

Б.Л. Павлов, А.И. Никишина, Е.Г. Давыдова

## ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Показано, что в интервале температур  $0 < T < T_0$  ( $T_0$  – температура вырождения) идеальный электронный газ распадается на два компонента: первый состоит из  $N_{oc}$  частиц, «осевших» на самых низких уровнях энергии электрона согласно принципу Паули («конденсат»), второй – из  $N_{cb}$  «свободных» частиц, имеющих химический потенциал  $\mu = 0$ . Переход частиц из второго компонента в первый трактуется как конденсация Ферми-Дирака. Предлагается модель полностью вырожденного идеального электронного газа.

**Ключевые слова:** открытые и закрытые равновесные системы, температура вырождения, двухкомпонентный вырожденный идеальный электронный газ, конденсация Ферми-Дирака

B.L. Pavlov, A.I. Nikishina, E.G. Davydova

## TWO-COMPONENT MODEL OF A DEGENERATE IDEAL ELECTRON GAS

*It is shown that in the temperature range  $0 < T < T_0$  ( $T_0$ - degeneracy temperature) ideal electron gas breaks down into two components: the first consists of  $N_{oc}$  particles "settled" on the lowest electron energy levels, according to the Pauli principle ("condensate"), the second -  $N_{cb}$  of "free" particles having a chemical potential  $\mu = 0$ . Transition of particles from second component in the first is considered as the condensation of Fermi-Dirac. It is proposed model of completely degenerate ideal electron gas.*

**Keywords:** open and closed equilibrium systems, the degeneration temperature, two-degenerate ideal electron gas, the Fermi-Dirac condensation

**Введение.** Термодинамика открытых равновесных систем (систем с переменным числом частиц  $N$ ) была впервые развита в работе [1], а её применение к различным разделам физики в [2] и, наконец, в монографии [3]. Краткое содержание монографии изложено в обзор-рецензии [4]. В этих работах показано, что условием открытости однокомпонентной системы является равенство нулю химического потенциала её частиц ( $\mu = 0$ ). Введен единственный термодинамические параметр открытой однокомпонентной системы: абсолютная температура  $T$ . Вместо таких обычных термодинамических характеристик закрытой системы, как свободная энергия  $F$ , внутренняя энергия  $U$ , энтропия  $S$ , постоянное число частиц  $N_0$ , для открытой системы введены её термодинамические характеристики, которые представляют собой объёмные плотности этих физических величин:  $P = F' = \frac{F}{V}$ ,  $U' = \frac{U}{V}$ ,  $S' = \frac{S}{V}$ ,  $N' = \frac{N}{V}$ , являющиеся функциями только одной абсолютной температуры  $T$ . В открытой системе существует только один равновесный процесс  $P = P(T)$ , связанный с изменением числа частиц в ней при изменении температуры. Получено уравнение состояния в неявной форме (последнее одновременно является и уравнением равновесного процесса, происходящего в них)

$$\frac{dP(T)}{dT} = S'(T) . \quad (1)$$

Введено понятие плотности теплоёмкости открытой системы

$$C'(T) = \frac{dU'(T)}{dT}. \quad (2)$$

Целью данной работы является подробное описание поведения вырожденного идеального электронного газа при низких температурах и при абсолютном нуле.

**Термодинамические характеристики идеального ферми-газа как закрытой системы.** Согласно [3] число квантовых состояний частицы, не имеющей спина, с модулем импульса  $p$ , движущейся в объёме куба периодичности  $V = L^3$  ( $L$  - длина ребра куба) в квазиклассическом случае для идеального газа равно:  $m^3 = V \left(\frac{p}{h}\right)^3$ .

В квазиклассическом случае [3] величина  $m$ , как и  $p$  считается непрерывной величиной, изменяющейся от 0 до  $\infty$ . Поэтому, дифференцируя это выражение, получим элементарное число квантовых состояний частицы со спином  $s$ , модулем импульса  $p$ , движущейся в объёме  $V$  куба периодичности:  $3gm^2dm = 3gVh^{-3}p^2dp$ , где  $g = 2s + 1$ . Тогда распределение Ферми-Дирака можно теперь записать в следующей дифференциальной форме [3]

$$d\bar{n}(m) = 3g \frac{m^2 dm}{\exp[(\varepsilon(m) - \mu)(kT)^{-1}] + 1}, \quad (3)$$

а термодинамические характеристики идеального ферми-газа как закрытой системы ( $\mu \neq 0$ ) можно представить так [3]

$$N_0 = \int_0^{\infty} d\bar{n}(m) = 3g \int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{\exp[(\varepsilon_1 m^2 - \mu)(kT)^{-1}] + 1}, \quad (4)$$

$$U = \int_0^{\infty} \varepsilon(m) d\bar{n}(m) = 3g\varepsilon_1 \int_0^{\infty} \frac{m^4 dm}{\exp[(\varepsilon_1 m^2 - \mu)(kT)^{-1}] + 1}, \quad (5)$$

$$\Omega = F - \mu N_0 = -PV = -3gkT \int_0^{\infty} \ln\{1 + \exp[(\mu - \varepsilon(m))(kT)^{-1}]\} m^2 dm, \quad (6)$$

где  $\varepsilon(m) = \frac{h^2 m^2}{2m_0 V^{\frac{2}{3}}}$ . В (6) произведём интегрирование по частям, получим [3]

$$\Omega = F - \mu N_0 = -PV = -2g\varepsilon_1 kT \int_0^{\infty} \frac{m^4 dm}{\exp[(\varepsilon_1 m^2 - \mu)(kT)^{-1}] + 1}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_1 = \frac{h^2}{2m_0 V^{\frac{2}{3}}}$ , а  $\Omega = -PV$  - большой термодинамический потенциал Гиббса.

Для идеального электронного газа, который также является ферми-газом, величина  $g = 2 \frac{1}{2} + 1 = 2$ .

**Определение температуры вырождения идеального электронного газа.** При понижении температуры химический потенциал идеального газа, оставаясь отрицательным, уменьшается по абсолютной величине и при некоторой температуре  $T_0$  обращается в нуль ( $\mu = 0$ ) [3]. Эта температура носит название температуры его вырождения  $T_0$ , а идеальный газ при  $T \leq T_0$  называется вырожденным. Полагая в уравнении (4)  $\mu = 0$  и  $T = T_0$ , получим для идеального электронного газа

$$N_0 = 6 \int_0^\infty \frac{m^2 dm}{\exp(\alpha_0 m^2) + 1} , \quad (8)$$

где  $\alpha_0 = \frac{h^2}{2m_0 V^3 k T_0}$ . Введём новую переменную  $x = m^2$ . Тогда согласно [5]

$$\int_0^\infty \frac{m^2 dm}{\exp(\alpha_0 m^2) + 1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\exp(\alpha_0 x) + 1} = \frac{(\sqrt{2}-1)\Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2})}{(2\alpha_0)^{\frac{3}{2}}} , \quad (9)$$

где  $\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2,612$ ,  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Подставляя (9) в (8) и решая это уравнение относительно  $T_0$ , найдём температуру вырождения идеального электронного газа

$$T_0 = \frac{h^2}{k m_0} \left\{ \frac{N_0'}{3\sqrt{\pi}(\sqrt{2}-1)\zeta(\frac{3}{2})} \right\}^{\frac{2}{3}} . \quad (10)$$

**Вычисление температуры вырождения идеального ферми-газа, состоящего из электронов.** Рассмотрим гипотетический идеальный ферми-газ, состоящий из частиц, масса которых равна массе электрона  $m_0 = m_e = 0,91 \cdot 10^{-30}$  кг, а спин  $s = \frac{1}{2}$  в единицах  $\hbar$ , т.е. газ из невзаимодействующих электронов. По определению [6] число структурных элементов (атомов, молекул, ионов и т.д.) в  $1 \text{ м}^3$  одного моля вещества, находящегося в состоянии идеального газа при нормальных условиях ( $P = 1,01325 \cdot 10^5$  Па = 760 мм рт. ст.,  $V_\mu = 2,2414 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 \text{моль}^{-1}$  есть число Лошмидта  $N_\mu = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ). Будем с помощью изохорического процесса ( $V_\mu = \text{const}$ ) в данном невырожденном идеальном электронном газе приближаться к температуре его вырождения. В этом случае  $N_0' = N_\mu$ , так как в невырожденном идеальном газе  $N_0 = \text{const}$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж К}^{-1}$ ,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$ . Подставляя в (10) все данные, получим температуру вырождения идеального электронного газа  $T_0 = 976 \text{ К}$ .

**Однокомпонентный вырожденный идеальный электронный газ.** Перепишем уравнения (4) – (7) в терминах открытых систем, учитывая, что для открытых систем (при  $T < T_0$ )  $\mu = 0$ , а  $N \rightarrow N'$ ,  $U \rightarrow U'$ ,  $F \rightarrow F'$  и  $V = V_\mu$

$$N' = 6V_\mu^{-1} \int_0^\infty \frac{m^2 dm}{\exp(\alpha m^2) + 1} , \quad (11)$$

$$U' = 6\alpha k T V_\mu^{-1} \int_0^\infty \frac{m^4 dm}{\exp(\alpha m^2) + 1} , \quad (12)$$

$$F' = -P = -4\alpha k T V_\mu^{-1} \int_0^\infty \frac{m^4 dm}{\exp(\alpha m^2) + 1} . \quad (13)$$

где  $\alpha = \frac{h^2}{2m_e V_\mu^3 k T}$ . В интеграле из (13) введём новую переменную  $x = m^2$ . Тогда согласно [5]

$$\int_0^\infty \frac{m^4 dm}{\exp(\alpha m^2) + 1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\exp(\alpha x) + 1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{2}-1} dx}{\exp(\alpha x) + 1} = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\zeta(\frac{5}{2})}{2\alpha^{\frac{5}{2}}} (1 - 2 \cdot 2^{-\frac{5}{2}}) , \quad (14)$$

где  $\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341$ ,  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ . Электроны, у которых  $\mu = 0$ , будем считать принадлежащими одному компоненту. Припишем им название «свободных». Смысл этого названия выяснится дальше. Таким образом, построена однокомпонентная модель вырожденного идеального электронного газа. Подставляя (14) в соответствующие уравнения (11) – (13), получим для вырожденного однокомпонентного идеального электронного газа

$$N_{\text{cb}}' = 3\sqrt{\pi}(\sqrt{2}-1) \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)(km_eT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}, \quad (15)$$

$$U_{\text{cb}}' = 9\sqrt{\pi}kT(2\sqrt{2}-1) \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)(km_eT)^{\frac{3}{2}}}{4h^3}, \quad (16)$$

$$F_{\text{cb}}' = -P_{\text{cb}} = -3\sqrt{\pi}kT(2\sqrt{2}-1) \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)(km_eT)^{\frac{3}{2}}}{2h^3}. \quad (17)$$

Из уравнения (15) следует, что  $\frac{N_{\text{cb}}'(T)}{N_{\text{cb}}'(T_0)} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}$ , учитывая, что  $V_\mu = \text{const}$ , а  $N(T_0) = N_0$ . Как известно [6], число структурных элементов (в нашем случае электронов) в единице количества вещества (в одном моле) есть число Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Если все идеальные газы брать в количество одного моля, то согласно закону Авогадро  $N_0 = N_A \approx 6,0 \cdot 10^{23}$ . Тогда получим следующий закон уменьшения числа «свободных» электронов в вырожденном идеальном электронном газе при понижении в нём температуры

$$N_{\text{cb}}(T) = N_A \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Можно показать, что

$$U_{\text{cb}}'(T) = \frac{3(2\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)kT}{4(\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} N_{\text{cb}}'(T). \quad (19)$$

$$P_{\text{cb}}(T) = \frac{(2\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)kT}{2(\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} N_{\text{cb}}'(T). \quad (20)$$

Уравнение (20) представляет собой уравнение состояния вырожденного идеального электронного газа, состоящего из «свободных» электронов. Очевидно, оно справедливо в интервале температур  $(0 < T \leq T_0)$ . Согласно [3] это уравнение в то же время описывает один единственный процесс в открытой равновесной системе – убыль в ней числа частиц с уменьшением в ней абсолютной температуры по закону в (18). Плотность энтропии вырожденного идеального электронного газа как открытой системы можно получить из уравнения (1)

$$S_{\text{cb}}'(T) = \frac{dP_{\text{cb}}(T)}{dT} = \frac{5(2\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)k}{4(\sqrt{2}-1)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} N_{\text{cb}}'(T), \quad (21)$$

а плотность теплоёмкости вырожденного идеального электронного газа получим, используя формулу в (2)

$$C_{\text{cb}}'(T) = \frac{dU_{\text{cb}}'(T)}{dT} = \frac{15(2\sqrt{2}-1)\zeta(\frac{5}{2})k}{8(\sqrt{2}-1)\zeta(\frac{3}{2})} N_{\text{cb}}'(T) . \quad (22)$$

**Недостатки однокомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа.** Полученный выше вырожденный идеальный электронный газ представлен только одним компонентом, состоящим из «свободных» электронов, химический потенциал которых равен нулю. Нетрудно убедиться, что все термодинамические характеристики этого компонента при абсолютном нуле обращаются в нуль:

$$N_{\text{cb}}'(0) = 0, \quad U_{\text{cb}}'(0) = 0, \quad F_{\text{cb}}'(0) = 0, \quad P_{\text{cb}}'(0) = 0, \quad S_{\text{cb}}'(0) = 0, \quad C_{\text{cb}}'(0) = 0, \quad (23)$$

Это означает, что, если вырожденный идеальный электронный газ считать однокомпонентным, то он при абсолютном нуле исчезает. Очевидно, что это просто абсурдно. Нетрудно видеть, что такие результаты получены вследствие того, что идеальный электронный газ рассматривался в квазиклассическом приближении (квантовое число  $m$  изменяется от 0 до  $\infty$ ), которое противоречит квантовой механике [3]. Введём другое приближение: а именно, будем считать, что квантовое число  $m$  является непрерывной величиной, которое изменяется уже от 1 до  $\infty$ . Такое приближение назовём квазиквантовым (как бы квантовым) [3]. При таком приближении наименьшая энергия частицы согласно (9) имеет значение  $\varepsilon_1 = \frac{h^2}{2m_0V^{\frac{3}{2}}}$ . Теперь скапливающиеся на уровне

энергии  $\varepsilon_1 \neq 0$  частицы с учётом принципа Паули уже должны вносить свой вклад в энергию и давление вырожденного идеального электронного газа. Совокупность таких частиц можно рассматривать как новый компонент этого вырожденного электронного газа («конденсат» вырожденного идеального электронного газа).

**Понятие о двухкомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа.** Следуя терминологии, развитой в работе [3], введём два компонента вырожденного идеального электронного газа: один состоит из частиц, «осевших» на самых низких уровнях энергии с учётом принципа Паули («конденсат»), другой состоит из «свободных» частиц. Этим компонентам припишем различные температуры: «конденсату»  $T = 0$ , а другому компоненту температуру  $T$ . Термодинамические характеристики компонента, состоящего из «свободных» частиц, найдены выше при квазиклассическом приближении. При рассмотрении этих компонентов в квазиквантовом приближении необходимо в уравнениях (11) – (13) производить интегрирование по квантовому числу  $m$  уже в пределах от 1 до  $\infty$ . Однако можно показать, что такое изменение пределов интегрирования не влияет на результаты, полученные ранее. Найдём химический потенциал частиц «конденсата». По определению [7]

$$\mu_{\text{oc}} = N_{\text{oc}}^{-1}(U_{\text{oc}} + P_{\text{oc}}V_{\mu}) = \varepsilon_1 + P_{\text{oc}}v_{\mu} , \quad (24)$$

где  $v_{\mu} = \frac{V_{\mu}}{N_{\text{oc}}}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{h^2}{2m_eV_{\mu}^{\frac{3}{2}}}$ . Здесь учтено, что для частиц «конденсата»  $T = 0$ . Очевидно, что

$\varepsilon_1 > 0$ ,  $P_{\text{oc}}v_{\mu} > 0$ . Следовательно, и  $\mu > 0$ , т.е.  $\mu \neq 0$ . Таким образом, «конденсат» представляет собой закрытую систему. Отметим, что в любой замкнутой закрытой термодинамической системе должен выполняться закон сохранения её частиц. В невырожденном идеальном электронном газе как закрытой системе таких частиц  $N_A$ . При переходе этого газа в вырожденный газ это число частиц должно сохраняться ввиду замкнутости термодинамической системы. Для вырожденного идеального электронного газа, состоящего только из одного компонента («свободных» частиц) этот закон не выполняется: при понижении температуры число частиц в нём уменьшается по закону (18), так как он представляет собой открытую систему. Поэтому для того, чтобы закон сохранения частиц в

замкнутой системе выполнялся и для вырожденного идеального электронного газа необходимо введение второго компонента, в который переходили бы частицы из первого компонента. Для двухкомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа этот закон сохранения частиц запишется так [3]

$$N_A = N_{oc} + N_A \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что при понижении температуры в вырожденном двухкомпонентном идеальном электронном газе происходит переход «свободных» частиц из одного компонента в другой («конденсат»). Процесс накопления фермионов на самых низких уровнях энергии с учётом принципа Паули при понижении температуры идеального электронного газа ниже его температуры вырождения  $T_0$  будем называть «конденсацией Ферми-Дирака». Это понятие было впервые введено в работе [8]. Сделаем одно важное замечание, Так как компонентам приписаны различные температуры, то между ними не может быть никакого термодинамического равновесия: химический потенциал частиц компонента, представляющего «конденсат»,  $\mu_{oc} \neq 0$ , а химический потенциал частиц компонента, состоящего из «свободных» электронов,  $\mu_{cb} = 0$ . Таким образом,  $\mu_{oc} \neq \mu_{cb}$ . Равновесное состояние между числом частиц каждого из компонентов при любой температуре из интервала температур ( $0 < T \leq T_0$ ) устанавливается с помощью закона сохранения частиц в замкнутой системе (уравнение (25)).

**Понятия граничного квантового числа, граничной энергии и граничного импульса для «конденсата».** Отметим, что самый нижний уровень энергии фермиона согласно квазикvantовому приближению  $\varepsilon_1 \neq 0$ . Согласно принципу Паули при абсолютном нуле все  $N_A$  фермионов полностью заполняют все нижние состояния (в каждом состоянии только один фермион) от  $m = 1$  до некоторого граничного значения  $m_F$  в случае квазикvantового приближения. Согласно [3] для идеального ферми-газа это математически запишется так

$$N_A = 3g \int_1^{m_F} m^2 dm, \quad (26)$$

где для электронов  $g = 2$ . После интегрирования получим:  $N_A = 2(m_F^3 - 1) \approx 2m_F^3$ . Из этого уравнения находим значение граничного квантового числа  $m_F$  или квантовое число Ферми для идеального электронного газа при абсолютном нуле

$$m_F = \left( \frac{N_A}{2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (27)$$

Впервые понятие граничного квантового числа для идеального ферми-газа при абсолютном нуле  $m_F = \left( \frac{N_A}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$  было введено в работе [9]. Тогда граничная энергия или энергия Ферми для идеального электронного газа, находящемся при абсолютном нуле. Равна

$$\varepsilon_F = \varepsilon(m_F) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{N_A}{2V_\mu} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (28)$$

Величина

$$p_F = (2m_e \varepsilon_F)^{1/2} = \hbar \left( \frac{N_A}{2V_\mu} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (29)$$

носит название граничного импульса или ферми-импульса идеального электронного газа при абсолютном нуле.

**Термодинамические характеристики «конденсата».** Пусть в вырожденном идеальном электронном газе на самых низких уровнях энергии согласно принципу Паули

при данной температуре  $T$  ( $T < T_0$ ) «осели»  $N_{oc}$  электронов. Тогда внутренняя энергия «конденсата» из этих частиц

$$U_{oc} = 6 \int_1^{m_{oc}} \varepsilon(m) m^2 = \frac{3 \frac{h^2}{2}}{m_e V_\mu^3} \int_1^{m_{oc}} m^4 dm, \quad (30)$$

где в соответствии с (27)  $m_{oc} = \left(\frac{N_{oc}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

Интегрируя выражение в (30), получим внутреннюю энергию «конденсата»

$$U_{oc} = \frac{3 \frac{h^2}{2}}{5 m_e V_\mu^3} (m_{oc}^5 - 1) \approx \frac{3 h^2 m_{oc}^5}{5 m_e V_\mu^3} = \frac{3 \frac{h^2}{2}}{5 m_e V_\mu^3} \left(\frac{N_{oc}}{2}\right)^{\frac{5}{3}}. \quad (31)$$

В монографии [3] впервые введено «термодинамическое определение» числа степеней свободы частицы или квазичастицы

$$i = \frac{2U}{PV}, \quad i = \frac{2U'}{P}. \quad (32)$$

В (32) первое уравнение относится к закрытой системе (системе с постоянным числом частиц или квазичастиц,  $\mu \neq 0$ ), а второе к открытой системе (системе с переменным числом частиц или квазичастиц,  $\mu = 0$ ). Учитывая, что электроны рассматриваются как некоторые материальные точки (частицы), для которых число степеней свободы  $i = 3$ , из (32) следует, что

$$P_{oc} = \frac{2U_{oc}}{i V_\mu} = \frac{2}{3} \frac{U_{oc}}{V_\mu}. \quad (33)$$

Следовательно,

$$P_{oc} = \text{const} \cdot N_{oc}^{\frac{5}{3}}, \quad (34)$$

где  $\text{const} = \frac{h^2}{5 \cdot 2^3 m_e V_\mu^3}^{\frac{2}{5}}$ . Выражение (34) является уравнением состояния «конденсата». В

частности, когда компонент, состоящий из электронов, у которых химический потенциал  $\mu_{\text{св}} = 0$ , имеет температуру  $T = 0$ , давление  $P_{\text{св}} = 0$ , а давление «конденсата» достигает максимального значения  $P_{oc} = \text{const} \cdot N_A^{\frac{5}{3}}$ . Подставляя в уравнение (24) значения  $U_{oc}$  и  $P_{oc}$ , и учитывая, что для «осевших» электронов  $T = 0$ , найдём химический потенциал электронов «конденсата»

$$\mu_{oc} = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{N_{oc}}{2 V_\mu}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (35)$$

При абсолютном нуле  $N_{oc} = N_A$  и, следовательно,  $\mu_{oc} = \varepsilon_F$ .

Для нахождения энтропии «конденсата»  $S_{oc}$  воспользуемся её статистическим определением, которое было дано Больцманом:  $S_{oc} = k \ln W_{oc}$ , где  $W_{oc}$  - термодинамическая вероятность, представляющая собой число микросостояний, с помощью которых может быть осуществлено данное макросостояние. В случае статистики Ферми-Дирака по принципу Паули в одном квантовом состоянии не может быть больше одной частицы. Тогда число возможных различных перестановок  $N_{oc}$  частиц по  $m_{oc}$  квантовым состояниям будет [10]

$$W_{oc} = \frac{m_{oc}!}{(m_{oc} - N_{oc})! N_{oc}!}. \quad (36)$$

Учитывая, что  $m_{oc} = N_{oc}$  (все квантовые уровни заняты электронами), а также, что  $(m_{oc} - N_{oc})! = 0! = 1$ , получим  $W_{oc} = 1$ , а, следовательно, и  $S_{oc} = 0$ .

В «конденсате» как закрытой системе можно ввести понятие теплоёмкости при данном изопроцессе [3]. Следовательно, можно ввести теплоёмкости при постоянном объёме и при постоянном давлении:  $(C_{oc})_{V_m} = \left(\frac{\partial U_{oc}}{\partial T}\right)_{V_m}$ ,  $(C_{oc})_{P_{oc}} = \left(\frac{\partial U_{oc}}{\partial T}\right)_{P_{oc}}$ . Но внутренняя энергия «конденсата» не зависит от температуры  $T$ , поэтому  $(C_{oc})_{V_m} = 0$  и  $(C_{oc})_{P_{oc}} = 0$ .

Общее давление вырожденного идеального электронного газа складывается из давлений, создаваемых каждым из двух компонентов:  $P(T) = P_{oc} + P_{cb}(T)$ .

При  $T = T_0$  имеем  $P = P_{cb}$  (вырожденный идеальный электронный газ состоит только из «свободных» электронов), а при  $T = 0$  имеем  $P = P_{oc}$  (вырожденный идеальный электронный газ представляет собой только «конденсат»).

**Полностью вырожденный идеальный электронный газ.** При абсолютном нуле вырожденный идеальный электронный газ превращается в однокомпонентную закрытую систему, состоящую только из «конденсата», так как компонент, состоящий из «свободных» электронов исчезает. Такой газ можно назвать полностью вырожденным. Очевидно, что внутренняя энергия его и давление, если считать, что объём  $V$  его изменяется в интервале  $(0 < V \leq V_m)$ , будут соответственно

$$U(V) = \frac{3 h^2}{5 m_e V^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{N_A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}, \quad P(V) = \frac{2 h^2}{5 m_e V^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{N_A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}. \quad (37)$$

Второе уравнение в (37) можно переписать так:  $P V^{\frac{5}{3}} = \text{const}$ , где  $\text{const} = \frac{2 h^2}{5 m_e} \left(\frac{N_A}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ . Оно описывает уравнение состояния полностью вырожденного идеального электронного газа. Это же уравнение описывает также и единственный процесс, который можно в нём осуществить - изотермическое ( $T = 0$ ) сжатие «конденсата» ( $0 < V \leq V_m$ ). Нетрудно показать, что химический потенциал полностью вырожденного идеального электронного газа:  $\mu = \frac{h^2}{2 m_e} \left(\frac{N_A}{2 V}\right)^{\frac{2}{3}}$ . Очевидно, что для полностью вырожденного идеального электронного газа  $S = 0$ ,  $C_V = C_P = 0$ .

**Критические замечания.** Отметим, что теория вырожденного идеального электронного газа в работе [7] отсутствует. Не введено точного значения температуры вырождения идеального электронного газа, дано лишь приближённое её определение:  $T_0 \approx \varepsilon_F k^{-1}$ . Отсутствует понятие «конденсации Ферми-Дирака» как единственного равновесного процесса, который происходит в вырожденном идеальном электронном газе при понижении его температуры. Авторы рассматривают идеальный электронный газ при низких температурах как закрытую систему, т.е. как невырожденный идеальный газ. Поэтому приходят к неправильному выводу, что при низких температурах теплоёмкость при постоянном объёме идеального электронного газа пропорциональна абсолютной температуре. В открытой системе следует рассматривать только плотность теплоёмкости вырожденного идеального электронного газа, которая пропорциональна  $T^{\frac{3}{2}}$ .

**Заключение.** Найдена температура вырождения идеального электронного газа. Построена модель двухкомпонентного вырожденного идеального электронного газа, на основе которой объяснено явление конденсации Ферми-Дирака. Предложена модель полностью вырожденного идеального электронного газа. Сделаны некоторые критические замечания по современной теории вырожденного идеального электронного газа.

## Список литературы

1. Павлов Б.Л., Белко В.Н. Уравнение состояния открытых систем. Воронеж. гос. инженер.-строит. институт. // Воронеж, 1993. 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.06.93, № 1792 – В93.
2. Павлов Б.Л., Белко В.Н. К теории открытых систем. // Воронеж. гос. архит.-строит. университет. – Физико-химические проблемы и высокие технологии строительного материаловедения. – Научный вестник. - № 5. – Воронеж, 2012. – С. 33 -37.
3. Павлов Б.Л., Белко В.Н. Теория открытых равновесных систем и её применение в физике. Монография // Воронеж. гос. архит.-строит. университет. – Воронеж, 2015. – 138 с.
4. Давыдова Е.Г. Обзор-рецензия монографии Б.Л. Павлова, В.Н. Белко «Теория открытых равновесных систем и её применение в физике» // Воронеж. гос. архит.-строит. университет. – Физико-химические проблемы и высокие технологии строительного материаловедения. – Научный вестник. – Выпуск № 2(11). – Воронеж, 2015. – С. 128 -131.
5. Двайт В.Г. Таблицы интегралов и других математических формул. – М.: Наука, 1983. – 172 с
6. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 928 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Статистическая физика. – Т. V. – Ч. I. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 616 с.
8. Павлов Б.Л., Белко В.Н. О конденсации Ферми-Дирака в идеальном ферми-газе // Воронеж. гос. технологическая академия. – Вестник ВГТА. – № 4. – Воронеж, 2000. – С. 92.
9. Павлов Б.Л., Белко В.Н. Двухкомпонентная модель вырожденного идеального ферми-газа, состоящего из частиц // Воронеж. гос. архит.-строит. университет. – Воронеж, 2012. – Деп. в ВИНИТИ 10.08.2012, № 334 – В2012.
10. Ноздрёв, В.Ф., Сенкевич А.А. Курс статистической физики. – М.: Высшая школа, 1965. – 288 с.

---

**Павлов Борис Леонидович** – ассистент кафедры физики Воронежского государственного университета инженерных технологий. Тел. (473)2538054, E-mail: borispavlovvrn@gmail.com

**Никишина Анна Игоревна** – к.ф.-м.н., доцент кафедры физики Воронежского государственного технического университета. Тел.(473)2715004, E-mail: ann-nikishina@yandex.ru

**Давыдова Екатерина Геннадьевна** – к.х.н., доцент кафедры химии Воронежского государственного технического университета. Тел.8(950)772-85-02, E-mail: eg\_@vgsu.vrn.ruann-nikishina@yandex.ru