \dots, m,$$

равномерной сетки на отрезке  $[0, l]$ . Тогда получаем систему

$$L(y_a(x_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Такой метод определения неизвестных коэффициентов  $a_1, \dots, a_m$  называется методом коллокаций.

**5. Генетический алгоритм для поиска оптимальной по стоимости траектории.** Предлагается метод решения задачи (1)–(3), использующий идею естественного отбора в природе. Основы таких алгоритмов, известных как генетические, были заложены в классической работе Холланда [8], которая оказала обширное влияние на развитие целого класса эволюционных методов. Генетические алгоритмы широко применяются в современных исследованиях в области многокритериального планирования маршрутов (см., например, [9]).

**5.1. Дискретизация функционала.** Для численного решения задачи оптимизации маршрута необходима дискретизация задачи. Рассмотрим в прямоугольной области  $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq y_l\}$  равномерную сетку с шагом  $\Delta$ . Каждому узлу  $(x_i, y_j)$  сетки соответствует высота  $z_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$ . Оптимальный маршрут аппроксимируется кусочно-линейной функцией, проходящей через узлы сетки, т. е. ломаной, заданной набором вершин

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\},$$

здесь  $x_m = l$ ,  $y_m = y_l$ , а  $x_0 = y_0 = 0$ . Длина звена ломаной  $[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})]$  равна

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2},$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ;  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ;  $\Delta z_i = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}) - \varphi(x_i, y_i)$ . Общая длина от начальной точки до  $k$ -й вершины ломаной есть  $s_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta s_i$ . Используя формулу трапеций, получаем дискретный аналог функционала (1):

$$J_{\text{discr}}(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \alpha_k \left( \frac{s_k + s_{k+1}}{2} \right) + \beta_k \right] \frac{\Delta s_k + \Delta s_{k+1}}{2}, \quad (16)$$

в котором  $\alpha_k = \alpha(x_k, y_k)$  и  $\beta_k = \beta(x_k, y_k)$ .

**5.2. Схема генетического алгоритма.** Для поиска оптимального маршрута, минимизирующего функционал (16), применяется генетический алгоритм. Такой подход позволяет находить решения, близкие к глобальному оптимуму, благодаря использованию эволюционных операторов, что было успешно продемонстрировано при оптимизации трехмерных траекторий на рельефе.

Рассмотрим пошаговую схему реализации генетического алгоритма.

**1. Генерация начальной популяции.** Формируется набор из  $p$  случайных ломаных, удовлетворяющих граничным условиям и без самопересечений. Для каждого маршрута  $\mathbf{r}$  вычисляется функционал  $J_{\text{discr}}(\mathbf{r})$  по формуле (16).

**2. Скрещивание (кроссинговер).** Из лучших маршрутов выбирают пары, имеющие общие узлы, в которых происходит разбиение маршрута с последующим обменом фрагментами. При этом потомки (траектории) с более высокой стоимостью отбраковываются.

**3. Мутация.** Некоторые маршруты подвергаются случайному изменению: один из узлов заменяется соседним, если это приводит к уменьшению  $J_{\text{discr}}$  и не создает самопересечений.

**4. Селекция.** Формируется новое поколение, в которое включаются лучшие маршруты, а также часть случайных маршрутов для поддержания генетического разнообразия.

**5. Критерий останова.** Алгоритм завершается либо по достижении заранее заданного числа поколений, либо при отсутствии существенного улучшения лучших маршрутов в течение нескольких итераций.

Для повышения эффективности алгоритма используются следующие приемы.

*Локальное ускорение вычислений.* При изменении маршрута пересчитывается стоимость только тех участков траектории, которые претерпели изменения; это позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

*Параллельная обработка.* Поскольку оценка функционала для каждого маршрута производится независимо, возможно применение параллельных вычислений, что особенно актуально при большом размере популяции.

*Сглаживание решения.* Полученную ломаную можно дополнительно сгладить с помощью кубических сплайнов для построения более реалистичной траектории, приближенной к реальным условиям маршрутизации.

**6. Численные эксперименты.** Рассмотрим работу методов на примере, в котором  $\varphi(x, y) = \sin 5x \sin y$ ,  $l = y_l = 1$ ,  $\alpha(x, y) = 0.1$ ,  $\beta(x, y) = 0.5$ . Вначале воспользуемся методами Галёркина [10] и коллокаций, примененными к необходимому условию минимума (8). Результаты вычислений приведены в табл. 1. Вычисления производились на компьютере с центральным процессором AMD Ryzen 5600x (6 ядер по 4.7 ГГц) и оперативной памятью размером 16 Гб, работающей на частоте 4200 МГц.

Таблица 1. Сравнение метода Галёркина и метода коллокаций

$m$	Метод Галёркина		Метод коллокаций	
	$J(y_a)$	Время, с	$J(y_a)$	Время, с
5	1.13823	0.08	1.15425	0.05
15	1.13743	0.40	1.13792	0.15
25	1.13729	0.89	1.13741	0.37

Отметим, что наилучшее в смысле значений функционала  $J$  решение, полученное методами Галёркина, коллокаций или Ритца [2], траектории практически неразличимы (рисунок, а), например при  $m = 15$  метод Галёркина приводит к траектории со стоимостью 1.13743, а метод Ритца — к траектории со стоимостью 1.13762. Различие составляет менее 0.02 %, что подтверждает высокую точность и согласованность рассматриваемых проекционных методов. Поэтому решение, найденное с помощью этих методов, имеющее наименьшую стоимость, в дальнейшем будем считать эталонным для описываемого примера.

Шаг сетки  $\Delta$  в генетическом алгоритме варьировался в диапазоне от 0.05 до 0.1, размер популяции изменялся от 4000 до 16 000 маршрутов, а число поколений не превышало 40. В одном из экспериментов, проведенных при  $\Delta = 0.1$  и популяции в 16 000 особей, алгоритм закончил работу уже на 14-м поколении, а разница стоимости  $J$  по сравнению с эталонным решением составила менее 0.5 %. Решения, полученные с помощью генетического алгоритма, приведены в табл. 2.



Таблица 2. Результаты применения генетического алгоритма

Размер популяции, число маршрутов	$\Delta$	$J_{\text{discr}}(y)$	Время, с
4000	0.05	1.22254	12.30
4000	0.10	1.16959	6.23
16 000	0.05	1.18669	46.85
16 000	0.10	1.14261	20.89

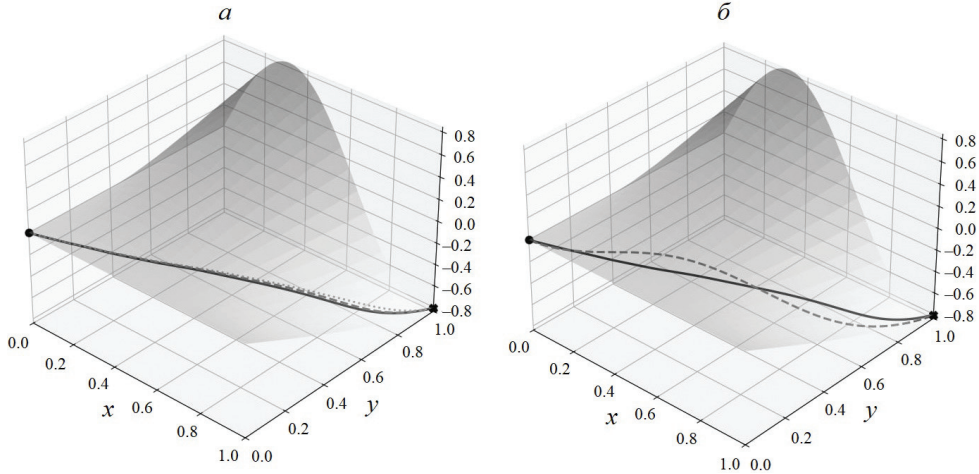


Рисунок. Полученные траектории на поверхности  $z = \varphi(x, y)$   
а — методы Ритца (сплошная линия), Галёркина (штрихпунктирная), коллокаций (точечная);  
б — методы Галёркина (сплошная линия) и генетический алгоритм (пунктирная линия).

**7. Заключение.** Была предложена трехмерная модель определения оптимальной по стоимости строительства траектории, соединяющей две заданные точки на рельефе местности. Она обобщает результаты работ [2, 3], где не учитывался перепад высот на исследуемой местности. В настоящем исследовании при дополнительных предположениях доказано существование решения для формализованной проблемы, выведено необходимое условие минимума, которое выражено в виде интегродифференциального уравнения. Продемонстрировано применение методов Галёркина и коллокаций для решения этого уравнения.

Кроме того, была разработана адаптация генетического алгоритма для минимизации функционала стоимости. Основными преимуществами предлагаемого подхода являются: возможность работы с произвольной поверхностью рельефа без ограничений на ее гладкость; эффективное использование параллельных вычислений при обработке большого числа маршрутов (вычисления по имеющимся маршрутам можно вести параллельно); гибкость алгоритма, позволяющая легко учитывать ограничения.

Перспективной, по нашему мнению, является разработка гибридных алгоритмов, сочетающих преимущества генетических и проекционных методов.

Литература

1. Bolstad P. GIS fundamentals: a first text on geographic information systems. 5<sup>th</sup> ed. White Bear Lake (MN): Eider Press, 2008. 769 p.

2. Аббасов М. Э., Шарлай А. С. Поиск стоимостно-оптимальной траектории дороги по рельефу местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 4–12. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.101>
3. Abbasov M. E., Sharlay A. S. Variational approach for finding the cost-optimal trajectory // Mathematical Models & Computer Simulations. 2024. Vol. 16. N 2. P. 293–301. <https://doi.org/10.1134/S2070048224020030>
4. Thomson N. R., Sykes J. F. Route selection through a dynamic ice field using the maximum principle // Transportation Research. Part B. 1988. Vol. 22. N 5. P. 339–356. [https://doi.org/10.1016/0191-2615\(88\)90039-2](https://doi.org/10.1016/0191-2615(88)90039-2)
5. Ayazhan A., Hare W., Lucet Y. Bi-objective optimisation for road vertical-alignment design // Computers & Operations Research. 2022. Vol. 143. Art. N 105764. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.105764>
6. Люстерник Л. А., Лаврентьев М. А. Курс вариационного исчисления. М.: ГОНТИ, 1938. 344 с.
7. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. Mineola: Dover, 2018. 487 p.
8. Holland J. H. Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975. 183 p.
9. Mansfield R. P. Applying genetic algorithms to multi-objective route planning for autonomous vehicles // Applied Artificial Intelligence. 2019. Vol. 23. N 2. P. 123–137.
10. Аббасов М. Э., Шарлай А. С. Метод поиска оптимальной по стоимости траектории дороги на поверхности местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 139–147. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.201>

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2025 г.

Статья принята к печати 17 июня 2025 г.

#### Контактная информация:

Аббасов Меджид Эльхан оглы — д-р физ.-мат. наук, доц.; <https://orcid.org/0000-0003-1484-4733>, [m.abbasov@spbu.ru](mailto:m.abbasov@spbu.ru)

Лаврухин Михаил Юрьевич — магистр; <https://orcid.org/0009-0009-4470-3991>, [michugn1342@gmail.com](mailto:michugn1342@gmail.com)

Горбунова Анна Андреевна — аспирант; <https://orcid.org/0009-0003-5676-005X>, [d-anyutik@mail.ru](mailto:d-anyutik@mail.ru)

## Optimal route search in three-dimensional space

M. E. Abbasov, M. Yu. Lavrukhin, A. A. Gorbunova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Abbasov M. E., Lavrukhin M. Yu., Gorbunova A. A. Optimal route search in three-dimensional space. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2025, vol. 21, iss. 3, pp. 318–328. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.301> (In Russian)

This paper investigates, for the first time, a three-dimensional mathematical model for constructing an optimal trajectory that had previously been studied only in the two-dimensional setting. An integral cost functional of the trajectory is formulated and a necessary condition for its minimum is derived. The resulting integro-differential equation is solved by the Galerkin and collocation methods. A genetic algorithm is also proposed. Classical methods based on necessary extremum conditions are well suited for finding local optima in smooth problems, whereas the genetic algorithm is advantageous when exact methods are unavailable: it can escape local extrema and often produces solutions close to the global optimum. Results of numerical experiments are presented, and future research directions aimed at improving numerical schemes and developing hybrid approaches are outlined.

**Keywords:** optimal trajectory, mathematical modelling, projection methods, Galerkin method, collocation method, genetic algorithm.

## References

1. Bolstad P. *GIS fundamentals: a first text on geographic information systems*. 5<sup>th</sup> ed. White Bear Lake (MN), Eider Press, 2008, 769 p.
2. Abbasov M. E., Sharlai A. S. Poisk stoimostno-optimal'noi traektorii dorogi po reliefu mestnosti [Searching for the cost-optimal road trajectory across terrain relief]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 4–12. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.101> (In Russian)
3. Abbasov M. E., Sharlay A. S. Variational approach for finding the cost-optimal trajectory. *Mathematical Models & Computer Simulations*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 293–301. <https://doi.org/10.1134/S2070048224020030>
4. Thomson N. R., Sykes J. F. Route selection through a dynamic ice field using the maximum principle. *Transportation Research. Part B*, 1988, vol. 22, no. 5, pp. 339–356. [https://doi.org/10.1016/0191-2615\(88\)90039-2](https://doi.org/10.1016/0191-2615(88)90039-2)
5. Ayazhan A., Hare W., Lucet Y. Bi-objective optimisation for road vertical-alignment design. *Computers & Operations Research*, 2022, vol. 143, art. no. 105764. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.105764>
6. Liusternik L. A., Lavrent'ev M. A. *Kurs variatsionnogo ischisleniia* [Course of calculus of variations]. Moscow, GONTI Publ., 1938, 344 p. (In Russian)
7. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Approximate methods of higher analysis*. Mineola, Dover Publ., 2018, 487 p.
8. Holland J. H. *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor, University of Michigan Press, 1975, 183 p.
9. Mansfield R. P. Applying genetic algorithms to multi-objective route planning for autonomous vehicles. *Applied Artificial Intelligence*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 123–137.
10. Abbasov M. E., Sharlai A. S. Metod poiska optimal'noi po stoimosti traektorii dorogi na poverhnosti mestnosti [Method for finding the cost-optimal road trajectory on the surface of the terrain]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 139–147. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.201> (In Russian)

Received: April 15, 2025.

Accepted: June 17, 2025.

## Authors' information:

*Majid E. Abbasov* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor;  
<https://orcid.org/0000-0003-1484-4733>, [m.abbasov@spbu.ru](mailto:m.abbasov@spbu.ru)

*Mikhail Yu. Lavrukhin* — Master; <https://orcid.org/0009-0009-4470-3991>, [michugn1342@gmail.com](mailto:michugn1342@gmail.com)

*Anna A. Gorbunova* — Postgraduate Student; <https://orcid.org/0009-0003-5676-005X>,  
[d-anyutik@mail.ru](mailto:d-anyutik@mail.ru)