ВМСППС’2025

МАТЕРИАЛЫ XXIV МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И СОВРЕМЕННЫМ ПРИКЛАДНЫМ ПРОГРАММНЫМ СИСТЕМАМ

Посвящается 95-летию МАИ

МАТЕРИАЛЫ XXIV МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И СОВРЕМЕННЫМ ПРИКЛАДНЫМ ПРОГРАММНЫМ СИСТЕМАМ

ВМСППС’2025

7–13 сентября 2025 г.
Алушта, Крым

Dedicated to 95th anniversary of MAI

PROCEEDINGS
OF THE XXIV INTERNATIONAL CONFERENCE
ON COMPUTATIONAL MECHANICS
AND MODERN APPLIED SOFTWARE SYSTEMS

CMMASS'2025

7–13 September, 2025
Alushta , Crimea

УДК 519.6:517.958:533.6
ББК 22.2:2218
М34

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)

М34 **Материалы XXIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), 7–13 сентября 2025 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2025. — 372 с.: ил.**

ISBN 978-5-4316-1290-9

Сборник включает в себя научные работы, отражающие современные мировые достижения в вычислительной механике, механике деформируемого твердого тела, механике жидкости, газа и плазмы, аэрокосмической механике, прикладной математике, разработке прикладных программных средств.

Для специалистов в области прикладной математики и механики, математического моделирования, информационных технологий, разработчиков современных прикладных программных систем, аспирантов и студентов старших курсов технических вузов.

Материалы XXIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), 7–13 сентября 2025 г., Алушта

Дизайн и компьютерная верстка *Ал. А. Пярнпуу*

Подписано в печать 27.08.2025. Формат 70 × 100 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 30,22
Тираж 400 экз. Изд. №1422. Заказ № .

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ООО «Компания АРТИШОК»,
125362, Москва, Волоколамское шоссе, д. 116, стр. 2, e-mail: info@artishok.ru

ISBN 978-5-4316-1290-9

© Московский авиационный институт
(национальный исследовательский
университет), 2025

Посвящается 95-летию МАИ

XXIV МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И СОВРЕМЕННЫМ ПРИКЛАДНЫМ ПРОГРАММНЫМ СИСТЕМАМ

ВМСППС'2025

7–13 сентября 2025 г.
Алушта, Крым

Сборник включает в себя материалы Двадцать четвертой Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), которая будет проводиться с 7 по 13 сентября 2025 г. на базе Оздоровительно-учебного центра МАИ «Алушта» и Эко-отеля «Алые паруса» в Республике Крым.

Конференция посвящена 95-летию Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Целью конференции является обсуждение актуальных проблем вычислительной механики, современных прикладных программных систем, проблем параллельных вычислений, перспективных численных методов и разнообразных аспектов применения ЭВМ для решения задач механики деформируемого твердого тела, механики жидкости, газа и плазмы, аэрокосмической механики, наномеханики и других прикладных задач. Будут рассмотрены проблемы информационной поддержки приложений и баз данных, обсуждаются средства обработки и визуализации результатов вычислительных экспериментов и новые достижения, полученные в ходе конкретных исследований.

Материалы конференции публикуются в журналах, указанных в перечне российских рецензируемых научных журналов ВАК: «Известия РАН. Механика жидкости и газа», «Математическое моделирование» РАН, «Вестник МАИ», «Труды МАИ» и «Физико-химическая кинетика в газовой динамике».

Организаторы конференции:

- Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
- Российская академия наук
- Министерство науки и высшего образования РФ
- Российский Национальный комитет по теоретической и прикладной механике

Оргкомитет конференции

Сопредседатели: Горячева И. Г., Левин В. А., Тишкин В. Ф.

Заместитель председателя: Крылов С. С.

Ученый секретарь: Пярнпуу Ал. А.

Программный комитет конференции:

Алифанов О. М., Бабешко В. А., Баженов В. Г., Бакулин В. Н., Бардин Б. С., Гайфуллин А. М., Георгиевский Д. В., Гидаспов В. Ю., Голуб В. В., Губайдуллин Д. А., Егоров И. В., Зимин В. Н., Иванов А. В., Иванов М. Я., Калинчук В. В., Каляев И. А., Колесник С. А., Липанов А. М., Марков В. В., Матвеенко В. П., Никитин И. С., Павленко А. Н., Паймушин В. Н., Петров Ю. В., Петухов В. Г., Попов Г. А., Равикович Ю. А., Ребров А. К., Ревизников Д. Л., Суржиков С. Т., Сыпало К. И., Фомин В. М., Чернышев С. Л., Четверушкин Б. Н., Шахматов Е. В., Якуш С. Е.

Члены оргкомитета:

Бирюков В. И., Бишаев А. М., Бошенятов Б. В., Булакина М. Б., Булычев Н. А., Гидаспов В. Ю., Димитриенко Ю. И., Иванов И. Э., Замковой А. А., Каледин В. О., Крылов С. С., Кузнецов Е. Б., Лукин В. Н., Морозов А. Ю., Острик А. В., Панов Ю. Н., Ревизников Д. Л., Рыжков С. В., Северина Н. С., Сембиев О. З., Стрижак С. В., Чекмарев Д. Т., Чернышев Л. Н., Шешенин С. В.

Технический комитет конференции:

Абгарян В. К., Акмаева В. Н., Гидаспов В. Ю., Демидова О. Л., Коробовский А. В., Морозов А. Ю., Пярнпуу Ал. А., Северина Н. С., Селиванова О. С., Терехов И. В., Филиппова А. С.

Научные направления конференции

A. Теория и практика современного моделирования. Высокопроизводительные вычисления

B. Информационные технологии: базы и хранилища данных, методы искусственного интеллекта, нейронные сети, обработка изображений*

C. Общая механика, механика деформируемого твердого тела. Прочность, разрушение и безопасность конструкций

D. Механика жидкости, газа и плазмы

E. Общие проблемы и модели механики сплошных сред на разных масштабных уровнях

F. Классическая и небесная механика, мехатроника, биомеханика

G. Задачи теории управления и оптимизации

H. Аэрокосмическая механика. Проблемы создания и эксплуатации аэрокосмической техники

I. Образовательные технологии в аэрокосмической отрасли

И. Г. Горячева, В. А. Левин, В. Ф. Тишкин

*Проводится в рамках исполнения обязательств МАИ по договору от 04.06.2025 №70-2025-000814 с АНО «Аналитический центр при Правительстве Российской Федерации».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Секция А
Теория и практика современного моделирования. Высокопроизводительные вычисления

Быков Н.В., Костров М.А., Власова Н.С. Стратегии перестроения автономных транспортных средств и социальные дилеммы в смешанном трафике: моделирование на основе клеточных автоматов 15

Быков Н.В., Шайкин Д.В. Численное моделирование формирования волны разрежения в дискретной нелинейной системе оптических волноводов 17

Глазырина О.В., Глазырина Л.Л. О сходимости явной разностной схемы для вариационного неравенства с двойным вырождением и нелокальным пространственным оператором 19

Гришин Ю.А., Гришин О.А., Зенкин В.А., Бакулин В.Н. К учету диссипативных процессов при расчете нестационарного течения в трубах 21

Громов В.А., Томащук К.К. Численный метод бифуркационного анализа для нелинейных уравнений в частных производных 23

Ереев М.Н., Лонин К.А., Патрушев В.Л., Савчук Д.В., Соловьев С.А. Особенности верификации и аттестации программных средств моделирования динамики роторных систем 25

Колесник С.А., Новиков А.С., Тушавин Н.А. Определение тепловых потоков на границе композиционных материалов на основе решения обратной задачи 27

Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Внутренняя оценка информационного множества интервальной задачи параметрической идентификации динамических систем 28

Николаев В.Н. Математическое моделирование обледенения крыла самолета 30

Пантелеев К.А., Попов А.С. Оценка безопасности полетов беспилотных воздушных судов при интеграции в единое воздушное пространство: современные вызовы и перспективы 32

Статников И.Н., Фирсов Г.И. Исследование динамики виброударной системы методом планируемого вычислительного эксперимента 33

Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Исследование теплопереноса в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой на основе аналитического решения 36

Секция В
Информационные технологии: базы и хранилища данных, методы искусственного интеллекта, нейронные сети, обработка информации

Варыгин Р.А., Ухов П.А. Реализация алгоритма Visual SLAM для автономной навигации беспилотных летательных аппаратов 37

Гавриков Б.М., Пестрякова Н.В. Нахождение области локализации онкопатологии по анализу периферической крови 39

Гречников Ф.В., Клентак А.С., Пиунов В.Н., Ушаков В.И. Разработка модели машинного обучения для прогнозирования уровня потенциала инновационного развития территорий 41

Елистратова П.А., Ухов П.А. Улучшение алгоритма автономной навигации за счет использования нейросети для выделения ключевых точек 43
Жарова А.А., Виноградов В.И. Современные подходы к суммаризации научных текстов 45
Желонкин М.В., Желонкин В.И., Кадильникова Е.Н., Ковтун С.А. Информационная поддержка летчика при попадании в сложные пространственные положения . 46
Кудрявцева И.А., Первухин А.С. Решение задачи обнаружения аномалий и прогнозирования для временных рядов 48
Лисовский О.Р. Тестирование создания виртуальных машин с различными параметрами процессора на серверных гипервизорах 50
Литовченко А.А., Третьякова О.Н. Реализация альфа-версии базы данных для автоматизированной системы учета деятельности объектов по заданным критериям . . 52
Ольшанский А.М. О некоторых подходах к автоматизации нейросетевого построения расписаний 53
Псеунов Д.Р., Алексейчук А.С. Применение алгоритмов машинного обучения для классификации сердечно-сосудистых заболеваний по сигналам электрокардиограммы 55
Романова И.А. Сравнительный анализ фреймворков больших данных: Hadoop, Spark и Flink 56
Сеимов М.С., Крылов С.С., Филиппов Г.С. Компьютерное моделирование работы периферийных устройств механизмов и роботов 58
Сеченых П.А. Средства анализа, структуризации и агрегации данных для формирования доменной модели ресурсоемких приложений 60
Скурихин Г.О. Применение Elasticsearch для обработки и поиска данных в распределенных информационных системах 61
Солдатов В.А., Ухов П.А. Прогнозирование длительности испытаний полимерных композиционных материалов при циклическом нагружении растяжением с использованием машинного обучения 63
Татаренко М.Н. Оптимизация генерации персонализированных тренировочных программ с использованием методов линейного программирования 64
Титеев А.М. Автоматическая генерация устойчивых локаторов Playwright для Page Object Model с использованием LLM на основе сравнительного анализа HTML . . . 66

Секция C
Общая механика, механика деформируемого твердого тела. Прочность, разрушение и безопасность конструкций

Абу Даввас Я., Трофимов В.В., Чекмарев Д.Т. О погрешностях спектров численных схем МКЭ решения задач теории упругости 68
Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. Реализация опыта на простой сдвиг для песчаного грунта 69
Бабешко В.А., Мухин А.С., Бабешко О.М. Решение системы двумерных интегральных уравнений Винера–Хопфа в прямоугольном клине с функционально-коммутативным символом ядра 71
Бабешко В.А., Мухин А.С., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Зарецкий А.Г. О влиянии вибрации штампа на возможность локализации напряжений в зоне контакта 73
Бакулин В.Н. Подход для получения аппроксимаций при создании модели для исследования напряженно-деформированного состояния в слое заполнителя трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами 76

Бакулин В.Н. Тестирование модели, построенной на основе эффективных аппроксимаций для исследования напряженно-деформированного состояния в несущих слоях трехслойных оболочек с прямоугольными вырезами 78
Бакулин В.Н., Борзых С.В., Бычков Р.С. Динамика процесса посадки лунного взлетно-посадочного комплекса на участке со сложным рельефом 80
Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Языков И.Г., Гришин Ю.А. Аэроупругая устойчивость ортотропной слоистой оболочки, подкрепленной заполнителем и днищем, при обтекании сверхзвуковым потоком газа 82
Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Языков И.Г., Гришин Ю.А. Аэроупругая устойчивость трехслойной оболочки, подкрепленной заполнителем, при обтекании сверхзвуковым потоком газа 85
Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Черных В.Д. Разработка перспективных подходов и методов к решению проблем высокоточного прогнозирования определяющих характеристик композитов в экстремальных условиях 87
Бакулин В.Н., Марков В.Г., Шуховцов Д.В. О выборе амплитуды вынужденных колебаний при проведении динамических испытаний моделей летательных аппаратов для определения производных демпфирования 89
Бочарова О.В., Анджикович И.Е., Турчин А.С. Об одном методе распознавания неоднородностей в композиционных материалах 91
Веремейчик А.И., Онысько С.Р., Сазонов М.И., Хвисевич В.М., Хеук М.В., Аббасов К.Т., Ярмак М.А. Исследование механических характеристик образцов из стали Х12МФ после поверхностного плазменного упрочнения 92
Веремейчик А.И., Холодарь Б.Г. Влияние радиуса пятна нагрева на температурное поле при закалке сканирующим лазерным излучением 95
Виленский О.Ю., Лапшин Д.А., Пичков С.Н. Разработка методологии для обоснования прочности и целостности упаковок для хранения отработавшего ядерного топлива 98
Гусев Е.Л., Петрова П.Н., Гоголева О.В. Математические методы прогнозирования долговечности новых перспективных композиционных материалов в экстремальных условиях 100
Дедова Д.В., Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н. Верификация конечно-элементной модели трехслойной сотовой панели с обшивками из полимерных композитов на основе экспериментальных данных 102
Евдокимова О.В., Телятников И.С., Лозовой В.В., Плужник А.В., Уафа Г.Н. О контактной задаче с системой деформируемых штампов 104
Ереев М.Н., Ершова М.И., Козин А.В., Круглов М.С. Методология численных исследований поврежденности оборудования транспортных РУ 106
Кержаев А.П., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Власов Д.А. Полоса с двумя соосными трещинами 109
Кибец А.И. Применение монитонизатора конечно-элементного решения 3d-задач нелинейной динамики конструкций для подавления мод нулевой энергии 111
Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Неизотермическое вязкопластическое течение материала в круглой трубе при наличии слоя смазки 112
Корнев Ю.В., Валиев Х.Х., Молчанов С.П., Самусенко С.О., Чернышов С.В., Власов А.Н., Карнет Ю.Н. Сканирующая зондовая микроскопия композитов синтетического каучука с полиэтиленом 114
Меньшова И.В., Коваленко М.Д., Кержаев А.П., Власов Д.А. Напряжения и перемещения в полосе с остаточными напряжениями и в полосе с трещиной 116

Морев П.Г., Маркин А.А. Регуляризация закона сухого трения в контактных задачах механики 119
Никитин И.С., Голубев В.И., Никитин А.Д., Стратула Б.А. О моделировании усталостной прочности и долговечности изделий, полученных методом селективного лазерного плавления 120
Николаев А.П., Клочков Ю.В., Кирсанова Н.А., Вахнина О.В., Клочков М.Ю. Трехпольный конечно-элементный алгоритм оболочки при упруго-нелинейном деформировании 122
Острик А.В., Ахметова М.А., Николаев Д.Н. Построение полиморфных уравнений состояния диоксида кремния с использованием степенных потенциалов 124
Паймушин В.Н., Шишкин В.М. Модель деформирования стержня-полосы, соединенного с жестким опорным элементом через упругую прослойку конечной длины . 127
Седова Д.В., Трофимов В.В., Чекмарев Д.Т. Верификация моментного конечного элемента решения трехмерных задач теории упругости 129
Сейранян С.П. О непрерывном примыкании к граничным условиям решения задачи о поперечном двоякосимметричном изгибе прямоугольной защемленной по контуру пластины 130
Соколов Г.П., Чехонин К.А. Моделирование остаточных напряжений при лазерном выращивании слоя алюминиевого сплава 133
Сотский М.Ю., Велданов В.А., Гелин Д.В., Колпаков В.И., Лысов Д.А., Марков В.А. Установка и способ для моделирования процесса эволюции формы сегмента при его метании 134
Стрелков К.С. Аналитическая оценка ползучести в уплотнительном узле премиального резьбового соединения 136
Терешин В.А. Приближенный расчет ударных спектров 139
Трофимов В.В., Чекмарев Д.Т. Численное решение динамических задач теории упругости с использованием гибридных методик на базе явных и неявных схем 141
Хан Т.А., Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Анализ устойчивости конструктивно анизотропных композитных панелей летательных аппаратов с учетом деформаций поперечного сдвига на основе уточненной теории 142
Чертова Н.В. Волновые процессы на границе раздела упругого тела с вязкой жидкостью 144
Шешенин С.В., Клементьев П.Д., Артамонова Н.Б. Анализ диаграммы напряжение–деформация для пористых материалов 147

Секция D
Механика жидкости, газа и плазмы

Абгарян М.В., Бишаев А.М. Численное моделирование исходящей из стационарного плазменного двигателя плазменной струи. Полностью кинетическое описание 150
Алексанина М.Г., Чернышова М.М. Исследование атмосферных вихревых цепочек над о. Чеджу по данным японского геостационарного спутника HIMAWARI-8 152
Алексеев А.К. Об вычислительно экономичном расчете многомерных интегралов с помощью канонического разложения 154
Антонов Д.В., Высокоморная О.В., Стрижак П.А. Микро-взрывная фрагментация водотопливных капель на основе керосина 156
Антюхов И.В. Моделирование процесса захолаживания участка горизонтальной магистрали 159

Архипов В.А., Золоторев Н.Н., Перфильева К.Г., Матвиенко О.В. Влияние турбулентного переноса капель на эффективность тушения пожаров с использованием БПЛА 160
Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н., Ефремов М.А. Течение степенной жидкости в смесителях различных конфигураций 162
Борисов С.А., Добровольский С.В., Глуховская Ю.И., Мякочин А.С., Подпорин И.В. Моделирование эрозии трубопровода и наращивания стенок в критических областях с использованием CAD/CAE-систем 164
Гидаспов В.Ю., Денисов М.Д., Кули-заде Ф.Т. Особенности расчета термодинамических свойств метана с использованием единого уравнения состояния. Кривая насыщения 166
Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А. Изоэнтропическое расширение парожидкостного метана 168
Гидаспов В.Ю., Северина Н.С. Задача о распаде разрыва в парожидкостном метане 170
Гимаева Н.Р., Миньков Л.Л. Моделирование газодинамических процессов в энергетических устройствах со сложной геометрией заряда твердого топлива 172
Гладков С.О., Нагибин Н.С. Коэффициент лобового сопротивления как главная синергетическая характеристика хорошо обтекаемого тела 174
Глазков С.А., Горбушин А.Р., Грибкова М.С., Дугин Д.И., Епихин А.Д., Козик А.Е., Крапивина Е.А., Мошаров В.Е., Радченко В.Н. Нестационарное обтекание острого конуса в трубе Людвига — тестовый случай 176
Градов Б.В., Пролетарский А.В. Моделирование термодинамического состояния разрядной плазмы в задачах управления параметрами электрического контура с плазменной нагрузкой 178
Градов В.М. Моделирование развития во времени спектров излучения импульсных разрядов в инертных газах 180
Градов В.М. Моделирование состояния плазмы в режимах «светового котла» 182
Гришин Ю.А., Гришин О.А., Бакулин В.Н. Характеристики и режимы течения в клапанных системах 185
Дворник М.И., Чехонин К.А. Экспериментальное и численное исследования получения дисперсных частиц сплава WC–TiC–Co методом электроэрозионного диспергирования 187
Зуев Ю.В. Закономерности изменения компонентного состава капель вследствие их столкновений в газокапельной турбулентной струе 189
Керимбекова С.А., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогрев и испарение неоднородных капель суспензий с твердыми нерастворимыми примесями 191
Криворучко Д.А., Нигматзянов В.В., Скрылёв А.В. Современные тенденции в разработке и применении электроракетных двигателей типа электроспрей 193
Крюков И.А., Иванов И.Э. Вычислительные аспекты моделирования газодисперсных течений 194
Маламанов С.Ю. Численное моделирование МГД-течения в цилиндрическом канале 196
Марков А.А. Влияние тепловой дисперсии на спиновое горение 198
Молчанов А.М., Фролова Ю.В. Метод расчета эмиссионных характеристик неравновесного углеродосодержащего газа 201
Никонов А.М., Харченко Н.А. Исследование влияния механизмов химической кинетики горения водородно-воздушной смеси на параметры течения в расширяющемся канале с клиновидным телом 204

Носенко Н.А., Харченко Н.А. Численное исследование влияния эффектов сжимаемости на газодинамические параметры в сверхзвуковых горячих струйных течениях с использованием двухпараметрической RANS-модели турбулентности k–kL MEAH . 206
Острик А.В., Гидаспов В.Ю., Ким В.В., Иванов И.Э., Крюков И.А. Срыв детонации водородно-воздушной смеси в контайменте АЭС завесами из водяного пара . . . 208
Потапов И.И., Решетникова О.В. Решение задачи об осаждении твердой частицы в вязкой несжимаемой жидкости методом WCSPH 210
Потапов И.И., Силакова Ю.Г. Анализ причин разрушения переливной запруды протоки Пензенская реки Амур 211
Ревизников Д.Л., Способин А.В. Расширение спектра применения и совершенствование бессеточного метода численного моделирования сверхзвукового обтекания тел 212
Рулева Л.Б., Солодовников С.И. Тлеющий разряд на встречных электродах 213
Саламатин А.А., Халиуллина А.С. Вязкостное пальцеобразование на начальном этапе процесса сверхкритической флюидной экстракции: полидисперсный зернистой слой 216
Стрижак С.В. Исследование движения несжимаемой вязкой жидкости с использованием физически-информированной нейронной сети 218
Торчик М.В., Котов М.А., Андросенко В.Н., Филиппов Ф.В., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю. О влиянии распределения интенсивности излучения при лазерном нагреве для исследования свойств теплозащитных материалов 220
Федюшкин А.И. Взаимосвязь структуры конвективного течения и вязких касательных напряжений 221
Хамидуллин М.Р., Поташев К.А., Мазо А.Б. Решение обратной задачи определения длин трещин многозонного гидроразрыва пласта с помощью модели трубок тока . . 223
Хатунцева О.Н., Шувалова А.М. Об использовании многомасштабных критериев подобия для вязкой жидкости при экспериментальной отработке изделий аэрокосмической отрасли 224
Хмель Т.А., Афанасенков А.А. Характеристики ячеистой детонации водородно-воздушных смесей при добавлении частиц алюминия 227
Чехонин К.А. Моделирование гидродинамических и термомеханических процессов при лазерной 3D-печати металлоизделий 229
Шустов С.А., Крюков И.А., Иванов И.Э. Численное исследование эффективности высотного насадка для маршевого ЖРД второй ступени сверхлегкой ракеты-нисителя 230
Юсим В.А., Саркисов С.Э., Чекулаев И.С., Чаусов Д.Н. Математическое моделирование газодинамических процессов в установке атомно-слоевого осаждения с различной геометрией реакционной камеры 232

Секция E
Общие проблемы и модели механики сплошных сред на разных масштабных уровнях

Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинчук В.В. Влияние начальных деформаций на распространение SH-волн в пьезоэлектрической/пьезомагнитной пластине из функционально градиентных материалов 234
Голубев В.И., Никитин И.С., Шевченко А.В., Никитин А.Д. Полноволновое моделирование процесса прохождения сейсмических волн через защитные сейсмические барьеры 236
Калинчук В.В., Михайлова И.Б., Тимошенко П.Е., Турчин А.С., Широков В.Б. Об одной термофизической модели ниобата лития 238

Левин В.А., Иванов М.Я., Марков В.В., Мизин С.В. Механика природы при главенствующей роли материи 240
Машкин М.Н. Зависимость плотности энергии среды излучения фотона от показателя преломления с учетом постоянной Хаббла 243
Прозорова Э.В. Значение закрытости системы и момента для разреженного газа . . 245
Прозорова Э.В. Значение момента в теории сплошной среды 247
Романов А.В. Построение упругого потенциала к оценке масштабных и тепловых эффектов микрополярной среды 250
Строкач Е.А., Пожидаев А.А., Добровольский С.В., Глуховская Ю.И. Исследование состояния поверхностного слоя материала при абразивном износе высокоскоростным потоком частиц 250
Широков В.Б., Михайлова И.Б., Тимошенко П.Е., Турчин А.С., Калинчук В.В. Поверхностные акустические волны в гетероструктурах с тонкими пластинами танталата лития 252
Шоркин В.С., Фроленкова Л.Ю., Ромашин С.Н. Переходный слой при адгезии твердых тел 254
Шпара А.П., Ягодников Д.А., Сухов А.В. Влияние изменения давления, концентрации кислорода на время горения аэровзвеси частиц алюминия 256

Секция F
Классическая и небесная механика, мехатроника, биомеханика

Беляев А.К., Полякова О.Р., Товстик Т.П. Пространственная задача динамики маятника Капицы 258
Веденяпин В.В., Батищева Я.Г., Русских А.А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и их гидродинамические и Гамильтон–Якобиевы следствия 260
Григорьева М.Е., Оберган Т.Ю., Коробовский А.В. Влияние стрессогенных факторов различной этиологии на реакции тромбоцитарного гемостаза при метаболических нарушениях 261
Зленко А.А., Бездольный Г.Р. Сравнение некоторых методов решения уравнения Кеплера 263
Молотков А.А., Сальков Ю.А., Сапрыкин Д.Л., Третьякова О.Н., Тужилин Д.Н., Шамордин А.А. Реализация алгоритмов машинного зрения для мехатронных систем установок лазерной резки и многокоординатной обработки 264
Молотков А.А., Третьякова О.Н., Тужилин Д.Н. Развитие и применение программного комплекса для мехатронных систем установок лазерной обработки материалов . 265
Пупышева Ю.Ю. Определение параметров черной дыры 267
Фимин Н.Н. К вопросу о динамике тел в задаче Кеплера с учетом влияния космологического члена 267

Секция G
Задачи теории управления и оптимизации

Аветисян В.В. Область достижимых состояний покоя двузвенного манипулятора с учетом ограничений на угловые скорости при оптимальном по времени управлении . 271
Акмаева В.Н. Метод Монте-Карло и метод опорных векторов для решения задач квантильной оптимизации 273

Козорез Д.А., Сиротин А.Н., Сыпало К.И. О рекуррентном методе решения задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем и скалярным l_1-управлением 274
Кудрявцева И.А., Петров К.С. Применение кубатурного фильтра для решения задачи управления вертолетом с помощью нелинейной прогнозирующей модели 276
Лунева А.А., Лунева С.Ю. Параметрическая оптимизация нечетких систем управления с использованием линейных регуляторов 278
Мозеров М.Г., Карнаухов В.Н. Определение 3D-координат для сильно разреженного множества точек с помощью суперпиксель сегментации и стереомэтчинга 280
Нефедов В.Н., Наседкин Г.К. Задача нахождения оптимального кусочно-прямолинейного маршрута с n поворотами 283
Подгорная В.М. О методах построения множеств достижимости линейных дискретных систем при помощи декомпозиции 285
Романенков А.М. Вычисление первой вариации функционала в задаче оптимального управления для псевдогиперболического уравнения четного порядка 287
Степанян К.В., Попов А.К., Миллер Б.М., Миллер А.Б. О расчете скоростей движения беспилотного аппарата на основе оптического потока в условиях сильного наклона оптической оси камеры 289
Стрижак С.В. Программный контроллер для управления работой ВЭУ 291
Строганов В.Ю., Белашова И.С. Оценка характеристик среднеинтегральных оценок случайных процессов, полученных на имитационных моделях, с учетом выбора начальных условий моделирования 293
Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А. Об управляемом вращательно-поступательном движении солнечного паруса в окрестности точки либрации 295
Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А. Управление орбитальным движением космического аппарата в окрестности точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса 296

Секция H
Аэрокосмическая механика. Проблемы создания и эксплуатации аэрокосмической техники

Абгарян В.К., Абгарян М.В., Мельников А.В., Могулкин А.И., Свотина В.В. Повышение эффективности технологии увода объектов космического мусора плазменными потоками 298
Абгарян В.К., Ахметжанов Р.В., Демченко Д.С., Мельников А.В., Могулкин А.И., Пейсахович О.Д. ВЧ-ионный источник для технологии нанесения покрытий . 300
Астахов С.А., Бирюков В.И., Киселев И.А., Бирюкова М.В. Алгоритм расчета случайных сигналов виброускорений при трековых высокоскоростных испытаниях новых образцов летательных аппаратов 302
Астахов С.А., Бирюков В.И., Киселев И.А., Бирюкова М.В. Сопоставительный анализ влияния среды, состоящей из смеси воздуха с гелием на динамику движения экспериментального летательного аппарата при трековых испытаниях 305
Ахметжанов Р.В., Богатый А.В., Дьяконов Г.А., Ким В., Попов Г.А., Шилов Е.А. Электрические ракетные двигатели для малых космических аппаратов, создаваемые НИИ ПМЭ МАИ 306
Бакулин В.Н., Борзых С.В., Бычков Р.С. Вероятностный подход к оценке успешности процесса посадки лунного взлетно-посадочного комплекса при движении по лунной поверхности 308

Герасимов С.И., Калмыков П.Н., Астахов С.А., Киселев И.А. Волновые процессы в направляющей ракетного трека 310
Гордеев С.В., Гостев А.Ю., Дьяконов Г.А., Королев Е.Э. Электроракетная двигательная установка малой мощности размерностью 1,5 U на базе абляционного импульсного плазменного двигателя 310
Гордеев С.В., Дьяконов Г.А., Попов И.А. Аналитическая модель для оценки параметров импульсного клапана газового импульсного плазменного двигателя 312
Гордеев С.В., Дьяконов Г.А., Попов И.А. Инженерная математическая модель разряда в канале газового импульсного плазменного двигателя 313
Гордеев С.В., Дьяконов Г.А., Попов И.А., Светличная Е.В. Электроракетная двигательная установка на базе импульсного плазменного двигателя с газообразным рабочим телом: сравнение характеристик и перспективы применения 315
Гранич В.Ю., Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Ширковский И.А. Экспериментальные исследования устройств демонстратора ПАЭРД для сверхнизкоорбитальных КА (150–200 км) на стенде ВАТ-103 ЦАГИ 317
Демченко Д.С., Мельников А.В., Хартов С.А. Разработка нейтрализатора на базе высокочастотного разряда для ионных двигателей и ионных источников 319
Иванов А.В., Павлевич А.Л. Применение систем автоматизированного проектирования при разработке ЖРД 321
Калашников А.И., Моисеев Д.В. Минимизация времени облета локальных объектов группой легких беспилотников 323
Коробовский А.В., Шевченко Е.Р. Исследование проблемы разработки документации по обеспечению безопасной эксплуатации испытательного оборудования космических средств 326
Кульков В.М., Егоров Ю.Г., Фирсюк С.О., Кравченко И.В. Исследование траекторного движения и оптимизация режимов управления при уводе космических объектов с орбиты 328
Рубцов П.В., Романова–Большакова И.К. Формирование производных требований для комплексных систем управления воздушных судов методами математического моделирования 330
Свотина В.В., Гостев А.Ю., Ельников Р.В. Малые космические аппараты. Оценка влияния на околоземное космическое пространство 332
Черкасова М.В. Моделирование движения потока ионов, инжектируемых двигателем космического аппарата, в магнитном поле Земли 334
Чубиков В.Н., Тихонов К.М., Тишков В.В., Купченко И.С. Синтез оптимальных геометрических параметров реечно-зубчатого ножнично-ромбического толкателя . . . 336

Секция I
Образовательные технологии в аэрокосмической отрасли

Бахиркин М.В. Использование Kanban-метода в образовательных технологиях . . . 339
Демидова О.Л. Особенности проведения занятий по курсу «Численные методы» для специальности «Прикладная математика» 341
Иванов С.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Степанов А.Е. Сравнительный анализ позиционной и программной стратегий прохождения ограниченного по времени образовательного теста 342
Кузнецова С.В., Крючков А.В. Система для проведения онлайн-соревнований по программированию 344

Кули-заде М.Е. Проектирование основных образовательных программ подготовки инженерных кадров в аэрокосмической отрасли 346
Лукин В.Н., Чернышов Л.Н. Тренажер по дисциплине «Теория алгоритмов» 348
Неклюдова Г.А., Булавкина Т.А. Оценка влияния личностных качеств студентов технических вузов на профессиональную социализацию 350
Сабырханова Г.Ш., Сембиев О.З. Создание автоматизированной системы тестирования на базе контейнерной архитектуры с применением технологии блокчейн в образовательной среде 352
Савельев А.С. Совместные с Китаем образовательные программы по математике и прикладной математике 354
Северина Н.С. Применение программного комплекса «ФлореС» для моделирования химически-реагирующих течений газа в учебном процессе 355
Ягодников Д.А., Кабальнова М.Ю., Соколова Т.Ю. Методика разработки и применения учебных дисциплин цикла математического моделирования и программных комплексов при подготовке инженеров по специальности «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» 357

Бакулин В.Н. Памяти академика И.Ф. Образцова (1920–2005) 359
Список организаций 362
Адресная книга 365
Авторский указатель 369

СТРАТЕГИИ ПЕРЕСТРОЕНИЯ АВТОНОМНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ И СОЦИАЛЬНЫЕ ДИЛЕММЫ В СМЕШАННОМ ТРАФИКЕ: МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ*

Н. В. Быков, М. А. Костров, Н. С. Власова

РУТ (МИИТ), Москва, Россия

Работа посвящена моделированию поведения автономных транспортных средств (АТС) в условиях смешанного трафика, включающего также управляемые человеком автомобили (human driven vehicle, HDV). Особое внимание уделено стратегиям перестроения АТС и их влиянию на характеристики движения, формирование колонн (в англ. platoon) и возникновение социальных дилемм.

Исследование проводится на основе модифицированной модели клеточных автоматов S-NFS, учитывающей как продольную, так и поперечную динамику движения [1].

В моделировании используются три типа АТС:

1) AV — не выполняющие перестроений, обеспечивающие максимальную стабильность колонн;

2) AV-C — кооперативные, ограничивающие перестроения ради сохранения целостности колонны;

3) AV-D — разрешающие, реализующие поведение, ориентированное на индивидуальную выгоду с возможностью покидать колонны.

Каждый тип реализует различные принципы управления — от Adaptive Cruise Control (ACC) до Cooperative ACC (CACC), включая алгоритмы бокового маневрирования (перестроения).

Результаты численного моделирования показывают, что AV без перестроений обеспечивают наибольшую плотность потока, однако не способны обходить препятствия. AV-C демонстрируют плавное движение и сохраняют стабильность колонн, но теряют эффективность при необходимости объезда. AV-D способны синхронно перестраиваться, повышая пропускную способность, однако их активность приводит к фрагментации колонн и нестабильности на малых плотностях АТС.

При анализе взаимодействия AV и HDV в условиях различной плотности трафика выявляются социальные дилеммы — ситуации, в которых индивидуально рациональное поведение противоречит общественному оптимуму. Для количественной оценки используется метрика дефицита социальной эффективности (Social Efficiency Deficit, SED) [2], определяемая как относительное различие между максимумом социальной функции и значением в точке равновесия Нэша.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект №24-21-00306 «Методы выявления и перехвата девиантных агентов в гетерогенном автомобильном транспортном потоке, содержащем беспилотные транспортные средства».

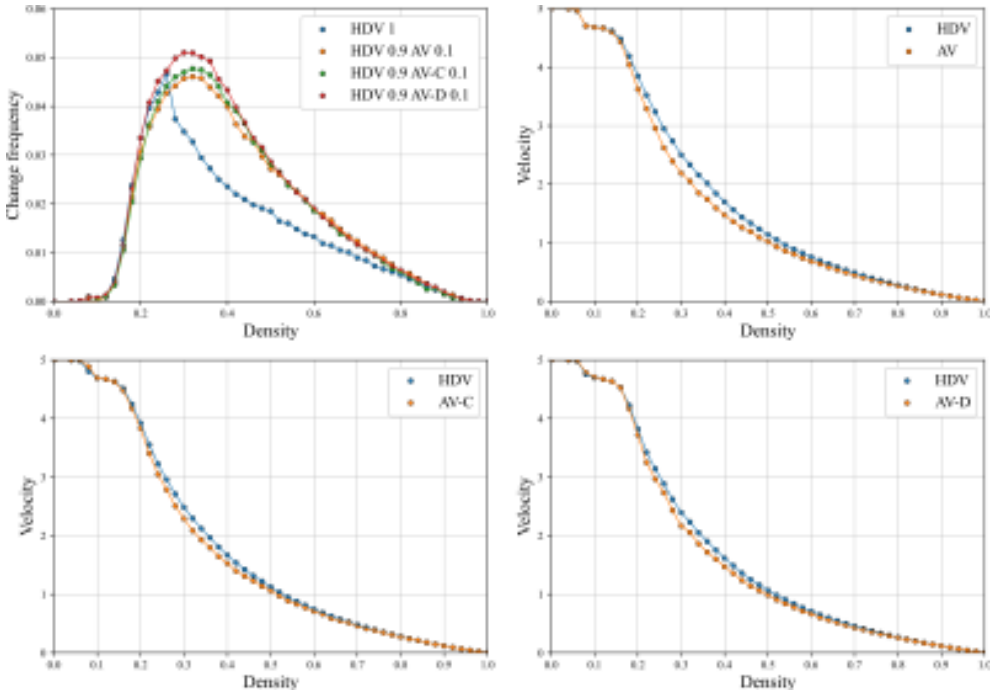


Рис. 1. Зависимость частоты перестроения и средней скорости от плотности АТС

На рис. 1 показаны зависимости частоты перестроения и средней скорости от плотности АТС при разных типах AV. При средней плотности ($\rho = 0{,}2$–$0{,}3$) наблюдается, что при низкой доле AV их средняя скорость ниже, чем у HDV, что делает последние более привлекательными с точки зрения пользователя. Однако при росте доли AV общий поток возрастает, а разница в скоростях исчезает, что свидетельствует о наличии дилеммы типа «охота на оленя» [3].

При 100% доле AV достигается максимум социальной функции, тогда как равновесие Нэша соответствует 100% HDV. Это указывает на необходимость регулирования или стимулирования перехода к кооперативному равновесию [4].

Предложена гибридная стратегия, сочетающая поведение AV-C в обычных условиях с переходом к AV-D при необходимости объезда. Такой подход позволяет сохранить стабильность колонн и при этом повышает маневренность при возникновении препятствий. Он обеспечивает компромисс между индивидуальной выгодой и общественным благом, снижая проявления социальных дилемм без полной утраты стабильности системы.

Результаты исследования подчеркивают важность выработки стратегий, способствующих кооперативному поведению АТС на ранних этапах внедрения. Это может включать как экономические стимулы, так и инфраструктурные меры, направленные на снижение барьеров к переходу в кооперативное состояние. Будущие исследования планируется направить на адаптивные стратегии, в которых поведение АТС меняется в зависимости от контекста движения и доступной информации.

1. *Tanimoto J.*, *Futamata M.*, *Tanaka M.* Automated vehicle control systems need to solve social dilemmas to be disseminated // Chaos, Solitons & Fractals. — 2020. — V. 138. — P. 109861.

2. *Arefin M. R.*, *Kabir K. M. A.*, *Tanimoto J.* Social efficiency deficit deciphers social dilemmas // Scientific Reports, — 2020. — V. 10. — P. 72971.
3. *Sueyoshi F.*, *Utsumi S.*, *Tanimoto J.* Underlying social dilemmas in mixed traffic flow with lane changes // Chaos, Solitons & Fractals. — 2022. — V. 155. — P. 111790.
4. *Masaka J. et al.* Can the introduction of CAVs mitigate social dilemmas causing traffic jams on highways? // Physics Open. — 2023. — V. 17. — P. 100176.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ*

Н. В. Быков, Д. В. Шайкин

РУТ (МИИТ), Москва, Россия

В работе рассматривается задача распространения возмущения в дискретном массиве оптических волноводов при наличии нелинейности кубического типа. Распределение амплитуд электромагнитного излучения в волноводах подчиняется уравнениям [1]:

$$i\frac{dE_n}{dz} + \beta E_n + c(E_{n+1} + E_{n-1}) - \lambda|E_n|^2 E_n = 0,$$

где E_n — комплексная амплитуда в n-м волноводе, z — координата вдоль оси волноводов, β — постоянная распространения, c — коэффициент связи, λ — коэффициент нелинейности.

Заменой $E_n = \Phi_n \exp[i(2c + \beta)z]$ это уравнение можно привести к дискретному нелинейному уравнению Шредингера [2]:

$$i\frac{d\Phi_n}{dz} + c(\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1} - 2\Phi_n) - \lambda|\Phi_n^2|\Phi_n = 0,$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд и фаз поле Φ_n можно представить в виде

$$\Phi_n = \sqrt{I_n}\, e^{i\varphi_n},$$

где $I_n = |\Phi_n|^2$ — интенсивность, а $u_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ — дискретный градиент фазы. При таком разложении система переходит к виду, аналогичному уравнениям нелинейной гидродинамики, что позволяет ввести инварианты Римана:

$$R^+ = \frac{u}{2} + \sqrt{I}; \quad R^- = \frac{u}{2} - \sqrt{I}.$$

Начальное условие задается в виде ступенчатого распределения интенсивности и градиента фазы: слева от разрыва фиксируются значения интенсивности I_L и фазового градиента u_L, справа — значения I_R и u_R. Эти параметры выбирались так, чтобы обеспечить формирование двух волн разрежения, отделенных постоянным плато.

Для описания эволюции системы аналитически определялись характеристики плато между волнами разрежения и положения фронтов на основе инвариантов Римана.

*Работа выполнена в рамках государственного задания от 20.03.2025 №103-00001-25-02 по теме «Оптические свойства димерных цепочек лазерных волноводов с топологическими дефектами, в том числе нелинейных и с отрицательным показателем преломления».

Численное интегрирование уравнение выполнялось методами Рунге–Кутты четвертого порядка. Для минимизации отражений от краев массива применялись поглощающие граничные условия на основе плавного затухания.

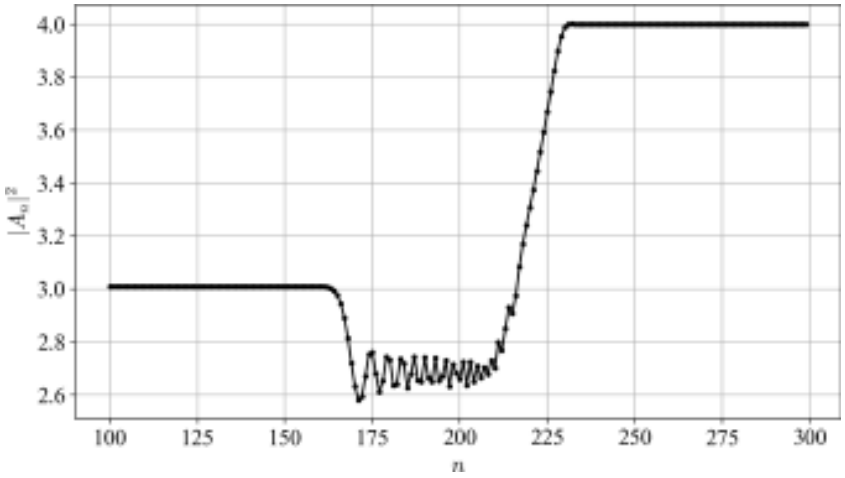


Рис. 1. Распределение интенсивностей по волноводам в волне разрежения

Для примера на рис. 1 показано распределение интенсивностей при следующих начальных данных: число волноводов $N = 400$, длина волноводов $z_{\max} = 20$, разрыв в центре $n = 200$, параметры слева от разрыва: $I_L = 3$, $u_L = -1$, параметры справа от разрыва: $I_R = 4$, $u_R = 0$. В расчетах использованы параметры $c = 0{,}5$; $\lambda = 1$.

Начальные условия вида $I_L = 1$, $u_L = 0$, $I_R = 4$, $u_R = 0$ позволяют получить дисперсионную ударную волну (рис. 2).

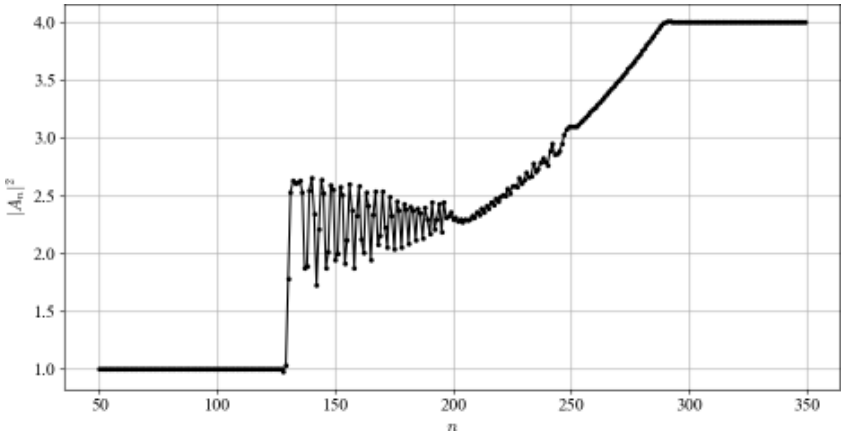


Рис. 2. Распределение интенсивностей по волноводам в волне разрежения

Результаты моделирования подтверждают образование двух волн разрежения, между которыми формируется стационарная область с постоянными интенсивностью и течением фазы, согласованными с аналитическими предсказаниями на основе инвариантов Римана. Также были количественно подтверждены скорости

распространения краев волн в соответствии с теоретическими оценками. Схожие явления демонстрировались при решении близкого по типу уравнения [3].

1. *Кившарь Ю. С.*, *Агравал Г. П.* Оптические солитоны. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 648 с.
2. *Christodoulides D. N.*, *Joseph R. I.* Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides // Optics Letters. — 1988. — V. 13, No. 9. — P. 794–796.
3. *Gupta M.*, *Malhotra S.*, *Gupta R.* Numerical generation and investigation of rogue waves for discrete nonlinear Schrödinger equations // Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials. — 2023. — V. 32, No. 03. — P. 2350026.

О СХОДИМОСТИ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА С ДВОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ*

О. В. Глазырина, Л. Л. Глазырина

КФУ, Казань, Россия

Рассматривается вариационное неравенство, возникающее при математическом моделировании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения бактерий в точке определяется глобальным состоянием среды.

Рассматривается случай, когда вырождение может присутствовать в пространственном операторе и нелинейная функция, стоящая под знаком частной производной по переменной t, может быть не отделена от нуля. Пространственный оператор, рассматриваемого неравенства, нелинейно зависит от искомого решения, его градиента и от нелокальной (интегральной) характеристики решения. Для этой задачи с использованием метода штрафа построена явная разностная схема. Получены условия, обеспечивающие устойчивость и сходимость построенного метода решения. Сходимость явной разностной схемы со штрафом доказана при минимальных предположениях на гладкость исходных данных.

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n, $n \geq 1$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Используя принятые в литературе обозначения функциональных пространств, определим множество

$$K = \left\{ v \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)) \bigcap L_\infty(0, T; L_\alpha(\Omega)) \colon v \geq 0 \text{ п.вс. в } Q_T \right\}, \quad p > 1.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in K$ такую, что

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} \in L_{p'}(0, T; W^{-1}_{p'}(\Omega)), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{п. вс. в } \Omega, \tag{2}$$

удовлетворяющую неравенству

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t}, v - u \right\rangle dt + \int_0^T \langle Lu, v - u \rangle \, dt \geq \int_0^T \langle f, v - u \rangle \, dt, \quad \forall v \in K. \tag{3}$$

*Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Здесь $p' = p/(p-1)$, $\langle w, v\rangle$ — значение функционала w из $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ на элементе v из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, u_0 и f заданы, L — оператор, определяемый формулой

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(k_i(x, u, \nabla u, Bu)\big), \tag{4}$$

k_i — известные функции, ∇u — градиент u, B — оператор вида

$$(Bu)(t) = \int\limits_{\Omega'} g(x, u)\, dx, \tag{5}$$

где Ω' — область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней, g — заданная интегрируемая на Ω' функция.

Пространственные операторы с нелокальностями вида (4) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения бактерий в точке определяется глобальным состоянием среды (см., напр., [1–3]). В работе [4] было доказано существование решения рассматриваемой в данной работе задачи.

Отметим, что оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, где $p' = p/(p-1)$, является ограниченным, коэрцитивным и монотонным по градиенту оператора [4].

Будем предполагать, что $\varphi(\xi)$ — абсолютно непрерывная, строго возрастающая функция, удовлетворяющая при любом $\xi \in R^1$, условиям, перечисленным в [4] и кроме того,

$$(\varphi'(\xi))' \geq b|\xi|^{\alpha-2}, \quad b \geq 0, \tag{6}$$

Относительно функции $g(x, \xi)$, определяющей оператор B, предполагается, что она непрерывна по ξ, измерима по x и удовлетворяет следующему условию

$$|g(x, \xi)| \leq g_0(x) + |\xi|^s \quad \text{для п. вс. } x \in \Omega, \tag{7}$$

где g_0 — интегрируемая по Ω функция, $s \geq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что область Ω — n-мерный параллелепипед. На Ω построим равномерную сетку $\overline{\omega}_h$ с шагом h_i по направлению x_i, $\omega_h = \overline{\omega}_h \cap \Omega$, $\gamma_h = \overline{\omega}_h \backslash \omega_h$, и сетку по t: $\overline{\omega}_\tau = \{t \in [0, T] : t = k\tau, k = 0, 1, \ldots, M = T/\tau\}$.

Введем n-мерный вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, координаты которого могут принимать значения ± 1. Для сеточной функции y определим разностные отношения $\partial_{r_i} y$ по формуле:

$$\partial_{r_i} y = \begin{cases} y_{x_i}, & r_i = +1, \\ y_{\overline{x}_i}, & r_i = -1; \end{cases} \quad \nabla_r y = (\partial_{r_1} y, \partial_{r_2} y, \ldots, \partial_{r_n} y).$$

Для задачи (1)–(3) рассматривается явная разностная схема со штрафом вида

$$\begin{gathered} \varphi_t(y_\varepsilon)(x, t) + Ay_\varepsilon(x, t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta\widehat{y}_\varepsilon = f_{h\tau}(x, t), \quad x \in \overline{\omega}_h \backslash \gamma_h, \quad t \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}, \\ y_\varepsilon(x, 0) = y_0(x) \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_\varepsilon(x, t) = 0 \quad x \in \gamma_h, \end{gathered} \tag{8}$$

где A — разностная аппроксимация оператора L, построенная с помощью метода сумматорных тождеств. Значение Ay во внутренних точках сетки определяется следующим образом:

$$Ay_\varepsilon(x) = -\frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^{n} \partial_{ri}\big(k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r y_\varepsilon, B_h y_\varepsilon)\big),$$

где B_h — разностный аналог оператора B, при построении которого интеграл по каждой ячейки сетки области Ω приближенно вычисляется с помощью n-мерной

квадратурной формулы трапеций, параметр β — оператор штрафа, определяемый равенством $\beta w = -|w^-|^{q-2}w^-$, $q > 1$, $w^- = (|w| - w)/2$. Известно, что оператор β является ограниченным, монотонным, деминепрерывным.

В данной работе получены условия на шаги сетки τ, h, обеспечивающие устойчивость разностной схемы, а также соотношения на τ, h, ε, при которых доказана сходимость кусочно-постоянных восполнений решения разностной схемы (8) к решению вариационной задачи (1)–(3).

1. *Chipot M. Molinet L.* Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems // Applicable Analysis. — 2001. — V. 80, No. (3/4). — P. 279–315.
2. *Chipot M.*, *Lovat B.* Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — V. 8(1). — P. 35–51.
3. *Simon L.* On quasilinear parabolic functional differential equation with discontinuous terms // Annales Univ. Shi. Budapest. — 2004. — V. 47. — P. 211–229.
4. *Glazyrina O. V.*, *Glazyrina L. L.*, *Pavlova M. F.* On the Solvability in the Class of Nonnegative Functions of a Nonlinear Parabolic Equation with Double Degeneration and a Nonlocal Spatial Operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — V. 43(4). — P. 959–969.

К УЧЕТУ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАСЧЕТЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

***Ю. А. Гришин*[1], *О. А. Гришин*[1], *В. А. Зенкин*[1], *В. Н. Бакулин*[2,3]**

[1]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;*
[2]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [3]*МАИ, Москва, Россия*

В настоящее время практически все безнаддувные поршневые двигатели легковых автомобилей и двигатели малой авиации снабжаются впускными системами, настроенными на динамический наддув [1–3] (рис. 1). Поскольку рабочий процесс в поршневых двигателях носит периодический характер, для расчета течения в настроенных протяженных трубах газовоздушного тракта необходимо использовать численные методы газовой динамики [3, 4], описывающие одномерное нестационарное течение с учетом диссипативных явлений — трения и теплообмена. В результате преобразований дифференциальных уравнений движения (Навье–Стокса) и энергии к одномерному виду получаются следующие формулы [5]:

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = 0;$$

$$\rho u \frac{d}{dx}\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(\mu u \frac{du}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) = 0.$$

Однако, во-первых, представленные здесь члены вязкого трения $\mu 4/3\ldots$ ничтожно малы и не отражают реальные потери количества движения и энергии, которые имеют место на стенках труб. Во-вторых, вообще дискуссионны, так как в исходных 3D-уравнениях вязкие эффекты введены на основании гипотезы Ньютона о связи касательных напряжений с нормальным градиентом скорости, который в одномерной модели течения отсутствует. Эффект продольной теплопроводности (коэффициент λ) также незначителен по сравнению с реальной теплоотдачей в стенки. Поэтому для моделирования используется квазиодномерный подход, в котором трение и теплоотдача в стенки учитываются с помощью формул Дарси–

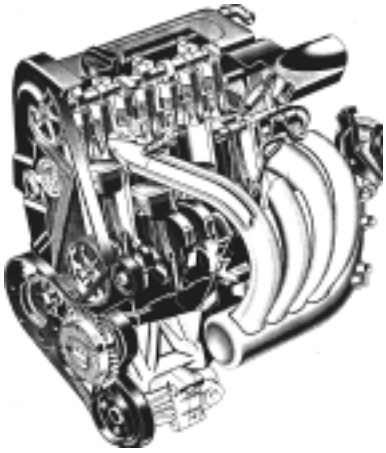


Рис. 1. Двигатель автомобиля Audi A4

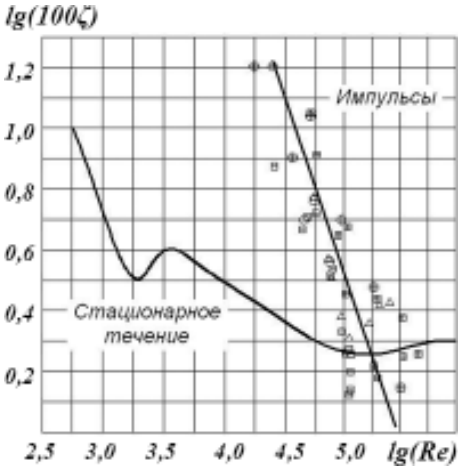


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения ς от числа Re в стационарном и импульсном потоках

Вейсбаха и Ньютона. Тогда соответствующая система интегральных уравнений представляется в виде [6]:

$$\begin{cases} \oint (\rho dx - \rho u\, dt) = 0; \\ \oint [\rho u\, dx - (p + \rho u^2)\, dt] = -\dfrac{\varsigma}{2D} \iint \operatorname{sign}(u) \rho u^2\, dx\, dt; \\ \oint \left[\rho\left(e + \dfrac{u^2}{2}\right) dx - \rho u\left(e + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p}{\rho}\right) dt\right] = -\dfrac{4\alpha}{D} \iint (T - T_w)\, dx\, dt, \end{cases}$$

где ς, α — коэффициенты трения и теплоотдачи в стенки трубы с температурой T_w. При численном моделировании методом Распада произвольного разрыва (схема С. К. Годунова) [3, 4] на заключительном, балансовом этапе этой системе соответствуют соотношения для приведенной массы, количества движения и полной энергии, в которых на расчетном шаге учитываются потери количества движения вследствие трения в виде $\overline{K}_f = \varsigma \rho u |u| \Delta x \Delta t / 2D$ и энергии — отвод тепла $\overline{Q}_w = 4\alpha (T - T_w) \Delta x \Delta t / D$, тогда:

$$\begin{aligned} \overline{M}_i^{n+1} &= \overline{M}_i^n + \overline{M}_{i-1/2} - \overline{M}_{i+1/2}; \\ \overline{K}_i^{n+1} &= \overline{K}_i^n - \overline{K}_{if}^n + \overline{I}_{i-1/2} - \overline{I}_{i+1/2}; \\ \overline{E}_i^{n+1} &= \overline{E}_i^n - \overline{Q}_{iw}^n + \overline{H}_{i-1/2} - \overline{H}_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Опыт работ с нестационарными, волновыми процессами показал, что задание значений ς, полученных для стационарных течений, заметно занижает потери трения. Поэтому были проведены специальные расчетно-экспериментальные исследования по оценке влияния трения на уменьшение амплитуды идущих в длинных трубах отдельных газодинамических импульсов сжатия и разрежения в диапазонах амплитуд давлений $+5$; $+80$ кПа изб. и -5; -50 кПа изб. соответственно. Численные расчеты идущих импульсов с подбором коэффициентов трения ζ, которые обеспечивали снижение амплитуд до экспериментальных значений, проводились методом характеристик с плавающей сеткой. Этот метод обеспечивает наиболее точ-

ные результаты без «размыва» формы импульсов [7, 8]. Здесь использовалась и полностью консервативная версия метода [8]. На рис. 2 представлены обработанные результаты исследований в системе координат $\lg \mathrm{Re}$–$\lg(100\zeta)$, для практического использования может быть предложена формула $\varsigma = 145 \cdot 10^4 / \mathrm{Re}^{1,5}$, где ς — безразмерная величина. Важно отметить, что при моделировании волновых процессов, в которых скорость u может становиться равной нулю, нельзя отдельно определять значение ς, поскольку число Re, содержащее u, находится в знаменателе. Необходимо выражение ς подставлять непосредственно в $\overline{K}_f$, тогда $\sqrt{u}$ будет в числителе.

Из рис. 2 видно, что почти для всей исследованной области нестационарного течения по числу Re значения ς намного превышают соответствующие значения, которые имеют место при стационарном течении. И здесь практически невозможно выделить ламинарный и турбулентный режимы. В большом числе работ и, в частности, в [9], отмечается более сложный характер вязких эффектов при нестационарном течении, которые приводят к затуханию волновых процессов, происходит постоянное переформирование пограничного слоя. Помимо соответствующего увеличения напряжения трения на стенках труб вводится предположение о возникновении на стенках слабых поперечных волн, дополнительно усиливающих эффект диссипации.

1. *Гришин Ю. А.*, *Сонкин В. И.* Впускные системы // Двигатели внутреннего сгорания. Энциклопедия. Т. IV-14 / Л. В. Грехов, Н. А. Иващенко, В. А. Марков и др.; Под общ. ред. А. А. Александрова и Н. А. Иващенко. — М.: Машиностроение, 2013. — С. 461–474.
2. *Зенкин В. А.*, *Гришин Ю. А.* Настройка впускной системы поршневого двигателя. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — 19 с.
3. *Grishin Yu. A.*, *Semenchukova V. S.*, *Bakulin V. N.* Numerical Simulation of Wave Processes in a Piston Engine Using Nonstationary Gas Dynamic Functions. Aircraft and Rocket Engine Theory // Russ. Aeronaut. — 2021. — No. 64. — P. 305–313. — DOI: 10.3103/S1068799821020197.
4. *Пирумов У. Г.*, *Росляков Г. С.* Численные методы газовой динамики. — М.: Высшая школа, 1987. — 323 с.
5. *Бай Ши-И.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости / Пер с англ. под ред. Н. И. Ющенковой. — М.: Изд-во Иностр. лит., 1962. — 411 с.
6. *Grishin Yu. A.*, *Zenkin V. A.*, *Khmelev R. N.* Boundary conditions for numerical calculation of gas exchange in piston engines // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2017. — V. 90, No. 4, July. — DOI: 10.1007/s10891-017-1644-4.
7. *Гришин Ю. А.* Весия метода характеристик с плавающей сеткой // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 15, №8. — С. 3–8.
8. *Grishin Yu. A.*, *Bakulin V. N.* A Conservative Version of the Method of Characteristics with a Floating Grid in Problems of Gas Dynamics // Doklady Physics. — 2019. — V. 64, No. 3. — P. 110–113. — DOI: 10.1134/S1028335819030066.
9. Ударные трубы: Сб. стат. / Под ред. Х. А. Рахматуллина и С. С. Семенова. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. — 700 с.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. А. Громов, К. К. Томащук

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

Для решения множества задач в естественных науках возникает необходимость построения полной бифуркационной картины, охватывающей первичные, вторичные, третичные и последующие ветви решений, для краевых задач систем

нелинейных уравнений в частных производных. Хотя для поиска решений таких задач существует ряд эффективных численных методов (например, метод конечных элементов, метод конечных разностей), разработка подходов к полному описанию бифуркационной структуры до сих пор остается нерешенной проблемой. Наблюдается существенный разрыв между глубокими теоретическими основами теории бифуркаций и катастроф и практическими инструментами, позволяющими не только построить такую картину для нелинейных уравнений, но и интерпретировать ее в рамках этих теорий. В данной работе представлен метод, расширяющий подход Н. И. Ободан и В. А. Громова [1], который позволяет воссоздать полную бифуркационную структуру для широкого класса вариационных краевых задач. Метод основан на обобщенном представлении неизвестных функций в соответствии с теоремой Колмогорова–Арнольда, что открывает новые возможности для анализа сложных нелинейных систем.

Предложенный в работе Н. И. Ободан и В. А. Громова [1] итерационный обобщенный метод Канторовича (ИОМК) основывается на представлении вида:

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i(x_1)\, g_i(x_2).$$

Данное представление подставляется в функционал, что позволяет избавиться от многомерной неизвестной функции и перейти к набору одномерных $h_i(x)$, $g_i(y)$, которые далее определяются в рамках итерационного процесса. Таким образом, получается свести задачу бифуркационного анализа краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных к задаче бифуркационного анализа краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. С одной стороны, подобные представления можно считать формированием базиса, оптимально адаптированного к конкретной задаче: вместо использования заранее заданной системы функций, здесь базис конструируется исходя из специфики задачи. Это приводит к тому, что количество членов в разложении по методу ИОМК, как правило, значительно меньше — часто достаточно двух–трех компонент, что резко контрастирует с классическими подходами, такими как метод Фурье, требующими длинных рядов. С другой стороны, такая компактность не является искусственной: во многих случаях структура решений естественным образом соответствует подобному представлению или близка к нему, что подтверждает эффективность метода в практических приложениях.

Однако, представление, данное ИОМК, не является общим представлением функции многих переменных в виде функций одной перемерннй. Наиболее общее представление дается теоремой Колмогорова–Арнольда. В нашей работе данная теорема была рассмотрена в трех ее формулировках: Шпрехера [2], Хебдерга [3] и Досса [4] соответственно:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \varphi_q\Big(\sum_{p=1}^{n} \alpha_p \psi(x_p + aq)\Big),$$

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \varphi\Big(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \psi_q(x_p)\Big),$$

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi\Big(\prod_{p=1}^{n} \psi_{i,p}(x_p)\Big).$$

Используя данные представления, также удается свести задачу бифуркационного анализа краевых задач уравнений в частных производных к решенной задаче бифуркационного анализа краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.

С помощью указанных выше подходов, удалось построить полную бифуркационную картину для двумерной задачи Брату, а также для нелинейных уравнений Кармана, включая ветви вторичного и третичного ветвлений. Полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими результатами, полученными в рамках теории особенностей дифференцируемых отображений — порядок вырожденности особых точек, допустимые варианты изменения числа максимумов и минимумов потенциальной функции при пересечении бифуркационного множества в пространстве параметров и др.

1. *Obodan N. I.*, *Lebedeyev O. G.*, *Gromov V. A.* Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. — Springer Science & Business Media, 2014. — V. 199.
2. *Sprecher D. A.* A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions // Neural networks. — 1996. — V. 9, No. 5. — P. 765–772.
3. *Shapiro H. S.* Topics in approximation theory. — Springer, 2006. — V. 187.
4. *Doss R.* Representations of continuous functions of several variables // American Journal of Mathematics. — 1976. — V. 98, No. 2. — P. 375–383.
5. *Громов В. А.*, *Томащук К. К.*, *Бесчастнов Ю. Н.*, *Сидоренко А. А.*, *Какурин В. В.* Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2025. — Т. 31, №1.

ОСОБЕННОСТИ ВЕРИФИКАЦИИ И АТТЕСТАЦИИ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РОТОРНЫХ СИСТЕМ

М. Н. Ереев, К. А. Лонин, В. Л. Патрушев, Д. В. Савчук, С. А. Соловьев

АО «ОКБМ Африкантов», Нижний Новгород, Россия

Теоретические основы компьютерного моделирования динамики системы твердых тел активно обсуждались в научной литературе, начиная с 70-х годов [123]. На основе исследований и методов, разрабатывавшихся в эти и последующие годы, созданы программные средства (ПС), некоторые из которых приобрели широкую мировую известность (Nastran, ABAQUS, LS-DYNA, Dytran, Adams), а так же созданные в рамках импортозамещения (Логос-Прочность).

1. Требования по верификации и аттестации ПС. В соответствии с требованиями Правил ядерной безопасности реакторных установок атомных станций НП-082-07 все ПС, используемые для обоснования безопасности ядерных энергетических установок (ЯЭУ), представляются в надзорные органы и подлежат аттестации. Аттестацию ПС проводит Совет по аттестации при НТЦ ЯРБ Ростехнадзора России. Основным документом, обосновывающим информацию, содержащуюся в аттестационном паспорте ПС, является отчет о верификации ПС. Отчет выполняется в соответствии с основными положениями «Порядка проведения экспертизы программ для электронных вычислительных машин, используемых в целях построения расчетных моделей процессов, влияющих на безопасность объектов использования атомной энергии и (или) видов деятельности в области использования атомной энергии», утвержденном приказом Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 4 апреля 2023 г. №141.

Верификационный отчет должен содержать описание и обоснование применяемых расчетных схем и геометрических моделей, а также сопоставление результатов расчета по ПС:

— с экспериментальными и эксплуатационными данными;

— с аналогичными результатами, полученными по ранее аттестованным ПС;

— с аналитическими решениями;

— с результатами теоретического анализа.

2. Факторы, оказывающие влияние на динамику роторной системы. В общем случае, при моделировании динамики вращения роторных систем (насосные и турбокомпрессорные агрегаты, электродвигатели, генераторы и др.) на разных типах подшипниковых опор (качения, скольжения, электромагнитном подвесе) учитываются следующие факторы:

1) масса ротора и размещенных на нем элементов;

2) инерционные силы от остаточной неуравновешенности;

3) гидродинамические силы:

— «Альфордовские» силы возникающие на рабочих колесах в результате смещения ротора от центрального положения и направленные перпендикулярно смещению;

— гидравлический дисбаланс вращающихся частей (отклонение в профиле лопаток);

— гидродинамические силы, создающие момент сопротивления вращению ротора;

4) силы магнитного тяжения обусловленные токами Фуко в генераторе и возбудителе;

5) усилия, вызванные работой системы управления электромагнитным подвесом и поддерживающие ротор в пределах допускаемых воздушных зазоров;

6) гироскопические силы, обусловленные изгибом продольной оси вращающегося ротора, либо его наклоном;

7) масса и жесткость корпусных конструкций;

8) ударные контактные взаимодействия ротора со статором;

9) внешние динамические воздействия (удар, сейсмика, вибрация и др.);

10) податливость системы виброизоляции фундамента роторной системы.

3. Отдельные особенности, учитываемые при верификации ПС. Таким образом, в отчет по аттестации включаются задачи модального анализа конструкций, учитывающие влияние демпфирования и трения на характер движения, ударное взаимодействие тел, описывающие колебания линейной и нелинейной систем, гироскопический эффект, динамического воздействия в виде спектров ответа и акселерограмм. Для большинства тестовых примеров приводится аналитическое решение, другие решаются по методу конечного элемента с использованием программного средства, аттестованного в соответствующей области применения.

Разные подходы к моделированию по-своему скажутся на точности результатов вычислений. Поэтому полученные погрешности расчетов характеризуют не столько точность программы при описании какого-либо эффекта, сколько показывают точность его моделирования в конкретной модели.

Большинство вычислений выполняется при настройках решателей, установленных разработчиками программы, т. е. с параметрами, выставленными «по умолчанию». Такие настройки решателей обеспечивают не максимально возможную точность расчетов, а являются компромиссным вариантом между точностью и временем вычислений. Уменьшая допускаемую ошибку интегрирования или увеличивая число итераций можно снизить величины погрешностей, полученных при решении тестовых задач.

1. *Верещагин А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов манипуляторов // Известия АН СССР, сер. Техническая кибернетика. — 1974. — №6. — С. 65–70.
2. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. — Stuttgard: Teubner, 1977. — 292 p.
3. *Вукобратович М.* Шагающие роботы и механизмы. — М.: Мир, 1976. — 541 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ НА ГРАНИЦЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ*

С. А. Колесник, А. С. Новиков, Н. А. Тушавин

МАИ, Москва, Россия

В ракетно-космической технике, в частности, при разработке систем тепловой защиты высокоскоростных летательных аппаратов, широко применяются анизотропные материалы. Теплопроводность в данных материалах характеризуется тензорной природой, что обуславливает зависимость тепловых потоков от градиента температуры во всех пространственных направлениях, в отличие от изотропных сред, где тепловой поток определяется исключительно нормальной составляющей градиента температуры на поверхности. Данная особенность существенно усложняет решение задач теплообмена, в особенности обратных задач, связанных с идентификацией граничных условий теплообмена. В анизотропных средах, определение тепловых потоков на границе требует учета многомерного характера теплового поля. Широкое распространение композиционных, графитовых и углерод-углеродных материалов, обладающих выраженной анизотропией теплофизических свойств, обуславливает актуальность разработки методов решения прямых и, в особенности, обратных задач теплопроводности для подобных сред. Трудности возникают как при прямом моделировании (определении температурного поля при заданных граничных условиях), так и при решении обратных задач, где требуется реконструкция граничных тепловых потоков на основе информации о температурном поле внутри тела.

В настоящей работе предлагается вычислительный подход к решению обратных задач теплопроводности для анизотропных сред, применяемых в системах тепловой защиты изделий ракетно-космической техники, подвергающихся интенсивным аэродинамическим нагревам. В качестве основы для разработки метода идентификации граничных тепловых потоков используется аналитическое решение прямой задачи теплопроводности для анизотропной пластины [1], полученное автором ранее. На базе данного решения разработан алгоритм решения обратной задачи, направленный на восстановление динамики тепловых потоков на границах пластины по данным дискретных измерений температуры, осуществляемых в заданных точках внутри материала в различные моменты времени. Для обеспечения устойчивости решения к погрешностям измерительной информации, характерным для экспериментальных данных (порядка 10%), применен метод регуляризации А. Н. Тихонова [2]. Продемонстрирована возможность достижения сопоставимой точности реконструкции тепловых потоков при указанном уровне погрешности входных данных.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект №22-19-00419-П).

Для повышения устойчивости и точности решения обратной задачи, в алгоритм инкорпорируется априорная информация о характере искомых тепловых потоков. В частности, используются предположения о гладкости временной зависимости теплового потока и ограничения на его амплитудные значения. Указанная априорная информация формализуется посредством функционала регуляризации. Исследована эффективность применения регуляризирующих функционалов различной структуры, показана целесообразность использования функционалов минимальной сложности для обеспечения вычислительной эффективности алгоритма.

Результаты численных экспериментов демонстрируют, что погрешность восстановления тепловых потоков сопоставима с погрешностью измерений температуры, что свидетельствует об адекватности и работоспособности предложенного метода решения обратных задач теплопроводности для анизотропных материалов.

1. *Формалев В. Ф.*, *Колесник С. А.* Аналитическое исследование теплового состояния анизотропной пластины при наличии теплообмена на свободных границах // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, №6. — С. 107–110.
2. *Тихонов А. Н.*, *Гончарский А. В.*, *Степанов В. В.*, *Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 231 с.

ВНУТРЕННЯЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИОННОГО МНОЖЕСТВА ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Ю. Морозов[1,2]***, Д. Л. Ревизников***[1,2]

[1]*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

Обратные задачи играют важную роль в различных областях, включая аэрокосмическую отрасль, вычислительную астрофизику, электронику и др. Они помогают определить закономерности на основе экспериментальных данных и построить математические модели. Задача параметрической идентификации возникает, когда модель физического процесса уже известна, но неизвестны ее параметры. Классический подход к решению этой задачи заключается в построении и минимизации целевой функции, которая позволяет оценить отклонение между модельной кривой и экспериментальными данными.

В работе рассматриваются динамические системы, заданные в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с интервальными параметрами, которые могут содержаться как в правой части системы, так и в начальных условиях.

Зачастую процесс решения обратной задачи сводится к многократному решению прямой задачи с разными параметрами. Для решения прямой задачи ранее был разработан, теоретически обоснован и апробирован на широком классе задач алгоритм адаптивной интерполяции [1, 2], получающий решение в каждый момент времени в виде явного параметрического множества.

Ранее авторами работы была рассмотрена постановка задачи параметрической идентификации, заключающаяся в нахождении такой оценки области неопределенности параметров, при которой параметрические множества состояний динамической системы содержали бы в себе экспериментальные данные. Отдельно исследовался случай с точечными экспериментальными данными [3] и случай с интервальными экспериментальными данными [4–6]. А в настоящей работе рассматривается

постановка задачи в некотором смысле наоборот: необходимо определить такую область значений параметров, при которой уже интервальные экспериментальные данные содержали бы в себе модельное решение.

Согласно работе [7], информационное множество задачи восстановления функциональной зависимости по интервальным данным — это множество решений интервальной системы уравнений (неравенств и тому подобных соотношений), которая построена по виду восстанавливаемой функциональной зависимости, интервальным данным задачи и другим условиям, вытекающим из постановки задачи.

Выполнено построение целевой функции в пространстве интервальных оценок параметров, характеризующей степень включения модельных множеств в заданные экспериментальные интервальные оценки фазовых переменных. Для целевой функции получено выражение градиента. Решение исходной задачи состоит из двух этапов: выполнение минимизации целевой функции методами оптимизации первого порядка и последовательное расширение полученной оценки информационного множества с контролем значения целевой функции.

Получим внутреннюю интервальную оценку информационного множества для следующей модельной задачи Коши для ОДУ с одним интервальным параметром:

$$\begin{cases} y' = \cos(at), & y(0) = 0, \\ a \in [a, \overline{a}], & t \in [0, 4\pi]. \end{cases}$$

В качестве экспериментальных интервальных оценок использовались квазиэкспериментальные: параметр a задавался интервально $[1{,}0, 1{,}2]$, и решалась прямая задача, в результате чего в точках $t_k = 2\pi k/25$ были получены интервалы $[\underline{y_k}, \overline{y_k}]$, $k = 1, \ldots, 50$; далее интервалы $[\underline{y_k}, \overline{y_k}]$ случайным образом увеличивались в размере, но не более чем в 2 раза, и уже использовались в качестве экспериментальных данных.

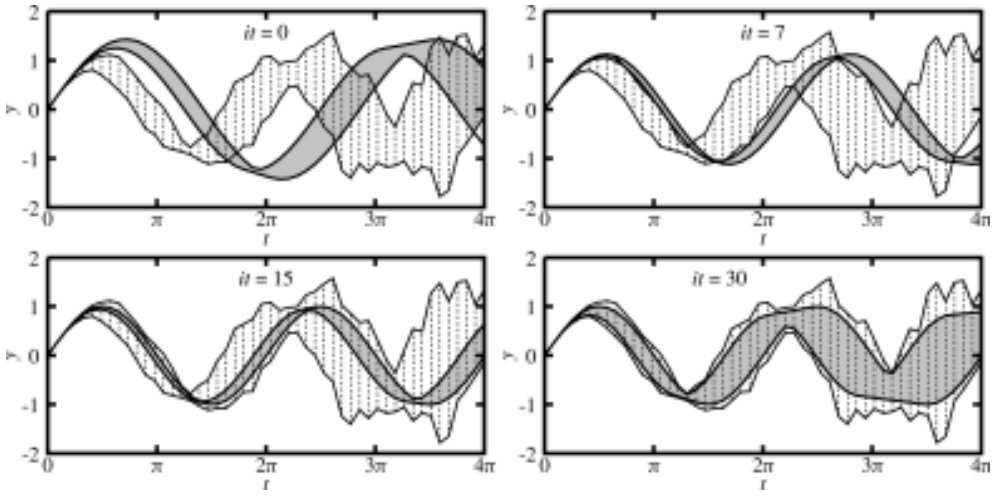


Рис. 1. Иллюстрация решения интервальной задачи параметрической идентификации

Начальное приближение в методе градиентного спуска $a^{(0)} \in [0{,}7, 0{,}8]$. На рис. 1 проиллюстрирован процесс решения задачи.

Серым цветом показаны получающиеся модельные интервальные оценки, вертикальными пунктирными линиями — квазиэкспериментальные интервальные дан-

ные. На 30-й итерации метод закончил работу. Найденная интервальная оценка параметра $a^{(30)} \in [0{,}998, 1{,}210]$ включает в себя исходную $a \in [1{,}0, 1{,}2]$, что демонстрирует эффективность предложенного подхода.

1. *Морозов А. Ю.*, *Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, №7. — С. 963–974. — DOI: 10.1134/S0374064118070130.
2. *Морозов А. Ю.*, *Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределенностями // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, №7. — С. 976–987. — DOI: 10.31857/S0374064121070104.
3. *Морозов А. Ю.*, *Ревизников Д. Л.* Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, №7. — С. 962–976. — DOI: 10.31857/S0374064122070081.
4. *Морозов А. Ю.*, *Ревизников Д. Л.* Параметрическая идентификация динамических систем на основе внешних интервальных оценок фазовых переменных // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, №2. — С. 299-314. — DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-299-314.
5. *Морозов А. Ю.*, *Ревизников Д. Л.* Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2023. — Т. 26, №4. — С. 93–108. — DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.407.
6. *Морозов А. Ю.*, *Ревизников Д. Л.* Алгоритм подвижного окна для параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределенности параметров // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, №6. — С. 814–827. — DOI: 10.31857/S0374064123060110.
7. *Баженов А. Н.*, *Жилин С. И.*, *Кумков С. И.*, *Шарый С. П.* Обработка и анализ интервальных данных. — Институт компьютерных исследований, 2024. — 356 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЛЕДЕНЕНИЯ КРЫЛА САМОЛЕТА

В. Н. Николаев

СибНИА им. С. А. Чаплыгина, Новосибирск, Россия

Обледенение крыла самолета приводит к ухудшению аэродинамических характеристик и летных качеств самолета, снижении несущих свойств крыла, увеличении лобового сопротивления, ухудшении устойчивости и управляемости. Проблемы обледенения связаны с метеорологией, аэродинамикой, конструкцией крыла и термодинамикой. При этом необходимо определять теплового состояния крыла самолета.

Для определения теплового состояния крыла самолета с учетом возможного обледенения решается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad (t,x,y) \in (0,T) \times G(t), \tag{1}$$

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t,x,y)u + \gamma(t,x,y) = 0, \quad (t,x,y) \in (0,T) \times \Gamma(t), \tag{3}$$

где $G(t) = G_1 \cup G_2(t)$; G_1 — область, изменения переменных x, y в зоне крыла; $G_2(t)$ — область, соответствующая ледяным наростам; $\Gamma(t)$ — граница области $G(t)$; n — единичный вектор внутренней нормали; $b(x,y) = \begin{cases} b_1, & (x,y) \in G_1(t), \\ b_2, & (x,y) \in G_2(t). \end{cases}$

Из постановки краевой задачи понятно, что коэффициент температуропроводности $b(x, y)$ терпит разрыв на линии соприкосновения каждого слоя льда. Для краевых задач параболического типа с разрывными коэффициентами в доказаны существование и единственность их обобщенных решений в банаховом пространстве

$$V_2^{0,1}(Q_T), \quad (Q_T = G\times(0, T)) \quad \text{с нормой} \quad |u|_{Q_T} = \max_{0\le t\le T} \|u(x, t)\|_{L_2(G)} + \Big(\int\limits_{Q_T} u_x^2\, dx\, dt\Big)^{1/2}. \tag{4}$$

Для получения вероятностного представления решения задачи (1)–(3) задаем случайный процесс $(X_\bullet, Y_\bullet)$, который является решением системы стохастических дифференциальных уравнений.

Для численного решения этой системы дифференциальных уравнений мы используем модифицированный метод Эйлера [1]: шагом интегрирования h делаются по формулам:

$$X_{i+1}^{\Delta} = x_i + h^{1/2}\sigma_i\xi_{1,i}, \tag{5}$$

$$Y_{i+1}^{\Delta} = y_i + h^{1/2}\sigma_i\xi_{2,i}, \tag{6}$$

$$x_{i+1} = X_{i+1}^{\Delta} + (\Delta_{i+1}K)n_{1,i+1}\chi_{R^2\setminus\overline{G}}(X_{i+1}^{\Delta}, Y_{i+1}^{\Delta}), \tag{7}$$

$$y_{i+1} = Y_{i+1}^{\Delta} + (\Delta_{i+1}K)n_{2,i+1}\chi_{R^2\setminus\overline{G}}(X_{i+1}^{\Delta}, Y_{i+1}^{\Delta}), \tag{8}$$

$$U_{i+1} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ U_i(1 + \eta_{i+1}\chi_\Gamma(x_{i+1}, y_{i+1})\Delta_{i+1}K), & i > 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$V_{i+1} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ V_i + \gamma_{i+1}\chi_\Gamma(x_{i+1}, y_{i+1})U_{i+1}\Delta_{i+1}K, & i > 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\Delta_{i+1}K = \begin{cases} 0, & (X_{i+1}^{\Delta}, Y_{i+1}^{\Delta}) \in \overline{G}(t_i), \\ \rho_{n,\overline{G}}\big(X_{i+1}^{\Delta}, Y_{i+1}^{\Delta}\big), & \big(X_{i+1}^{\Delta}, Y_{i+1}^{\Delta}\big) \notin \overline{G}(t_i), \end{cases} \tag{11}$$

где h — шаг интегрирования; $\rho_{n,\overline{G}}(x, y)$ — расстояние от точки (x, y) до ее нормальной проекции на $\overline{G}$. Здесь черта над обозначением множества означает его замыкание.

Рис. 1. Разбиение контура крыла на отрезки

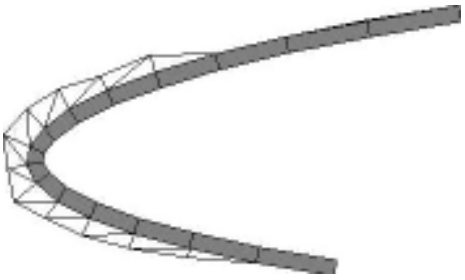


Рис. 2. Моделирование обледенения крыла

Построение подобласти $G_2(t)$, которая соответствует ледяному наросту, делается с помощью подвижных треугольников. Для построения этих треугольников на поверхности крыла вводится сетка по его контуру, и в каждом узле этой сетки вдоль направления внешней нормали задается отрезок (рис. 1).

Длина каждого такого отрезка есть заданная функция времени, которая определяет движение границы в данном узле. Концы этих отрезков являются вершинами ломаной линии, с помощью которой мы моделируем поверхность ледяного нароста. В результате соединения концов отрезков на внешней поверхности крыла образуются четырехугольники. Эти четырехугольники диагоналями разбиваются на треугольники, которые таким образом образуют треугольную сетку (рис. 2).

Моделирование траекторий на стандартном треугольнике осуществляется только в его внутренних точках. В случае, если очередная точка при вычислениях методом Эйлера оказывается вне стандартного треугольника, делается переход в исходное двумерное пространство.

Для проведения расчетов рассматривалось крыло из углепластика, на передней кромке которого при взлете самолета моделировалось образование льда с использованием подвижной треугольной сетки.

Рис. 3. Значения температуры поверхности крыла при его обледенении *1* когда нет обледенения

На рис. 3 приведены результаты расчетов температуры поверхности крыла на передней кромке крыла, на его верхней части при нарастании льда и когда нет обледенения.

1. *Gusev S. A.* Using SDE for solving inverse parabolic boundary value problem with a Neumann boundary condition // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2007. — V. 22, No. 5. — P. 449–470.

ОЦЕНКА БЕЗОПАСНОСТИ ПОЛЕТОВ БЕСПИЛОТНЫХ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ ПРИ ИНТЕГРАЦИИ В ЕДИНОЕ ВОЗДУШНОЕ ПРОСТРАНСТВО: СОВРЕМЕННЫЕ ВЫЗОВЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

***К. А. Пантелеев*[1], *А. С. Попов*[2]**

[1]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия;* [2]*ГосНИИАС, Москва, Россия*

В последние годы наблюдается стремительный рост использования беспилотных воздушных судов (БВС) в различных сферах, от доставки грузов до мониторинга экологической обстановки. По данным Федерального управления гражданской авиации США, количество коммерческих полетов БВС в 2024 г. превысило 5 миллионов, что на 30% больше по сравнению с предыдущим годом (FAA, 2024–2044). Этот факт подчеркивает значимость интеграции БВС в единое воздушное пространство (ЕВП) и необходимость обеспечения их безопасной эксплуатации.

Актуальность исследования оценки безопасности полетов при интеграции БВС в ЕВП обусловлена стремительным развитием технологий беспилотной авиации и увеличением их применения. В 2025 г. прогнозируется рост количества операций с БВС в воздушном пространстве на 50% по сравнению с 2024 годом, что создает новые вызовы для системы организации воздушного движения. В условиях интеграции беспилотных воздушных систем БВС особую актуальность приобретают задачи обеспечения безопасности полетов и эффективного управления воздушным движением.

Современные исследования в области оценки безопасности полетов БВС при их интеграции в ЕВП фокусируются на разработке математических моделей, позволяющих предсказывать и анализировать потенциальные риски. Однако существующие модели часто не учитывают специфические особенности БВС, такие как их маневренность, ограниченный радиус действия и уязвимость к внешним воздействиям. Это создает пробелы в оценке реальных угроз и затрудняет разработку эффективных мер по обеспечению безопасности.

Для беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) важно учитывать риски, связанные с воздействием на людей на земле. В отличие от традиционной авиации, где основной акцент делается на предотвращение аварий и потерь для экипажа, в случае с БПЛА необходимо минимизировать количество людей, которые могут пострадать при падении устройства.

Целью настоящей работы является оценка безопасности выполнения полетов при интеграции БВС в ЕВП. Для достижения этой цели поставлены следующие задачи.

1. Анализ существующих математических моделей оценки безопасности полетов БВС и выявление их недостатков.

2. Анализ зарубежного и отечественного опыта организации воздушного движения и использования воздушного пространства при интеграции беспилотных воздушных судов в единое воздушное пространство.

3. Оценка безопасности полетов беспилотных и пилотируемых воздушных судов при их интеграции в единое воздушное пространство с использованием имитационного моделирования.

4. Разработка рекомендаций по улучшению процедур управления воздушным движением с учетом результатов моделирования.

1. Federal Aviation Administration. FAA Aerospace Forecast Fiscal Years 2024–2044 [Электронный ресурс]. — 2024. — URL: `https://www.faa.gov/data_research/aviation/aerospace_forecasts`.
2. Eurocontrol. Challenges of Growth 2025 [Электронный ресурс]. — 2025. — URL: `https://www.eurocontrol.int/publication/challenges-growth-2025`.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ПЛАНИРУЕМОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

И. Н. Статников, Г. И. Фирсов

ИМАШ РАН, Москва, Россия

Исследование динамики систем с несколькими ударными парами на ЭВМ требует моделировать для каждой из соударяющихся масс две группы дифференциальных уравнений движения: уравнения «свободного» движения массы в зазоре

и уравнения движения массы в контакте с ограничителем. При моделировании следует учитывать, что длительности интервалов движения для каждой из масс образуют совокупность случайных величин. Далее анализ проводим на примере двумерного движения массы в зазоре ($i = 1, 2$), моделирующего колебания i-го сечения теплообменной трубы [1]:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i + p_{ix}(\dot{x}, \dot{y}) + q_{ix}(x, y) &= F_{ix}(t), \\ m_i\ddot{y}_i + p_{iy}(\dot{x}, \dot{y}) + q_{iy}(x, y) &= F_{iy}(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь m_i — масса, приведенная к рассматриваемому i-му сечению; $p_{ix}(\dot{x}, \dot{y})$, $p_{iy}(\dot{x}, \dot{y})$ — проекции сил сопротивления движению на оси x и y, предполагающиеся зависящими и от скоростей в i-м сечении, и от скоростей относительного перемещения сечения; $q_{ix}(x, y)$, $q_{iy}(x, y)$ — проекции упругой силы, зависящие от величин абсолютного смещения i-го сечения и относительного смещения обоих сечений из положения статического равновесия, соответствующего недеформированному состоянию упругой системы; $F_{ix}(t)$, $F_{iy}(t)$ — внешние силы, возбуждающие колебания и заданные в виде явных функций времени. В предположении линейности диссипативных и упругих сил в (1) запишем систему уравнений на интервалах движения в зазоре в следующем виде:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = P_{1x}\sin\omega t, \tag{2}$$

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + c_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2) = P_{1y}\sin 2\omega t,$$

$$m_2\ddot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + c_3\dot{x}_2 + k_3x_2 = P_{2x}\sin\omega t, \tag{3}$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) + c_3\dot{y}_2 + k_3y_2 = P_{2y}\sin 2\omega t.$$

Удвоенная частота возбуждающей силы, действующей по оси y, соответствует вихревому характеру возбуждения колебаний трубы потоком жидкости. Очевидно, что сколько-нибудь подробный анализ динамики данной системы в зависимости от величин зазоров Δ_i, эксцентриситетов e_{ix}, e_{iy}, амплитуд возмущающих сил P_{ix}, P_{iy}, частоты возбуждения ω и диссипативных коэффициентов практически затруднен, поскольку потребуется провести десятки и сотни тысяч вычислительных экспериментов.

С учетом сказанного целесообразно применить для анализа зависимостей дина — мических характеристик от значений конструктивных параметров (зазоров, эксцентриситетов в ударных парах и т. д.) в широком диапазоне их изменения метод ПЛП-поиска, сочетающий квазиравномерный (по вероятности) выбор точек в многомерной области изменения значений параметров и подходы планирования вычислительных экспериментов, когда определяются значимые (по вероятности) параметры, области концентрации наилучших решений [2, 3]. В качестве варьируемых параметров были выбраны следующие: значения радиусов зазоров Δ_1 и Δ_2, ограничивающих перемещение масс; значения составляющих эксцентриситетов e_{ix} и e_{iy}, определяющих положение центров ограничителей относительно равновесного положения упругой системы; амплитуды P_{ix}, P_{iy} возбуждающих сил и частота возбуждения ω.

Введем вектор варьируемых параметров: $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$, $\alpha_3 = e_{1x}$, $\alpha_4 = e_{1y}$, $\alpha_5 = e_{2x}$, $\alpha_6 = e_{2y}$, $\alpha_7 = \ln(P_{1y}/P_{1x})$, $\alpha_8 = \ln(P_{2y}/P_{2x})$, $\alpha_9 = \omega$. Представление отношений амплитуд возбуждающих сил в форме экспоненциальной функции от соответствующих параметров α_7 и α_8, равномерно распределенных в анализируемой области пространства параметров, позволяет эффективно проводить вычисли-

тельные эксперименты в достаточно широкой зоне изменения отношений P_{iy}/P_{ix}, охватывающей точку равенства амплитуд $P_{ix} = P_{iy}$.

Приведем обозначения динамических критериев: $\Phi_1(\overline{\alpha})$, $\Phi_4(\overline{\alpha})$ — средние значения числа ударов первой и второй масс в установившемся режиме за один период возбуждающей силы; $\Phi_2(\overline{\alpha})$, $\Phi_5(\overline{\alpha})$ — средние значения накопленной нормальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени; $\Phi_3(\overline{\alpha})$, $\Phi_6(\overline{\alpha})$ — средние значения накопленной тангенциальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени; $\Phi_7(\overline{\alpha})$ — средняя доля времени, когда первая масса двигалась в контакте с ограничителем (режим скольжения); $\Phi_8(\overline{\alpha})$ — среднее значение скорости скольжения по ограничителю для первой массы; $\Phi_9(\overline{\alpha})$ — среднее значение силы нормального давления первой массы на ограничитель (для критериев Φ_8 и Φ_9 в качестве нормирующего множителя при усреднении выбирается длительность интервала скольжения). Аналогичные критерии с индексами от Φ_{10} до Φ_{12} вычисляются для движения массы m_2 в режиме скольжения по ограничителю.

Как говорилось выше, алгоритм ПЛП-поиска основывается на специальном планировании выбираемых векторов $\overline{\alpha}_k$, где k — номер вычислительного эксперимента; этот алгоритм обеспечивает достаточно равномерный «просмотр» всей области изменения каждого из параметров в заданной области поиска $G(\overline{\alpha})$. Было проведено 10 групп вычислительных экспериментов, отличающихся числом N_0 векторов (от 64 до 256) и областью исследования. В результате проведенного вычислительного эксперимента с исследуемой двухмассовой виброударной системой с двумя степенями свободы в заданной исходной области изменения коэффициентов математической модели $G(\overline{\alpha})$ (для конструктивных параметров реальной системы) удается выделить подобласти, концентрирующие наилучшие решения по критерию качества движения масс, причем, для большинства критериев эти подобласти совпадают между собой; данный вывод объясняется твердо установленными фактами наличия сильных линейных корреляционных связей между критериями (положительных и отрицательных); наличие таких связей позволяет существенно снизить размерность пространства критериев; установлен и статистически подтвержден факт о том, что в исследуемой математической модели наличие неравных зазоров в двух ударных парах при неравных амплитудах сил возмущения приводит к улучшению характеристик ударного режима, не меняя существенно значения характеристик режимов скольжения; в рамках рассматриваемой математической модели установлено, что минимальные значения динамических нагрузок при ограничении диапазонов варьирования анализируемых параметров (при выделении областей концентрации наилучших решений) достигаются в том случае, когда принимаются равными и величины зазоров в обеих парах, и амплитуды сил возбуждения.

1. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем. — М.: Наука, 2002. — 397 с.
2. *Статников И. Н.*, *Фирсов Г. И.* ПЛП-поиск как метод эвристического моделирования при проектировании машин и механизмов // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021). — М.: Изд-во МАИ, 2021. — С. 87–89.
3. *Статников И. Н.*, *Фирсов Г. И.* Эвристический подход к исследованию математических моделей систем на основе планируемых многоуровневых вычислительных экспериментов // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023). — М.: Изд-во МАИ, 2023. — С. 78–80.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ*

В. Ф. Формалев, С. А. Колесник, Б. А. Гарибян

МАИ, Москва, Россия

Многие материалы искусственного и естественного происхождения обладают анизотропией свойств переноса тепла. В них теплопроводность является не скалярной величиной, а тензором второго ранга, вследствие чего дифференциальное уравнение теплопроводности содержит смешанные производные температуры по пространственным переменным, а граничные условия в форме теплообмена содержат все компоненты градиента температур (а не только компонент в направлении нормали в случае изотропного тела).

Для решения задач для уравнений, содержащих смешанные производные метод разделения переменных не годится, поскольку смешанные производные не разделяются по пространственным переменным, исключая случай ортотропных тел. В частном случае неограниченных тел путем простейших подстановок уравнения анизотропной теплопроводности приводится к уравнению без смешанных производных [1, 2]. В краевых задачах такие подстановки деформируют область так, что метод разделения переменных применить невозможно. Остаются методы функции влияния (Грина) и методы интегральных преобразований (Фурье, Лапласа, Ханкеля и т. п.). Однако для применения таких преобразований область должна быть неограниченной, хотя бы, с одной стороны.

В данной работе поставлена и аналитически решена третья начально-краевая задача теплопроводности в анизотропном полупространстве. На основе построения граничной функции Грина получено новое аналитическое решение с использованием преобразования Фурье по одной из пространственных переменных и Лапласа — по времени. Проведенные численные эксперименты показали ориентацию тепловых потоков и изотерм вдоль главных осей тензора теплопроводности с большим коэффициентом теплопроводности и несимметрию изотерм относительно вертикальной оси тела. Исследование температурных полей в анизотропном полупространстве показал значительные перетоки тепловой энергии из одной области в другую с образованием положительных экстремумов внутри области, а не на ее границе.

1. *Формалев В. Ф.*, *Колесник С. А.* Математическое моделирование сопря-женного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизо-тропными телами. — М.: ЛЕНАНД, 2022.
2. *Формалев В. Ф.*, *Колесник С. А.* Аналитическое исследование теплопере-носа в анизотропной полосе при задании тепловых потоков на границах // ИФЖ. — 2016. — Т. 89, №4. — С. 973–982.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект №22-19-00420-П).

Секция В **ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: БАЗЫ И ХРАНИЛИЩА ДАННЫХ, МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА, НЕЙРОННЫЕ СЕТИ, ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА VISUAL SLAM ДЛЯ АВТОНОМНОЙ НАВИГАЦИИ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Р. А. Варыгин, П. А. Ухов

МАИ, Москва, Россия

В настоящие время в связи с невозможностью использования глобальных навигационных систем, исследования в области алгоритмов автономной навигации является актуальными для современных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Эффективное решение задач ориентации и перемещения БПЛА в пространстве особенно важно для применения в условиях, где отсутствует сигнал глобальных навигационных систем (GPS) из-за природных факторов, активного использования средств радиоэлектронной борьбы (РЭБ) или преднамеренного подавления навигационных сигналов. В таких сценариях БПЛА должны использовать методы навигации, не зависящие от GPS, но в то же время обеспечивающие высокую точность, надежность и устойчивость к воздействию внешних помех.

Одними из наиболее перспективных в части реализации автономной навигации являются алгоритмы SLAM (Simultaneous Localization and Mapping), которые представляет собой задачу одновременного построения карты окружающего пространства и локализации БПЛА в этом пространстве. При этом БПЛА должен использовать сенсорные данные для построения карты окружающего мира и определения собственного местоположения на ней. Группа алгоритмов VSLAM (Visual SLAM) полагается на камеры как основной сенсор для восприятия окружающей среды. Для построения карты применяются визуальные дескрипторы, такими как ORB [1], SIFT [2] или SURF [3].

Наибольшую точность дают алгоритмы на основе объединения сигналов с камер и данных инерциальной измерительной системы БПЛА. Одним из таких алгоритмов является VINS (Visual-INertial SLAM), который объединяет данные с камер и инерциального измерительного модуля (IMU), обеспечивая высокую точность и надежность локализации даже в сложных условиях. Основные преимущества VINS включают:

— комбинация данных с IMU и камеры позволяет компенсировать недостатки каждого из этих источников информации. Визуальные данные обеспечивают детализированную картину окружающей среды, тогда как инерциальные данные улучшают устойчивость локализации при быстром маневрировании БПЛА или временном отсутствии визуальной информации;

— малая чувствительность к изменениям освещения, поскольку инерциальные данные позволяют системе сохранять точность локализации при временном ухудшении качества визуальной информации.

В рамках исследования проведены эксперименты с запуском алгоритма визуально-инерциального SLAM (VINS-Fusion версии VINS-Fusion-GPU) на платформе Jetson Nano с 4 ГБ оперативной памяти. Задача заключалась в изучении возможностей и ограничений данной платформы для выполнения вычислительно сложных задач автономной навигации в реальном времени. Для работы системы была выбрана камера Intel RealSense D435i с глобальным затвором, обеспечивающая синхронизацию визуальных данных и данных инерциального измерительного модуля (IMU).

Основным инструментом для реализации нелинейной оптимизации в режиме реального времени служил Ceres Solver [4] — он объединяет данные от камеры и IMU для повышения точности локализации и снижения дрейфа.

Для детекции ключевых точек и построения модели пройденного пути используются нейросетевые модели на базе алгоритмов машинного обучения SuperPoint и LightGlue.

Несмотря на успешный запуск, платформа Jetson Nano продемонстрировала серьезные ограничения в производительности. Ограниченные оперативной памяти приводят к потере кадров из-за задержек в нодах ROS, что как следствие приводит к сбою в локализации и увеличению накопления ошибок. Увеличенная нагрузка на процессор и GPU привела к значительному нагреву устройства, что вызвало троттлинг (снижение производительности) и дальнейшее ухудшение результатов. Исходя из этого тестирование производилось путем записи изображений и инерциальных данных с камеры Intel Realsense T265 в ROS topics (rosbag) с дальнейшей обработкой алгоритмом VINS.

Для оценки качества работы алгоритмов был подготовлен датасет реальных полетов БПЛА над пересеченной местностью с учетом различных условий: время суток (день, утро, вечер), всех времен года, условия освещения и погодные аномалии (солнечно, переменная облачность, облачно, слабый дождь и др.). Выборка составила более 100 полетов продолжительностью от 10 до 30 мин. Набор данных содержит различные виды подстилающей поверхности от полей и перелесков до лесной местности. Во всех случаях наличие объектов искусственного происхождения минимально (в основном редкие сельские строения и дороги).

Исходя из полученных результатов можно сделать заключение, что для реализации SLAM алгоритма на борту БПЛА, позволяющего решать задачу автономной навигации, подходит группа алгоритмов на основе VINS-Fusion с аппаратным ускорением. Для запуска алгоритмов на бортовом вычислителе необходимо наличие соответствующих ресурсов — оперативной памяти не менее 8 Гб, GPU ускорителя с вычислительной мощностью не менее 20 Tops (int8).

По итогам выполненных работ выбраны блоки алгоритма для реализации SLAM на борту БПЛА, проведены тестовые полеты с сохранением наборов данных для последующего тестирования различных алгоритмов автономной навигации. Данные включают наборы видеоизображений и данных с измерительных устройств включая ГНСС для тестирования точности вычисления истинных траекторий полета. Полученные результаты позволят существенно ускорить тестирование алгоритмов в дальнейшем.

1. *Rublee E.*, *Rabaud V.*, *Konolige K.*, *Bradski G.*, *Bradski G.* ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF // Conference: IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV 2011, Barcelona, Spain, November 6–13, 2011. — DOI: 10.1109/ICCV.2011.6126544.
2. *Lowe D. G.* Distinctive Image Features from Scale-Invariant Key Points // International Journal of Computer Vision. — 2004. — V. 60. — P. 91–110. — DOI: 10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94.

3. *Bay H., Tuytelaars T., Van Gool L.* SURF: Speeded Up Robust Features // In: Leonardis A., Bischof H., Pinz A. (eds.) / Computer Vision — ECCV 2006. Lecture Notes in Computer Science. V. 3951. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. — DOI: 10.1007/11744023_32.
4. Ceres Solver [Электронный ресурс]. — URL: `http://ceres-solver.org/` (дата обращения: 12.01.2025).

НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОНКОПАТОЛОГИИ ПО АНАЛИЗУ ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ КРОВИ

Б. М. Гавриков, Н. В. Пестрякова

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Используемые в медицинской диагностике высокотехнологичные методы, казалось бы, перекрывают по своим возможностям процедуру анализа крови. Однако проблема ранней диагностики онкологических заболеваний не решена; даже использование компьютерной томографии не исключает ошибки в нахождении области локализации патологии. Предлагается подход, представляющий набор параметров крови как единый объект исследования.

Ранее для предварительной диагностики состояния здоровья человека (СЗЧ) по данным лабораторного анализа периферической крови был построен статистический классификатор [1], базирующийся на методе полиномиальной регрессии и имеющий вероятностные оценки. Рассматривались четыре градации СЗЧ: от практически здоровых до максимальной степени поражения организма (онкология) в рамках каждой отдельно взятой системы организма (СО). Использовались восемь показателей крови, характеризующих следующие ее компоненты: эритроциты, гемоглобин, тромбоциты, лейкоциты, лимфоциты, гранулоциты.

Аналогичный подход применен для поиска местонахождения онкопатологии.

С этой целью разработан статистический классификатор [2, 3]. Его обучение проведено на наборах параметров периферической крови онкобольных, относящихся к каждой из семи значимых СО пациентов мужского пола.

Пищеварительная система (C^1), органы дыхания (C^2), опорно-двигательный аппарат (C^3), урологическая система (C^4), эндокринная система (C^5), печень и желчевыводящие пути (C^6), центральная нервная система и органы чувствительности (C^7) — суть K определенных перенумерованных СО человека, $1 \le k \le K$, $K = 7$.

Введем вектор $v \in R^N$, i-я компонента которого — отнормированная на отрезок $[0, 1]$ величина i-го показателя крови онкобольных, где $N = 8$.

Отождествим [4] k-й элемент множества СО с базисным вектором из R^K: $e_k = (0 \ldots 1 \ldots 0)$, причем 1 находится на k-м месте, $1 \le k \le K$. Обозначим $Y = \{e_1, \ldots, e_K\}$.

Пусть существует $p_k(v)$ — вероятность того, что набор отнормированных показателей крови онкобольных соответствует k-му элементу СО, где $1 \le k \le K$. Искомый элемент СО будет иметь номер r, получивший максимальное значение вероятности:

$$p_r(\mathbf{v}) = \max_k \{p_k(\mathbf{v})\}, \quad 1 \le k \le K. \tag{1}$$

Приближенные значения $p_1(\mathbf{v}), \ldots, p_K(\mathbf{v})$ представляются в виде конечных многочленов от координат $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N)$ и определяются выбором базисных мономов:

$$p_k(v) \cong c_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{N} c_i^{(k)} v_i + \sum_{i,j=1}^{N} c_{i,j}^{(k)} v_i v_j + \ldots, \quad 1 \le k \le K. \tag{2}$$

Запишем упорядоченные мономы из (2) в виде вектора размерности L:

$$\mathbf{x}(\mathbf{v}) = (1, v_1, \ldots, v_N, \ldots)^T.$$

Тогда (2) можно представить в векторном виде:

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) = (p_1(\mathbf{v}), \ldots, p_K(\mathbf{v}))^T \cong A^T \mathbf{x}(\mathbf{v}), \tag{3}$$

где A — матрица размера $L \times K$, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(K)}$. Каждый такой вектор составлен из коэффициентов при мономах соответствующей строки (2) (с совпадающим верхним индексом), упорядоченных так же, как в $\mathbf{x}(\mathbf{v})$.

Значение A вычисляется приближенно в процессе обучения с использованием последовательности данных: $[\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}], \ldots, [\mathbf{v}^{(J)}, \mathbf{y}^{(J)}]$. Здесь $\mathbf{v}^{(j)}$ — набор параметров крови, соответствующий элементу СО с номером k $(1 \le k \le K)$, $\mathbf{y}^{(j)} = (0 \ldots 1 \ldots 0)$ — его базисный вектор, где 1 стоит на k-м месте, $1 \le j \le J$:

$$A \cong \Big(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \mathbf{x}^{(j)}(\mathbf{x}^{(j)})^T\Big)^{-1} \Big(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \mathbf{x}^{(j)}(\mathbf{y}^{(j)})^T\Big). \tag{4}$$

Поскольку проблема обращения заполненной матрицы большой размерности до сих пор не решена [5], правую часть (4) получаем посредством рекуррентной процедуры [4].

Нормирование проводим следующим образом. Рассмотрим совокупность семи обучающих выборок исследуемых СО. Для каждого i-го показателя крови находим минимальное и максимальное значение $v_i^{\min}$, $v_i^{\max}$, где $i = 1, \ldots, N$

$$v_i^{\min} = \min_j \{v_i^j\}, \quad j = 1, \ldots, J,$$

$$v_i^{\max} = \max_j \{v_i^j\}, \quad j = 1, \ldots, J,$$

где J — общий объем базы крови онкобольных по всем рассматриваемым СО.

Затем выполняем преобразование:

$$v_i \to \frac{v_i - v_i^{\min}}{v_i^{\max} - v_i^{\min}}.$$

Использовалась следующая модификация $\mathbf{x}(\mathbf{v})$:

$$\mathbf{x} = \big(1, \{v_i\}, \{v_i v_j\}, \{v_i v_j v_k\}, \{v_i v_j v_k v_l\}, \{v_i v_j v_k v_l v_m\}, \{v_i v_j v_k v_l v_m v_n\}, \{v_i v_j v_k v_l v_m v_n v_p\}\big),$$
$$1 \le i \le 8, \quad i \le j \le 8, \quad j \le k \le 8, \quad k \le l \le 8, \quad l \le m \le 8, \quad m \le n \le 8, \quad n \le p \le 8. \tag{5}$$

В (5) выражения в фигурных скобках соответствуют цепочкам элементов вектора, вычисляемым по всем показателям крови из имеющегося набора. Длина полинома 6435. Имеются мономы первого, второго, третьего, четвертого, пятого, шестого и седьмого порядка. Перекрестные произведения используются для мономов второго, третьего, четвертого, пятого, шестого и седьмого порядка.

Объем обучающей выборки:

— дифференцированный по классам — $|C^1| = |C^3| = |C^5| = 33$, $|C^2| = 21$, $|C^4| = |C^7| = 31$, $|C^6| = 25$;

— общий — $|C^1 UC^2 UC^3 UC^4 UC^5 UC^6 UC^7| = 207$.

Классификатор обеспечил точность более 95% на совокупном обучающем множестве из 207 элементов.

1. *Гавриков Б. М.*, *Гавриков М. Б.*, *Пестрякова Н. В.* Статистический метод распознавания на основе нелинейной регрессии // Математическое моделирование. — 2020. — Т. 32, №4. — С. 116–130.
2. *Гавриков Б. М.*, *Гавриков М. Б.*, *Лебеденко И. М.*, *Пестрякова Н. В.* Статистический классификатор для определения области локализации онкопатологии по анализу крови больного // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2024. — №22. — 15 с.
3. *Гавриков Б. М.*, *Пестрякова Н. В.* Диагностические медицинские классификаторы // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2024. — №3. — С. 16–27.
4. *Schürmann J.* Pattern Classification. — New York: John Wiley & Sons, 1996.
5. *Гавриков М. Б.*, *Локуциевский О. В.* Начала численного анализа. — М.: Янус, 1995.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ УРОВНЯ ПОТЕНЦИАЛА ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ТЕРРИТОРИЙ

Ф. В. Гречников, А. С. Клентак, В. Н. Пиунов, В. И. Ушаков

Самарский университет, Самара, Россия

В работе предложена модель на основе методологии Глобального инновационного индекса (ГИИ) с применением машинного обучения, включая нейронные сети. Использовались данные по 21 показателю и технологии Python, Scikit-learn и PyTorch. Предложенная нейросетевая модель (MLP) обеспечила высокую точность прогнозирования.

1. Введение. Современная экономика характеризуется высокой динамикой технологических изменений, где инновации становятся ключевым фактором конкурентоспособности стран и регионов. Глобальный инновационный индекс (ГИИ), разрабатываемый ВОИС (Всемирная организация интеллектуальной собственности), является одним из наиболее авторитетных инструментов для оценки инновационного развития, охватывая 132 страны [1]. Однако применительно к регионам России существующие рейтинги (например, АИРР, ВШЭ, Минобрнауки) обладают рядом ограничений: узкая направленность на технологические инновации, отсутствие комплексного учета социально-экономических факторов и недостаточная адаптация к региональной специфике [3].

Целью данной работы является разработка универсального инструмента для оценки инновационного потенциала регионов России на основе существующей методологии ГИИ с применением методов машинного обучения. Основные задачи:

— проведение сравнительного анализа российских и международных рейтингов инноваций;

— разработка модели машинного обучения для прогнозирования;

— оценка эффективности различных алгоритмов.

2. Методология и данные.

2.1. *Анализ существующих рейтингов.* Сравнительный анализ показал, что российские рейтинги (например, рейтинг Ассоциации инновационных регионов России — АИРР) фокусируются преимущественно на технологических аспектах, игнорируя влияние институциональных и социальных факторов [3]. В отличие от них, ГИИ учитывает 81 показатель, объединенный в семь ключевых категорий: институты, человеческий капитал и исследования, инфраструктура, развитие рынка, развитие бизнеса, технологии и знания, креативные результаты.

2.2. Используемые данные. Для анализа использовались данные ГИИ за 2022 г., включающие показатели по 132 странам. В рамках адаптации методо-

логии к российским регионам были отобраны 21 ключевой признак, такие как: доля занятых в наукоемких отраслях (%), затраты бизнеса на НИОКР (% ВВП), количество патентов на душу населения, доступ к ИКТ, венчурные инвестиции. Данные были предобработаны (нормализация) и разделены на обучающую (80%) и тестовую (20%) выборки.

2.3. *Методы машинного обучения.* Для построения модели применялись следующие алгоритмы: линейная регрессия, стохастический градиентный спуск, гребневая регрессия, дерево решений, случайный лес, экстремальный градиентный бустинг, метод K-ближайших соседей,метод опорных векторов, нейронная сеть на базе PyTorch, многослойный перцептрон (MLP) с тремя скрытыми слоями (ReLU-активация).

3. Результаты и обсуждение.

3.1. *Сравнение моделей.* Для оценки эффективности моделей использовались метрики:

1) среднеквадратичная ошибка (MSE);

2) коэффициент детерминации (R^2).

Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты тестирования моделей

Модель	MSE (тест)	R^2 (тест)
Линейная регрессия	34,31	0,67
Случайный лес	12,45	0,85
Градиентный бустинг	10,89	0,88
Нейронная сеть (MLP)	10,96	0,94

Наилучшие результаты показала нейросетевая модель ($R^2 = 0{,}94$), что свидетельствует о высокой точности прогнозирования.

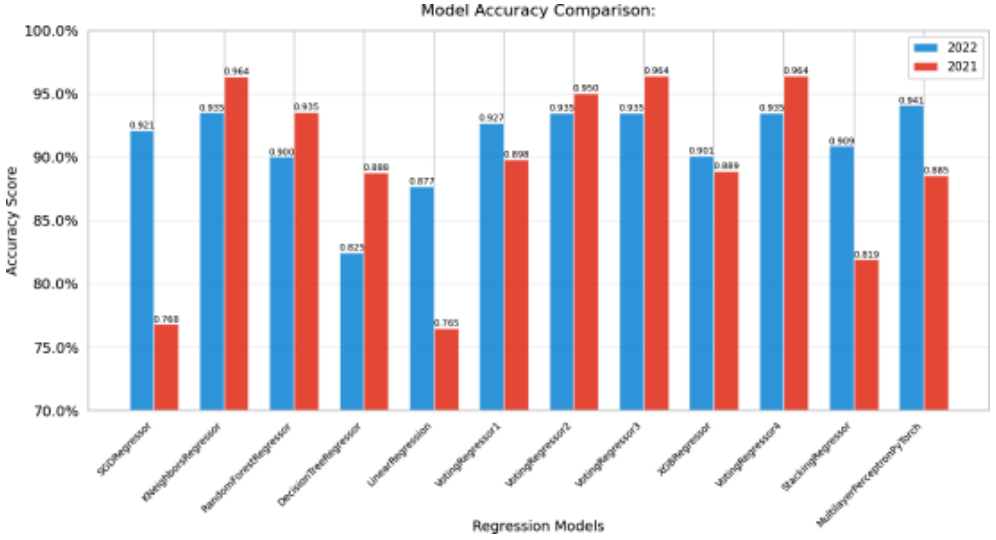


Рис. 1. Сравнение точности предсказаний

3.2. Визуализация результатов. Для наглядности была построена гистограмма точности предсказаний по R^2 на данных за 2021 (не включенный в обучающую выборку) и 2022 г. (рис. 1).

4. Заключение. Разработанный инструмент на основе ГИИ и машинного обучения позволяет оценивать инновационный потенциал регионов России с учетом международных стандартов, выявлять ключевые факторы инновационной активности. В перспективе — интеграция с данными Росстата, создание веб-приложения и адаптация модели для отраслевого прогнозирования.

1. Global Innovation Index 2022 [Электронный ресурс]. — URL: `https://www.wipo.int/gii`.
2. *Клентак А. С.*, *Козловский В. Н.*, *Пиунов В. Н.*, *Ушаков В. И.* Инструментарий оценки зрелости решений в системе менеджмента качества автопроизводителя по развитию промсборки с позиции обеспечения конкурентоспособности продукции // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2024. — Т. 26, №4. — С. 94–104.
3. *Козловский В. Н.*, *Клентак А. С.* Исследование комплексного инструментария, используемого для оценки инновационного потенциала развития регионов с точки зрения создания крупных машиностроительных производств // СТИН. — 2023. — №9. — С. 53–57.
4. PyTorch Documentation [Электронный ресурс]. — URL: `https://pytorch.org/docs`.
5. *Hastie T.*, *Tibshirani R.*, *Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. — 2nd ed. — Springer, 2009.

УЛУЧШЕНИЕ АЛГОРИТМА АВТОНОМНОЙ НАВИГАЦИИ ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЙРОСЕТИ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК

П. А. Елистратова, П. А. Ухов

МАИ, Москва, Россия

Задача автономной навигации известна уже не одно десятилетие, однако в современном мире она остается все такой же актуальной. Тем временем как задачи, выполняемые с помощью БПЛА, становятся сложнее и ответственнее, алгоритмы автономной навигации продолжают изучаться на предмет улучшений и доработок. Проведено много исследований по различным способам навигации [1, 2]. Оценка окружающей обстановки необходима для безопасного планирования и управления полетом, но заранее определить карту местности не всегда бывает возможно.

Одними из самых продвинутых современных методов для решения такой задачи являются алгоритмы SLAM (Simultaneous Localization and Mapping). Это алгоритмы, используемые для автономных транспортных средств, которые позволяют одновременно создавать карту и локализовать свое положение на этой карте. SLAM применяется в разных отраслях автономной навигации, однако на данный момент более популярен при разработке наземных робототехнических систем, и не так много исследований его использования для БПЛА. Работы по улучшению алгоритма в основном настроены на навигацию в помещении [3, 4]. Данная работа посвящена способам повышения точности навигации БПЛА на пересеченной местности.

В качестве базового алгоритма в работе был выбран визуальный SLAM (V-SLAM), использующий изображения, полученные с визуальных датчиков. Этот алгоритм может быть реализован с минимальными затратами, с его помощью легко обнаружить известные ориентиры и, по сравнению с другими датчиками, камеры быстро предоставляют большой объем информации.

Проанализирован алгоритм ORB SLAM — один из популярных алгоритмов визуального SLAM. Одним из этапов алгоритма является извлечение ключевых точек с полученных изображений методом ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF) и их дальнейшее сопоставление. Ключевые точки — это точки, которые вносят некий вклад в характеристику изображения и с большой вероятностью будут найдены на другом изображении одной сцены. Как правило — это угловые точки, либо точки, с резким изменением цвета, яркости и т. д. Для возможности сопоставления таких точек используются дескрипторы. Дескриптор — это идентификатор особой точки, который делает ее уникальной относительно остальных особых точек.

Помимо ORB, для решения задачи выделения признаков также существует множество других алгоритмов, например: SIFT, SURF, FAST, AKAZE и т. д. Это традиционные подходы, которые для извлечения и сопоставления точек используют классические математические алгоритмы. Активно развиваются и нейросетевые подходы, которые основаны на применении специально обученных нейросетей. Использование нейросетей в автономной навигации достаточно молодой и очень перспективный подход. Можно обучить модель под конкретную задачу на специфических данных и встроить ее в алгоритм SLAM. В работе были применены модели машинного обучения для алгоритма V-SLAM.

Для оценки качества алгоритмов была сформирована метрика оценки качества, которая позволила провести сравнительный анализ существующих методов извлечения и сопоставления ключевых точек на изображениях лесистой местности. Оценивались такие традиционные подходы, как SIFT, SURF, ORB и нейросетевые подходы — SuperPoint, R2D2. Для сопоставления точек применялся метод k ближайших соседей, а для способов SIFT и SuperPoint также еще посмотрели такой сопоставитель, как нейросеть LightGlue.

Для получения разнообразного и репрезентативного датасета для дообучения, был подготовлен датасет записей, снятых с помощью БПЛА, на которых полет осуществлялся в разные времена года над лесными участками с различной густотой и типом растительности. В соответствии с лучшим результатом проведенной оценки алгоритмов извлечения маркеров был размечен набор данных для дообучения модели SuperPoint.

Суть обучения модели SuperPoint заключается в подаче на вход пары изображений. Первое изображение — исходный кадр из сформированного датасета, второе — его гомографическая адаптация. Гомографическая адаптация — это применение случайных гомографий к исходному изображению, с ее помощью создаются несколько трансформированных версий исходного изображения с разными перспективными искажениями. Благодаря подаче на вход двух изображений, где второе было получено из первого, модель может сразу обучаться и извлекать ключевые точки, и строить их дескрипторы, таким образом чтобы они были сопоставляемы для пары изображений.

В результате повторной оценки уже дообученной модели, результаты показали, что SuperPoint стала находить кратно больше ключевых признаков на изображениях пересеченной местности, а также удалось добиться более высоких показателей в извлечении и сопоставлении ключевых точек по сформированной ранее метрике качества.

Проведенное исследование подтверждает эффективность дообучения модели SuperPoint для задач навигации беспилотных летательных аппаратов в сложных условиях лесистой местности и открывает новые перспективы для улучшения алгоритмов навигации, что, в свою очередь, может способствовать более безопасному и точному выполнению полетов БПЛА.

1. *Али Б.*, *Садеков Р. Н.*, *Цодокова В. В.* Алгоритмы навигации беспилотных летательных аппаратов с использованием систем технического зрения // Гироскопия и навигация. — 2022. — Т. 30, №4(119).
2. *Семенова Л. Л.* Современные методы навигации беспилотных летательных аппаратов // Наука и образование сегодня. — 2018.
3. *Стриженок А. С.*, *Шалаев А. В.*, *Полянский Н. А.* Исследование применения нейронных сетей для повышения точности SLAM методики в задачах одновременной локализации и картографирования // Вестник науки. — 2022. — Т. 3, №5(50). — С. 151–158. — URL: `https://www.вестник-науки.рф/article/5627`.
4. *Кэ Кэ Гэн*, *Чулин Н. А.* Алгоритм навигации беспилотного летательного аппарата на основе улучшенного алгоритма одновременной локализации и картографирования с адаптивным локальным диапазоном наблюдения // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2017. — №3.

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К СУММАРИЗАЦИИ НАУЧНЫХ ТЕКСТОВ

А. А. Жарова, В. И. Виноградов

МАИ, Москва, Россия

Автоматическая суммаризация научных текстов представляет собой актуальное направление обработки естественного языка. Целью работы является сравнительный анализ современных моделей абстрактивной суммаризации, адаптированных к научным публикациям, с акцентом на их эффективность при работе с корпусами высокого стилистического и терминологического уровня.

В качестве исходных данных использовался открытый корпус SciTLDR, содержащий научные статьи в области компьютерных наук и их краткие резюме. Для обучения и тестирования были выбраны три модели: T5-base, PEGASUS и Longformer Encoder–Decoder (LED). Предварительная обработка включала токенизацию, очистку от служебных символов, нормализацию длины входа.

Все рассматриваемые модели относятся к семейству трансформеров и реализуют архитектуру encoder–decoder. Входной текст сначала кодируется в последовательность скрытых представлений, после чего декодер генерирует резюме, поэтапно предсказывая следующую лексему. PEGASUS использует предобученный механизм маскировки целых предложений, благодаря чему достигается высокая согласованность и контекстуальная связность выходного текста. Модель T5 обучалась на множестве универсальных задач, включая суммаризацию, что обеспечивает ее общую применимость. LED разработана для обработки длинных входов и позволяет учитывать глобальный контекст научных публикаций, что важно при работе с полными текстами статей.

Качество выходных текстов оценивалось с применением автоматических метрик ROUGE, METEOR и BERTScore. По итогам тестирования модель PEGASUS достигла значений ROUGE-1 — 41,2, ROUGE-2 — 16,8, ROUGE-L — 35,5, METEOR — 26,1, BERTScore — 85,1. Модель T5-base показала сопоставимые результаты с меньшим качеством по всем метрикам, а LED, несмотря на относительно низкие значения ROUGE (ROUGE-1 — 34,1, ROUGE-2 — 12,0), демонстрировала стабильность при работе с длинными входными последовательностями и высокий уровень смысловой релевантности.

В ходе анализа установлено, что эффективность архитектур различается в зависимости от структуры и объема входного текста. PEGASUS целесообразно

использовать при генерации кратких научных резюме, LED — в задачах сжатия полнотекстовых публикаций. T5-base может рассматриваться как компромиссное решение для универсальных приложений. Все три модели в разной степени справляются с задачей переформулирования, однако требуют дополнительной адаптации к стилю научной литературы, особенно при переносе в новые предметные области. Полученные результаты подчеркивают важность выбора архитектуры и стратегии предобучения в зависимости от характера входных данных.

1. *Raffel C.*, *Shazeer N.*, *Roberts A.*, *Lee K.*, *Narang S.*, *Matena M.*, *Zhou Y.*, *Li W.*, *Liu P. J.* Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer // Journal of Machine Learning Research. — 2020. — V. 21, No. 140. — P. 1–67.
2. *Zhang J.*, *Zhao Y.*, *Saleh M.*, *Liu P. J.* PEGASUS: Pre-training with Extracted Gap-sentences for Abstractive Summarization // Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning (ICML). — 2020. — P. 11328–11339.
3. *Beltagy I.*, *Peters M. E.*, *Cohan A.* Longformer: The Long-Document Transformer [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https://arxiv.org/abs/2004.05150` (дата обращения: 15.04.2025).
4. *Cachola I.*, *Lo K.*, *Cohan A.*, *Smith N. A.* TLDR: Extreme Summarization of Scientific Documents // Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2020. — 2020. — P. 4766–4777.
5. *Lin C.-Y.* ROUGE: A Package for Automatic Evaluation of Summaries // Proc. of the Workshop on Text Summarization Branches Out (WAS 2004). — 2004. — P. 74–81.

ИНФОРМАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА ЛЕТЧИКА ПРИ ПОПАДАНИИ В СЛОЖНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

М. В. Желонкин, В. И. Желонкин, Е. Н. Кадильникова, С. А. Ковтун

ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия

Современный транспортный самолет является сложной высокоавтоматизированной машиной с большим количеством систем, обеспечивающих комфортное и безопасное управления для летчика на всех режимах полета [1]. При этом, большую часть маршрута, как правило, управление осуществляется автопилотом, а при ручном управлении, гарантия непопадания в критические режимы из-за действия внешних возмущений или ошибок пилотирования осуществляется с помощью автоматических ограничителей предельных режимов (ОПР). Тем не менее, как показывает практика, даже при столь высоком уровне автоматизации и наличии систем безопасности, авиакатастрофы, связанные с потерей управления в полете (Loss of Control In Flight, LOC-I по классификации ICAO), регулярно происходят, более того, LOC-I занимает первое место по суммарному числу катастроф согласно открытой статистике Boeing.

Задача информирования летчика о начинающемся сваливании, является актуальной, поскольку в настоящее время отсутствует какая-либо индикация сваливания, основывающаяся на анализе большого комплекса параметров движения самолета. Такой признак, как тряска, образующаяся при срывах потока на крыле, не является характерным признаком сваливания, более того характер входа в сваливание на разных самолетах может быть различным. Важным требованием является ранее обнаружение тенденции к сваливанию, когда самолет еще не потерял устойчивость, и у летчика есть возможность избежать дальнейшего развития сваливания коррекцией управления.

После обнаружения начала сваливания необходимо предпринять управляющие воздействия для возвращения на докритические углы атаки с целью избежать развития штопора, при этом для корректировки управления у летчика есть как правило несколько секунд. Задача коррекция управления после распознавания паттерна сваливания может быть частично или полностью автоматизирована за счет функционала бортовой интеллектуальной системы [2]. Поскольку каждый ЛА имеет при сваливании свои особенности, то необходимое корректирующее управления может отличаться, рекомендации по выводу из сваливания представлены в руководстве по летной эксплуатации каждого конкретного самолета. Таким образом возникает задача использования экспертных знаний об объекте управления для выхода из нештатной ситуации, реализовать эти знания в виде компонента системы управления позволяет аппарат нечеткой логики.

В работе было показано, что при попадании в нештатную, сложную или опасную ситуацию, как правило, связанную с выходом на большие углы тангажа, атаки, скольжения, крена, большие вертикальные скорости (в результате ошибочных действий летчика или прохождения неконтролируемых отказов систем самолета), способ и вид представления информации на штатном индиктаоре о пространственном положении самолета может привести к потери пространственной ориентации летчика [3]. Для помощи летчику в такой сложной ситуации в работе предлагаются специализированные информационные кадры, позволяющие летчику восстановить пространственную ориентацию и помочь в выводе самолета из сложного положения.

На рис. 1 представлен вариант такого информационного кадра — «вид из кабины на землю».

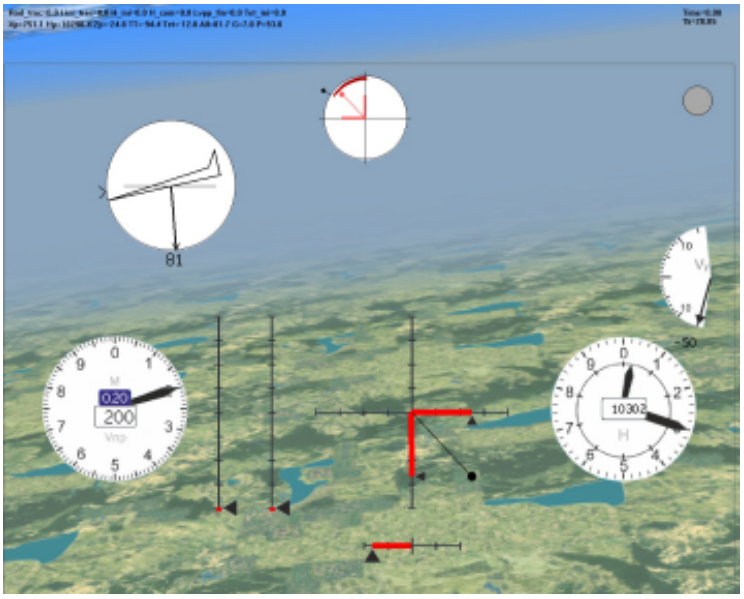


Рис. 1. Информационный кадр — «вид из кабины на землю»

Данный информационный кадр разработан по принципу обеспечения визуализации внекабинного пространства следующим способом — «вид с самолета на землю» с наложением пилотажной информации, в том числе той, какой нет на пилотажном кадре. Так, на предложенном информационном кадре выводится ин-

формация об угловых скоростях, информация в наглядном виде об угле атаки и угле наклона траектории и информация о командных отклонениях органов управления для помощи по выходу из сложного положения. Данный информационный кадр предлагается выводить в случае угрозы потери пространственной ориентации вместо навигационного кадра у левого или правого пилотов.

1. *Желонкин М. В.*, *Ковтун С. А.* Интеллектуальная система поддержки экипажа. Обработка входных сигналов // В сб.: XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023). Материалы мультиконференции. В 4-х т. / Редколлегия: И. А. Каляев, В. Г. Пешехонов, С. Ю. Желтов [и др.]. — Волгоград, 2023. — С. 194–195.
2. *Желонкин М. В.* Принципы формирования бортовой системы информационно-интеллектуальной поддержки летчика // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2019. — № 9(93). — С. 7.
3. *Желонкин М. В.*, *Ковтун С. А.*, *Кадильникова Е. Н.* Интеллектуальная система поддержки экипажа в сложных условиях. Проблемы и пути решения // В кн.: Фундаментальные проблемы создания СПС нового поколения. Сборник тезисов международной конференции. Москва, 2022. — С. 208–210.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЛЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

И. А. Кудрявцева, А. С. Первухин

МАИ, Москва, Россия

Работа посвящена исследованию и сравнению методов поиска аномалий и прогнозирования временных рядов с выраженной сезонностью. Проведен сравнительный анализ подходов, основанных на эконометрических моделях и методах классического машинного обучения. Описываются особенности применения рассматриваемых методов и моделей, а также приводятся рекомендации по их выбору в зависимости от структуры и свойств данных.

Анализируемый набор данных представляет собой временной ряд, отражающий ежедневное потребление электроэнергии в отдельных штатах США за период с 2004 по 2018 гг. Источником данных является энергетическая компания PJM Interconnection.

Перед построением моделей прогнозирования был проведен предварительный анализ временного ряда с целью определения его характеристик и выбора подходящих моделей для решения задачи прогнозирования. Анализ включал визуализацию исходного ряда и графика автокорреляции, а также применение теста Дики–Фуллера. По результатам теста (p-value = 0, ADF-статистика = −7,493848 при критическом значении −2,862 на уровне значимости 0,05) установлено, что временной ряд является стационарным. В связи с этим дополнительная трансформация данных (дифференцирование или логарифмирование) для использования авторегрессионных моделей не требуется [1].

С целью повышения точности прогнозирования с использованием моделей классического машинного обучения были сформированы экзогенные признаки. К ним относятся дневная температура (основной фактор, влияющий на изменение потребления электроэнергии), индикаторы выходных и праздничных дней, экономические показатели (исключены на этапе отбора признаков из-за низкой значимости), лаговые переменные и скользящие средние, календарные и сезонные признаки.

Для моделей, чувствительных к масштабу признаков, была выполнена стандартизация: из каждого признака вычиталось среднее значение и производилось деление на стандартное отклонение. Гиперпараметры моделей оптимизировались с помощью библиотеки Optuna.

Для решения задачи прогнозирования в работе используются следующие методы: линейная регрессия, градиентный бустинг (CatBoost), решающие деревья, модель авторегрессии и скользящего среднего (ARIMA), комбинация ARIMA и вейвлет-разложения, прогнозирование средним и методы экспоненциального сглаживания, Prophet, а также итерационный метод, при котором прогноз выполняется шагами, каждый раз дополняя обучающую выборку и позволяя использовать более узкие окна лагов и скользящего среднего.

Особое место занимает метод прогнозирования, основанный на предварительном вейвлет-разложении временного ряда. Исходный временной ряд $X(t)$ представляется в виде суммы компонент с разными масштабами $j \in \mathbb{Z}$ и частотами $k \in \mathbb{Z}$:

$$X(t) = \sum_{j,k} C_{j,k}\psi_{j,k}(t),$$

где $\psi_{j,k}(t)$ — вейвлет-функция, получаемая из базовой (материнской) вейвлет-функции $\psi(t)$ с помощью операций масштабирования и сдвига, $C_{j,k}$ — вейвлет-коэффициенты, показывающие вклад соответствующей вейвлет-компоненты в восстановление сигнала. Эти коэффициенты содержат информацию о локальных изменениях сигнала и его особенностях на разных масштабах и временных отрезках.

Затем каждая из полученных компонент прогнозируется отдельно, после чего выполняется обратное вейвлет-преобразование для восстановления итогового прогноза временного ряда $\widehat{X}(t)$:

$$\widehat{X}(t) = \sum_{j,k} \widehat{C_{j,k}}\psi_{j,k}(t),$$

где $\widehat{C_{j,k}}$ — прогнозируемые коэффициенты.

Данный подход позволяет существенно повысить точность прогнозирования за счет учета структуры временного ряда на различных масштабах и временных интервалах, а также эффективно справляться с шумами и сезонными колебаниями в данных [2].

После проведенного исследования прогнозных моделей были получены следующие выводы: лучший результат стабильно показывала модель CatBoost (MAPE = 5,6%), использование вейвлет-разложения при удачном подборе вейвлета способно улучшить прогноз ARIMA (на данном примере результат улучшился на 1,5%), автоматизированный поиск оптимальных гиперпараметров в каждом случае улучшал прогноз на 3–5%, итерационный прогноз показал слабые результаты из-за накопления ошибки на каждой итерации, но может быть полезен, если требуется построить короткий прогноз, либо короткие лаги (1–7 дней) сильно влияют на действительное значение временного ряда.

Для обнаружения аномалий исследуются и сравниваются статистические методы, такие как методы Z-оценок, доверительные интервалы и статистические тесты на выбросы. Кроме того, применяются методы машинного обучения: Isolation Forest, метод опорных векторов (SVM), метод локального выброса факторов (LOF), алгоритм кластеризации DBSCAN, а также подходы на основе реконструкции временного ряда [3].

Для исследования методов обнаружения аномалий к исходному временному ряду были искусственно добавлены точечные, групповые и временные выбросы. Для обнаружения точечных аномалий наилучшие результаты показывает реконструкция временного ряда на основе экспоненциального сглаживания Хольта–Уинтерса с последующим применением правила трех сигм к остаткам модели. При выявлении временных (групповых) аномалий наиболее эффективно зарекомендовал себя метод локального фактора выброса (LOF). Однако классические алгоритмы в целом демонстрируют невысокое качество на этой задаче — значения точности, полноты и F1-меры для всех протестированных моделей находятся в пределах 0,3–0,5. Следует подчеркнуть, что в областях, где критично минимизировать число пропущенных аномалий (например, противодействие финансовому мошенничеству, кибербезопасность, мониторинг медицинского оборудования), высокой полноты можно добиться за счет целенаправленной перенастройки моделей и сознательного увеличения доли ложных срабатываний, то есть при некотором снижении точности [4].

В рамках исследования разработано программное обеспечение на языке Python, необходимое для реализации описанных методов. Полученные результаты демонстрируют особенности рассмотренных подходов, обеспечивая возможность выбора оптимальных методов для практического применения в различных задачах анализа временных рядов.

1. *Афанасьев В. Н.*, *Юзбашев М. М.* Анализ временных рядов и прогнозирование. — М.: Финансы и статистика, 2010. — 286 с.
2. *Витязев В. В.* Вейвлет-анализ временных рядов. — СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 2001. — 61 с.
3. *Paul Boniol*, *Qinghua Liu*, *Mingyi Huang*, *Themis Palpanas*, *John Paparrizos*. Dive into Time Series Anomaly Detection: A Decade Review. — Columbus: The Ohio State University, 2024.
4. *Nesryne Mejri*, *Laura Lopez-Fuentes*, *Kankana Roy*, *Pavel Chernakov*, *Enjie Ghorbel*, *Djamila Aouada*. Unsupervised anomaly detection in time-series: An extensive evaluation and analysis of state-of-the-art methods // Expert Systems With Applications. — 2024. — V. 256.

ТЕСТИРОВАНИЕ СОЗДАНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ МАШИН С РАЗЛИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРОЦЕССОРА НА СЕРВЕРНЫХ ГИПЕРВИЗОРАХ

О. Р. Лисовский

МАИ, Москва, Россия

Серверные гипервизоры применяются в современной инфраструктуре облачных сервисов, потому что они обеспечивают масштабируемость и надежность [1]. Они содержат широкий спектр параметров для виртуальных процессоров, что позволяет создать виртуальную машину для любой задачи [2]. Однако, каждый такой параметр увеличивает сложность программы и повышает вероятность ее нештатной работы. Любые ошибки в процессе работы гипервизора могут обернуться значительными потерями времени и финансов. Единственный способ предотвращения ошибок гипервизоров в целом и работы виртуальных процессоров в частности — тщательное тестирование компонента «виртуальный процессор». Но без четких ограничений и оптимизаций тестирование может занять много времени. В данной

работе будет приведен список с минимально необходимым количеством тестов создания виртуальных машин с различными параметрами виртуального процессора. Минимальное количество можно получить с помощью разбиения на классы эквивалентности, которые позволят сократить группу тестов до единичного [3].

Перед всеми дальнейшими тестами требуется проверить успешное создание виртуальной машины с другими стандартными параметрами: RAM, виртуальными жесткими дисками, сетями и т. д. У виртуального процессора обязательно требуется проверка следующих настроек: количество процессорных ядер, распределение ядер по сокетам, резервирование частоты процессора, ограничение частоты процессора, модели процессоров и добавление процессорных ядер без остановки работы машины. Все перечисленные параметры проверяются через мониторинг гипервизора и через средства мониторинга операционной системы, установленной на виртуальную машину.

Для тестов на количество виртуальных процессорных ядер предполагается провести четыре позитивных теста: с минимальным количеством ядер (одно ядро), со стандартным количеством ядер (например, четыре), с максимально возможным количеством ядер на отдельном физическом хосте (зависит от установленных в него процессоров) и с максимально возможным количеством ядер (определяется разработчиками, если такое значение отсутствует, то тест объединяется с предыдущим). Кроме этого, необходимо провести два негативных теста: количество ядер больше максимума физического хоста и количество ядер больше максимально возможного (если такое значение отсутствует, то тест объединяется с предыдущим).

Для распределения ядер на сокет достаточно будет провести три позитивных теста: со сбалансированным распределением (например, четыре сокета по четыре ядра), с максимальным количеством ядер в одном сокете и с максимальным количеством ядер по одному на сокет. В двух последних тестах предполагается использовать максимально возможное количество, установленное гипервизором, но если таких ограничений нет, то необходимо использовать максимум физического хоста с большим количеством ядер. Также стоит учесть два негативных теста: тест, где число сокетов превышает число ядер, и тест, где количество сокетов не кратно количеству ядер.

Для резервирования (задания минимальной) частоты процессора и ограничения частоты процессора требуется по три позитивных теста и по одному негативному: минимальное значение, предполагаемое стандартное значение, максимально возможное значение и значение, превышающее максимальное (для ограничения частоты этот тест может отсутствовать, ввиду отсутствия самого ограничения).

Для тестирования моделей процессора необходимо проверить все предлагаемые гипервизором варианты, что потребует несколько физических хостов, так как не все модели могут быть эмулированы на одном физическом процессоре. Но всегда требуется проверить эмулирование процессора, близкого к физическому, и прямой проброс в виртуальную машину физического процессора.

Для тестирования добавления ядер без остановки виртуальной машины необходимо провести три позитивных теста: без такой возможности, с возможностью добавить минимальное количество ядер (например, одно), с возможностью добавить несколько ядер и с возможностью добавить все доступные ядра (желательно довести их до максимально допустимого или до максимально возможного в рамках физического хоста). Кроме того, необходимо провести еще два негативных теста: с возможностью добавить больше ядер, чем есть на физическом хосте, и с возможностью добавить больше ядер, чем допускает гипервизор (при наличии такого ограничения).

С применением классов эквивалентности для минимального тестирования создания виртуальных машин с различными параметрами виртуального процессора удалось установить количество необходимых тестов на отрезке от 17 до 18 позитивных тестов (модели процессоров помимо близкого к модели физического хоста и прямого проброса процессора физического хоста не учитывались) и от пяти до восьми негативных тестов, сохранив их независимость, что гарантирует тестирование в многопоточном режиме. Подобный подход в будущем планируется применить для тестирования остальных составляющих виртуальной машины.

1. *Portnoy M.* Virtualization Essentials. — Indianapolis: John Wiley & Sons, 2012. — 304 p.
2. *Olzak T.*, *Sabovik J.*, *Boomer J. et al.* Microsoft Virtualization: Master Microsoft Server, Desktop, Application, and Presentation Virtualization. — Burlington: Syngress Publishing, 2010. — 512 p.
3. *Bhat A.*, *Quadri S. M. K.* Equivalence class partitioning and boundary value analysis — A review // IEEE International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACom). — 2015. — P. 1557–1562.

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛЬФА-ВЕРСИИ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УЧЕТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБЪЕКТОВ ПО ЗАДАННЫМ КРИТЕРИЯМ

А. А. Литовченко, О. Н. Третьякова

МАИ, Москва, Россия

Нашей задачей было проведение исследования возможности создания и разработки программной реализации автоматизированной системы учета деятельности объектов, которая сможет в дальнейшем гибко адаптироваться под различные задачи.

Нами были сформулированы требования к создаваемой системе, а именно: система должна предоставлять возможность ввода, хранения, обработки и анализа данных по заданным критериям, а также обеспечивать простой понятный и эргономичный интерфейс для пользователя. В соответствии с указанными требованиями была создана первая версия программной реализации системы учета. В настоящий момент в качестве конкретных примеров реализации системы использованы два: 1) учет профсоюзной деятельности студентов института; 2) учет посещаемости и успеваемости студентов института, с возможностью выбора и сортировки по заданным критериям и наглядного представления результатов автоматического анализа данных.

Для реализации первой версии программы был создан веб-сервис основанный на монолитной архитектуре клиент–сервер. Серверная часть разработана с использованием фреймворка FastAPI с применением асинхронной логики обработки запросов и связана с реляционной базой данных PostgreSQL. Клиентская часть построена с применением библиотеки React: созданы динамические страницы администраторов, а также компоненты для записи, редактирования или удаления данных. В системе реализовано разграничение правд доступа в зависимости от типа учета и принадлежности к определенному подразделению. Все компоненты веб-сервиса обернуты в Docker-контейнеры для упрощения развертывания и поддержки системы.

В дальнейшем мы предполагаем продолжить разработку в данном направлении, для расширения возможности применения уже созданной версии программы и

базы данных, а также доработки и совершенствования программной реализации с последующей возможностью адаптации системы для других задач.

1. FastAPI Documentation. Официальный сайт [Электронный ресурс]. — URL: `https://fastapi.tiangolo.com`.
2. PostgreSQL Documentation. Официальный сайт [Электронный ресурс]. — URL: `https://www.postgresql.org/docs/`.
3. React Documentation. Руководство по разработке интерфейсов [Электронный ресурс]. — URL: `https://reactjs.org/docs/getting-started.html`.
4. Docker Documentation. Официальный сайт [Электронный ресурс]. — URL: `https://docs.docker.com`.

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К АВТОМАТИЗАЦИИ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЙ

А. М. Ольшанский

БелГУ, Белгород, Россия

Доклад посвящен некоторым особенностям построения автоматизированных систем, использующих искусственные нейронные сети (ИНС) с элементами управления для построения графиков движения поездов (ГДП) на железных дорогах.

Изменение условий работы железных дорог, повышение уровня нестабильности грузопотоков, возросшие требования участников перевозочного процесса к гибкости реагирования со стороны перевозчиков, наличие инфраструктурных и усиление технологических ограничений привели увеличению степени использования пропускной способности на ряде направлений. Методы управления работой таких линий, включая и построение оперативных расписаний, остались, в большинстве своем, теми же, которые были характерны для стабильного режима транспортных систем в условиях экономики СССР и РФ в период до 2018 г. Основными решениями по разработке графиков является автоматизированная разработка на базе копирования существующих расписаний с элементами их частичной модификации. В таких условиях требуется применение новых подходов и алгоритмов, основанных на интеллектуальной обработке данных, часто с совмещением преимуществ различных алгоритмов — эволюционных, случайного поиска, искусственных нейронных сетей и т. п.

В условиях интенсивного движения поездов, при уровне заполнения пропускной способности линии (до 80–90%) задача построения ГДП решается не классическими методами теории расписаний, а с помощью разработанных программных комплексов, реализующих алгоритмы управления созданной для построения расписаний ИНС [1]. Принципы управления работой ИНС, применяемых для построения расписаний, изложены в [2].

Основными этапами разработки программного обеспечения для функционирования созданной ИНС являются следующие:

1) построение и описание модели процесса управления ИНС;

2) описание процессов с ограничениями, функционалами качества управления каждым процессом, ресурсными и временными ограничениями;

3) проектирование базы данных для фиксации информации о процессах в системе;

4) алгоритмическое описание работы ИНС – объекта управления;

5) описание нейронных сети-контроллера и/или сети-супервайзера;

6) проектирование блока ИНС-инструментов управления;

7) сборка общей схемы и отладка системы управления.

Важно отметить, что реализация этапов 1) и 2) должна проходить с учетом технологии работы той системы, расписание для которой строит специализированная ИНС.

С точки зрения практики и разработки программного продукта управление работой ИНС при составлении расписания должно удовлетворять следующим требованиям:

1. Учитывать и элиминировать возмущающее влияние внешней среды.

2. Быть жестким в тех подпроцессах, которые имеют отчетливый технологически закрепленный характер, и многовариантным в звеньях на границах технологической цепочки, моделируемой данным ПО.

3. Базироваться на принципах самообучения.

Решение первой из задач обеспечивается наличием в конуре управления некоторого анализатора состояния внешней среды, которая предварительно должна быть описана для рассматриваемого процесса как набор факторов, влияющих на режим протекания процессов.

Общее управление процессом будет построено на основе полисистемного ансамблевого нейросетевого анализатора в форме ИНС-контроллера.

Полисистемность означает возможность разложения единого системного процесса на составляющие как по функциональному (движение по полигону, регулировка оборота локомотивов, движение поездов особых категорий и т. п.), так и по пространственному признаку (регион, полигон, транспортная сеть). Таким образом, обеспечивается масштабируемость предлагаемых нейросетевых решений.

Термин «ансамблевый» обозначает тот факт, что в контур включено несколько нейронных сетей, одна из которых является руководящей и анализирующей работу иерархически подчиненных ей сетей.

Конструктивно анализатор включает в себя два нейросетевых блока, первый из которых, ИНС (контроллер), непосредственно вырабатывает управляющие команды в адрес объекта управления (модели рассматриваемого системного процесса) на основе нейросетевого управления с эталоном.

Эталон как модель протекания процесса формируется под воздействием различных факторов, в том числе сигналов от ИНС (супервайзер), которая производит опосредованное сравнение состояния исследуемого процесса с состоянием, которое определено как технологически нормированный уровень работы полигона (системы). Вопросы технического нормирования работы полигонов и станций рассмотрены в [3].

Такой подход чаще всего применяется для проектирования управления транспортными процессами.

Отклонение состояния процесса от допустимого приводит к корректировке модели процесса, чем обеспечивается адаптивность процесса управления, а набор предлагаемых методов и различных решений, релевантных каждой из ситуаций, обеспечивает многовариантность управления. В случае, когда объектом управления выступает специализированная ИНС, происходит не корректировка модели технологического процесса, а переобучение ИНС-контроллера.

Разработанный таким образом программный продукт позволяет реализовать четыре правила управления работой ИНС при построении расписания: правило работы по умолчанию, правило работы с регулировкой ширины пучка нейронных связей, правило применения PID-управления работой ИНС, а также наиболее общее правило применения ИНС с нейросетевым управлением. В качестве ИНС-кон-

троллера был использован многослойный персептрон (2-20-1) с сигмоидальными функциями активации.

Использование нейроуправления при работе с ИНС на модельном участке (1000 км, 24 ч) с помощью созданного ПО позволяет прокладывать расписания с плотностью движения до 11–12 грузовых поездов в час в одном направлении, при этом выбросы экстремальных значений ошибок сети снижаются в 1,7–2,2 раза по сравнению с техникой работы без нейросетевого управления, а трудоемкость по сравнению с традиционным построением расписания падает в среднем на 28%.

Таким образом, реализованный подход позволил создать прототип инструмента для управления работой ИНС для построения расписания.

1. *Игнатенков А. В.*, *Ольшанский А. М.* Разработка искусственной нейронной сети для построения графика движения поездов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. — 2016. — №55. — С. 73–80.
2. *Игнатенков А. В.*, *Ольшанский А. М.* Управление величиной ошибки в нейронных сетях // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2016. — Т. 18, №4-4. — С. 733–738.
3. *Грунтов П. С.*, *Дьяков Ю. В.*, *Макарочкин А. М.* Управление качеством эксплуатационной работы / Под ред. П. С. Грунтова. — М.: Транспорт. 1994.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ ПО СИГНАЛАМ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММЫ

Д. Р. Псеунов, А. С. Алексейчук

МАИ, Москва, Россия

Анализ ЭКГ является ключевым элементом диагностики и мониторинга сердечно-сосудистых заболеваний. В последнее десятилетие наблюдается рост интереса к автоматизированным методам обработки ЭКГ благодаря прогрессу в области машинного обучения и доступности медицинских данных. Целью представленной работы является применение алгоритмов машинного обучения к задаче классификации четырех состояний сердца — нормальный синусовый ритм, аритмия, фибрилляция предсердий, застойная сердечная недостаточность — по характеристикам ЭКГ-сигналов.

В качестве исходного набора данных использовался предварительно подготовленный CSV-файл. Данный файл содержит 1200 записей ЭКГ с 56 признаками, включая временные интервалы, амплитудные и вариационные характеристики сердечного ритма, а также метки для каждого из четырех состояний. Проведена предварительная очистка и нормализация данных, обработка пропущенных значений и кодирование категориальных признаков. Для построения моделей использовалась среда Jupyter Notebook и язык программирования Python с применением библиотек scikit-learn, pandas, matplotlib и seaborn.

Обучены две модели: логистическая регрессия и случайный лес. Обе модели продемонстрировали высокие значения метрик качества: точность (accuracy) для Random Forest составила 99,2%, а для логистической регрессии — 94,6%. Различия в точности объясняются способностью случайного леса захватывать сложные нелинейные зависимости, тогда как логистическая регрессия лучше подходит для выявления линейных закономерностей.

Был проведен сравнительный анализ важности признаков для каждой из моделей. В случае Random Forest наиболее значимыми оказались такие характеристики, как: NNTot (общее количество NN-интервалов), RTdis (дисперсия интервала $R–T$), RMSSD (метрика вариабельности сердечного ритма), QTdis, STdis и др.

Для логистической регрессии важными признаками стали: PQRang и QRSang (электрические углы между сегментами), PPmean и RRmean (средние интервалы между волнами P и R соответственно), STseg, PTseg и другие продолжительности и дисперсии сегментов.

Такой анализ позволяет не только повысить точность моделей, но и лучше интерпретировать медицинское значение выявленных признаков. Полученные результаты подчеркивают необходимость использования различных моделей в задачах медицинской диагностики, поскольку разные алгоритмы могут по-разному интерпретировать значимость признаков в данных.

Перспективы дальнейшей работы включают расширение выборки и применение кросс-валидации, использование более сложных ансамблевых методов и нейронных сетей и разработку интерфейсов интерпретации модели для использования в клинической практике.

Таким образом, результаты работы подтверждают возможность эффективного применения алгоритмов машинного обучения для автоматической классификации сигналов ЭКГ и выявления паттернов, значимых для диагностики сердечно-сосудистых заболеваний.

1. *Goldberger A. L.*, *Amaral L. A.*, *Glass L.*, *Hausdorff J. M.*, *Ivanov P. C.*, *Mark R. G.*, *Mietus J. E.*, *Moody G. B.*, *Peng C. K.*, *Stanley H. E.* PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: components of a new research resource for complex physiologic signals // Circulation. — 2000. — V. 101. — P. 215–220.
2. *Aurelien G.* Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. — 2nd ed. — O'Reilly Media, Inc., 2019. — P. 19–146.
3. *Hosmer D. W.*, *Lemeshow S.* Applied Logistic Regression. — 3rd ed. — John Wiley & Sons, Inc. 2013. — P. 392.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФРЕЙМВОРКОВ БОЛЬШИХ ДАННЫХ: HADOOP, SPARK И FLINK

И. А. Романова

МАИ, Москва, Россия

Анализ Big Data с помощью распределенных вычислений. В настоящее время практически любая отрасль сталкивается с огромным количеством данных, накапливаемых ежедневно. Для эффективной обработки таких данных необходимы специальные инструменты и методики. Одной из ключевых технологий является распределенное хранение и обработка данных. Одним из лидеров в этой области является Apache Hadoop, однако существуют и альтернативные инструменты, такие как Apache Spark и Apache Flink, каждый из которых предлагает уникальные преимущества.

Hadoop. Hadoop — это открытый фреймворк, основанный на Java и лицензированный Apache Foundation. Основная цель Hadoop — обеспечить эффективное хранение и обработку больших объемов данных с помощью двух основных компонентов:

Таблица 1

Сравнение Hadoop, Spark и Flink

Критерий	Hadoop	Spark	Flink
Основана на	Apache	Apache	Apache
Основная функция	Пакетная обработка	Пакетная + потоковая	Потоковая
Модель обработки	MapReduce	Микропакеты	Непрерывная потоковая передача
Архитектура потока	Линейный поток	Циклический DAG	Контролируемый цикл
Производительность	Медленная	Высокая	Самая высокая
Память	Статическая/ Динамическая	Автоматическое	Автоматическое
Отказоустойчивость	Репликация данных	Lineage	Снимки состояний
Масштабируемость	Очень высокая	Высокая	Высокая
Поддержка SQL	Через Apache Hive	Spark SQL/Hive	Table API/Flink SQL
Использование ML	Apache Mahout	Spark MLlib	FlinkML
Оборудование	Недорогое	Более дорогое	Аналогично Spark
Цена строки кода	$\sim$ 120 тыс. строк	$\sim$ 20 тыс. строк	Менее Hadoop
Доступность	Высокая доступность	Высокая доступность	Высокая доступность
Windows Criteria	Нет	Временные окна	Запись окон
Лицензия	Apache License 2.0	Apache License 2.0	Apache License 2.0

HDFS (Hadoop Distributed File System) — файловая система, обеспечивающая надежное и масштабируемое хранение данных.

MapReduce — модель программирования, предназначенная для параллельной обработки данных на нескольких серверах одновременно.

Преимущества Hadoop заключаются в низкой стоимости аппаратного обеспечения, устойчивости к сбоям и отличной масштабируемости. Однако существенным недостатком является сравнительно низкая скорость обработки данных по сравнению с конкурентами.

Apache Spark. Spark — это инструмент для обработки данных с открытым исходным кодом, предназначенный для ускорения аналитики. Основное отличие Spark от Hadoop состоит в том, что Spark хранит промежуточные результаты вычислений в оперативной памяти, что значительно ускоряет выполнение задач.

Среди возможностей Spark выделяют:

— поддержку различных видов обработки данных: пакетную, потоковую, интерактивные запросы и машинное обучение;

— простоту интеграции с такими языками программирования, как Java, Python, Scala и R;

— ыысокую гибкость благодаря встроенным инструментам для анализа и визуализации данных.

Таким образом, Spark хорошо подходит для задач, требующих быстрых итераций и многократного обращения к данным.

Apache Flink. Flink — еще одна открытая платформа для обработки больших данных, разработанная Apache Foundation. Ее основное назначение — работа с потоковыми данными в реальном времени. Хотя Flink также поддерживает пакетную обработку, наибольшую известность получила именно благодаря своим возможностям потоковой обработки.

Особенность Flink заключается в уникальной архитектуре, обеспечивающей высочайшую производительность и низкие задержки. Именно поэтому Flink часто называют следующим поколением систем потоковой обработки.

Каждый из рассмотренных инструментов — Hadoop, Spark и Flink — решает разные задачи и ориентирован на собственные цели. Выбор конкретного инструмента должен зависеть от характера ваших данных и требований к их обработке. Если вам важна высокая скорость обработки и доступ к интерактивному анализу, то ваш выбор — Spark. Если же ваша главная задача — работа с потоковыми данными в реальном времени, обратите внимание на Flink. Наконец, если приоритет отдается стабильной и недорогой обработке больших объемов данных в пакетном режиме, выбирайте Hadoop.

1. *Белый Т.* Hadoop: Руководство по применению. — М.: Вильямс, 2019.
2. *Эвен С.*, *Шустер А.*, *Батсов К.*, *Баумер Й.*, *Грайфе Н.*, *Маркль В.* Обзор и сравнение систем потоковой обработки данных в масштабе // ACM SIGMOD Record. — 2016. — Т. 45, №2.
3. *Ван Ю.*, *Ли К.*, *Чжанг Цзянь*, *Ян Дж.* Сравнительное исследование открытых платформ больших данных: Hadoop vs. Spark vs. Flink // IEEE Access. — 2018. — Т. 6. — С. 314–323,
4. *Симонович С. В.* Технология Hadoop: практика и теория. — М.: Инфра-М, 2019.
5. *Гончаров С. И.* Практическое руководство по использованию Apache Spark. — Самара: СамГУПС, 2018.
6. *Евдокимов С. Е.* Методы анализа больших данных с применением Apache Hadoop и Apache Spark. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2019.
7. *Попов В. Н.* Рекомендации по настройке и оптимизации кластеров Hadoop. — Ростов-на-Дону: Ростовский государственный экономический университет, 2019.
8. *Курбатов А. В.* Справочное пособие по Apache Spark и Apache Flink. — Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2020.
9. *Полянский С. В.* Оптимизация распределенных вычислений на платформах Hadoop, Spark и Flink. — Екатеринбург: УрФУ, 2021.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ПЕРИФЕРИЙНЫХ УСТРОЙСТВ МЕХАНИЗМОВ И РОБОТОВ

***М. С. Сеимов*[1], *С. С. Крылов*[1], *Г. С. Филиппов*[1,2]**

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*ИМАШ РАН, Москва, Россия*

В большей части проектов physical computing взаимодействие с окружающим миром может быть представлено в виде следующего трехэтапного итеративного цикла событий [1]:

1. Прием информации (Input): получение определенных данных от окружающей среды в виде сигналов с помощью различных датчиков (сенсоров).

2. Обработка информации (Processing): обработка непосредственно сигнала (удаление шума, частотный анализ), преобразование информации при необходимости, ее интерпретация и расчет необходимых для этапа вывода данных.

3. Вывод (Output): осуществление воздействия на окружающую среду. Хотя иногда сама обработанная информация может являться целью существования системы, в классическом понимании physical computing последняя должна поддерживать цикл взаимодействия с окружающим миром.

Системы, чья работа может быть описана в терминах подобного цикла, являются замкнутыми.

Замкнутыми называются системы, которые в течение длительного времени нужным образом изменяют какие-либо физические величины в том или ином управляемом процессе, в которых при этом контрольные приборы, измерив эти величины, сами служат источником воздействия на систему [2].

Существует множество разных подходов классифицировать различные датчики [3–5]. Рассмотрим данные классы и определим, какие особенности проектирования системы они определяют по физическому принципу действия; по функциональному назначению; по необходимости внешнего источника энергии; по наличию вмонтированных вычислительных устройств; по характеру изменения выходного сигнала; по виду выходного сигнала.

Цифровые датчики могут передавать информацию управляющему устройству в разных формах: одни буквально передают логические значения (например, кнопка: нажата (1) или отпущена (0)), другие передают информацию в виде длительности сигнала (сонар HC-SR04, например, будет передавать высокое напряжение, пока не уловит посланный собой и отраженный от препятствия сигнал (или после определенного времени), что можно уловить в микроконтроллере и преобразовать в расстояние на основе скорости звука).

В рамках работы ставилась задача разработки набора программных инструментов, предоставляющих пользователю возможность высокоуровневого проектирования управляющей системы на платформе physical computing, которая удовлетворяла бы следующим требованиям:

1) однородность синтаксиса, обеспечивающая общий подход к взаимодействию со всеми элементами разрабатываемой библиотеки;

2) предоставление широких возможностей по настройке датчиков и приводов системы, включая, например, динамическое определение способов фильтрации для каждого сенсора по отдельности;

3) встроенная поддержка конкретных моделей распространенных датчиков при сохранении возможностей динамического расширения;

4) поддержка различных способов коммуникации с датчиками (прием аналоговых и цифровых сигналов, протокол I^2C);

5) оптимизация математических расчетов, выполненная с учетом технических ограничений выбранной платформы.

В результате выполнения работы была разработана библиотека для платформы physical computing Arduino, которая обеспечивает пользователя необходимой для проектирования простых управляющих систем функциональностью. Основной сферой применения такой библиотеки является разработка управляющей логики для систем, принимающих информацию от окружающего мира, а также оказывающих на него воздействие.

1. *O'Sullivan D.*, *Igoe T.* Physical Computing: Sensing and Controlling the Physical World with Computers. — Boston: Thomson Course Technology PTR, 2004. — 464 p.
2. *Бессекерский В. А.*, *Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. — СПб: Профессия, 2003. — 743 с.
3. *Шарапов В. М.*, *Полищук Е. С.*, *Кошевой Н. Д.*, *Ишанин Г. Г.*, *Минаев И. Г.*, *Совлуков А. С.* Датчики. Справочное пособие / Под общ. ред. В. М. Шарапова, Е. С. Полищука. — М.: Техносфера, 2012. — 624 с.

4. Кратко про протоколы взаимодействия в микроконтроллерах: SPI, IDC, UART, CAN [Электрон. ресурс]. — URL: https://habr.com/ru/companies/otus/articles/798571/ (дата обращения: 20.03.2025).
5. *Матвеев Ю. Н.*, *Симончик К. К.*, *Тропченко А. Ю.*, *Хитров М. В.* Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособ. — СПб: СПбНИУ ИТМО, 2013. — 166 с.

СРЕДСТВА АНАЛИЗА, СТРУКТУРИЗАЦИИ И АГРЕГАЦИИ ДАННЫХ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДОМЕННОЙ МОДЕЛИ РЕСУРСОЕМКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

П. А. Сеченых[1,2]

[1]*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

Исследование информационных потребностей задач в ресурсоемкой области материаловедения позволяет обнаружить ряд характерных особенностей: множество источников несогласованных данных, значительный объем неструктурированной информации, разнообразие свойств материалов и неопределенность в точности измерений натурных и вычислительных экспериментов. Это делает актуальным разработку подхода к структуризации информационного контента на базе функциональных требований и методологии обработки и анализа данных [1].

Необходимо также предложить решение, позволяющее установить связи между программными средствами поиска, загрузки и анализа данных, включающее механизмы фильтрации, проверки и согласования информации из различных источников, формирование сценариев их обработки и финальной загрузки сформированного и апробированного информационного контента в домен приложения. В качестве такого решения предлагается использовать компонентную модель [2] системы информационной поддержки, по аналогии с бизнес-процессами, представляющую собой структурированное описание и взаимодействие значимых программных средств. При этом, для программных средств обработки данных в ресурсоемких научных областях наиболее привлекательными являются следующие возможности:

— гибкость и масштабирование функционального и системного наполнения как отдельных компонент обработки данных, так и системы информационной поддержки в целом;

— универсальность типовых компонент обработки данных для разных приложений предметной области;

— выявление зависимости процессов обработки данных от событий и их последовательностей (сценариев);

— дополнение семантики компонентных переходов;

— выбор лучших альтернатив в случае множественных предложений;

— оценка полноты и достоверности обработки данных;

— сравнение результатов анализа, структуризации и агрегации информационного контента.

Компонентная модель достаточно наглядно и удобно представляется в виде сетевого графа, в вершинах которого расположены различные программные компоненты (процессы, сервисы, объекты, алгоритмы), а дуги соответствуют объектно-событийному взаимодействию между ними. Например, сетевая структура компонент обработки данных от декларации требований до каталогизации и аналитической обработки достоверности и полноты информационного контента, подготовленного к загрузке в домен приложения, иллюстрируется на рис. 1.

Направленные дуги сетевого графа соответствуют сценариям (жесткий каркас обработки данных), а также событиям арбитража, вмешательства средств искусственного интеллекта или агентов мониторинга обработки данных, предназначенных для выявления и фиксации проблем достижимости вершин, зацикливания и появления «островов».

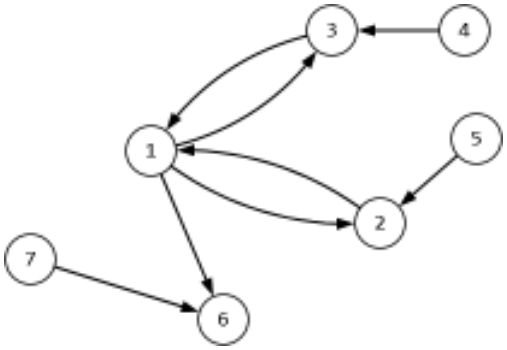


Рис. 1. Компонентная модель: 1 — наборы требований для прикладных задач; 2 — сервис загрузки справочных данных; 3 — сервис заполнения параметров расчета; 4 — сервисы проверки полноты и целостности данных; 5 — фильтры; 6 — каталог входных данных; 7 — сервис назначения маркеров

Опыт построения компонентных моделей распространяется на данные, приложения и пользовательские представления разрабатываемой системы информационной поддержки [3], что позволяет структурировать и упорядочить описание программных средств ее реализации.

1. *Сеченых П. А.* Методология комплексного подхода к анализу, структуризации и агрегации данных на базе требований ресурсоемких приложений // Программная инженерия. — 2024. — Т. 15, №11. — С. 600–608. — DOI: 10.17587/prin.15.600-608.
2. Управление IT-проектами: методы и средства инженерии программного обеспечения [Электронный ресурс]. — URL: `https://intuit.ru/studies/mini_mba/944/courses/237/lecture/6126?page=3` (дата обращения: 29.04.2025).
3. *Сеченых П. А.* Глубинная спецификация структурных свойств кристаллических соединений в системе информационной поддержки задач материаловедения // Системы высокой доступности. — 2023. — Т. 19, №4. — С. 51–62. — DOI: `https://doi.org/10.18127/j20729472-202304-04`.

ПРИМЕНЕНИЕ ELASTICSEARCH ДЛЯ ОБРАБОТКИ И ПОИСКА ДАННЫХ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Г. О. Скурихин

МАИ, Москва, Россия

В условиях стремительного роста объемов данных и широкого распространения распределенных информационных систем возрастает потребность в эффективных и масштабируемых решениях для обработки, хранения и поиска информации. Современные системы сталкиваются с необходимостью обработки огромных массивов данных, которые зачастую распределены между множеством узлов, что создает

значительные сложности для традиционных методов поиска и анализа этих данных. В этом контексте Elasticsearch, как распределенная поисковая система, представляет собой один из наиболее перспективных инструментов, способных обеспечить высокую производительность, масштабируемость и отказоустойчивость.

Основная проблема, которая возникает при работе с распределенными данными, заключается в обеспечении эффективного поиска и анализа информации в условиях высокой нагрузки и разнородности данных. Традиционные реляционные СУБД, несмотря на их широкое распространение и эффективность в работе со структурированными данными, демонстрируют ограниченную производительность при решении задач полнотекстового поиска и обработки неструктурированных данных. Кроме того, их архитектура не всегда позволяет эффективно горизонтально масштабироваться, что является критически важным для распределенных систем. В результате возникает необходимость в специализированных решениях, которые могли бы сочетать в себе высокую скорость поиска, гибкость в работе с различными типами данных и возможность быстрого масштабирования.

Поисковая система Elasticsearch предлагает решение этих проблем за счет широкого набора функций для поиска и анализа данных, включая полнотекстовый поиск, агрегацию, геопространственные запросы и работу с временными рядами. Эффективное выполнение поиска данных в Easticsearch осуществляется за счет применения инвертированных индексов. Инвертированные индексы хранят пары «термин — список документов», где каждый термин связан с идентификаторами документов, в которых он встречается, и его позициями в этих документах. Это позволяет системе быстро находить документы по запросам, минимизируя время поиска за счет исключения полного сканирования документов.

Elasticsearch конкурирует с такими решениями, как Apache Solr, Sphinx и NoSQL-базы данных (MongoDB, Cassandra), каждое из которых имеет свои сильные стороны. Apache Solr эффективен для точного поиска, Sphinx — для работы с небольшими наборами данных, а NoSQL базы данных лучше обеспечивают высокую скорость чтения/записи, а также работу с частично структурированными данными. Elasticsearch выделяется в задачах, требующих полнотекстового поиска, работы с неструктурированными данными и аналитики в реальном времени, что делает его популярным в системах анализа логов и поисковых платформах. Его преимущество — в поддержке распределенных вычислений, горизонтальном масштабировании и простоте интеграции, что делает его универсальным выбором для распределенных систем с гибкими запросами.

В работе представлен пример использования Elasticsearch для создания поискового механизма в интернет-магазине. В данном сценарии система индексирует товары по их названиям, описаниям, категориям и атрибутам, что позволяет пользователям быстро находить нужные продукты даже по частичным или неточным запросам. Благодаря своей распределенной архитектуре, Elasticsearch способен обрабатывать такие запросы с минимальной задержкой, даже если данные хранятся на множестве узлов.

Таким образом, Elasticsearch представляет собой мощное и универсальное решение для обработки и поиска данных в распределенных информационных системах. Несмотря на наличие альтернативных решений, Elasticsearch выделяется своей гибкостью, простотой интеграции и широким набором функций, что делает его предпочтительным выбором для многих задач, связанных с поиском и анализом данных.

1. Elasticsearch в действии. — 2-е изд. / Пер. с англ. М. Конда. — Астана: АЛИСТ, 2025. — 656 с.

2. *Таненбаум Э. С.*, *Стин Ван М.* Распределенные системы. — 3-е изд. / Пер. с англ. В. А. Яроцкого. — М.: ДМК Пресс, 2021. — 584 с.
3. *Шукла П.*, *Кумар Ш.* Elasticsearch, Kibana, Logstash и поисковые системы нового поколения. — СПб.: Питер, 2019. — 519 с.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ РАСТЯЖЕНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

В. А. Солдатов, П. А. Ухов

МАИ, Москва, Россия

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) все шире применяются в авиационной, космической и автомобильной промышленности благодаря высоким удельным прочностным характеристикам. Однако их поведение под действием переменных циклических нагрузок остается сложным для прогнозирования из-за значительного разброса свойств, влияния внешних факторов и накопления повреждений. Усталостное разрушение является одной из основных причин выхода из строя элементов конструкций, поэтому оценка остаточной долговечности на основе экспериментальных данных представляет собой важную инженерную задачу [1].

Традиционные методы прогнозирования усталостной долговечности, такие как использование S–N-кривых или гипотеза Майнера, основаны на физических принципах и эмпирических зависимостях. Они имеют строгое теоретическое обоснование, однако ограничены в адаптивности к изменению условий нагружения и многофакторному анализу [2]. Вместе с тем, развитие методов машинного обучения открывает возможность моделирования нелинейных взаимосвязей между входными параметрами и целевыми показателями, что особенно актуально при работе с большими массивами экспериментальных данных. В перспективе модели машинного обучения позволят определять остаточную долговечность материала с использованием минимального количества информации о его характеристиках [3].

В рамках данной работы была разработана программа прогнозирования длительности усталостных испытаний ПКМ при одноосном циклическом растяжении. Программа предназначена для автоматизации процесса оценки долговечности образцов на основе их физико-механических характеристик, климатических условий и исторических наблюдений, полученных в процессе испытания. Было проведено сравнение эффективности различных моделей прогнозирования, включая как классические детерминированные методы, так и современные алгоритмы машинного обучения. Исходные данные содержали информацию о типе материала (жгут, ткань), ориентации волокон, пределе прочности при растяжении (минимальный, максимальный, средний) и сжатии, условиях и времени климатического воздействия, уровнях напряжения в образце, модуле упругости при растяжении и сжатии, пределе прочности при межслоевом сдвиге и сдвиге в области листа, модуле сдвига, относительном удлиннении при растяжении, коэффициенте Пуассона, содержании связующего, температуре стеклования, часть из которых содержалась в паспорте материала. Целевые переменные включают значения площади петли гистерезиса, что характеризует энергию диссипации за цикл и значения точек кривых деформации, соответствующих числу циклов до разрушения при заданном уровне напряжения. Данные были предобработаны с применением техники сглажи-

вания на основе скользящего среднего для минимизации шумов в экспериментальных данных и проанализированы с использованием методов разведочного анализа, корреляционного анализа и визуализации. В рамках исследования производилось сравнение следующих моделей и методов: градиентный бустинг (XGBoost), случайный лес, KNN (K-nearest neighbors), трансформер, а также детерминированные методы на основе S–N-кривых и гипотезы Майнера. При обучении моделей использовались адаптированные к малым значениям метрики wRMSE (взвешенная среднеквадратичная ошибка) и MAPE (средняя абсолютная процентная ошибка).

Анализ полученных результатов показал, что модели машинного обучения, особенно XGBoost и трансформеры, демонстрируют более высокую точность прогноза по сравнению с традиционными детерминированными методами. Это связано с возможностью учета множества факторов, нелинейных взаимосвязей и вариаций в структуре материала [4, 5]. При этом алгоритмы эти машинного обучения не выходят за рамки вычислительных возможностей аппаратного обеспечения испытательных центров и удовлетворяют временным требованиям к скорости расчета краткосрочных и долгосрочных прогнозов.

Был разработан программный комплекс, состоящий из клиентской и серверной части, который позволяет получать данные испытания в реальном времени, предоставляет пользователю информацию о параметрах испытания, строит как краткосрочные, так и долгосрочные прогнозы значений кривых деформации и вычисляет дату окончания испытания, используя методы машинного обучения.

Данный программный комплекс может быть использован как в исследовательских лабораториях, так и в инженерной практике для оптимизации проведения усталостных испытаний, снижения временных и экономических затрат на тестирование и повышения надежности изделий из полимерных композиционных материалов. Представленный подход использует современные технологий анализа и прогнозирования данных, что делает его перспективным для дальнейшего развития и внедрения в промышленность.

1. *Реутов Ю. А.* Прогнозирование свойств полимерных композиционных материалов и оценка надежности изделий из них: Дисс... канд. физ.-матем. наук. — Томск, 2016.
2. *Каримбаев Т. Д.* Оценка усталостной долговечности изделий из композиционных материалов // Авиационные двигатели. — 2020. — №4(9). — С. 75–90.
3. *Liu X.*, *Tian S.*, *Tao F.*, *Du H.*, *Yu W.* How machine learning can help the design and analysis of composite materials and structures? // arXiv preprint arXiv:2010.09438. — 2020. — URL: `https://arxiv.org/abs/2010.09438` (дата обращения: 10.05.2025).
4. *Chen T.*, *Guestrin C.* XGBoost: A Scalable Tree Boosting System // Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2016.
5. *Vaswani A. et al.* Attention Is All You Need // Advances in Neural Information Processing Systems. — 2017. — V. 30.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕНЕРАЦИИ ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННЫХ ТРЕНИРОВОЧНЫХ ПРОГРАММ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М. Н. Татаренко

МАИ, Москва, Россия

Создание тренировочных программ — важная задача в области прикладной спортивной аналитики и цифрового здравоохранения. Речь идет о подборе упражнений и нагрузок для конкретного человека с учетом его целей, физического

состояния и ограничений. С развитием технологий появилась возможность автоматизировать этот процесс и повысить его точность за счет математических моделей. Один из перспективных способов автоматизации подбора упражнений и нагрузок — использование методов оптимизации, позволяющих строить персонализированные тренировочные программы с учетом индивидуальных параметров.

Для решения проблемы предлагается рассмотреть модель на основе целочисленного линейного программирования (ILP), формализующую задачу максимизации нагрузки на целевые мышечные группы при соблюдении ограничений безопасности, лимита упражнений и защиты уязвимых зон. Особенностью предложенного подхода является использование бинарных переменных, отражающих включение или исключение упражнений, что исключает нереализуемые «дробные» решения и гарантирует практическую применимость сгенерированных программ [1, 2].

Реализация модели выполнена с использованием библиотеки PuLP для Python, позволяющей эффективно формализовать целевую функцию и систему ограничений. Для решения задачи оптимизации применен симплекс-метод с последующим переходом к целочисленному решению через алгоритм ветвей и границ [3, 4].

Экспериментальная проверка модели проведена для двух сценариев тренировок:

— с акцентом на бицепс и трицепс при ограничении нагрузки на плечи;

— сбалансированной тренировки спины и ног с контролем нагрузки на поясницу.

Результаты показали высокую эффективность метода в обеспечении персонализации программ и предотвращении перетренированности [4, 5].

Основные ограничения предложенного метода связаны с необходимостью ручной калибровки коэффициентов нагрузки и отсутствием учета временных затрат на упражнения. Перспективным направлением дальнейших исследований является динамическая адаптация коэффициентов нагрузки с использованием данных биометрических датчиков и методов машинного обучения.

Практическая значимость работы заключается в возможности интеграции разработанной модели в фитнес-приложения для автоматизации создания программ, что особенно актуально для пользователей с ограничениями по здоровью или специфическими тренировочными целями. Предложенный метод также может использоваться как компонент цифровых двойников, обеспечивая расчет базовых нагрузочных параметров для последующего ситуационного моделирования тренировочных процессов.

1. *Hlis T.*, *Fister I.*, *Fister I. Jr.* Digital twins in sport: Concepts, taxonomies, challenges and practical potentials // Expert Systems with Applications. — 2024. — V. 258. — P. 125104.
2. *LukačL.*, *Fister I. Jr.*, *Fister I.* Digital twin in sport: From an idea to realization // Applied Sciences. — 2022. — V. 12, No. 24. — P. 12741.
3. *Fister I.*, *Ljubic K.*, *Suganthan P. N.*, *Perc M.*, *Fister I. Jr.* Planning the sports training sessions with the bat algorithm // Neurocomputing. — 2015. — V. 149. — P. 993–1002.
4. *Melkonian V.*, *Boffey T. B.*, *Holte R. C.*, *Montuno D. Y.* An Optimization Model for Exercise Scheduling // American Journal of Operations Research. — 2018. — V. 9, No. 01. — P. 1.
5. *Chua A. E. C.*, *Bugtai N. T.*, *Billones R. K. C.* Exercise Programming and Optimization for Untrained Individual using Mixed Integer Linear Programming // Proc. of the IEEE 14th Int. Conf. on Humanoid, Nanotechnology, Information Technology, Communication and Control, Environment, and Management (HNICEM). — 2022. — P. 1–6.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЛОКАТОРОВ PLAYWRIGHT ДЛЯ PAGE OBJECT MODEL С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ LLM НА ОСНОВЕ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА HTML

А. М. Титеев

МАИ, Москва, Россия

Современная разработка веб-приложений требует непрерывного тестирования функциональности для обеспечения качества программного продукта [1]. Автоматизированное тестирование стало критическим элементом в процессе разработки, существенно повышая эффективность обнаружения ошибок. Однако с ростом сложности веб-приложений и ускорением циклов разработки поддержание работоспособности автоматических тестов становится все более трудоемкой задачей [2]. Одной из ключевых проблем является нестабильность локаторов элементов интерфейса, которые перестают корректно идентифицировать компоненты при изменениях в структуре HTML. Использование при написании тестов шаблона проектирования Page Object Model (POM) позволяет структурировать тесты и изолировать изменения, но создание устойчивых локаторов по-прежнему требует значительной экспертизы тестировщика. Появление больших языковых моделей (LLM) открывает новые возможности для автоматизации этого процесса, в частности для веб-приложений [3, 4]. Предлагается метод автоматической генерации устойчивых локаторов Playwright с использованием LLM на основе сравнительного анализа HTML-структуры.

Предлагаемый подход основан на сравнительном анализе двух HTML-версий одной и той же страницы с разными данными. На вход LLM подаются два HTML-документа одного типа страницы, содержащие различные данные (например, страница со списком виртуальных машин для двух разных серверов). LLM анализирует структурные сходства и различия, идентифицируя инвариантные элементы страницы и генерируя локаторы общего вида, которые не зависят от конкретных данных или точной структуры HTML.

Генерируемые локаторы ориентированы на семантические характеристики элементов, доступные атрибуты и контекстные особенности, а не на жесткий путь в DOM-дереве. Это обеспечивает их устойчивость к изменениям в ходе разработки, когда структура HTML может меняться. Например, вместо локатора

```
div:nth-child(3) > table > tr:nth-child(2)
```

генерируется локатор

```
[data-testid="users-table"] >> text="Имя пользователя".
```

Экспериментальные результаты показывают, что локаторы, сгенерированные с использованием сравнительного анализа двух HTML-вариантов, на 26% устойчивее к изменениям структуры страницы и на 43% устойчивее к изменениям данных по сравнению с локаторами, созданными на основе анализа единственного HTML-документа. Это значительно сокращает затраты на поддержку и обновление тестов при изменениях в пользовательском интерфейсе.

Дальнейшая генерация e2e-тестов на основе полученных локаторов позволяет автоматизировать процесс тестирования, создавая POM-классы и тестовые сценарии, которые могут быть легко интегрированы в существующие CI/CD-пайплайны. Этот подход особенно ценен для проектов с частыми изменениями интерфейса и

высокими требованиями к качеству, где стабильность автоматизированных тестов критически важна.

Проведенное исследование демонстрирует эффективность применения LLM для решения практических задач автоматизации тестирования и открывает перспективы для дальнейшего развития методов генерации тестов. Использование сравнительного анализа HTML-структур является ключевым фактором повышения устойчивости локаторов, что подтверждается значительным улучшением показателей в экспериментальных тестах. Предложенный метод может быть расширен для генерации не только локаторов, но и полноценных тестовых сценариев, что позволит еще больше автоматизировать процесс создания тестов и снизить нагрузку на команду тестирования.

1. *Plein L.*, *Ouédraogo W. C.*, *Klein J.*, *Bissyandé T. F.* Automatic Generation of Test Cases Based on Bug Reports: A Feasibility Study with Large Language Models // arXiv:2310.06320. — DOI: 10.48550/arXiv.2310.06320.
2. *Bhatia S.*, *Gandhi T.*, *Kumar D.*, *Jalote P.* Unit Test Generation using Generative AI: A Comparative Performance Analysis of Autogeneration Tools // arXiv:2312.10622. — DOI: 10.48550/arXiv.2312.10622.
3. *Gur I.*, *Nachum O.*, *Miao Y. et al.* Understanding HTML with Large Language Models // Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2023. — P. 2803–2821. — DOI: 10.18653/v1/2023.findings-emnlp.185.
4. *Aghajanyan A.*, *Okhonko D.*, *Lewis M. et al.* Hyper-text pre-training and prompting of language model // arXiv:2107.06955. — DOI: 10.48550/arXiv.2107.06955.

Секция С **ОБЩАЯ МЕХАНИКА, МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПРОЧНОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И БЕЗОПАСНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ**

О ПОГРЕШНОСТЯХ СПЕКТРОВ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ МКЭ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Я. Абу Даввас, В. В. Трофимов, Д. Т. Чекмарев

ННГУ, Нижний Новгород, Россия

Порядок аппроксимации численных схем не является единственной характеристикой скорости сходимости численных решений. Практика решения задач механики деформируемого твердого тела показывает, что разные схемы с одинаковым порядком аппроксимации демонстрируют разную скорость сходимости, а в ряде случае схемы более низкого порядка аппроксимации обеспечивают лучшую сходимость [1]. В работе рассматривается вопрос о точности аппроксимации спектров некоторыми схемами МКЭ решения задач теории упругости. Объектом исследования выбраны двумерные и трехмерные конечные элементы низкого порядка — линейные и полилинейные. Наряду с классическими совместными элементами рассмотрены элементы с сокращенным интегрированием, а также моментные элементы [2] и ажурная схема МКЭ [3].

Результаты анализа спектров схем МКЭ показывают, что для некоторых схем характерно взаимное влияние продольных и сдвиговых деформаций, что может приводить к известным эффектам сдвигового и объемного запирания. Применение сокращенного интегрирования как приема борьбы с запиранием хорошо согласуется с результатами анализа спектров. Также можно отметить положительное влияние на уменьшение погрешностей спектров свойств согласованности аппроксимации частных производных [4]. Отметим, что подобный эффект был ранее отмечен для задач теории оболочек (модель Тимошенко) [4].

Результаты теоретических исследований иллюстрируются численными решениями ряда статических и динамических задач теории упругости.

1. *Крутова К. А.*, *Спирин С. В.*, *Чекмарев Д. Т.* О влиянии взаимного расположения конечных элементов на точность численного решения задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. Сб. / Нижегород. ун-т. — 2013 . — Вып. 75, №4. — С. 312–322.
2. *Чекмарев Д. Т.*, *Абу Даввас Я.* Моментный конечный элемент для решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 2023. — Вып. 3. — С. 80–90.
3. *Жидков А. В.*, *Зефиров С. В.*, *Кастальская К. А. Спирин С. В.*, *Чекмарев Д. Т.* Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. — №4, часть 4. — С. 1480–1482.
4. *Баженов В. Г.*, *Чекмарев Д. Т.* Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. — 1989. — Т. 29, №5. — С. 662–674.

*Работа выполнена при поддержке РНФ (проект №24-29-00422).

РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЫТА НА ПРОСТОЙ СДВИГ ДЛЯ ПЕСЧАНОГО ГРУНТА*

Н. Б. Артамонова, С. В. Шешенин

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе проводится анализ и сравнение результатов экспериментов на многоплоскостной срез при постоянном вертикальном напряжении и при постоянной вертикальной деформации для песчаных грунтов кварцевого состава различной крупности. Исследована зависимость свойств песка от скорости деформации.

Опыты на сдвиг песчаных грунтов проводились с помощью установки простого сдвига (многоплоскостного среза) ООО НПП «Геотек» в кинематическом режиме приложения сдвигающей нагрузки с заданной постоянной скоростью деформации сдвига по схеме консолидировано-дренированного сдвига (КД). Консолидация образцов перед испытанием на сдвиг осуществлялась в одну ступень при открытом дренаже при следующих значениях эффективного вертикального напряжения консолидации: 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5 МПа. В приборе многоплоскостного среза кольца не связаны друг с другом, поэтому в некоторых опытах многоплоскостной срез переходил в одноплоскостной по наиболее слабой поверхности среза.

Первую группу экспериментов делали при постоянном вертикальном напряжении со скоростями деформации сдвига: 0,0004, 0,002, 0,004 $с^{-1}$, чтобы исследовать влияние скорости деформации на свойства песка.

Вторую группу опытов проводили при постоянной вертикальной деформации (т. е. при постоянном объеме образца, так как боковая деформация равна нулю) со скоростью деформации сдвига 0,0016 $с^{-1}$.

Для исследований были выбраны два песка кварцевого состава различной крупности. Согласно ГОСТ 25100-2020 «Грунты. Классификация», песок №1 — крупный, песок №2 — мелкий. Перед испытаниями пески утрамбовывали ступкой до максимально плотного состояния: крупный песок до плотности 1,71 $г/см^3$, мелкий — 1.61 $г/см^3$.

По результатам первой группы испытаний (при постоянном вертикальном напряжении) были получены зависимости касательных напряжений σ_{12} и объемной деформации θ от сдвиговой деформации ε_{12} для различных значений вертикального напряжения σ_{11} при различных скоростях деформации. В опытах с крупным песком происходит упрочнение при сдвиге или касательное напряжение выходит на плато, а в экспериментах с мелким водонасыщенным песком наблюдался переход многоплоскостного среза в одноплоскостной по наиболее слабой поверхности (касательное напряжение достигает максимального значения, а затем падает). При деформации сдвига при постоянном вертикальном напряжении изменяется объем образца. Крупный водонасыщенный песок при сдвиге сначала уплотняется, а затем немного увеличивается в объеме. Для мелкого песка характерно уплотнение на протяжении всего эксперимента. Зависимость кривых σ_{12}–ε_{12} и θ–ε_{12} от скорости деформации не наблюдалась.

Далее была проведена вторая группа опытов на многоплоскостной срез при постоянной вертикальной деформации (постоянном объеме образца). На рис. 1 и 2 показаны графики зависимости касательного напряжения σ_{12} и вертикального напряжения σ_{11} от сдвиговой деформации ε_{12} для крупного (*а*) и мелкого (*б*) водонасыщенного песка при различных значениях начального вертикального напряжения

*Эксперименты проводились на автоматизированном комплексе АСИС, приобретенном за счет средств Программы развития Московского университета (контракт №1040-44-2019 от 24.09.2019). Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №25-21-00111.

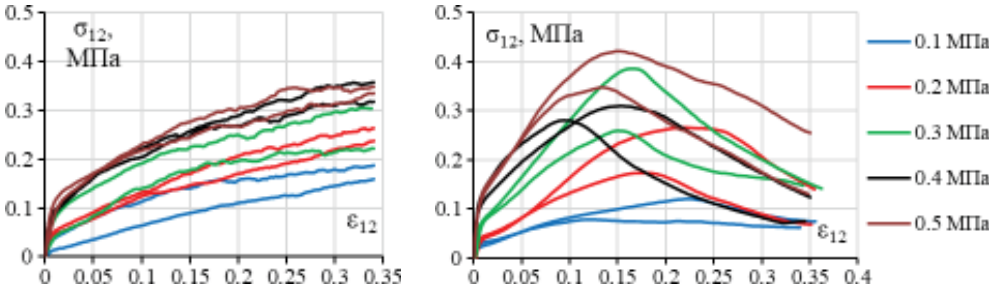


Рис. 1. Зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации для крупного (*а*) и мелкого (*б*) водонасыщенного песка (при постоянной вертикальной деформации). В легенде показаны начальные вертикальные напряжения консолидации

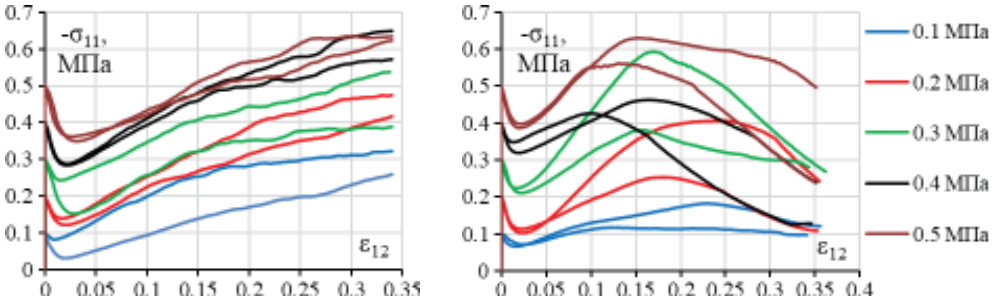


Рис. 2. Зависимость вертикального напряжения от сдвиговой деформации для крупного (*а*) и мелкого (*б*) водонасыщенного песка (при постоянной вертикальной деформации). В легенде показаны начальные вертикальные напряжения консолидации

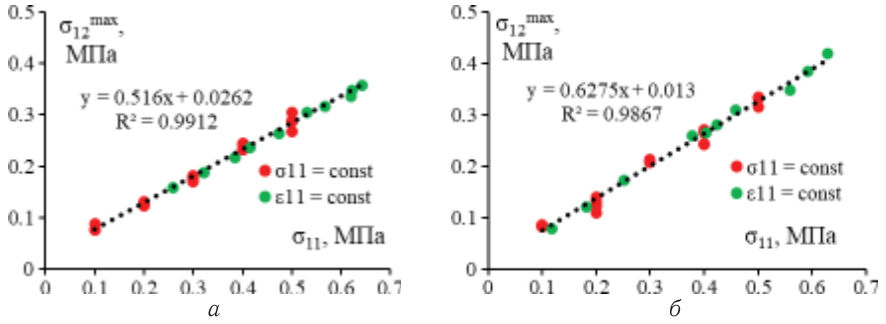


Рис. 3. Зависимость максимальных касательных напряжений от вертикальных напряжений для крупного (*а*) и мелкого (*б*) водонасыщенного песка

консолидации. На рис. 1 можно заметить, что крупный водонасыщенный песок упрочняется при сдвиге, а в опытах с мелким песком происходит переход многоплоскостного среза в одноплоскостной по наиболее слабой поверхности. Также можно заметить, что чем выше начальное вертикальное напряжение консолидации, тем выше, как правило, располагаются кривые. Полученные зависимости предполагается использовать для построения определяющих соотношений деформационного типа для математического моделирования деформирования водонасыщенного песчаного грунта под нагрузкой.

В ходе опыта вертикальное напряжение меняется (рис. 2), а объем образца остается приблизительно постоянным. В опыте с крупным песком абсолютные значения вертикального напряжения сжатия сначала уменьшаются, а потом постепенно растут, а в эксперименте с мелким песком — сначала уменьшаются, потом растут и затем снова уменьшаются (рис. 2).

На рис. 3 приведена зависимость максимальных касательных напряжений (при которых происходит разрушение образца) от вертикального напряжения для водонасыщенных крупного (*а*) и мелкого (*б*) песчаных грунтов для экспериментов при постоянном вертикальном напряжении (красные точки) и при постоянном объеме образца (зеленые точки). Как видно, все точки ложатся на прямые линии с хорошей точностью. Из этих графиков можно получить прочностные свойства водонасыщенного песка на сдвиг: угол внутреннего трения крупного песка 27°, мелкого — 32°, удельное сцепление крупного песка 0,0262 МПа, мелкого — 0,013 МПа.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА–ХОПФА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КЛИНЕ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОММУТАТИВНЫМ СИМВОЛОМ ЯДРА*

В. А. Бабешко, А. С. Мухин, О. М. Бабешко

КубГУ, Краснодар, Россия

В докладе дается решение конечной системы двумерных интегральных уравнений Винера–Хопфа, имеющих важные применения в смешанных, в том числе, контактных задачах. В частности, рассматривается уравнение, описывающее контактную задачу о действии жесткого штампа в четверти плоскости на анизотропную деформируемую среду произвольной реологии в предположении функциональной коммутативности матрицы символа, приближенно аппроксимирующей точную. Построенные таким образом решения могут оказываться полезными при получении качественных свойств решений контактных задач для материалов сложных реологий и контактных условий.

1. Постановка задачи. Рассматривается интегральное уравнение Винера–Хопфа, заданное в первом квадранте [1]. Оно имеет вид

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi, y-\eta)\,\mathbf{q}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \mathbf{f}(x,y), \quad 0 \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le \infty,$$

$$\mathbf{k}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta, \quad \mathbf{Q}(\alpha,\beta) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{q}(\xi,\eta)e^{i(\alpha\xi+\beta\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\mathbf{F}(\alpha,\beta) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{f}(\xi,\eta)e^{i(\alpha\xi+\beta\eta)}\,d\xi\,d\eta. \tag{1}$$

Функционально-коммутативная матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha,\beta)$, в общем случае комплекснозначная, порождается решением анизотропной граничной задачи в много-

*Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2025 г. Минобрнауки (проект FZEN-2023-0006).

слойной среде, является непрерывной и суммируемой на осях по обоим аргументам, с поведением на бесконечности вида

$$K(\alpha,\beta)=O(\alpha^{-1}),\quad \beta=\text{const};\quad K(\alpha,\beta)=O(\beta^{-1}),\quad \alpha=\text{const},\quad |\alpha|,|\beta|\to\infty,$$

Для интегрального уравнения (1) справедливы теоремы единственности [1].

Отметим важные свойств функционально-коммутативных матриц-функций.

Определение [1]. Матрица-функция $\mathbf{K}(u_1,u_2)$ называется функционально-коммутативной, если для любых вещественных или комплексных аргументов выполняются по каждому переменному свойство

$$\mathbf{K}(u_1,u_2)\mathbf{K}(t_1,u_2)=\mathbf{K}(t_1,u_2)\mathbf{K}(u_1,u_2),\quad \mathbf{K}(u_1,u_2)\mathbf{K}(u_1,t_2)=\mathbf{K}(u_1,t_2)\mathbf{K}(u_1,u_2).$$

Например, таким свойством обладает матрици-функция $\mathbf{K}(u_1,u_2)=\mathbf{K}(u)$, $u=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$, являющаяся функционально-коммутативной по одному аргументу т. е. $\mathbf{K}(u)\mathbf{K}(t)=\mathbf{K}(t)(u)$.

Для функционально-коммутативной матрицы-функции $\mathbf{K}(u)$ имеются представления аналитических функций $f(u)$ от матриц. Они даются соотношениями

$$f[\mathbf{K}(u)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}[\mathbf{K}(u)-\lambda\mathbf{I}]^{-1}f(\lambda)\,d\lambda,\quad u=\sqrt{u_1^2+u_2^2}.$$

Контур Γ ограничивает весь спектр матрицы $\mathbf{K}(u)$.

В частности, такие матрицы функции факторизуются в виде произведения по формуле $\mathbf{K}_{\pm}(u)=\exp[\ln\mathbf{K}(u)]^{\pm}$.

В качестве примера ниже приводится матрица-функция для контактной задачи о действии штампа на слой, в предположении жесткого сцепления штампа со слоем

$$\mathbf{R}(u)=\|R_{mn}(u)\|,\quad R_{11}(u)=\frac{4(1-\nu)\operatorname{ch}^2 u}{u(\operatorname{sh}2u+2u)},\quad R_{22}(u)=\frac{4(1-\nu)\operatorname{sh}^2 u}{u(\operatorname{sh}2u+2u)},$$
$$R_{12}(u)=-R_{21}(u)=-i\frac{(1-2\nu)(\operatorname{sh}2u-2u)}{u(\operatorname{sh}2u+2u)},\quad u=\sqrt{u_1^2+u_2^2}.$$

Положив в этой матрице-функции $R_{11}(u)=R_{22}(u)$, что дает погрешность с точностью не более 3 процентов, начиная с $5<u\le\infty$, получаем функционально-коммутативную матрицу-функцию $\mathbf{K}(u)$. Справедлива теорема

2. Теорема [2, 3]. *В условиях единственности, решение интегрального уравнения* (1) *для произвольной с непрерывной и суммируемой на осях первой производной функции* $\mathbf{f}(x,y)$ *дается формулой*

$$\mathbf{q}(x,y)=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\mathbf{Q}(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta,$$
$$\mathbf{Q}(\alpha,\beta)=\mathbf{Q}_1(\alpha,\beta)+\mathbf{Q}_2(\alpha,\beta). \tag{2}$$

Здесь приняты обозначения

$$\mathbf{Q}_1(\alpha,\beta)=\mathbf{K}^{-1}\{\mathbf{F}(\alpha,\beta)\}_{\beta}^{+}-\mathbf{K}_{+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\{\mathbf{K}_{-\beta}^{-1}\{\mathbf{F}(\alpha,\beta)\}_{\beta}^{+}\}_{\beta}^{-}-$$
$$-\mathbf{K}_{+\alpha+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\Big\{\mathbf{K}_{+\beta-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\{\mathbf{K}_{-\beta}^{-1}\{\mathbf{F}(\alpha,\beta)\}_{\beta}^{+}\}_{\beta}^{+}\Big\}_{\alpha}^{-},$$
$$\mathbf{Q}_2(\alpha,\beta)=\mathbf{K}^{-1}\{\mathbf{F}(\alpha,\beta)\}_{\alpha}^{+}-\mathbf{K}_{+\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\{\mathbf{K}_{-\alpha}^{-1}\{\mathbf{F}(\alpha,\beta)\}_{\alpha}^{+}\}_{\alpha}^{-}-$$
$$-\mathbf{K}_{+\alpha+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\Big\{\mathbf{K}_{+\alpha-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\{\mathbf{K}_{-\alpha}^{-1}\{\mathbf{F}(\alpha,\beta)\}_{\alpha}^{+}\}_{\alpha}^{+}\Big\}_{\beta}^{-}.$$

Операторы в фигурных скобках детально описаны в [1] и имеют вид

$$\{\mathbf{G}(\alpha,\beta)\}_\alpha^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mathbf{G}(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \ \alpha\in\Pi_\alpha^+;\quad \{\mathbf{G}(\alpha,\beta)\}_\alpha^- = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mathbf{G}(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \ \alpha\in\Pi_\alpha^-;$$

$$\{\mathbf{G}(\alpha,\beta)\}_\beta^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\mathbf{G}(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \ \beta\in\Pi_\beta^+;\quad \{\mathbf{G}(\alpha,\beta)\}_\beta^- = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\mathbf{G}(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \ \beta\in\Pi_\beta^-;$$

$$\mathbf{K}_{+\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln\mathbf{K}(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\quad \alpha\in\Pi_\alpha^+;$$

$$\mathbf{K}_{-\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln\mathbf{K}(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi\Big),\quad \alpha\in\Pi_\alpha^-.$$

Построенное решение допускает дальнейшее обобщение на трехмерный случай уравнений Винера–Хопфа, а также на нестационарные контактные задачи [3].

1. *Ворович И. И.*, *Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
2. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.* Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, №5. — С. 628–637. — DOI: 10.3103/S0025654422080039.
3. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Уафа С. Б.*, *Евдокимов В. С.*, *Бабешко О. М.* О нестационарных контактных задачах для анизотропных композитов в неклассических областях // Изв. РАН. МТТ. — 2024. — №5. — С. 18–28. — DOI: 10.31857/S0572329922060034.

О ВЛИЯНИИ ВИБРАЦИИ ШТАМПА НА ВОЗМОЖНОСТЬ ЛОКАЛИЗАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ КОНТАКТА*

В. А. Бабешко, А. С. Мухин, О. М. Бабешко, В. С. Евдокимов, А. Г. Зарецкий

КубГУ, Краснодар, Россия

1. В случае колебаний слоя, том числе, анизотропного, конечной толщины. штампом, контактирующим без трения, занимающим выпуклую область Ω, интегральное уравнение имеет вид [1]

$$Kq = \iint\limits_{\Omega} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\,q(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 = g(x_1,x_2),\quad x_1,x_2\in\Omega, \tag{1}$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(a_1,a_2)e^{-i\langle ax\rangle}da_1\,da_2,\quad \langle ax\rangle = a_1x_1 + a_2x_2.$$

Для интегрального уравнения (1) введем обозначение преобразования Фурье в форме

$$\mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)\,k(x_1,x_2) = \iint\limits_{R^2} k(x_1,x_2)e^{i\langle\alpha,x\rangle}dx_1\,dx_2 \equiv K(\alpha_1,\alpha_2),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда (региональный проект 24-11-20006).

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1, x_2)\, K(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\delta_1} \int\limits_{\delta_2} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x\rangle} d\alpha_1\, d\alpha_2 \equiv k(x_1, x_2),$$
$$\langle \alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Контуры δ_n расположены в соответствии с принципом предельного поглощения, описанным в [1] и других публикациях.

Тогда уравнение представимо в виде

$$Kq \equiv \int\limits_{\delta_1} \int\limits_{\delta_2} K(\alpha_1, \alpha_2)\, \mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2) q \exp(-i\langle \alpha, x\rangle)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = g(x_1, x_2). \tag{2}$$

Уравнение (2) рассматривается для более общего случая, чем (1), а именно для произвольной анизотропной многослойной упругой среды при наличии возможных термоэлектроупругих, магнитостатических, агрессивных химических воздействий и других возможных характеристик [1, 2].

Функции $K(\alpha_1, \alpha_2)$ в общем случае являются аналитическими функциями. Они описываются отношением аналитических функций двух комплексных переменных. Для пакетов слоев — это отношение целых функций, и тогда элементы являются мероморфными функциями.

Будем считать, что функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$, которую после замены аргументов обозначим $M(\gamma_1, \gamma_2)$, обладает при вещественных γ_k асимптотическим поведением вида,

$$M(\gamma_1, \gamma_2) = M(\gamma_1)\gamma_2^{-1}[1 + O(\gamma_2^{-1})], \quad 0 \le \gamma_1 \le 2\pi, \quad \gamma_2 \to \infty,$$
$$\alpha_1 = \gamma_2 \cos\gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \sin\gamma_1, \quad M(\gamma_1, \gamma_2) = K(\gamma_2 \cos\gamma_1, \gamma_2 \sin\gamma_1). \tag{3}$$

Элементы функции $M(\gamma_1, \gamma_2)$ могут иметь при вещественных γ_k конечное число полюсов $\gamma_2 = \xi_m(\gamma_1)$, а определитель — конечное число нулей $\gamma_2 = z_n(\gamma_1)$ на вещественной оси. Полюсы обходятся контурами интегрирования по определенным правилам, описанным в [1, 2]. Ниже, говоря об аппроксимации функций, содержащих на вещественной оси полюсы, понимаем приближение функций в C, умноженных на полином, содержащий эти полюсы [1, 2].

2. Используя прием приближенной факторизации, приведенный в [1, 2] элементы функции $M(\gamma_1, \gamma_2)$ можно приблизить на вещественной оси мероморфными функциями с сохранением вещественных полюсов и асимптотического поведения (3). В условиях корректной разрешимости (1) в $\mathbf{H}_s$, уравнение (2) также разрешимо и погрешность приближения линейно зависит от погрешностей аппроксимаций на контурах интегрирования δ_1, δ_2. Получившуюся функцию можно приближенно представить в виде [2]

$$M(\gamma_1, \gamma_2) = M_0(\gamma_1, \gamma_2)\, \Pi(\gamma_1, \gamma_2).$$

Здесь функция $M_0(\gamma_1, \gamma_2)$ имеет мероморфные элементы по параметру γ_2. Полюса ее элементов и нули находятся вне некоторой полосы η, содержащей вещественную ось. Элементы функции $\Pi(\gamma_1, \gamma_2)$ являются рациональными функциями. Полюса ее элементов и нули совпадают с полюсами соответствующих элементов и нулями функции $M(\gamma_1, \gamma_2)$ в полосе η.

В анизотропном случае нули $\gamma_2 = z_n(\gamma_1)$ и $\gamma_2 = \xi_m(\gamma_1)$ полиномов $p_1(\gamma_1, \gamma_2)$, $p_2(\gamma_1, \gamma_2)$ имеют соответственно, имеют разложения в ряды Фурье по координате γ_1. В изотропном случае они не зависят от γ_1.

Ради простоты ограничимся часто встречающимся случаем, когда полиномы имеют четный порядок, а нули обладают свойством парности вида

$$z_n^{\pm}(\gamma_1) = \sum_{s=-S}^{S} z_{n,2s+1} e^{i(2s+1)\gamma_1} \pm \sum_{s=-S}^{S} z_{n,2s} e^{i2s\gamma_1},$$

$$\xi_n^{\pm}(\gamma_1) = \sum_{s=-S}^{S} \xi_{n,2s+1} e^{i(2s+1)\gamma_1} \pm \sum_{s=-S}^{S} \xi_{n,2s} e^{i2s\gamma_1},$$

$$S \to \infty, \quad 0 \le \gamma_1 \le 2\pi.$$

Выполненные преобразования позволяют приблизить рациональную функцию $p_1(\gamma_1, \gamma_2)/p_2(\gamma_1, \gamma_2)$ на вещественной оси рациональной функцией

$$p_1(\alpha_1, \alpha_2, S)/p_2(\alpha_1, \alpha_2, S),$$

в виде отношения полиномов двух комплексных переменных α_1, α_2. Аппроксимирующие полиномы имеют, как минимум, столько же нулей, что и полиномы исходной функции, которые при $S \to \infty$ сливаются.

Таким образом, возвратившись к исходным аргументам, функцию $K(\alpha_1, \alpha_2)$ можно представить, с учетом описанных аппроксимаций, в виде

$$K = K_0 P, \quad K_0 = K_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad P = \frac{p_1(\alpha_1, \alpha_2, S)}{p_2(\alpha_1, \alpha_2, S)}.$$

Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение в частных производных, порождающее характеристический полином $p_1(\alpha_1, \alpha_2, S)$ порядка $2M$

$$p_1(i\partial x_1, i\partial x_2, S)\, q(x_1, x_2) = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega.$$

Поставим для него в пространстве $\mathbf{H}_s(\Omega)$ краевую задачу, сформулировав краевые условия для производных по внешней нормали к границе области, т. е.

$$\partial_n^{r-1} q_m(x) = g_{mk}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

3. Для точного или, в случае аппроксимации, приближенного решения методом фиктивного поглощения интегрального уравнения (2) справедлива формула [2, 3]

$$q(x) = p(x) + \varphi(x),$$

$$p(x) = \mathbf{F}^{-1}\Pi^{-1}\left\{\sum_{r=1}^{R} \frac{p_1\Theta}{p_2 p_1}\right\}_{\Omega}^{+} + (\mathbf{K}_0^{-1} f), \quad \varphi(x) = \left\{\mathbf{F}^{-1} p_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S) \int_{\partial\Omega} \theta\right\}_{\Omega}^{+},$$

$$\left\{\mathbf{F}^{-1} p_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S) \int_{\partial\Omega} \theta\right\}_{\Omega}^{-} = 0, \quad \left\{\mathbf{F}^{-1}\Pi^{-1}\left\{\left\{\sum_{r=1}^{R} \frac{p_1\Theta}{p_2 p_1}\right\}_{\Omega}^{+} + (\mathbf{K}_0^{-1} f)\right\}\right\}_{\Omega}^{-} = 0.$$

Последние два соотношения представляют системы одномерных разрешимых интегральных уравнений. Они служат для определения неизвестных граничных функций $g_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, 2M$. Их количество совпадает с числом неизвестных. Их регуляризация — запись в виде интегральных уравнений второго рода осуществляется так же, как и в [2, 3]. Соотношения позволяют локализовать напряжения в зоне контакта. Это дает возможность выделить еще один механический предвестник землетрясений [4, 5].

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости в неклассических областях. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

2. *Ворович И. И.,Бабешко В. А.*, *Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. — М.: Наука, 1999. — 246 с.
3. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.* Вирусная теория» некоторых природных аномалий // ДАН. — 2012. — Т. 447, №6. — С. 624–628. — DOI: 10.1134/S1028335812120075.
4. *Гамбурцев Г. А.* Перспективный план исследований по проблеме «Изыскание и развитие прогноза землетрясений» // Развитие идей Г. А. Гамбурцева в геофизике. — М.: Наука, 1982. — С. 304–311.
5. *Садовский М. А.*, *Болховитинов Л. Г.*, *Писаренко В. Ф.* Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. — М.: Наука, 1987. — 104 с.

ПОДХОД ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ ПРИ СОЗДАНИИ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В СЛОЕ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ В ПЛАНЕ ВЫРЕЗАМИ*

В. Н. Бакулин

ИПриМ РАН, Москва, Россия

Доклад посвящен 105-летию со дня рождения советского и российского ученого в области механики и авиационной техники академика АН СССР и РАН И. Ф. Образцова (1920–2005 гг.) (директора, ректора МАИ 1958–1972 гг., директора-организатора, научного руководителя Института прикладной механики (ИПРИМ) РАН 1989–2005 гг.), с которым автор работал до последних дней академика.

Трехслойные элементы конструкций, в том числе трехслойные оболочки состоят из двух внешних несущих слоев, как правило, тонких из высокопрочного материала, связанных между собой слоем обычно относительно маложесткого и легкого заполнителя, обеспечивающего совместную работу внешних слоев. В качестве заполнителя часто применяют армированные и неармированные пенопласты, перфорированный картон, сотовые, складчатые, ячеистые и ребристые конструкции. Несущие слои изготавливаются из стекло-, угле- и металлопластиков, стали, алюминиевых сплавов, пластмасс и др. материалов. Слои могут быть различными по толщине и материалам. Совместная работа несущих слоев зависит во многом от способности заполнителя сопротивляться их относительному сдвигу и сближению.

Трехслойные элементы конструкций, в том числе трехслойные оболочки находят все более широкое применение в современной технике из-за высоких показателей изгибной жесткости, весовой эффективности, тепловой защиты, звукоизоляции, вибропоглощения, возможности регулирования этих и многих других важных характеристик.

Обзор и анализ работ [1] показали, что имеющиеся подходы, методы и модели часто не позволяют с необходимой точностью, степенью детализации и эффективностью провести исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек различных геометрических форм при наличии прямоугольных в плане вырезов, неоднородности структуры (в том числе в слое заполнителя), с учетом приложения нагрузок к отдельным слоям и разных условий их закрепления, моментного состояния несущих слоев, трехмер-

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН).

ного напряженного состояния в слое заполнителя и переменных по координатам параметрах, что является одной из сдерживающих причин широкого внедрения трехслойных оболочек в конструкции современной техники.

Осуществить построение таких моделей, учитывающих указанные особенности, позволяет подход послойного анализа, предложенный применительно к исследованию НДС в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек в работах автора представленных здесь тезисов доклада, в том числе в [2–5 и др.].

Кратко рассмотрим построение оболочечной конечно-элементной модели (КЭМ) естественной кривизны (точно представляющей геометрическую форму исследуемых оболочечных конструкций) несущих слоев на основе моментной теории оболочек Кирхгофа–Лява, аналогично [6]. Прямоугольные в плане конечные элементы (КЭ) для моделирования НДС в несущих слоях образованы сечением оболочки двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения, и двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки и имеют по четыре узла (расположенных в угловых точках КЭ) с тремя линейными перемещениями u, v, w и двумя углами поворота нормали относительно меридиональной и окружной осей к срединной поверхности соответствующего несущего слоя. То есть, КЭ несущих слоев имеет двадцать степеней свободы, из которых шесть отвечают за перемещения как твердого тела, оставшиеся четырнадцать степеней свободы отвечают за перемещения, вызванные деформированием несущих слоев.

Одним из требований к аппроксимирующим функциям перемещений оболочечных КЭ является учет перемещений как твердого тела [7 и др.]. Это улучшает сходимости КЭМ [8 и др.]. Перемещения как твердого тела получаются интегрированием геометрических соотношений, связывающих деформации с перемещениями, при нулевых значениях деформаций подобно [9 и др.].

Деформационную составляющую перемещения w аппроксимируем неполным бикубическим полиномом, а деформационную составляющую перемещений u и v — билинейными полиномами при построении модели КЭ для исследования НДС несущих слоев рассматриваемых трехслойных оболочек вращения.

В отличие от наиболее распространенного подхода, когда задание обобщенных перемещений проводится на срединной поверхности КЭ, в том числе и для слоя заполнителя, рассмотрим следующий подход для построения модели КЭ слоя заполнителя трехслойной незамкнутой оболочки вращения, основанный на предложенной и разработанной автором методологии [1–5, 7–9 и др.]. За узловые поверхности выберем внутреннюю и внешнюю криволинейные поверхности КЭ заполнителя, в угловых точках которых расположим узлы. То есть, будет по четыре узла на внутренней (номера узлов 1–4) и внешней (номера узлов 5–8) криволинейных поверхностях.

Чтобы избежать погрешностей, вызванных разрывом обобщенных перемещений на криволинейных поверхностях стыковки двумерных КЭ несущих слоев и трехмерных КЭ заполнителя (свойственных КЭ с разными функциями формы), для КЭ заполнителя на криволинейных поверхностях выбираем столько же узлов, сколько их у КЭ несущих слоев. В качестве узловых неизвестных и аппроксимирующих функций на криволинейных поверхностях стыковки трехмерных КЭ заполнителя будем применять те же обобщенные перемещения и аппроксимирующие функции, что и у КЭ несущих слоев. Таким образом, аппроксимирующие функции перемещений КЭ слоя заполнителя будут строиться на внутренней и внешней криволинейных поверхностях этих КЭ на основе аппроксимаций КЭ несущих слоев.

1. *Bakulin V. N.* Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Shells with Cutouts // Mechanics of Solids. — 2019. — V. 54, No. 3. — P. 448–460.

2. *Bakulin V. N.* Effective Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of Stress-Strain State of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2024. — V. 79, No. 3. — P. 102–109.
3. *Bakulin V. N.* The influence of the thickness of the supporting layer on the stress-strain state in the layers of sandwich cylindrical compartments with rectangular cutouts // Russian Aeronautics. — 2024. — V. 67, No. 3. — P. 476–483.
4. *Bakulin V. N.* The Influence of the Angular Dimension of Rectangular Cutouts on the Stress and Strain State of Sandwich Cylindrical Compartments // Russian Aeronautics. — 2024. — V. 67, No. 1. — P. 22–32.
5. *Bakulin V. N.* A Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Irregular Conical Sandwich Shells // Doklady Physics. — 2023. — V. 68, No. 10. — P. 334–339.
6. *Bakulin V. N.* Effective Model of Load-Bearing Layers for Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Irregular Shells of Revolution // Mechanics of Solids. — 2020. — V. 55, No. 3. — P. 557–565.
7. *Bakulin V. N.* Influence of Dimensions of Rectangular Cutouts and Modulus of Elasticity of Reinforcing Embedded Elements on the Stress–Strain State of Sandwich Compartments // Russian Aeronautics. — 2023. — V. 66, No. 2. — P. 204–215. — DOI: 10.3103/S1068799823020022.
8. *Bakulin V. N.* Block-Layer Approach For The Analysis Of The Stress-Strain State Of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells Of Rotation // Mechanics of Solid. — 2021. — V. 56, No. 7. — P. 1451–1460.
9. *Bakulin V. N.* A Model for Refined Calculation of the Stress-Strain State of Sandwich Conical Irregular Shells // Mechanics of Solids. — 2019. — V. 54, No. 5. — P. 786–796.

ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ, ПОСТРОЕННОЙ НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТИВНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В НЕСУЩИХ СЛОЯХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВЫРЕЗАМИ*

В. Н. Бакулин

ИПриМ РАН, Москва, Россия

Доклад посвящен 105-летию со дня рождения советского и российского ученого в области механики и авиационной техники академика АН СССР и РАН И. Ф. Образцова (1920–2005 гг.) (директора, ректора МАИ 1958–1972 гг., директора-организатора, научного руководителя Института прикладной механики (ИПРИМ) РАН 1989–2005 гг.), с которым автор работал до последних дней академика.

Применение трехслойных оболочек сдерживается, в частности, недостаточным совершенством моделей для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) с учетом наличия прямоугольных в плане вырезов (наиболее распространенной на практике формой вырезов), особенностей поведения слоев, переменности их геометрических и физико-механических характеристик (ФМХ), моментного состояния несущих слоев, трехмерного напряженного состояния в слое заполнителя, приложения нагрузок к отдельным слоям и разных условия закрепления слоев.

Недостаточное знание истинной картины НДС может привести к разрушению или к увеличению веса конструкции.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН).

Построение адекватной модели, позволяющей учесть отмеченные особенности, которые в настоящее время учитываются недостаточно точно, а некоторые из особенностей не учитываются, и исследование НДС в слоях трехслойных оболочек с прямоугольными вырезами является актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение.

Решить эту актуальную научную проблему позволяет предложенный автором подход послойного анализа [1–9], базирующийся на блочных конечно-элементных моделях (КЭМ).

Послойное моделирование трехслойных нерегулярных оболочек заключается в том, что стенка конструкции разбиваются по толщине на слои, которые затем стыкуются между собой [1–8].

При таком подходе можно в зависимости от геометрических параметров и ФМХ слоев и условий задач создавать и применять разные модели для расчета слоев.

При послойном моделировании получение аналитических решений для исследования НДС трехслойных оболочек, особенно ослабленных прямоугольными в плане вырезами, сталкивается с непреодолимыми математическими сложностями.

Одним из основных методов для решения указанных задач является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий создавать модели, с помощью которых можно проводить с необходимой степенью детализации и точности послойное исследование в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек.

На практике наибольшее распространение получили и получают трехслойные оболочки с тонкими и жесткими несущими слоями и сравнительно толстым, но менее жестким заполнителем.

Представленный подход послойного моделирования реализуется с помощью МКЭ в варианте метода перемещений на основе построения КЭМ естественной кривизны, точно представляющих геометрическую форму исследуемых оболочечных конструкций [1–9].

Подход состоит в построении КЭМ, состоящей из оболочечных двумерных конечных элементов (КЭ) моментных несущих слоев и трехмерных оболочечных КЭ слоя заполнителя.

Автором предложен подход, позволяющий избежать разрыва аппроксимирующих функций перемещений на поверхностях контакта оболочечных КЭ несущих слоев и слоя заполнителя при построении КЭМ нерегулярных трехслойных оболочек, в том числе ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

Важным является исследование достоверности, точности, сходимости и эффективности построенной КЭМ несущих слоев трехслойных оболочек.

Для этого проводится сравнение результатов, полученных с помощью построенной модели несущих слоев, с известными аналитическими и численными решениями др. авторов.

Проводится моделирование НДС полусферической оболочки под действием изгибающего момента, полусферической оболочки под действием распределенной по контуру кругового отверстия радиальной нагрузки, а также сферической оболочки под действием самоуравновешенных сил, распределенных по дугам окружности.

1. *Bakulin V. N.* Effective Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of Stress–Strain State of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2024. — V. 79, No. 3. — P. 102–109.
2. *Bakulin V. N.* The influence of the thickness of the supporting layer on the stress–strain state in the layers of sandwich cylindrical compartments with rectangular cutouts // Russian Aeronautics. — 2024. — V. 67, No. 3. — P. 476–483.

3. *Bakulin V. N.* The Influence of the Angular Dimension of Rectangular Cutouts on the Stress and Strain State of Sandwich Cylindrical Compartments // Russian Aeronautics. — 2024. — V. 67, No. 1. — P. 22–32.
4. *Bakulin V. N.* A Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Irregular Conical Sandwich Shells // Doklady Physics. — 2023. — V. 68, No. 10. — P. 334–339.
5. *Bakulin V. N.* Influence of Dimensions of Rectangular Cutouts and Modulus of Elasticity of Reinforcing Embedded Elements on the Stress–Strain State of Sandwich Compartments // Russian Aeronautics. — 2023. — V. 66, No. 2. — P. 204–215. — DOI: 10.3103/S1068799823020022.
6. *Bakulin V. N.* Model for Analysis of the Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Rectangular Cutouts // Mechanics of Solids. — 2022. — V. 57, No. 1. — P. 102–110.
7. *Bakulin V. N.* Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Sandwich Conical Aircraft Compartments with Rectangular Cutouts // Russian Aeronautics. — 2022. — V. 65, No. 4, — P. 668–676.
8. *Bakulin V. N.* Block-Layer Approach For The Analysis Of The Stress–Strain State Of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells Of Rotation // Mechanics of Solids. — 2021. — V. 56, No. 7. — P. 295–304.
9. *Bakulin V. N.* Effective Model of Load-Bearing Layers for Layer-by-Layer Analysis of the Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Irregular Shells of Revolution // Mechanics of Solids. — 2020. — V. 55, No. 3. — P. 557–565.

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА ПОСАДКИ ЛУННОГО ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНОГО КОМПЛЕКСА НА УЧАСТКЕ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ

***В. Н. Бакулин*[1,2], *С. В. Борзых*[3], *Р. С. Бычков*[3]**

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия;*
[3]*РКК «Энергия», Королев, Московская обл., Россия*

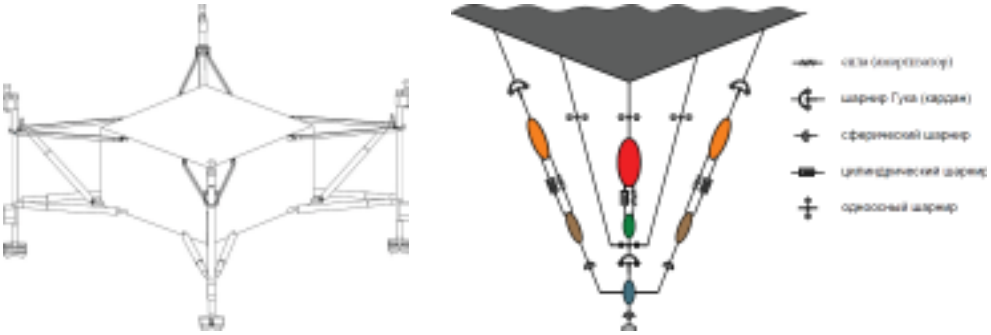
Одной из технически сложных задач является обеспечение безопасной посадки на морские и материковые рельефы Луны, которые обладают широким спектром механических свойств и углов наклона. В связи с расширением научных целей и планами по созданию Лунных баз на полярных регионах Луны, которые могут содержать большое количество воды, актуальным является необходимость обеспечения безопасной мягкой посадки в условиях сложного рельефа поверхности.

Для решения данной задачи лунный взлетно-посадочный комплекс (ЛВПК) снабжается посадочным устройством (ПУ), которое должно погасить остаточную кинетическую энергию, исключить возникновение ударных нагрузок на корпус ЛВПК, превышающих допустимые значения, обеспечить устойчивость и минимально необходимый клиренс аппарата в течение его движения по поверхности. Выполнение данных условий служит критериями успешности процесса посадки.

Известны различные ПУ — надувные ПУ всенаправленной амортизации (марсоходы НАСА) и ПУ направленной амортизации (аппараты Венера-9, Венера-13, посадочный модуль «Аполлон»), недостатками которых, являются низкая устойчивость на больших углах наклона посадочной поверхности, существенные перегрузки, сложное конструктивное исполнение.

В данной работе рассматривается ПУ, конструкция которого не содержит вышеприведенные недостатки и позволяет обеспечивать посадку на рельеф различной сложности (рис. 1). Конструкция такого ПУ содержит четыре складываемые опоры,

расположенные азимутально через 90°, каждая из опор включает в себя V-образную раму-качалку; диагональный подкос, содержащий амортизирующий элемент; телескопическую стойку, содержащую механизм изменения длины для вертикального выравнивания ЛВПК; два подкоса, которые также содержат амортизирующие элементы; тарель, содержащую ребра жесткости, служащие для антискользящего эффекта; прижимные двигатели, осуществляющие гашение боковых скоростей и фиксацию опорной тарели в грунте.



а *б*

Рис. 1. Общий вид (*а*) и кинематическая схема посадочного устройства (*б*)

Одним из основных параметров, от которого зависит успешное выполнение критериев процесса посадки, является силовая характеристика амортизатора. В данном случае амортизатор представляет собой сотовую конструкцию. Характеристика сотового амортизатора может быть выбрана на основании проведения большого количества расчетов с использованием определенной математической модели [1–9].

Используемый подход к моделированию процесса посадки заключается в следующем [1]: каждый элемент посадочного устройства рассматривается условно свободным, с приложенными к нему силами и моментами, действующими от других тел системы. Для определения этих неизвестных сил и моментов составляется специальная система уравнений связей. Уравнения связей отражают условие не расхождения общей точки контактируемых тел и равенство проекций угловых скоростей этих тел на общую продольную ось.

Уравнения поступательного и вращательного движения центра масс каждого из тел посадочного устройства имеют следующий вид:

$$m_i a_{oi} = F_{oi} + R_i, \quad [I_{oi}]\varepsilon_i + \omega_i \times ([I_{oi}]\omega_i) = L_{oi} + L_i + L_{ci},$$

где a_{oi} и ε_i — соответственно ускорение цента масс, и угловое ускорение «i»-го тела системы, m_i и $[I_{oi}]$ — соответственно масса и тензор инерции «i»-го тела F_{oi} — главный вектор внешних сил, R_i — главный вектор сил реакций связей, действующих на i-е тело, L_{oi} — главный момент внешних сил, L_i– главный момент сил реакций связей, L_{ci} — главный реактивный момент.

Дальнейшая подстановка линейных и угловых скоростей, выраженных из уравнений движения, в уравнения связей позволяет определить неизвестные силы и моменты, действующие в узлах сочленения тел посадочного устройства.

1. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.*, *Bychkov R. S.* Simulating the Process of Transforming the Supports of the Mechanical Landing Device of the Lunar Lander during the Contact Phase with the Surface // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2025. — V. 54, No. 3. — P. 223–230. — DOI: 10.1134/S1052618825700086.

2. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* An Approach for Building Dynamic Models of the Process of Disclosure of Transformable Space Structures // Doklady Physics. — 2021. — V. 66, No. 8. — P. 243–248.
3. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Analytical Estimates of the Movement and Elastic Vibrations of the Structures of Separated Fairings Doors of Rocket and Space Systems // Doklady Physics. — 2021. — V. 66, No. 5. — P. 134–138.
4. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Development of an Approach to the Formation of Dynamic Models of the Process of Disclosure of Transformable Space Structures // Russian Aeronautics. — 2022. — V 65, No. 1. — P. 49–56.
5. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Dynamic Model of the Separation of Large-Sized Elastic Structures // Doklady Physics. — 2023. — V. 68, No. 6. — P. 190–194. — DOI: 10.1134/S1028335823050026.
6. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Modeling of the Deployment Process Dynamics for Large-Sized Transformable Space Structures // Russian Aeronautics. — 2020. — V. 63, No. 4. — P. 610–617.
7. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.*, *Tereshina K. V.* Analytical Estimates of the Fairing Flaps Separation Dynamics of the Rocket and Space Systems // Russian Aeronautics. — 2021. — V. 64, No. 3. — P. 376–384.
8. *Bakulin V. N.*, *Bogomolov N. V.*, *Borzykh S. V.* Separation Algorithm of the Soyuz MS Spacecraft from Nonstabilized International Space Station // Russian Aeronautics. — 2019. — V. 62, No. 4. — P. 577–584.
9. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.*, *Voronin V. V.* Space vehicle landing dynamics at failure of landing gear. Flight Dynamics and Control of Flight Vehicles // Russian Aeronautics. — 2016. — V. 59, No. 1. — P. 23–28.

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ И ДНИЩЕМ, ПРИ ОБТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА*

***В. Н. Бакулин*[1], *Е. Н. Волков*[2], *И. Г. Языков*[2], *Ю. А. Гришин*[3]**

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*АО "Корпорация «МИТ»", Москва, Россия;*
[3]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия*

Рассмотрим аэроупругую устойчивость [1–5] ортотропной слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной по внутренней поверхности канальным кусочно-непрерывным цилиндром и кольцевыми ребрами, обтекаемой по внешней поверхности сверхзвуковым воздушным потоком. Считаем, что экватор днища, контактируя с узлом стыка по линии окружности, препятствует ее радиальному перемещению. Оболочка по торцам шарнирно оперта и нагружена осевыми силами. Цилиндр представляется упругим основанием Винклера, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости. Инерционные свойства учитываются путем приведения массы цилиндра к массе корпуса [6]. Осевой составляющей инерционных сил и инерцией вращения в оболочке пренебрегаем. Конструкционное демпфирование в оболочке и цилиндре не учитывается. Уравнения движения оболочки, записанные в функциях перемещений, можно представить в виде [7]

$$L_{s1}u + L_{s2}v + L_{s3}w + L_{s4}\varphi + L_{s5}\psi = -\delta_{s3}Z \quad (s = 1, 2, \ldots, 5), \tag{1}$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (регистрационный номер темы 1023032300192-8-2.3.2).

$$Z = B\sum_{j=1}^{N}\left[C_{1j}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)^2 + C_{2j}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]w_j\delta(\alpha-\alpha_j) + a_8\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_{10}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + a_{11}\frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+ B\left(\Pi + F_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)[\sigma_0(\alpha-\alpha_{i-1}) - \sigma_0(\alpha-\alpha_i)]w,$$

где L_{sj} — дифференциальные операторы, имеющие вид:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + a_1\frac{\partial^2}{\partial\beta^2};\quad L_{12} = L_{21} = a_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta};\quad L_{13} = L_{31} = \nu_\beta\frac{\partial}{\partial\alpha};$$

$$L_{14} = L_{41} = L_{15} = L_{51} = 0;\quad L_{22} = a_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + a_3\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - a_5;$$

$$L_{23} = L_{32} = a_7\frac{\partial}{\partial\beta};\quad L_{24} = L_{42} = 0;\quad L_{25} = L_{52} = a_5;$$

$$L_{33} = a_3 - (a_6 - a_9)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - a_5\frac{\partial^2}{\partial\beta^2};\quad L_{34} = L_{43} = -a_6\frac{\partial}{\partial\alpha};\quad L_{35} = L_{53} = -a_5\frac{\partial}{\partial\beta};$$

$$L_{44} = a_4\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + a_1\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) - a_6;\quad L_{45} = L_{54} = a_2a_4\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

$$L_{55} = a_4\left(a_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + a_3\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) - a_5;$$

$$a_1 = \frac{G_{\alpha\beta}(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{E_\alpha};\quad a_2 = a_1 + \nu_\beta;\quad a_3 = \frac{E_\beta}{E_\alpha};$$

$$a_4 = \frac{h^2}{12R^2};\quad a_5 = \frac{5G_{\beta z}(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{6E_\alpha};\quad a_6 = \frac{5G_{\alpha z}(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{6E_\alpha};\quad a_7 = a_3 + a_5;$$

$$a_8 = Bh\rho_0;\quad a_9 = \frac{BT_\alpha}{R^2};\quad a_{10} = \frac{B\chi p_0 M}{R};\quad F_1 = \frac{R(1-Z_0^2)\rho_3}{6};\quad a_{11} = \frac{B\chi p_0}{c_0};$$

$$B = \frac{(1-\nu_\alpha\nu_\beta R^2)}{E_\alpha h};\quad C_{1j} = \frac{E_jI_j}{R^5};\quad C_{2j} = \frac{R\left(0{,}7 - Z_0^2\sqrt{1-Z_0^2}\right)\rho_3}{2},\quad z_0 = \frac{R_0}{R},$$

где u, v, w — безразмерные осевое, окружное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки; φ, ψ — функции сдвига; R, h — радиус и толщина оболочки; E_α, E_β, $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha z}$, $G_{\beta z}$ — соответственно осевой, окружной модули упругости и модули сдвига; ν_α, ν_β — коэффициенты Пуассона; ρ_0 — плотность материала оболочки; T_α — осевое начальное усилие; B_j — модуль упругости материала j-го ребра; I_j — момент инерции ребра; χ, p_0, c_0 — показатель политропы, давление и скорость звука невозмущенного потока соответственно; N — количество ребер; $\delta(\alpha)$ — дельта-функция; δ_{s3} — символ Кронекера; $\sigma_0(\alpha)$ — единичная функция, равная единице при $\alpha > 0$ и нулю при $\alpha < 0$; ρ_3 — плотность материала цилиндра; R_0 — радиус канала цилиндра.

Решение уравнений (1) будем искать в виде, удовлетворяющем условиям шарнирного опирания оболочки на торцах [8]:

$$(u,\varphi) = \cos n\beta\sum_{m=0}^{\infty}(A_{1m}, A_{4m})\cos\gamma\alpha e^{\omega t},$$

$$(v,\psi) = \sin n\beta\sum_{m=1}^{\infty}(A_{2m}, A_{5m})\sin\gamma\alpha e^{\omega t}w = \cos n\beta\sum_{m=1}^{\infty}A_{3m}\sin\gamma\alpha e^{\omega t}, \tag{2}$$

где $\gamma = m\pi/\alpha_0$; $\alpha_0 = L/R$; L — длина оболочки; ω — комплексная частота колебаний; $A_{1m} \dots A_{5m}$ — постоянные коэффициенты; m — количество полуволн в осевом направлении; n — количество волн в окружном направлении.

Подставляя (2) в (1) и используя метод Бубнова–Галеркина, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно постоянной A_{3m}

$$(a_{12}\omega^2 + a_{11}\omega + \varepsilon_k)A_{3k} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[B(|pi_m + F_1\omega^2)H_{mk} + \sum_{j=1}^{N}\theta_{km}^{(j)} + a_{10}G_{km}\right]A_{3m} = 0$$

$$(k = 1, 2, 3 \dots), \quad \text{где} \quad \varepsilon_k = \frac{\Delta_k}{D_{33}^{(k)}}; \quad \xi = \frac{k\pi}{\alpha_0};$$

$$\theta_{km}^{(j)} = \frac{2B(n^2-1)^2}{\alpha_0}C_{1j}\sin\gamma\alpha_j \sin\xi\alpha_j; \quad a_{12} = a_8 + \frac{2B}{\alpha_0}\sum_{j=1}^{N}C_{2j}\sin^2(\pi\alpha_j/\alpha_0); \tag{3}$$

$$H_{mk} = \begin{cases} H_0 & \text{при} \quad m = k, \\ H_1 & \text{при} \quad m \neq k; \end{cases} \quad H_1 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{m-k}\sin\theta_1\cos\theta_1 - \frac{1}{m+k}\sin\theta_2\cos\theta_2\right];$$

$$\theta_1 = \frac{\pi(m-k)(\alpha_2-\alpha_1)}{2\alpha_0}; \quad \theta_2 = \frac{\pi(m+k)(\alpha_2-\alpha_1)}{2\alpha_0}.$$

Редуцируя систему (3) и приравнивая к нулю определитель полученной матрицы, приходим к искомому характеристическому уравнению. Для определения критической скорости используется метод «Полином Лагранжа» в виде [9]. Построены зависимости изменения критической скорости от длины узла стыковки при учете жесткости и массы днища, а также критической скорости от длины узла стыковки при увеличенных значениях осевой силы, радиуса канала и модуля упругости цилиндра.

1. *Bakulin V. N.*, *Volkov E. N.*, *Nedbaj A. Ya.* Flutter of a Sandwich Cylindrical Shell Supported with Annular Ribs and Loaded with Axial Forces // Doklady Physics. — 2015. — V. 60, No. 8. — P. 360–363.
2. *Bakulin V. N.*, *Volkov E. N.*, *Simonov A. I.* Dynamic Stability of a Cylindrical Shell under Alternating Axial External Pressure Russ // Aeronaut. — 2017. — V. 60, No. 4. — P. 508–513.
3. *Bakulin V. N.*, *Konopel'chev M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Flutter of a Laminated Cantilever Cylindrical Shell with a Ring-Stiffened Edge // Russian Aeronautics. — 2018. — V. 61, No. 4. — P. 517–523.
4. *Bakulin V. N.*, *Bokov M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Aeroelastic stability of a cylindrical composite shell at a bilateral flow // Mechanics of Composite Materials. — 2018. — V. 53, No. 6. — P. 801–808.
5. *Bakulin V. N.*, *Konopel'chev M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Aeroelastic Stability of a Cylindrical Shell of Linearly Variable Thickness // Doklady Physics. — 2019. — V. 64, No. 9. — P. 360–364.
6. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
7. *Соломонов Ю. С.*, *Петрусев В. И.*, *Недбай А. Я.*, *Волков Е. Н.* Прикладные задачи механики элементов твердотопливных двигателей. — М.: АО «Корпорация «МИТ», 2023. — 408 с.
8. *Бакулин В. Н.*, *Недбай А. Я.* Аэроупругая устойчивость трехслойной оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и цилиндром // Доклады академии наук. Физика, технические науки. — 2024. — Т. 516. — С. 39–46.
9. *Москвин В. Г.* Устойчивость круговой цилиндрической оболочки из линейного вязкоупругого материала в сверхзвуковом потоке газа // Труды 8-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. — М.: Наука, 1962. — С. 527–531.

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ПРИ ОБТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА*

***В. Н. Бакулин*[1], *Е. Н. Волков*[2], *И. Г. Языков*[2], *Ю. А. Гришин*[3]**

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*АО "Корпорация «МИТ»", Москва, Россия;*
[3]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия*

Исследование флаттера слоистых оболочек актуальная проблема [1–5]. Рассмотрим шарнирно опертую трехслойную оболочку с несимметричным пакетом слоев и легким заполнителем, подкрепленную упругим пустотелым цилиндром, обтекаемую по внешней поверхности сверхзвуковым потоком газа. Учет в расчетной схеме канального цилиндра в зависимости от толщины свода и модуля упругости материала может, как повысить, так и понизить критическую скорость обтекания. Будем считать, что давление потока одинаково, а плотность распределена равномерно. Цилиндр представляется упругим основанием Винклера, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости. Инерционные свойства учитываются путем приведения массы цилиндра к массе корпуса [6]. По торцам оболочка нагружена осевыми сжимающими силами.

Уравнения движения оболочки можно представить в виде [7]:

$$L_{i1}u_\alpha + L_{i2}v_\alpha + L_{i3}w + L_{i4}u_\beta + L_{i5}v_\beta = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 5), \tag{1}$$

где L_{ij} — дифференциальные операторы, имеющие вид

$$L_{11} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{33}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}; \quad L_{12} = L_{21} = (B_{12} + B_{33})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}; \quad L_{13} = L_{31} = B_{12}\frac{\partial}{\partial\alpha};$$

$$L_{14} = L_{41} = \overline{B}_{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \overline{B}_{33}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}; \quad L_{15} = L_{51} = (\overline{B}_{12} + \overline{B}_{33})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

$$L_{22} = B_{33}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}; \quad L_{23} = L_{32} = B_{22}\frac{\partial}{\partial\beta}; \quad L_{24} = L_{42} = (\overline{B}_{12} + \overline{B}_{33})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

$$L_{25} = L_{52} = \overline{B}_{33}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \overline{B}_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2};$$

$$L_{33} = \frac{D_{11}}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{D_{22}}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - \frac{h_0^2}{h}\left(G_{13}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + G_{23}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) +$$

$$+ T_\alpha\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + VR[\varepsilon_1\varphi_1(\alpha) + \varepsilon_2\varphi_2(\alpha)]\frac{\partial}{\partial\alpha} + \Pi R^2 + B_{22} +$$

$$+ \Phi R^2\frac{\partial}{\partial t} + F_0R^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + R[P_1\varphi_1(\alpha) + P_2\varphi_2(\alpha)]\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right);$$

$$L_{34} = L_{43} = \left(\overline{B}_{12} - 2\frac{Rh_0}{h}G_{13}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}; \quad L_{35} = L_{53} = \left(\overline{B}_{22} - 2\frac{Rh_0}{h}G_{23}\right)\frac{\partial}{\partial\beta};$$

$$L_{44} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{33}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 4\frac{R^2}{h}G_{13}; \quad L_{45} = L_{54} = (B_{12} + B_{33})\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (регистрационный номер темы 1023032300192-8-2.3.2).

$$D_1^B = \frac{E_1^B h_1^3}{12\eta^B}; \quad D_2^B = \frac{E_2^B h_1^3}{12\eta^B}; \quad D_3^B = \frac{G_{12}^B h_1^3}{6}; \quad z_0 = \frac{R_0}{R}; \quad T_\alpha = \frac{T}{2\pi R}; \quad \eta^B = 1 - \nu_1^B \nu_2^B;$$

$$h_0 = h + (h_1 + h_2)/2; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\chi_i P_i \rho^{(i)}}; \quad \Phi = \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_0}; \quad i = 1, 2;$$

$$\varphi_1(\alpha) = \sigma_0(0) - \sigma_0(\alpha - \alpha_1); \quad \varphi_2(\alpha) = \sigma_0(\alpha - \alpha_1) - \sigma_0(\alpha - \alpha_0);$$

α, β — безразмерные координаты вдоль образующей и в окружном направлении срединной поверхности заполнителя, принятой за координатную поверхность; w, u_α, u_β, v_α, v_β — нормальное и приведенные осевые и тангенциальные перемещения соответственно верхнего и нижнего несущих слоев; R, R_0 — радиусы срединной поверхности заполнителя и канала цилиндра соответственно; h_1, h_2, h — соответственно толщины верхнего, нижнего и среднего слоев; E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, ν_1^B, ν_2^B — соответственно осевой и окружной модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона верхнего слоя (обозначения для нижнего слоя с индексом «Н» имеют аналогичный смысл); G_{13}, G_{23} — модули поперечного сдвига заполнителя; ρ_1, ρ_2, ρ_0, ρ_3 — плотности материалов верхнего, нижнего и среднего слоев, и материала цилиндра; Π — коэффициент постели; χ_i, P_i, $\rho^{(i)}$ — показатель политропы, среднеинтегральное давление и плотность невозмущенного потока на i-м участке оболочки; V — скорость потока; M — число Маха; T — начальная осевая сила; $\sigma_0(\alpha)$ — единичная функция, равная единице при $\alpha > 0$ и нулю при $\alpha < 0$.

Решение уравнений (1) будем искать в виде [8]

$$\{u_\alpha, u_\beta\} = \cos n\beta \sum_{m=0}^{\infty} \{A_{1m}, A_{4m}\} \cos \gamma_m \alpha e^{\omega t};$$

$$\{v_\alpha, v_\beta\} = \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{A_{2m}, A_{5m}\} \sin \gamma_m \alpha e^{\omega t}; \qquad (2)$$

$$w = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} A_{3m} \sin \gamma_m \alpha e^{\omega t},$$

где $\gamma_m = m\pi/\alpha_0$; $\alpha_0 = L/R$; L — длина оболочки; ω — комплексная частота; $A_{1m}, \ldots, A_{5m}$ — постоянные коэффициенты; m — количество полуволн в осевом направлении; n — количество волн в окружном направлении.

Подставим (2) в (1) и, используя метод Бубнова–Галеркина, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно постоянной A_{3m}:

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\delta_{km}(\psi_k - \lambda) + R(1 - n^2) H_{km} + b_1 Q_{km}] A_{3m} = 0 \quad (k = 1, 2, 3 \ldots), \qquad (3)$$

где

$$\psi_k = \frac{\Delta_k}{D_{33}^{(k)}}; \quad \xi = \frac{k\pi}{\alpha_0}; \quad H_{km} = \begin{Bmatrix} H_0 & \text{при} & k = m \\ H_1 & \text{при} & k \neq m \end{Bmatrix};$$

$$H_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} P_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0} P_2 + (P_2 - P_1) \frac{\sin 2\xi\alpha_1}{2\pi k};$$

$$H_1 = \frac{2(P_2 - P_1)}{\pi(m^2 - k^2)} (m \cos \gamma\alpha_1 \sin \xi\alpha_1 - k \sin \gamma\alpha_1 \cos \xi\alpha_1);$$

$$-\lambda = b_2\omega^2 + b_3\omega; b_1 = VR; \quad b_2 = F_0 R^2; \quad b_3 = \Phi R^2;$$

$$\varphi_{mk} = k \cos \xi\alpha_1 \cos \gamma\alpha_1 + m \sin \xi\alpha_1 \sin \gamma\alpha_1 - k; \quad \delta_{km} \text{ — символ Кронекера.}$$

Редуцируя систему уравнений (3), с помощью метода Данилевского [9] в результате получим искомое характеристическое уравнение. Построены зависимости изменения критической скорости обтекания от плотности вдуваемого газа, модуля упругости материала цилиндра и величины осевой силы.

1. *Bakulin V. N.*, *Konopel'chev M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Panel flutter of a variable-thickness composite shell // Mechanics of Composite Materials. — 2020. — V. 56, No. 5. — P. 1–14.
2. *Bakulin V. N.*, *Konopel'chev M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Aeroelastic Stability of a Cylindrical Shell of Linearly Variable Thickness // Doklady Physics. — 2019. — V. 64, No. 9. — P. 360–364.
3. *Bakulin V. N.*, *Konopel'chev M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Flutter of a Laminated Cantilever Cylindrical Shell with a Ring-Stiffened Edge // Russian Aeronautics. — 2018. — V. 61, No. 4. — P. 517–523.
4. *Bakulin V. N.*, *Bokov M. A.*, *Nedbai A. Ya.* Aeroelastic stability of a cylindrical composite shell at a bilateral flow // Mechanics of Composite Materials. — 2018. — V. 53, No. 6. — P. 801–808.
5. *Bakulin V.N.*, *Volkov E.N.*, *Simonov A.I.* Dynamic Stability of a Cylindrical Shell under Alternating Axial External Pressure // Russ. Aeronaut. — 2017. — V. 60, No. 4. — P. 508–513.
6. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
7. *Соломонов Ю. С.*, *Петрусев В. И.*, *Недбай А. Я.*, *Волков Е. Н.* Прикладные задачи механики элементов твердотопливных двигателей. — М.: АО «Корпорация «МИТ», 2023. — 408 с.
8. *Бакулин В. Н.*, *Недбай А. Я.* Аэроупругая устойчивость трехслойной оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и цилиндром // ДАН. Физика, технические науки. — 2024. — Т. 516. — С. 39–46.
9. *Демидович Б. П.*, *Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966.

РАЗРАБОТКА ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПОДХОДОВ И МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМ ВЫСОКОТОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ*

***В. Н. Бакулин*[1], *Е. Л. Гусев*[2,3], *В. Д. Черных*[2]**

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*ИПНГ ФИЦ «ЯНЦ СО РАН», Якутск, Россия;*
[3]*ИМИ СВФУ, Якутск, Россия*

В настоящее время все возрастающее внимание уделяется проблеме разработки эффективных высокоточных методов прогнозирования остаточного ресурса, надежности, долговечности полимерных, композиционных материалов и конструкций из них, являющихся неотъемлемой частью современной техники в таких областях, определяющих научно-технический прогресс, как авиа-, и космическая техника, судостроение, нефтяная и газовая промышленность и др. [1–5].

В работе рассмотрены актуальность и научная новизна исследования, связанные с отсутствием современной методики прогнозирования долговечности композиционных материалов в экстремальных условиях. Целью исследования являлась

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (рег. №122011100162-9) с использованием научного оборудования Центра коллективного пользования ФИЦ ЯНЦ СО РАН и ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 1023032300192-8-2.3.2).

оценка долговечности полимерных композиционных материалов (ПКМ) в условиях экстремальных климатических воздействий. Разработана обобщенная математическая модель долговечности, описывающая зависимость изменения прочности полимерных композитов от экстремальных факторов, и разрабатывается программа для проведения расчетов на базе объектно-ориентированной среды Delphi. Применение полимерных материалов в различных областях приводит к изменению их свойств вследствие старения [6]. Старение материалов происходит вследствие химических и физических процессов в сложных многокомпонентных системах. Почти все полимерные материалы со временем становятся менее стабильными под воздействием тепла, света, механических воздействий, радиации [7] и других факторов. При этом сложность прогнозирования срока годности и срока службы полимерных материалов связана с отсутствием прямой связи между физико-химическими изменениями и макроскопическими свойствами материалов [8, 9]. Изменения характеристик полимера зависят от его химического состава, строения макромолекул, молекулярной массы и внешних воздействий.

Существует три основных подхода к прогнозированию механических свойств полимеров и композитов при воздействии внешней среды. Первый подход основан на принципе аналогий, второй подход использует экстраполяцию результатов натурных испытаний с помощью математических моделей, третий подход заключается в назначении минимального срока службы материалов в естественных условиях с постепенным продлением этого периода. Преимущества ускоренных климатических испытаний заключаются в их небольшой продолжительности, однако они затрудняют учет климатических факторов и определение их вклада в процесс старения.

Вариационная постановка задачи прогнозирования сводится к подбору функционала с экстремальными свойствами на точном решении задачи. Обобщенная модель для описания воздействия нескольких факторов может быть представлена в виде суммы изменений, вызванных каждым фактором независимо друг от друга:

$$R = R_0 + \sum_{j=1}^{p} F_j(u_{j,1}, u_{j,2}, \ldots, u_{j,l_j}; t).$$

Каждая из функций $F_j(u_{j,1}, u_{j,2}, \ldots, u_{j,l_j}; t)$ $(j = 1, 2, \ldots p)$, описывающая воздействие j-го фактора на полимерный композит, может быть представлена в виде разложения в ряд по некоторой системе базисных функций, в наиболее полной мере характеризующей особенности процесса увеличения поврежденности материала при воздействии экстремальных факторов внешней среды. Установлено, что успешность эффективного решения задач прогноза остаточного ресурса композитов в значительной степени зависит от того насколько адекватно удается учесть в моделях долговечности фундаментальные закономерности, присущие процессам, происходящим как на микро-, так и на макроуровне, оказывающим существенное влияние на изменение остаточного ресурса композита. Проведен анализ многопараметрической модели прогнозирования, использованы условия экстремума для уменьшения размерности задачи. Исследована зависимость оптимальных моделей долговечности от структуры и сложности. В рамках вариационных постановок разработан эффективный подход к решению задач прогнозирования долговечности композитов в экстремальных условиях, основанный на принципе множественности моделей прогнозирования. Проведение вычислительных экспериментов на основе разработанного подхода позволяет найти баланс между временем экспонирования и точностью прогноза, что открывает новые перспективные возможности для по-

вышения точности и достоверности прогноза определяющих характеристик композитов в экстремальных условиях.

1. *Gusev E. L.* Using parallel procedures for the searching of the extremum for the decision of the inverse problems prediction of the defining characteristics of the composite materials // Material Physics and Mechanics. — 2016. — V. 26, No. 1. — P. 70–72.
2. *Gusev E. L.*, *Ivanova M. A.* Development and application of combined methods for solving the prediction problems of defining characteristics of composites // Mathematical Notes of NEFU. — 2019. — V. 29, No. 1. — P. 60–69.
3. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Optimal control under a decrease in the thermal-field intensity based on selection of the heterogeneous–construction structure in the variational formulation // Doklady physics. — 2018. — V. 63, No. 5. — P. 213–217.
4. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Variation formulations of inverse problems in forecasting the residual life of composites // Doklady physics. — 2018. — V. 63, No. 9. — P. 388–392.
5. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.*, *Chernykh V. D.* Promising methods for predicting the residual life of polymer composites in refined variational statements under extreme environ-mental influences // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2021. — V. 1191. — P. 012022.
6. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.*, *Chernykh V. D.* Development of combined search methods for efficiency indicator extreme in variation statement of forecasting tasks for determine characteristics of composite materials // Journal of Physics: Conference Series. Supercomputer Technologies in Mathematical Modelling, Moscow, Russian Federation, 2019. — V. 1392. — 012008.
7. *Bakulin V. N.*, *Ostrik A. V.* The combined thermal and mechanical effect of radiation and shock waves on a multilayer orthotropic shell with a heterogeneous coating // J. Appl. Math. Mech. — 2014. — V. 78(2). — P. 155–162.
8. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.*, *Chernykh V. D.* Development and application of combined methods to expand the potential for predicting the defining characteristics of composites // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2020. — V. 927. — P. 010240.
9. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Generalized multiparametric models for predicting the physical and mechanical properties of composites when exposed to extreme environmental factors // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — V. 1705. — 012033.

О ВЫБОРЕ АМПЛИТУДЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ МОДЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ДЕМПФИРОВАНИЯ

***В. Н. Бакулин*[1], *В. Г. Марков*[2], *Д. В. Шуховцов*[2]**

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия*

Для создания летательных аппаратов (ЛА) необходимо иметь развитые методы проектирования (в том числе оптимального проектирования [1–3]) и расчета конструкций [4–9]. Вместе с вопросами применения этих методов актуальным является моделирование динамики летательных аппаратов и в частности конструкций авиационной техники. Для этого необходимы математические модели статических и нестационарных аэродинамических сил и моментов. Такие модели основаны на результатах экспериментальных исследований в аэродинамических трубах.

Известно, что для экспериментального определения демпфирующих характеристик в аэродинамических трубах (АДТ) существует ряд способов. Широкое распространение получил способ одностепенных вынужденных колебаний модели ЛА в потоке АДТ. При таком способе реализуется метод гармонической линеа-

ризации статических аэродинамических зависимостей, коэффициенты которой в общем случае могут зависеть от амплитуды вынужденных колебаний модели ЛА.

Традиционно амплитуда вынужденных колебаний выбирается равной 3°. По-видимому, такое ограничение было связано с невозможностью технически обеспечить приемлемую точность определения демпфирующих комплексов производных при существенно меньших амплитудах колебаний. В то же время часто усилительно-измерительный комплекс, построенный на базе высокоточного цифрового усилителя (класс точности 0,03) и также первичных цифровых измерительных преобразователей, позволяет уменьшить амплитуду колебаний в разы, и даже на порядок.

В работе на примере штопорной модели магистрального самолета со стреловидным крылом большого удлинения ($\lambda \approx 11$) приводятся результаты исследований влияния амплитуды колебаний модели по тангажу 0,5, 1 и 3° на величины демпфирующих комплексов производных коэффициентов нормальной силы $c_y^{\overline{\omega}_z} + c_y^{\overline{\dot{\alpha}}}$ и момента тангажа $m_z^{\overline{\omega}_z} + m_z^{\overline{\dot{\alpha}}}$ в диапазоне углов атаки $\alpha = [0\text{–}24°]$, полученные по материалам испытаний в аэродинамической трубе малых дозвуковых скоростей на динамической установке при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 0{,}19 \cdot 10^6$ и Струхаля $\mathrm{Sh} \le 0{,}07$.

На основании приведенных в работе результатов экспериментальных исследований нестационарных аэродинамических характеристик модели самолета с крылом большого удлинения можно сделать следующие выводы.

1. Приближение амплитуды вынужденных колебаний модели самолета к малым значениям ($A_\alpha = 0{,}5°$) способствует «отслеживанию» характера изменения статических зависимостей, особенно зависимости коэффициента момента тангажа $m_z = f(\alpha)$.

2. При выходе модели самолета, совершающей вынужденные угловые колебания по тангажу с различной частотой, на околокритические режимы обтекания, уменьшение амплитуды колебаний от $A_\alpha = 3$ до 0,5° приводит к заметному увеличению численных значений демпфирующих комплексов $c_y^{\overline{\omega}_z} + c_y^{\overline{\dot{\alpha}}}$ и $m_z^{\overline{\omega}_z} + m_z^{\overline{\dot{\alpha}}}$.

3. Появление антидемпфирования по тангажу ($m_z^{\overline{\omega}_z} + m_z^{\overline{\dot{\alpha}}} > 0$) связано с существенным ростом нестационарной производной $m_z^{\overline{\dot{\alpha}}}$, зависящей от амплитуды колебаний.

Такое поведение производной аэродинамического демпфирования обусловлено наличием в области околокритических углов атаки сложной (двухступенчатой) опережающей пороговой нелинейности в квазистатической зависимости $m_z = m_z(\alpha)$.

С уменьшением амплитуды A_α абсолютное значение $m_z^{\overline{\omega}_z} + m_z^{\overline{\dot{\alpha}}}$ увеличивается, так как динамическая петля в зависимости $m_z = m_z(\alpha, \dot{\alpha})$ будет занимать тем большую часть «рабочего» участка характеристики $m_z = m_z(\alpha)$, чем меньше амплитуда колебаний A_α. А сужение области антидемпфирования, при уменьшении A_α, обусловлено выходом модели ЛА в область пороговой нелинейности с больших углов атаки α_0.

1. *Бакулин В. Н.*, *Гусев Е. Л.*, *Марков В. Г.* Методы оптимального проектирования конструкций из композиционных и традиционных материалов // Матем. моделирование. — 2000. — Т. 12, №5. — С. 28–32.
2. *Bakulin V. N.*, *Gusev E. L.*, *Markov V. G.* Methods of Optimal Designing of Constructions of Conventional and Composite Materials Subjected to Wave and Static Actions // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2001. — V. 74, No. 6.
3. *Бакулин В. Н.*, *Гусев Е. Л.*, *Марков В. Г.*, *Емельянов А. И.*, Оптимальное проектирование и численный расчет конструкций с применением композиционных и традиционных материалов // Матем. моделирование. — 2002. — Т. 14, №9. — С. 71–77.

4. *Bakulin V. N.* Effective Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of Stress-Strain State of Three-Layer Irregular Cylindrical Shells // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2024. — V. 79, No. 3. — P. 102–109.
5. *Bakulin V. N.* A Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Irregular Conical Sandwich Shells // Doklady Physics. — 2023. — V. 68, No. 10. — P. 334–339.
6. *Колин И. В.*, *Марков В. Г.*, *Суханов В. Л.*, *Трифонова Т. И.*, *Шуховцов Д. В.* Исследование развития нестационарного отрыва потока на модели со стреловидным крылом // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2009. — №5.
7. *Bakulin V. N.* The Influence of the Angular Dimension of Rectangular Cutouts on the Stress and Strain State of Sandwich Cylindrical Compartments // Russian Aeronautics. — 2024. — V. 67, No. 1. — P. 22–32.
8. *Bakulin V. N.*, *Nedbay A. Ya.* Parametric Resonance of a Three-Layer Cylindrical Composite Shell, Supported by Longitudinal Ribs and a Cylinder, Under the Action of a Time-Varying Axial Force // Doklady Physics. — 2022. — V. 67. No. 7. — P. 209–214.
9. *Bakulin V. N.*, *Nedbai A. Ya.* Dynamic Stability of Composite Cylindrical Shell of Linear-Variable Thickness under the Action Pulsed External Pressure // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2021. — V. 94, No. 2. — P. 525–533.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСПОЗНАВАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ*

***О. В. Бочарова*[1], *И. Е. Анджикович*[2], *А. С. Турчин*[1]**

[1]*ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, Россия;* [2]*ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия*

Композиционные материалы находят все более широкое применение в различных отраслях промышленности. Особым классом композиционных материалов являются сэндвич-композиты. Эти конструкционные материалы обладают такими преимуществами, как низкий вес, высокая жесткость и прочность. Эти преимущества являются следствием широко известного факта: разделение двух материалов с помощью другого легкого материала увеличивает прочность и жесткость конструкции. Кроме того, сэндвич-композиты обладают такими важными характеристиками как термоизоляция, звукоизоляция, вибростойкость, коррозионная стойкость, хорошие диэлектрические свойства, что позволяет успешно использовать их в различных отраслях, включая самолетостроение, судостроение, ветроэнергетику, аэрокосмическую отрасль, транспорт, промышленность и т. д. [1, 2].

В процессе эксплуатации в условиях высоких нагрузок и вибраций в конструкциях возникают значительные напряжения, которые могут привести к появлению в них расслоений, скрытых дефектов, резко снижающих их прочностные характеристики, что может стать причиной их разрушения. Это обстоятельство обуславливает необходимость использования традиционных методов неразрушающего контроля, а также развития новых методов идентификации дефектов и неоднородностей в композиционных материалах.

Цель предлагаемого в настоящей работе метода — по ударному воздействию получить информацию о состоянии среды. Ударное возмущение производилось элек-

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ: в части проведения экспериментальных работ в рамках государственного задания в области научной деятельности для ЮФУ, научный проект №FENW-2023-0012; в части разработки методов и проведения численного анализа в рамках реализации государственного задания для ЮНЦ РАН (номер госрегистрации 125011200151-9).

тромагнитным ударным молотком, обеспечивающим постоянство условий возмущения во всех сериях измерений. Колебания исследуемой точки поверхности среды регистрировали калиброванным малогабаритным ICP-акселерометром 352A24 фирмы PCB Piezotronics. Сигнал с акселерометра усиливался предварительным ICP-усилителем ZETLAB 440. Аналоговые сигналы подавались на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП) L-Card E14-140, обрабатывались на компьютере программой PowerGraph и сохранялись для дальнейшей математической обработки.

Измерения проводились датчиками, расположенными в «ближней» (до дефекта) и «дальней» зонах (после прохождения поверхностной волной дефекта). Датчик, расположенный в «ближней» зоне измеряет отраженную волну; датчик, расположенный в «дальней» зоне измеряет проходящую волну.

Для повышения информативности предложенного метода [3–5] был разработан оригинальный подход, позволяющий улавливать незначительные отличия в волновых полях и, тем самым, идентифицировать наличие неоднородностей в исследуемом объекте. Этот метод основан на использовании оптимальных ортогональных разложений сигналов по базису, который специально настраивается на максимально возможную чувствительность к типу, размерам и расположению того или иного дефекта.

Проведена серия экспериментов по численной обработке сигнала. Исследовалась возможность распознавания наличия неоднородности и ее типа (отрыв стеклоткани, жесткие включения) по отраженному и по прошедшему волновому полю.

Результаты проведенных экспериментов показали, что при распознавании наличия дефекта и определения его типа в сэндвич-композите информативным является как прошедшее, так и отраженное волновое поле. Лучшие результаты распознавания дефектов удалось достигнуть при использовании акселерограмм от прошедшей волны.

1. *Прохоров Б. Ф.*, *Кобелев В. Н.* Трехслойные конструкции в судостроении. — Л.: Судостроение, 1972. — 334 с.
2. Крысин В. Н. Слоистые клееные конструкции в самолетостроении. — М.: Машиностроение, 1980. — 228 с.
3. *Бочарова О. В.*, *Седов А. В.*, *Анджикович И. Е.*, *Калинчук В. В.* Об одном методе идентификации дефектов, основанном на контроле структуры и особенностей поверхностных волновых полей // Дефектоскопия. — 2016. — Т. 52, №7. — С. 21–28.
4. *Бочарова О. В.*, *Анджикович И. Е.*, *Седов А. В.*, *Калинчук В. В.* Возможности биспектрального подхода к обработке сигнала // Измерительная техника. — 2017. — №9. — С. 62–65.
5. *Bocharova O. V.*, *Andzhikovich I. E.*, *Sedov A. V.*, *Kalinchuk V. V.* Low frequency method for monitoring the state of structural heterogeneous objects // Procedia Structural Integrity. — 2021. — V. 32. — P. 299–305.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБРАЗЦОВ ИЗ СТАЛИ Х12МФ ПОСЛЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ПЛАЗМЕННОГО УПРОЧНЕНИЯ

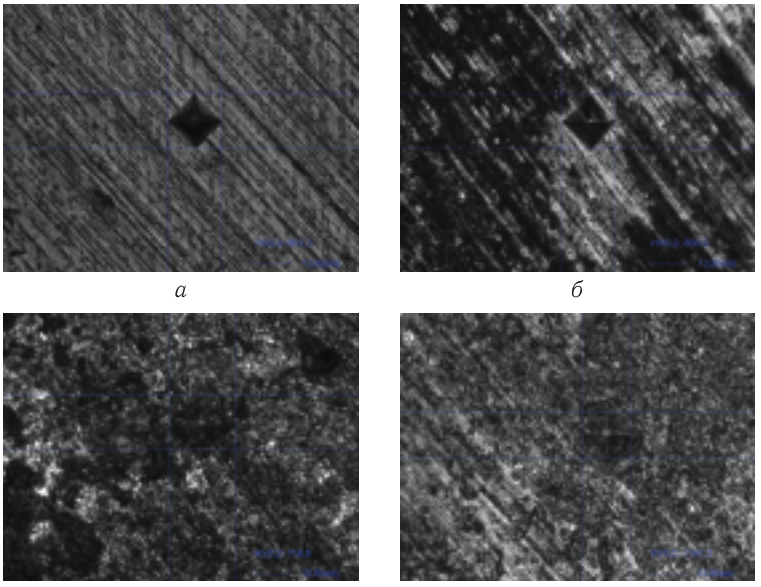
А. И. Веремейчик, С. Р. Онысько, М. И. Сазонов, В. М. Хвисевич, М. В. Хеук, К. Т. Аббасов, М. А. Ярмак

БрГТУ, Брест, Республика Беларусь

Для реализации упрочнения поверхностного слоя образцов из стали Х12МФ методом локальной плазменной закалки использована установка МПУ-4. Диапазон токов установки 2,5–30 А. На прямой полярности дуга горит между вольфра-

мовым катодом и обрабатываемым образцом в среде плазмообразующего (аргон) и защитного (азот) газов давлением до 49 кПа. Расход плазмообразующего газа регулируется в пределах 12–30 л/ч. Расход защитного газа — 120–140 л/ч. Охлаждение плазмотрона осуществляется проточной водой под давлением 98–196 кПа и с расходом не менее 30 л/ч. В качестве катода использован вольфрамовый стержень диаметром 1,4 мм. Катод охлаждается потоком рабочего газа. Сопло служит для формирования плазменной дуги (дуги, горящей в потоке аргоновой плазмы). Локальность нагрева и высокая плотность теплового потока в анодном пятне достигается за счет интенсивного охлаждения водой сопла. Проведенные оценки показали, что плотность теплового потока на торцевой поверхности может регулироваться от $2{,}5 \cdot 10^4$ до $6 \cdot 10^5$ Вт/м^2 за счет изменения тока дуги, диаметра анода, интенсивности турбулизации потока аргона.

Для обеспечения стабильной скорости и расстояния между соплом и обрабатываемым образцом, а также возможности быстрого и точного их изменения применим экспериментальную установку, состоящую из роботизированного комплекса Advercut K6090T с разработанным к нему узлом крепления плазменного генератора.



а *б* *в* *г*

Рис. 1. Замеры микротвердости образца из стали Х12МФ: *а* — необработанный образец; *б* — дорожка 1; *в* — дорожка 2; *г* — дорожка 3

На рис. 1 показана микроструктура поверхности упрочненной зоны образца в зависимости от режимов плазменной закалки. На каждой дорожке произведено девять замеров микротвердости с помощью твердомера KASON-59-HV-W. Точки промеров распределены по длине следующим образом: по три точки вначале участка (слева); по центру (центр); в конце участка (справа).

Данные, полученные при измерении микротвердости в поперечном сечении упрочненной дорожки показаны на рис. 2.

Эксперименты показали, что микротвердость поверхности стали неоднородна, ее распределение по ширине зоны влияния плазменной дорожки подчинено опре-

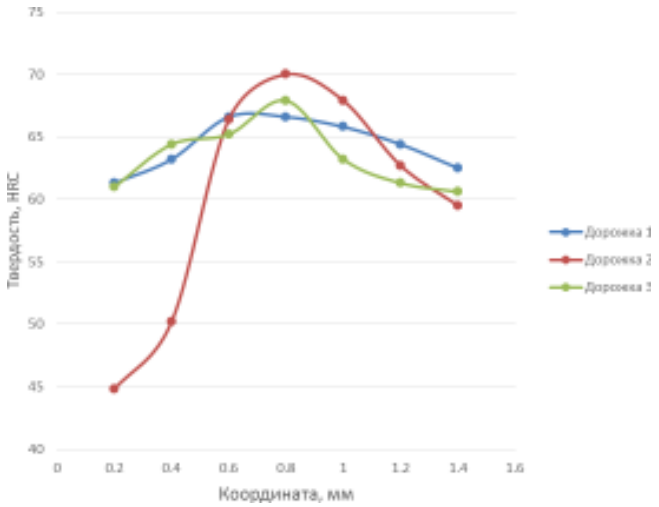


Рис. 2. Распределение микротвердости по ширине зоны влияния плазменной дуги на образцах из стали Х12МФ

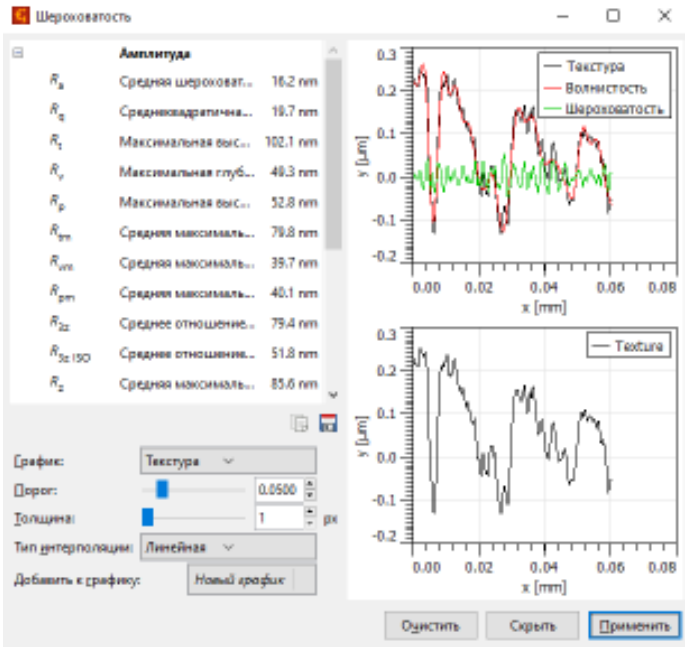


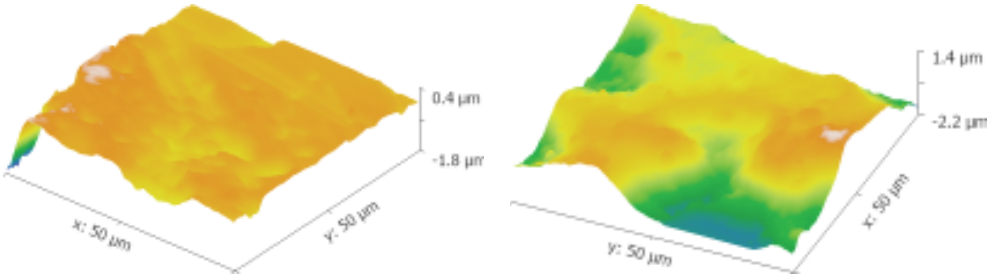
Рис. 3. Профилограммы поверхности образца из стали Х12МФ после обработки без оплавления

деленному закону. Глубина упрочняемого слоя изменяется в пределах 0,15–0,6 мм в зависимости от параметров процесса.

На рис. 3 приведены профилограммы образца после упрочнения.

Анализируя профилограммы, можно заключить, что шероховатость поверхности порядка $Ra = 0{,}2$ мкм после механической обработки образцов сохраняется такой же и после обработки плазменной дугой.

Поверхность образца с оплавлением имеет сложный рельеф, обусловленный системой впадин и гребней. Профилограмма такого образца вследствие высокой детализации и малой площади поверхности измерения (50 × 50 мкм), полученная на атомно-силовом микроскопе FM-Nanoview 1000 AFM, не отражает гребни и впадины (рис. 4).



а *б*

Рис. 4. Топография поверхности образца из стали Х12МФ после упрочнения: *а* — без оплавления поверхности; *б* — с оплавлением поверхности

При упрочнении без оплавления наблюдается уменьшение шероховатости, предположительно вследствие сглаживания микронеровностей под действием концентрированного источника тепла. По результатам экспериментальных исследований установлено, что при закалке поверхности в твердой фазе целесообразно применить аргон в качестве защитного газа, который в меньшей степени, чем азот, обжимает дугу. В результате снижается плотность потока энергии, которую поглощает поверхность, и температура поверхностного слоя металла получается ниже температуры его плавления. Проведенные эксперименты показали, что подача азота позволяет значительно увеличить напряжение дуги и, соответственно, мощность плазмотрона и достичь плотности теплового потока в анодном пятне в плоть до $6 \cdot 10^7$ Вт/м^2 при диаметре пятна 2,0–2,4 мм.

По результатам исследований установлены оптимальные режимы поверхностного упрочнения образцов.

ВЛИЯНИЕ РАДИУСА ПЯТНА НАГРЕВА НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРИ ЗАКАЛКЕ СКАНИРУЮЩИМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

А. И. Веремейчик, Б. Г. Холодарь

БрГТУ, Брест, Республика Беларусь

Воздействие движущегося теплового потока высокой интенсивности используется для модификации свойств материала в приповерхностной зоне. Важнейшей проблемой является подбор оптимального режима теплового нагружения. В связи с этим расчеты температурных полей в соответствующих зонах материала имеют первостепенное значение [1, 2]. Для лазерной обработки образцов применялся волоконный лазер непрерывного действия с максимальной мощностью 1 кВт. Технологический комплекс для лазерной закалки сталей оборудован сканирующей системой, которая обеспечивает многократное перемещение пятна нагрева по обрабатываемой поверхности с высокой частотой в направлении перпендикулярном направлению обработки. Такое перемещение пятна с высокой частотой обеспечи-

вается применением системы двух дефлекторов, которые согласованно совершают колебания во взаимно перпендикулярных направлениях [1].

Разработан алгоритм расчета и создана компьютерная программа для исследования тепловых процессов при лазерном упрочнении сталей движущимся источником нагрева со сканирующей системой. Программа учитывает, что при поверхностной обработке излучением волоконного лазера со сканирующей лазерный луч головкой производится отключение лазерного излучения после прохождения нескольких поперечных линий, т. е. обрабатываемая дорожка представляет собой последовательность зон, состоящих из участков непосредственного нагружения (пятно воздействия) и «ненагруженных» промежутков.

В качестве исходных кинематических данных для расчетов принимались скорость движения лазерной головки вдоль дорожки, длина и ширина дорожки, число поперечных линий на пятне сканирования и частота повторений прохождения двух взаимосвязанных линий. По этим данным определен период времени, соответствующий возврату оси луча в точку с фиксированной поперечной координатой. На лазерной установке задавалось число линий $N_{lin} = 7$, т. е. на пятне сканирования умещается полуцелое $N_{lin}/2$ число периодов поперечного движения луча. В связи с тем, что оплавление поверхности обрабатываемого материала происходит в круге определенного радиуса, при небольших скоростях движения головки лазера происходит непрерывное слияние зон обработки «пятно + промежуток», определение продольной составляющей скорости сканирования проведено при высоких скоростях движения лазерной головки, когда выделяются пятна и промежутки между ними [1].

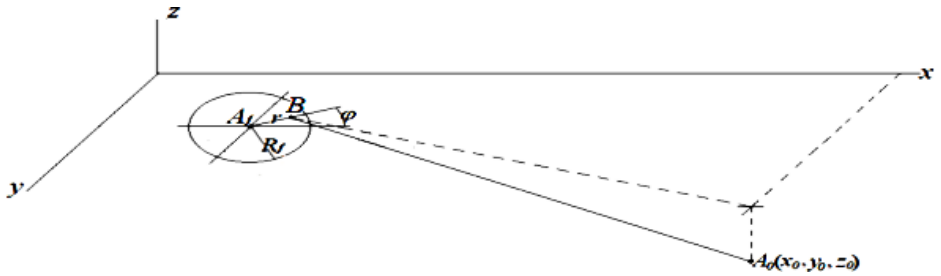


Рис. 1. Расстояние между точкой пятна и точкой A_0 тела

Для источника нагрева, расположенного в точке $A(x, y, z)$, приращение температуры над исходным уровнем температуры тела в данной точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ в заданный момент времени t определяется выражением [2]:

$$T(r,t) = \frac{Q}{8(\pi a t)^{3/2}} \exp\left[\frac{r^2}{4at}\right], \tag{1}$$

где Q — выделение тепла в точке в единицу времени, Дж; $a = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, м^2/с; λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · °С); c — удельная теплоемкость, Дж/(кг · °С); ρ — плотность материала, кг/м^3; t — время, с; $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — расстояние от источника тепла до рассматриваемой точки (рис. 1). Начальная температура принята равной нулю.

Поскольку источник излучения создает не точечный, а распределенный по некоторому закону поток, то величину Q можно представить в виде интеграла

$\int q_0 \cdot f(a,t)\,da$, где q_0 — максимальная интенсивность потока, $f(a,t)$ — закон его распределения по площади a пятна нагрева в зависимости от текущего значения времени t. Функцию $f(a,t)$ представим в виде произведения: $f(a,t) = f(a) \cdot f(t)$. В качестве $f(a)$ можно выбрать различные приближенные представления, в частности используются равномерный по площади или распределенный по гауссовому закону поток. Поскольку тепловое воздействие распределено по некоторой поверхности тела, необходимо рассматривать действие совокупности точечных источников, что приводит к необходимости интегрирования выражения (1) в пределах этой поверхности:

$$T_S(r,t) = \int \left\{ \int T(r,t)\,ds \right\} d\xi, \tag{2}$$

где ξ — переменная интегрирования по времени от начального значения $\xi_0 = 0$, S — переменная интегрирования по поверхности.

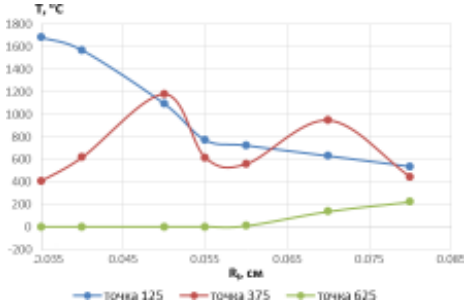


Рис. 2. Зависимость температуры в точке на оси дорожки с координатой $x_0 = 0{,}0172$ см (125) от радиуса пятна нагрева при нахождении центра пятна нагрева в точках первой (125), второй (375), третьей (625) линии на оси дорожки при скорости движения пятна нагрева $v = 600$ мм/мин

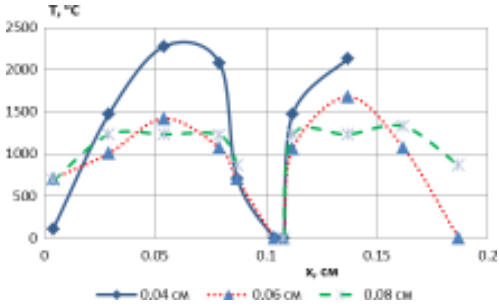


Рис. 3. Зависимость температуры от координаты в точках на оси дорожки для различных R_f при скорости движения пятна нагрева $v = 20000$ мм/мин

Распределение интенсивности воздействия по площади ядра подчинено гауссовому закону $q = q_0 \exp[-(r/R_f)^2]$, где r — расстояние от оси луча [2]. В соответствии с методикой [1, 2], проведены исследования температурных полей для различных режимов лазерной закалки. Расчет проводился для мощности лазера $P_0 = 1$ кВт, температуре плавления $T^{\text{пл}} = 1550\,^\circ$C, характеристиках материала $\rho = 7860$ кг/м^3, $\lambda = 38$ Вт/(м $\cdot\,^\circ$C), $c = 745$ Дж/(кг $\cdot\,^\circ$C). Исследовано влияние радиуса пятна нагрева на температурное поле на поверхности образца. На рис. 2 и 3 приведены зависимости температуры от радиуса пятна нагрева R_f и координаты x.

1. *Веремейчик А. И.*, *Холодарь Б. Г.* Исследование температурного поля при лазерном упрочнении сталей // Механики XXI веку. — 2925. — №24. — С. 301–309.
2. *Веремейчик А. И.*, *Хвисевич В. М.*, *Холодарь Б. Г.* Некоторые аспекты определения температурных полей при термоупрочнении металлоизделий // Перспективные материалы и технологии / Антанович А. А. [и др.]; под ред. В. В. Рубаника. — Минск: ИВЦ Минфина, 2023. — Гл. 18. — С. 218–237.

РАЗРАБОТКА МЕТОДОЛОГИИ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И ЦЕЛОСТНОСТИ УПАКОВОК ДЛЯ ХРАНЕНИЯ ОТРАБОТАВШЕГО ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА

О. Ю. Виленский, Д. А. Лапшин, С. Н. Пичков

АО «ОКБМ Африкантов», Нижний Новгород, Россия

Важное место на объектах использования атомной энергии (ОИАЭ) занимают системы хранения и транспортирования отработавшего ядерного топлива (ОЯТ) и радиационных отходов (РАО), вследствие существования потенциальной возможности (в детерминистской постановке) возникновения штатных и аварийных ситуаций, связанных с падением оборудования при проведении транспортно-технологических операций (ТТО), что может привести к серьезным радиационным последствиям.

В настоящее время, существующих в России сертифицированных контейнеров отечественной разработки, которые входят в состав транспортных упаковочных комплектов (ТУК), обеспечивающих ядерную и радиационную безопасность и предназначенных для транспортировки и хранения ОЯТ, не достаточно. На многих атомных электростанциях (АЭС) с реакторными установками различных типов, начинает возникать профицит ОЯТ, которое в недалеком будущем, необходимо вывозить с ОИАЭ в места его захоронения. Крайне актуальной становится задача по разработке и созданию таких контейнеров.

В конструктивном исполнении ТУК является сложным и дорогостоящим изделием, к которому предъявляются повышенные требования по: динамической прочности при воздействии ударных нагрузок высокой интенсивности; геометрической совместимости с внутренним содержимым после реализации ударных нагрузок; демпфирующим способностям, эффективно снижающим внешние динамические перегрузки.

В процессе транспортировки и проведении ТТО должна исключаться, как возможность выпадения ядерного топлива из контейнера, так и любое относительное смещение в нем ОЯТ [1–3]. Выполнение подобных требований, возможно, прежде всего, в случае сохранения герметичности ТУК и отсутствия недопустимого формоизменения. Упомянутые выше требования предусматривают подтверждение его показателей безопасности путем проведения испытаний на ударные воздействия по регламентируемым нормативным требованиям, в частности, при падении ТУК на жесткую плиту с установленной высоты в различных положениях, падение ТУК на металлический штырь и т. п. [1–4]. Однако натурные испытания ТУК в процессе проектирования и отработки конструкции затруднены, прежде всего, в силу их значительной стоимости. В связи с этим, актуальной становится проблема проведения численного исследования ТУК на стадии проектирования.

Применение имеющихся методологий бывает не достаточным для воссоздания всех исходных событий связанных с механическими воздействиями на проектируемую конструкцию, при обосновании ее прочности и целостности [5]. Одним из путей решения данной проблемы может быть разработка методологии математических исследований на базе создания подробных цифровых двойников конструкции, позволяющих на стадии проектирования, в полной мере учесть как ее конструктивные особенности, так и все возможные виды воздействий, заложенные в алгоритмы их реализации через граничные условия. Определяющими нагрузками для ТУК, являются ударные воздействия высокой интенсивности вследствие его падений с различных высот.

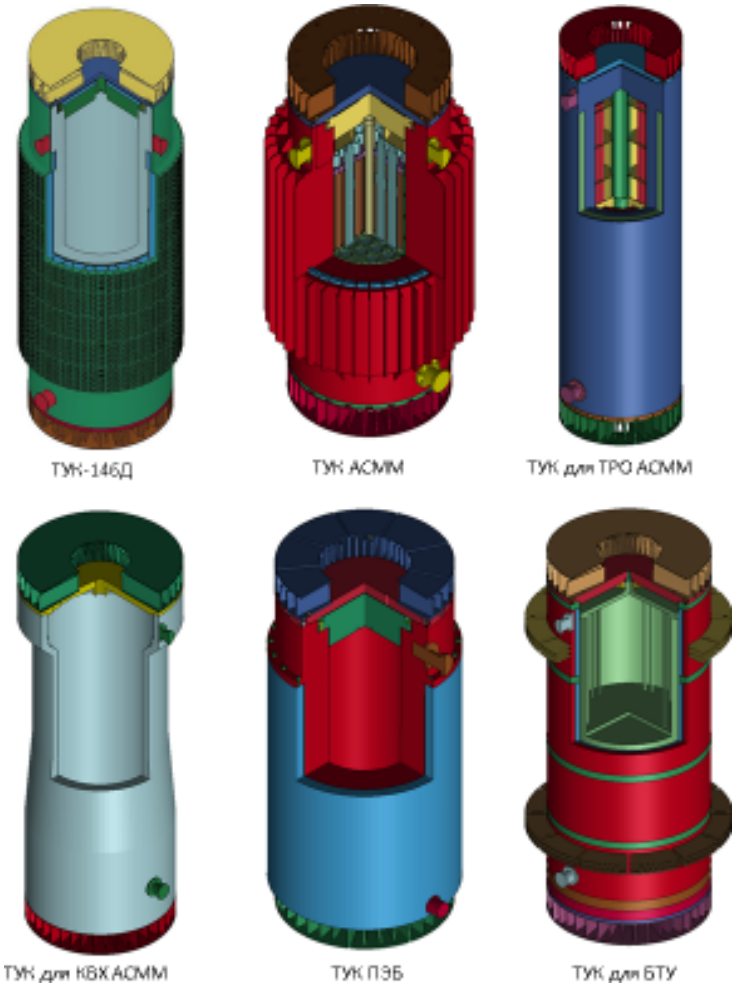


Рис. 1. Общий вид ТУК проектируемых в АО «ОКБМ Африкантов»

При реализации данной методологии были решены задачи связанные с созданием обоснованных полномасштабных расчетных конечно-элементных (КЭ) моделей, с отработкой всех геометрических особенностей проектируемого оборудования. Далее, были исследованы динамические характеристики конструкционных материалов используемых в конструкции контейнера, на их основе верифицированы математические модели поведения этих материалов с учетом различных температур и скоростей деформирования [6]. Разработаны сценарии граничных условий с реализацией в них комплексных механических воздействий техногенного характера, отвечающих всем требованиям нормативных документов. Особенность таких граничных условий заключается в том, что деформированная конструкция в результате одного из реализованных гипотетических событий передается как исходная, в последующее событие, для анализа целого ряда воздействий которые могут иметь место за весь эксплуатационный период данного изделия. В качестве критерия сохранения целостности контейнера и его внутреннего содержимого, взята предельная пластическая деформация, определенная по относительному по-

перечному сужению сечения в месте разрыва образцов. Для численного анализа использовался аттестованный программный комплекс ANSYS/LS-DYNA, в основу динамических расчетов которого заложен метод КЭ.

Подходы, применяемые в разработанной методологии, нашли реализацию при проектировании целого ряда контейнеров для транспортировки и хранения ОЯТ и РАО. В настоящий момент, АО «ОКБМ Африкантов» разрабатывает ТУК различного назначения, для АЭС с различными видами теплоносителей (рис. 1). Сертификация данного оборудования подразумевает проведение натурных испытаний, в результате которых должна быть подтверждена прочность и надежность испытуемого изделия. В результате недостаточной проработки конструкции, по устаревшим методикам, не исключен отрицательный результат таких испытаний, что приведет к существенным финансовым затратам. За счет разработанной и реализованной методологии, сформирован конечный облик конструкций, который позволит обойтись без промежуточных натурных испытаний, что сильно экономит временной и финансовый ресурсы, и выйти на процесс сертификации с минимизированными экономическими затратами, что ощутимо позволит повысить конкурентоспособность разрабатываемого изделия, за счет снижения его себестоимости.

1. Правила безопасности при транспортировании радиоактивных материалов, НП-053-16 // Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору (Ростехнадзор). — М., 2016.
2. Правила безопасной перевозки радиоактивных материалов, SSR-6 (Rev. 1) // МАГАТЭ. — Вена, 2018.
3. Общие положения обеспечения безопасности атомных станций», НП-001-15 // Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору.
4. Общие положения обеспечения безопасности объектов ядерного топливного цикла, НП-016-05 // Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору.
5. *Гусаков-Станюкович И. В.*, *Комаров С. В.*, *Буду М. Е.* Развитие контейнеров для отработавшего ядерного топлива энергетических реакторов типа ВВЭР с 2016 года и на горизонте до 2035 года // Научно-деловой портал «Атомная энергия 2.0». — 2024.
6. *Виленский О. Ю.*, *Душев С. А.*, *Лапшин Д. А.*, *Новинский Э. Г.*, *Пахомов В. А.*, *Легчанов М. А.* Математические модели деформирования конструкционного материала при динамических воздействиях для решения прикладных задач в атомном машиностроении // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева в рубрике «Энергетические системы и комплексы. — 2020. — Вып. 4. — С. 49–62.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ НОВЫХ ПЕРСПЕКТИВНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ*

Е. Л. Гусев[1,2]***, П. Н. Петрова***[1]***, О. В. Гоголева***[1]

[1]*ИПНГ ФИЦ «ЯНЦ СО РАН», Якутск, Россия;* [2]*ИМИ СВФУ, Якутск, Россия*

При разработке новых функциональных полимерных материалов (ПМ), полимерных композиционных материалов (ПКМ) для применения в экстремальных

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (рег. №122011100162-9) с использованием научногооборудования Центра коллективного пользования ФИЦ ЯНЦ СО РАН.

условиях Арктической и Субарктической зоны важно учитывать множество требований к работе в экстремальных условиях Севера. Одним из центральных требований является требование стабильности определяющих свойств материалов под воздействием экстремальных климатических факторов. Проведение климатических испытаний позволяет как определить текущие изменения в свойствах материалов, так и прогнозировать изменение этих свойств в будущем [1–9].

На основе проведенных натурных испытаний и разрабатываемой методологии оптимального прогнозирования определяющих характеристик композитов в экстремальных условиях в рамках вариационных постановок задач прогнозирования были проведены исследования возможности построения объективных оценок степени воздействия экстремальных климатических факторов на физико-механические свойства сверхвысокомолекулярного полиэтилена (СВМПЭ) и композиционных материалов на его основе. Натурные испытания сверхвысокомолекулярного полиэтилена и композиционного материалов на его основе проводились как с добавлением стабилизатора, так и без его добавления. Известно, что старение полимеров сопровождается конкурирующими процессами, связанными с дополнительным структурированием и разрушением полимерных цепей. Для предотвращения процессов старения был использован стабилизатор марки СО-4. Этот стабилизатор имеет уникальный набор преимуществ: он нетоксичный, имеет низкую летучесть и сохраняет стабильность при температурах выше 250 °С. Кроме того, он улучшает прочностные характеристики, гибкость, долговечность и устойчивость к механическим нагрузкам изделий из полимерных материалов. Химическая формула СО-4 приведена на рис. 1.

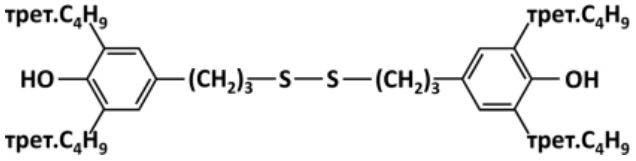


Рис. 1. Ди-[3-(3,5-ди-(1,1-диметилэтил)-4-гидроксифенил)пропил]дисульфид

Разрабатываемая методология в рамках вариационных постановок обратных задач прогнозирования [3–9] была применена для оценки влияния на срок службы СВМПЭ стабилизатора марки СО-4. Для оценки срока службы принимались предельные значения работоспособности при относительном удлинении: $\varepsilon_p^{\%} = 30$–$50\,\%$, прочность: $\sigma_p = 10$–15 МПа. Проведенные вычислительные эксперименты по разрабатываемой методологии прогнозирования в рамках вариационных постановок [3–9] позволили получить достаточно достоверные прогнозы срока службы СВМПЭ с добавлением стабилизатора марки СО-4. При этом проведенные вычислительные эксперименты позволили установить, что срок службы СВМПЭ с добавлением стабилизатора марки СО-4 является одинаковым при задании предела работоспособности как по относительному удлинению $\varepsilon_p^{\%}$, так и по прочности σ_p. Полученные результаты свидетельствуют о большой достоверности прогноза на основе разрабатываемой методологии прогнозирования в рамках вариационных постановок задач прогнозирования.

Впервые установлены новые закономерности старения СВМПЭ в экстремальных условиях холодного климата. Установлены условия доминирования окислительно-деструктивных процессов над процессами структурирования. Проведенные исследования показали, что добавление стабилизатора СО-4 позволяет полимерному композиционному материалу на основе СВМПЭ длительное время сохра-

нять свои деформационные и прочностные свойства на уровне неэкспонированного образца. Эти результаты подтверждают высокую работоспособность изделий из разработанного материала в условиях резко-континентального климата Якутии. На основе проведенных натурных испытаний и разрабатываемой методологии оптимального прогнозирования определяющих характеристик композитов в экстремальных условиях впервые разработаны объективные оценки степени воздействия экстремальных климатических факторов на физико-механические свойства СВМПЭ и композиционных материалов на его основе.

1. *Каблов Е. Н.*, *Старцев В. О.* Системный анализ влияния климата на механические свойства полимерных композиционных материалов по данным отечественных и зарубежных источников (обзор) // Авиационные материалы и технологии. — 2018. — №2(51). — С. 47–58. — DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-2-47-58.
2. *Petukhova E. S.*, *Fedorov A. L.* Investigation of the climate resistance of stabilized polyethylene composite materials // Procedia Structural Integrity. — 2019. — V. 20. — P. 75–80.
3. *Gusev E. L.* Using parallel procedures for the searching of the extremum for the decision of the inverse problems prediction of the defining characteristics of the composite materials // Material Physics and Mechanics, — 2016. — V. 26, No. 1. — P. 70–72.
4. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Variation formulations of inverse problems in forecastting the residual life of composites // Doklady Physics. — 2018. — V. 63, No. 9. — P. 388–392.
5. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Optimal control under a decrease in the thermal-field intensity based on selection of the heterogeneous–construction structure in the variational formulation // Doklady physics. — 2018. — V. 63, No. 5. — P. 213–217.
6. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.*, *Chernykh V. D.* Development of combined search methods for efficiency indicator extreme in variation statement of forecasting tasks for determine characteristics of composite materials // Journal of Physics: Conference Series. Supercomputer Technologies in Mathematical Modelling, 19–21 June 2019, Moscow, Russian Federation. — 2019. — V. 1392. — 012008.
7. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Variational Methods of Solving Problems on Control of the Intensity of a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2021. — V. 94, No. 5. — P. 1117–1123.
8. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Generalized Durability Models and their Application to Solving Problems on Predicting the Defining Characteristics of Composites // Mechanics of Composites Materials. — 2022. — V. 58, No. 3. — P. 355–364.
9. *Gusev E. L.*, *Bakulin V. N.* Mathematical Methods for Predicting the Determining Characteristics of Composite under the Influence of Extreme Factors // AIP Conference Proceedings. — 2023. — V. 2948(1). — 020030.

ВЕРИФИКАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХСЛОЙНОЙ СОТОВОЙ ПАНЕЛИ С ОБШИВКАМИ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Д. В. Дедова, М. И. Мартиросов, Л. Н. Рабинский

МАИ, Москва, Россия

Современное инженерное проектирование сложных конструкций авиационно-космической техники все больше опирается на методы компьютерного моделирования, среди которых метод конечных элементов (МКЭ) занимает ведущее положение. Возрастающая сложность расчетных моделей и ужесточение требований к точности прогнозирования поведения конструкций делают проблему верификации конечно-элементных моделей (КЭМ) исключительно актуальной. Особую

важность эта проблема приобретает при моделировании трехслойных сотовых конструкций, где необходимо учитывать сложное взаимодействие разнородных материалов и нелинейные эффекты при различных видах нагружения.

Необходимость использования верифицированных КЭМ обусловлена несколькими критически важными факторами:

1. Требования безопасности и надежности:

— верифицированные КЭМ позволяют минимизировать риски при эксплуатации;

— обеспечивают достоверную оценку запасов прочности.

2. Экономическая целесообразность:

— снижение количества дорогостоящих натурных испытаний;

— оптимизация конструкции на этапе проектирования;

— сокращение сроков вывода изделий на рынок;

— уменьшение затрат на перепроектирование.

3. Технологические преимущества:

— верифицированные КЭМ позволяют анализировать поведение конструкции в условиях, сложно воспроизводимых экспериментально;

— возможность анализа критических режимов нагружения без риска разрушения реальных образцов;

— обеспечение детального изучения напряженно-деформированного состояния в любой точке конструкции.

Среди основных сложностей при создании адекватных КЭМ трехслойных сотовых панелей с обшивками из полимерных композитов можно выделить следующие:

— учет анизотропии свойств композитных обшивок;

— различный характер работы сотового заполнителя при различных видах нагружения;

— влияние технологических факторов на характеристики сотового заполнителя (качество склейки слоев, возможные внутренние дефекты).

В данной работе проводится верификация трехслойной КЭМ с сотовым заполнителем и с обшивками из полимерных композиционных материалов (ПКМ) путем сравнения полученных результатов расчета при действии сжимающей нагрузки с данными, полученными в ходе эксперимента.

Форма панели — квадрат с заданной стороной. Высота сотового заполнителя задана.

Обшивки панели выполнены из препрега марки ACM102-C200T (на основе углеродной ткани и эпоксидного связующего марки ACM102), применяемого, в частности, в конструкции механизации несущих поверхностей пассажирского самолета. Укладка монослоев обшивок смешанная и имеет следующий вид: $[-45°/+45°/0°/-45°/+45°/]$ (всего 5 монослоев в каждой обшивке). Физико-механические характеристики материала обшивок паспортные от производителя материала.

В качестве сотового заполнителя рассматривается полимеросотопласт марки ПСП-1-2,0-48 с гексагональной формой сотовой ячейки на основе арамидноволокнистой синтетической каландрированной бумаги (типа Номекс по зарубежной терминологии) и фенольного связующего. Соты такой формы обеспечивают высокие характеристики прочности и устойчивости конструкции в целом и относительно просты в изготовлении. Физико-механические характеристики материала сот паспортные от производителя материала.

Экспериментальное исследование образцов панелей на сжатие проводилось на сервогидравлической испытательной машине INSTRON 5985 в соответствии с существующими стандартами. Общее количество испытанных образцов — 12 штук.

Численное моделирование проводилось в программном комплексе LS-DYNA в соответствии с методикой, описанной в работах [1–5]. Каждый монослой моделировался отдельным набором конечных элементов (КЭ) типа «Solid». Сотовый заполнитель моделировался КЭ типа «Shell». Граничные условия моделируют нагружение образца в ходе натурных испытаний.

В результате проведенного натурного эксперимента и численного моделирования определялась критическая сила разрушения изучаемой сотовой панели, а также сравнивалась общая картина разрушения такой панели.

Из полученных результатов следует, что относительная разница в критической силе разрушения сотовой панели, полученной в ходе эксперимента и при численном анализе, не превышает 8%. Также наблюдается одинаковая картина разрушения сотовой панели.

Полученные в ходе численного и экспериментального исследования данные позволяют сделать вывод о том, что КЭМ трехслойной панели с сотовым заполнителем верифицирована, а данная методика моделирования может применяться для расчетов прочности трехслойных сотовых панелей с обшивками из ПКМ.

1. *Медведский А. Л.*, *Мартиросов М. И.*, *Хомченко А. В.*, *Дедова Д. В.* Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной панели с сотовым заполнителем при наличии внутренних дефектов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 2. — Тула, ТулГУ, 2022. — С. 675–684.
2. *Рабинский Л. Н.*, *Мартиросов М. И.*, *Дедова Д. В.*, *Хомченко А. В.* Поведение трехслойных панелей с сотовым заполнителем из полимеросотопластов повышенной плотности с внутренними дефектами при действии реактивной струи двигателя // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 3. — Тула, ТулГУ, 2024. — С. 298–303.
3. *Dedova D. V.*, *Kuznetsova E. L.*, *Martirosov M. I.*, *Khomchenko A. V.* Influence of Internal Defects on the Stress-Strain State of a Three-Layer Panel with Different Honeycomb Fillers // Russian Engineering Research. — 2023. — V. 43, No. 11. — P. 1457–1460.
4. *Rabinskiy L. N.*, *Martirosov M. I.*, *Dedova D. V.*, *Khomchenko A. V.* Dinamics of Composite Cylindrical Panels with Honeycomb Filler after Internal Damage by Aircraft Engine Jet // Russian Engineering Research. — 2024. — V. 44, No. 5. — P. 726–729.
5. *Rabinskiy L. N.*, *Martirosov M. I.*, *Dedova D. V.*, *Khomchenko A. V.*, *Ershova A. Yu.* Impact on Three-Layer Cylindrical Panel with Fiberglass Filler // Russian Engineering Research. — 2025. — V. 45, No. 1. — P. 119–122.

О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ С СИСТЕМОЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ШТАМПОВ*

О. В. Евдокимова, И. С. Телятников, В. В. Лозовой, А. В. Плужник, Г. Н. Уафа

ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, Россия

Рассматривается многослойная среда, на ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в области $\Omega(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty)$ действует система N деформируемых штампов простой реологии, описывающих материал сложной реологии. Рассматривая, например, среду, описываемую системой уравнений Ламе, предполагается, что в зоне контакта действуют только нормальные напряжения. Вне штампа напряжения

*Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2025 г. ЮНЦ РАН (тема 00-25-13).

отсутствуют. Методом, описанным в [1, 2], смешанная задача в случае жесткого штампа, сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{A}^{\infty} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\, q_A(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = f_A(x_1,x_2), \quad A \le x_1 \le \infty, \quad |x_2| \le \infty,$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1,\alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)} d\alpha_1\, d\alpha_2, \quad \operatorname{Im} A = 0,$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2) = O(\alpha_1^{-1}), \quad |\alpha_1| \to \infty, \quad K(\alpha_1,\alpha_2) = O(\alpha_2^{-1}), \quad |\alpha_2| \to \infty. \tag{1}$$

Здесь $q_A(x_1,x_2)$ контактные напряжения под штампом, $f_A(x_1,x_2)$ — перемещения в зоне контакта. Здесь используется подход моделирования штампа сложной реологии набором N штампов, описываемых уравнениями Гельмгольца [1]. Таким образом, разработанный авторами подход открыл возможность использовать в контактной задаче для деформируемого штампа упакованные блочные элементы, называемые «фракталами», т. е. самоподобными [3]. Они являются решениями достаточно простых граничных задач. Решения сложных граничных задач представляются в виде их комбинации.

2. При применении этого подхода, необходимо построить в области $\Omega_1(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty)$ упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы, после последовательного расположения друг над другом. Для них ниже рассматриваются двумерные уравнения Гельмгольца в указанных областях

$$\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p_n^2\right]\varphi_{An}(x_1,x_2) = g_{An}(x_1,x_2), \quad g_{An}(x_1,x_2) = q_{An}(x_1,x_2) - t_{An}(x_1,x_2),$$
$$p_n = \omega c_n, \quad c_n > 0, \quad n = 1,2,\ldots,N-1, \quad \Omega_1(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty). \tag{2}$$

Здесь $\varphi_{An}(x_1,x_2)$ — вертикальное перемещение в зоне контакта, $q_{An}(x_1,x_2)$ контактные напряжения, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t_{An}(x_1,x_2)$ — заданные внешние воздействия сверху на объект. Кроме этого, задаются граничные условия, которые имеют для задач Дирихле в области $\Omega_1(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty)$ вид

$$\varphi_{An}(x_1,x_2) = \varphi_{An}(A,x_2), \quad x_1 \to A.$$

С таким же успехом можно рассматривать случай граничных условий Неймана. Найденные ниже решения формируют указанным ранее способом деформируемый штамп.

3. Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению преобразовав (1) и (2) по Фурье, приравняем перемещения $f_{A1}(x_1)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещение упакованного блочного элемента $\varphi_{A1}(x_1)$, предварительно применив к ним преобразование Фурье. В результате получаются соотношения функциональных уравнений вида

$$K_0(\alpha_1)\, Q_{A1}(\alpha_1) + E_{A1}(\alpha_1) = -(\alpha_1^2 - k_1^2)^{-1} Q_{A1}(\alpha_1) + S_{A1}(\alpha_1),$$
$$S_{A1}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k_1^2)^{-1}\big\langle i(\alpha_1 - k_1)\varphi_{A1}(A) e^{i\alpha_1 A} + T_{A1}(\alpha_1) - \tag{3}$$
$$- T_{A1}(k_1) e^{i(\alpha_1 - k_1)A} + Q_{A1}(k_1) e^{i(\alpha_1 - k_1)A}\big\rangle.$$

К этому соотношению добавляется $(N-1)$ уравнение механических связей между блочными элементами с учетом того, что имеют место свойство $T_{An}(\alpha_1) = Q_{An+1}(\alpha_1)$, $n = 1,2,\ldots,N-1$.

Эти соотношения, отражающие равенства перемещений блочных элементов, имеют вид

$$\frac{\omega_{An}(\alpha)}{\alpha^2 - k_n^2} = \frac{\omega_{An+1}(\alpha)}{\alpha^2 - k_{n+1}^2}. \tag{4}$$

Таким образом, для определения N неизвестных $Q_{An}(\alpha_1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$ имеется N уравнений. Внешнее воздействие оказываемое на площадь блочного элемента номера N, имеет обозначение $T_{AN}(\alpha_1)$. Кроме этого, каждый блочный элемент имеет граничные условия, действующие по границе, которые относятся к внешним воздействиям и описаны внешними формами. В соотношении $E_{A1}(\alpha_1)$ есть часть поверхности границы многослойной среды, свободная от контакта.

4. При решении уравнение содержит в правой части неизвестные функции и функционалы от решений $Q_{An}(\alpha_1)$, $n = 2, 3, \ldots, N$, $Q_{An}(k_{An})$, $n = 2, 3, \ldots, N$ интегральных уравнений. Они находятся после обращения уравнения (3), (4) и остальных уравнений. Это одна из особенностей, присущая контактным задачам для деформируемых штампов. Решение интегрального уравнения Винера–Хопфа строится традиционным методом и представимо в виде

$$q_{A1}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_+^{-1}(\alpha_1)\{K_-^{-1}(\alpha_1) S_{A1+}(\alpha_1)\}^+ e^{-i\alpha_1 x_1}\, d\alpha_1.$$

В преобразованиях Фурье решение представимо в форме

$$Q_{A1}(\alpha_1) = K_+^{-1}(\alpha_1)\{K_-^{-1}(\alpha_1) S_{A1+}(\alpha_1)\}^+ \equiv \langle Q_{An}(\alpha_1)\rangle, \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

Добавив систему уравнений (3), получаем все функции $Q_{An}(\alpha_1)$ решения контактной задачи. Для определения функционалов $Q_{An}(k_n)$, значения k_n вносятся в функции решений $Q_{An}(\alpha_1)$ и решается система уравнений относительно них. Определитель системы уравнений представляет дисперсионное уравнение для вычисления частот дискретных резонансов, в свое время предсказанных академиком И. И. Воровичем.

1. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.* Блочные элементы в граничных задачах для систем дифференциальных уравнений механики и физики в неклассических областях // ДАН. — 2021. — Т. 498. — С. 33–39. — DOI: 10.31857/S2686740021030032.
2. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.* О контактных задачах с деформируемым штампом // Проблемы прочности и пластичности. — 2022. — Т. 84, №1. — С. 25–34. — DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34.
3. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // ДАН. — 2021. — Т. 499. — С. 30–35. — DOI: 10.31857/S2686740021040039.

МЕТОДОЛОГИЯ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ОБОРУДОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ РЕАКТОРНЫХ УСТАНОВОК

М. Н. Ереев, М. И. Ершова, А. В. Козин, М. С. Круглов

АО «ОКБМ Африкантов», Нижний Новгород, Россия

На стадии проектирования новых транспортных реакторных установок (РУ) одной из основных задач современного машиностроения является обоснование прочности конструкции их оборудования и систем. При изготовлении и монтаже

каждый элемент транспортной реакторной установки приобретает индивидуальные, отличные от проектных характеристики, которые по мере выработки назначенного ресурса и срока службы начинают снижаться и это необходимо учитывать при обосновании безопасной эксплуатации.

Одним из преимуществ транспортных реакторных установок является компактность размещения ее элементов внутри замкнутого пространства, однако это приводит к отсутствию доступа к определяющим ресурс установки узлам. Данный доступ необходим для проведения диагностирования технического состояния данных узлов в процессе эксплуатации с использованием методов и средств неразрушающего контроля.

В связи с этим, контроль темпов деградации конструкционного материала в этих зонах можно проводить, используя только математическое моделирование. Особое внимание необходимо уделить информации о сложных явлениях и процессах, протекающих в системах установки, которую в полном объеме, возможно, получить только после анализа опыта эксплуатации, что позволяет при обосновании прочности учесть все нагружающие факторы.

Для построения методов и моделей по оценке выработанного и прогноза остаточного ресурса используется подход, основанный на математическом моделировании действующих процессов деградации физико-механических характеристик конструкционного материала индивидуально для каждой критической зоны оборудования и систем с использованием методов и моделей механики поврежденной среды и механики разрушения. Под механизмами деградации обычно понимают процессы накопления повреждений в материале конструктивных узлов, развивающиеся на микро- и макроуровнях вследствие эксплуатационных силовых и тепловых нагрузок, воздействия внешней среды и физических полей различной природы. Накапливающиеся в процессе эксплуатации повреждения приводят к постепенному снижению физико-механических характеристик конструкционного материала и деградации начальных предельных состояний конструктивных узлов. Процесс накопления повреждений может развиваться по различным механизмам (мало- и многоцикловая усталость, ползучесть, коррозия, радиационные повреждения и т. д.), действующим в зависимости от эксплуатационных условий одновременно или последовательно. Методы, основанные на адекватном математическом моделировании физических процессов деградации материала в опасных зонах по фактической истории их нагруженности, позволяют проводить анализ и прогноз развития поврежденности с учетом исходного состояния материала и конкретных условий эксплуатации в данной зоне. Точность метода зависит от адекватности применяемых моделей фактическому процессу деградации материала и достоверности регистрации фактической истории эксплуатации объекта, которая определяет историю нагружения контролируемых зон. Наиболее перспективным является применение метода математического моделирования процессов поврежденности в сочетании с новыми нетрадиционными физическими методами контроля состояния материала на стадии накопления рассеянных по объему материала повреждений для коррекции теоретических оценок. Такое сочетание методов, оформленное в виде системы оценки выработанного и прогноза остаточного ресурса конструктивных узлов, позволяет в процессе эксплуатации решать задачи контроля темпов деградационных процессов.

Существует большое количество механизмов, которые могут определять процессы исчерпания ресурса конкретного инженерного объекта в зависимости от условий его эксплуатации. Для конструктивных элементов РУ основными

доминирующими механизмами определяющими ресурс конструктивных узлов, являются:

— малоцикловая усталость;

— многоцикловая усталость.

Зарождение и распространение макроскопической трещины является результатом последовательного действия определенного числа очень сложных с физической точки зрения процессов преобразования начальной структуры конструкционного материала, включающих зарождение, развитие и взаимодействие различных дефектов кристаллической решетки в металлах, и взаимодействие иерархических структурных составляющих различного уровня. Необратимые структурные изменения подготавливают образование и распространение макроскопической трещины и являются неотъемлемой составляющей процесса разрушения материала. Таким образом, зарождению макротрещины предшествует прогрессирующее внутреннее ослабление материала за счет развития распределенных дефектов, приводящее к ухудшению свойств материала за счет микроструктурных изменений, уменьшению прочности, жесткости, вязкости. Зарождение макроскопической трещины является окончанием стадии развития распределенных по объему материала микродефектов. Под макроскопической трещиной понимается наличие разрывности в материале, достаточно большой на уровне гетерогенности (блоков) структуры материала и наличие которой существенно меняет макроскопическое напряженно-деформированное состояние в ее окрестности.

В зависимости от эксплуатационных условий, технологии изготовления конструкции, допускаемых размеров исходных дефектов долговечность конструкции будет определяться длительностью либо только стадии накопления распределенных дефектов, либо стадии распространения опасной макроскопической трещины, либо их совместной длительностью. При высоких требованиях к изготовлению и контролю дефектности, долговечность конструкции будет определяться, в основном, процессами накопления повреждений в опасных зонах конструктивных элементов.

Для решения конкретных проблем оценки выработанного и прогноза остаточного ресурса оборудования и систем РУ на базе моделирования развивающихся при эксплуатации процессов деградации материала анализируются условия эксплуатации конструктивных узлов конкретных типов РУ, физико-механические характеристики применяемых конструкционных материалов, обосновываются доминирующие механизмы деградации материалов, развитие которых определяет долговечность материала опасных зон конструктивных элементов установки и на этой основе разрабатываются модели деградационных процессов в зависимости от истории эксплуатации РУ.

Предложенная методология, разработанная с учетом данных опыта эксплуатации и экспериментальных исследований, позволяет расчетным путем получить достоверные результаты остаточного ресурса оборудования и трубопроводов РУ, находящихся в эксплуатации, обосновать повышение назначенных ресурсных характеристик и продление безопасной эксплуатации. Созданная методология внедрена в практику проектирования и производственный процесс АО «ОКБМ Африкантов» и успешно используется при обосновании и продлении назначенных показателей действующих транспортных РУ. Разработанные методики могут быть использованы при решении задач термоциклической прочности термонапряженного оборудования.

ПОЛОСА С ДВУМЯ СООСНЫМИ ТРЕЩИНАМИ*

А. П. Кержаев[1], **М. Д. Коваленко**[2], **И. В. Меньшова**[1,3], **Д. А. Власов**[4]

[1]*ИТПЗ РАН, Москва, Россия;* [2]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;*
[3]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* [4]*НИУ МГСУ, Москва, Россия*

В работе получено точное решение краевой задачи для свободной упругой полосы $\{S\colon |x|<\infty, |y|\le 1\}$ с двумя соосными трещинами $\{\gamma\colon x=0, \beta-\alpha\le|y|\le\beta+\alpha, \beta+\alpha<1\}$, симметрично расположенными на оси y. На берегах трещин заданы постоянные нормальные напряжения p_0 (рис. 1).

Решение рассматриваемой задачи базируется на решении аналогичной четно-симметричной задачи для полосы с одной центральной трещиной [1]. Рассмотрим кратко схему ее решения в предположении, что трещина расположена на отрезке $\{x=0, |y|\le\alpha\}$. Вводится функция $g^*(y)=p_0\sqrt{\alpha^2-y^2}(|y|\le\alpha)$. Найдем для нее преобразование Фурье:

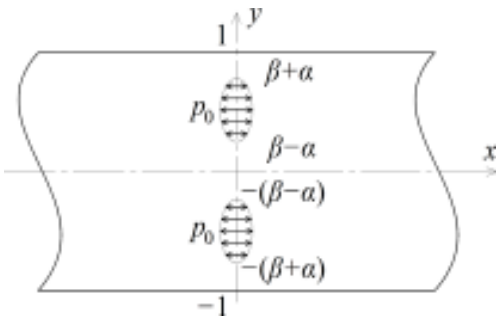


Рис. 1. Полоса с двумя соосными трещинами

$$G(\xi)=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} g^*(y)e^{i\xi y}dy=p_0\alpha\pi\frac{J_1(\alpha\xi)}{\xi}, \tag{1}$$

где $J_1(\alpha\xi)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка, а затем — преобразование Бореля [2]:

$$g^*(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} G(\xi)e^{-\xi\omega}d\xi=p_0(\sqrt{\alpha^2+\omega^2}-\omega)\quad(\omega=x+iy). \tag{2}$$

Определим мнимую часть функции (2), т. е. $\operatorname{Im} g^*(iy+0)=-p_0y$, а затем найдем соответствующий профиль трещины по формуле

$$u(y)=-\frac{1}{1+\nu}\int\frac{\operatorname{Im} g^*(iy+0)}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}dy=-\frac{p_0}{1+\nu}\sqrt{\alpha^2-y^2}\quad(|y|\le\alpha), \tag{3}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Подставив функцию (3) в соотношение ортогональности Папковича [3], найдем неизвестные коэффициенты разложений A_k. Окончательное решение задачи для полосы с одной центральной трещиной представляется рядами по собственным функциям Папковича–Фадля [4], например:

$$\sigma_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}[A_k s_x(\lambda_k,y)e^{\lambda_k|x|}],$$
$$s_x(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\{(\sin\lambda_k-\lambda_k\cos\lambda_k)\cos\lambda_k y-\lambda_k y\sin\lambda_k\sin\lambda_k y\}, \tag{4}$$
$$A_k=\frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^3}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}s_x(\lambda_k,y)u(y)\,dy,$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-21-00257, https://rscf.ru/project/25-21-00257/.

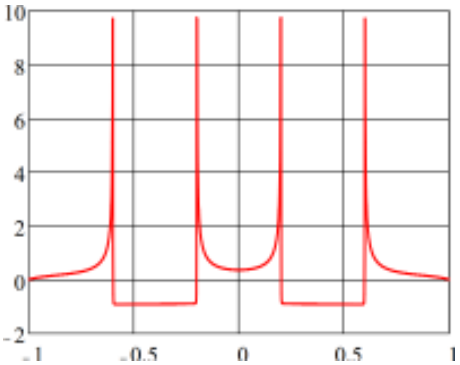


Рис. 2. Продольные нормальные напряжения в сечении $x = 0{,}001$

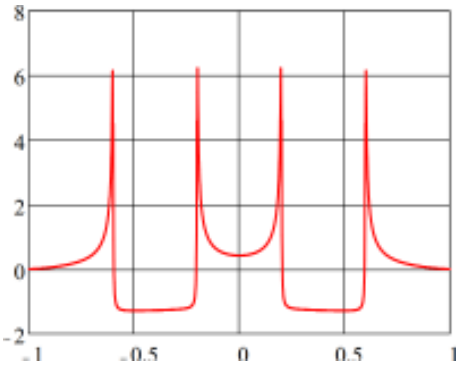


Рис. 3. Поперечные нормальные напряжения в сечении $x = 0{,}001$

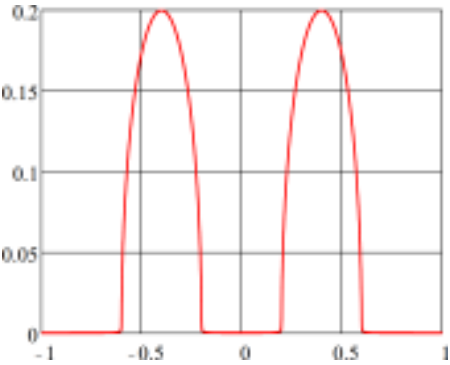


Рис. 4. Распределение продольных перемещений в сечении $x = 0{,}001$

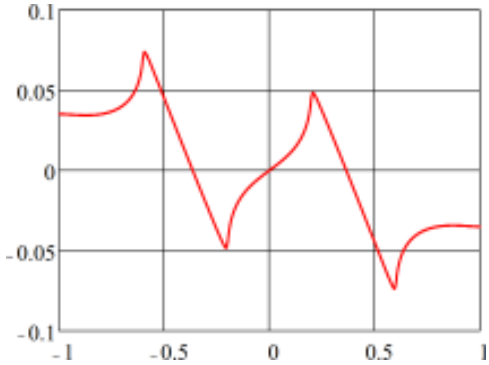


Рис. 5. Распределение поперечных перемещений в сечении $x = 0{,}001$

где $s_x(\lambda_k, y)$ — собственные функции Папковича–Фадля, собственные числа λ_k — комплексные корни уравнения $\lambda + \sin\lambda\cos\lambda = 0$. Для краткости через $2\,\mathrm{Re}$ обозначены суммы соответствующих выражений при λ_k и $\overline{\lambda_k}$. Для затухающего на бесконечности решения считаем, что $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$.

Чтобы получить решение рассматриваемой задачи для двух соосных трещин, нужно ось центральной трещины сместить вправо (влево) на величину $\pm\beta(\beta > \alpha)$. Тогда в соответствии со свойством преобразования Фурье при правом смещении функцию $G(\xi)$ (1) нужно умножить на $e^{i\xi\beta}$, а при левом — на $e^{-i\xi\beta}$. В результате вместо (3) получим $(\beta + \alpha < 1)$

$$U(y) = \begin{cases} 0 & \big(-1 < y < -(\beta+\alpha), -(\beta-\alpha) < y < \beta-\alpha, \beta+\alpha < y < 1\big), \\ \sqrt{\alpha^2 - (y-\beta)^2} & (\beta-\alpha \le y \le \beta+\alpha), \\ \sqrt{\alpha^2 - (y+\beta)^2} & \big(-(\beta+\alpha) \le y \le -(\beta-\alpha)\big). \end{cases} \tag{5}$$

Подставляя (5) в соотношение ортогональности Папковича, найдем коэффициенты разложений и, следовательно, решение задачи.

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}4$, $\nu = 0{,}33$, $p_0 = -1$. Ниже на рис. 2–5 приведены графики распределения напряжений и перемещений в сечении $x = 0{,}001$. При вычислениях удерживалось 5000 членов ряда.

Полученное решение допускает простые обобщения. Например, можно построить решение четно-симметричной задачи для любого конечного числа трещин и любой нагрузки, заданной на берегах трещин. Схема решения сохраняется для любых однородных четно-симметричных граничных условий на сторонах полосы.

1. *Коваленко М. Д.*, *Кержаев А. П.*, *Меньшова И. В.*, *Власов Д. А.* Упругая полоса с трещиной. Точное решение // Докл. РАН. Физика, технические науки. — 2024. — Т. 518, №1. — С. 51–56.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
3. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 27, №4. — С. 335–339.
4. *Коваленко М. Д.*, *Шуляковская Т. Д.* Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. — 2011. — №5. — С. 78–98.

ПРИМЕНЕНИЕ МОНИТОНИЗАТОРА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ 3D-ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ МОД НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИИ*

А. И. Кибец

ННГУ, Нижний Новгород, Россия

Рассматривается трехмерная задача высокоскоростного соударения деформируемых элементов конструкций. Для описания их движения применяется текущая лагранжевая формулировка [1, 2]. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с комбинированным кинематическим и изотропным упрочнением [3]. Контакт описывается условиями непроникания. Определяющая система уравнений дополняется начальными условиями и кинематическими граничными условиями.

Решение определяющей системы уравнений основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [4, 5]. Для решения трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических элементов конструкций применяют в большинстве случаев 8-узловой конечный элемент с одноточечным интегрированием по объему. Эффективность такого подхода снижается возможным образованием мод нулевой энергии (неустойчивости типа «песочных часов») [2]. Для повышения эффективности численного решения развита применительно к задачам механики деформируемого твердого тела методика консервативного сглаживания узловых скоростей перемещений, в основе которой лежит алгоритм [5]. Программная реализация конечно-элементной методики осуществлена в рамках вычислительного комплекса (ВК) «Динамика-3» (Вычислительный комплекс «Динамика-3». Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС №325 от 18.04.2013.).

Рассмотрена задача продольного соударения недеформируемого цилиндра ($R = 1{,}275$ см, $L = 4{,}7$ см, масса — 187 г) с круглой стальной пластиной ($R = 13$ см, $h = 4$ см), жестко защемленной по контуру. Механические характеристики стали: плотность $\rho = 7{,}88$ г/см^3, модуль объемного сжатия $K = 166{,}7$ ГПа,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного задания Минобрнауки России (проект №FSWR-2023-0036).

модуль сдвига $G = 81{,}4$ ГПа, предел текучести $\sigma_T = 0{,}5$ ГПа, модуль изотропного упрочнения 0,5 ГПа. В начальный момент времени для цилиндра задавалась продольная скорость $V_0 = 750$ м/с.

В результате соударения в пластине образуются локальные зоны пластических деформаций, достигающие наибольшего значения вблизи контактной области. На тыльной части пластины со временем также возникают зоны интенсивных пластических деформаций. Торможение продольного движения материала пластины, связанное с радиальными и кольцевыми напряжениями на ее растягиваемой тыльной части, порождает сдвиговые пластические деформации и образует в этой области выпучину.

Многократное взаимодействие волны нагрузки с упругими волнами разгрузки, распространяющимися от свободных поверхностей, снимает сжимающие напряжения в пластине, после чего цилиндр и пластина расходятся.

Без консервативного сглаживания применение численное решение не удается проследить весь процесс соударения. Конечные элементы пластины в зоне контакта под действием удара цилиндра значительно искажаются и после 0,02 мс решение прерывается из-за перехлеста отдельных конечных элементов (происходит образование и развитие мод нулевой энергии). Применение процедуры консервативного сглаживания устраняет перехлест конечных элементов и позволяет исследовать процесс проникания до отскока ударника.

1. *Поздеев А. А.*, *Трусов П. В.*, *Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
2. *Bathe K.-Y.* Finite element procedures. — Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1996. — 1037 p.
3. *Волков И. А.*, *Коротких Ю. Г.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 424 с.
4. *Голованов А. И.*, *Тюленева О. Н.*, *Шигабутдинов А. Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 391 с.
5. *Баженов В. Г.*, *Кибец А. И.*, *Демарева А. В.*, *Калинина Ю. А.* Алгоритм консервативного сглаживания разрывных волн напряжений в МКЭ // Проблемы прочности и пластичности. — 2022. — Т. 84, №3. — С. 331–342.

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ НАЛИЧИИ СЛОЯ СМАЗКИ*

Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова

ИАПУ ДВО РАН, Владивосток, Россия

Целью данного исследования является построение простейшей модели технологического процесса волочения. В этом процессе обрабатываемая заготовка протаскивается через отверстие меньшего диаметра, чем сама заготовка. Для уменьшения трения при волочении применяют различные смазки или предварительные покрытия, которые также сохраняют поверхность заготовки от задира волочильным инструментом. В процессе волочения материал пластически деформируется и данные деформации являются конечными. Процесс трения материала о шероховатую границу вызывает его значительный разогрев, поэтому задача решается

*Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы FWFW-2021-0005, FWFW-2025-0002).

в неизотермической постановке. Изменение температуры материала также может происходить вследствие накопления им значительных необратимых деформаций, поэтому нужно также учитывать взаимосвязанность процессов деформирования и теплопередачи, а также зависимость постоянных материала (предел текучести, вязкость) от температуры.

Пусть основной материал и слой смазки, обладающие упругими, вязкими и пластическими свойствами, расположены в круглой недеформируемой трубе радиуса R. Основной материал занимает область $0 \le r \le r_1$, а смазка — область $r_1 \le r \le R$. Термомеханические параметры основного материала и смазки обозначим индексами 1 и 2 соответственно. Считаем, что на поверхности $r = r_1$, на которой материал соприкасается со смазкой, перемещения непрерывны.

Деформирование материала и смазки в трубе происходит вследствие приложения возрастающего со временем перепада давления. Решение краевой задачи в цилиндрической системе координат r, φ, z будем искать в классе функций $\theta = \theta(r,t)$, $u = u_z(r,t)$, $v = v_z(r,t)$, где $\theta = (T - T_0)T_0^{-1}$, T, T_0 — текущая температура и температура тела в свободном состоянии (комнатная температура), u и v — отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости.

Считаем, что пока выполняется неравенство

$$\sigma_{rz}|_{r=R} < \sigma_0 \tag{1}$$

на границе $r = R$ выполняются условия прилипания. В неравенстве (1) σ_{rz} — компонента тензора напряжений, σ_0 — задаваемая постоянная сухого трения. Полагаем также, что $\sigma_0 < k_{02}$, k_{02} — предел текучести смазки при комнатной температуре.

Для возрастающего перепада давления примем следующее условие:

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -at, \quad a > 0. \tag{2}$$

Решение изотермической упругой задачи при условиях (1) и (2) получено в рамках модели больших деформаций [1, 2].

В момент времени $t_1 = 2a^{-1}R^{-1}\sigma_0$ неравенство (1) обратится в равенство, поэтому с этого момента времени заменим его на условие проскальзывания

$$(|\sigma_{rz}| - \sigma_0 - \xi v)|_{r=R} = 0, \tag{3}$$

в котором ξ — коэффициент вязкого трения.

Начиная с момента времени t_1, смазка трется о жесткую стенку трубы и из-за этого нагревается. Для формирующегося поля температур примем начальное и граничные условия

$$\theta(r,t_1) = 0, \quad \theta(r,t)|_{r=R} = \gamma u(r,t)|_{r=R}, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad [\theta]|_{r=r_1} = 0, \quad [q]|_{r=r_1} = 0. \tag{4}$$

В условиях (4) γ — постоянная теплопроизводства за счет трения, $q = q_z(r,t) = -\lambda_i T_0 \partial\theta/\partial r$ — отличная от нуля компонента вектора теплового потока, λ_i — коэффициенты теплопроводности материала и смазки, квадратными скобками обозначен скачок функции. Таким образом, четвертое и пятое условия (4) означают непрерывность температуры и теплового потока на границе раздела двух сред. Полагаем также, что температура не достигает температуры плавления в процессе деформирования.

Решение неизотермической упругой задачи при условиях (2)–(4) также получено в рамках модели больших деформаций материалов [1, 2]. Полученное решение краевой задачи при возрастающем градиенте давления остается справедливым до

некоторого момента времени $t_2 > t_1$, в который на границе $r = R$ в материале смазки выполнится условие пластичности

$$\sigma_{rz}|_{r=R} = -k(t_2). \tag{5}$$

В условии (5) k — предел текучести, который зависит от температуры. Для него примем следующую зависимость:

$$k = k_0(1 - \theta\theta_m^{-1})^2, \quad \theta_m = (T_m - T_0)T_0^{-1}. \tag{6}$$

В (6) T_m — температура плавления деформируемого материала.

С момента времени t_2 в смазке развивается область вязкопластического течения $m(t) \le r \le R$, в областях $r_1 \le r \le m(t)$ и $0 \le r \le r_1$ смазка и основной материал деформируются обратимо. Движущаяся упругопластическая граница $r = m(t)$ отделяет область течения $m(t) \le r \le R$ от упругой области $r_1 \le r \le m(t)$.

С течением времени при увеличении перепада давления в некоторый момент времени $t_3 > t_2$ упругопластическая граница $r = m(t)$ доходит до границы раздела материалов $r = r_1$. С этого момента времени остается две области: упругая область $0 \le r \le r_1$, в которой расположен основной материал и область течения $r_1 \le r \le R$. То есть вязкопластическое течение теперь продолжается во всей области, занимаемой смазкой.

Далее при увеличении нагружающих усилий в момент времени $t_4 > t_3$ выполнится условие пластичности $\sigma_{rz}|_{r=r_1} = -k(t_4)$ на границе основного материала $r = r_1$. Начиная с момента времени t_4 развивается область течения в основном материале $m_1(t) \le r \le r_1$. Новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет эту область от упругой области $0 \le r \le m_1(t)$. Также остается область течения в смазке $r_1 \le r \le R$.

Рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния, вычислены распределения температур в материале и смазке, найдены законы продвижения упругопластических границ в смазке и основном материале.

1. *Буренин А. А.*, *Быковцев Г. И.*, *Ковтанюк Л. В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. — 1996. — Т. 347, №2. — С. 199–201.
2. *Буренин А. А.*, *Ковтанюк Л. В.* Большие необратимые деформации и упругое последействие. — Владивосток: Дальнаука, 2013. — 312 с.

СКАНИРУЮЩАЯ ЗОНДОВАЯ МИКРОСКОПИЯ КОМПОЗИТОВ СИНТЕТИЧЕСКОГО КАУЧУКА С ПОЛИЭТИЛЕНОМ*

***Ю. В. Корнев*[1], *Х. Х. Валиев*[1], *С. П. Молчанов*[2], *С. О. Самусенко*[1], *С. В. Чернышов*[1], *А. Н. Власов*[1], *Ю. Н. Карнет*[1]**

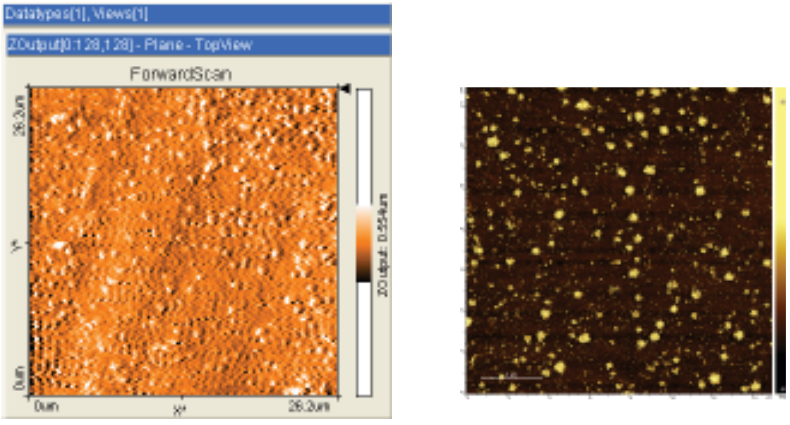
[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*ИНХС РАН, Москва, Россия*

Одним из перспективных направлений в получении эластомерных материалов с заданными свойствами является использование смесей полимеров, которые позволяют комбинировать и усиливать преимущества отдельных компонентов. Большой интерес представляет создание композитов на основе каучука синтетического

*Работа выполнена в рамках Государственной программы исследований Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН). Работа выполнена также с использованием оборудования ЦКП «Аналитический центр проблем глубокой переработки нефти и нефтехимии» ИНХС РАН».

цис-изопренового промышленной марки СКИ-3 с вулканизующей группой на основе серы, являющийся аналогом натурального каучука. На сегодняшний день в России СКИ-3 занимают первую позицию среди различных видов синтетических каучуков. Его доля на российском рынке составляет около 31% от общего объема выпускаемых эластомеров [1, 2]. СКИ-3 применяется в резинотехнической, шинной и других отраслях промышленности (ТУ 20.17.10-141-05766801-2018). СКИ-3 относится к кристаллизующимся каучукам [3–7]. Эмпирическая формула: $(—CH_2—C(CH_3)=CH—CH_2—)_n$, где n — число звеньев изопрена, составляющих молекулу полимера. Содержание цис-1,4-звеньев составляет не менее 96%. Внешний вид СКИ-3 — однородная, монолитная, эластичная масса темного цвета. В качестве смесевого термопластичного полимерного наполнителя нами выбран полиэтилен низкого давления (ПЭНД).

В данной работе синтезированы новые композиты СКИ-3 с объемной концентрацией ПЭНД наполнителя 7% (по массе). Структуру поверхности синтезированных композитов изучали в микро и наномасштабе с помощью атомно-силового микроскопа АСМ EasyScan (Nanosurf, Швейцария). АСМ работал в режиме модуляции силы на воздухе при комнатной температуре [8] и был защищен от внешних возбуждений с помощью динамического антивибрационного столика TS-150 (Fabrik am Weiher, Швейцария). Исследования проводились также на сканирующем зондовом микроскопе Smart SPM (Horiba, Франция) в полуконтактном режиме. Peak-to-peak амплитуда колебаний кантилевера вдали от поверхности образца составляла 20–25 нм. Все изображения обрабатывались с помощью алгоритмов программы SPIP (Image Metrology, Дания). Примеры полученных на микроскопах изображений топографии поверхности композитов с концентрацией наполнителя 7% представлены на рис. 1.



а *б*

Рис. 1. АСМ-изображения топографии поверхности композитного каучука СКИ-3 с концентрацией наполнителя $\varphi = 7\%$: *а* — скан $26{,}2 \times 26{,}2$ мкм; *б* — скан $15{,}0 \times 15{,}0$ мкм

Анализ полученных снимков показывает, что данные эластомерные композиты на основе СКИ-3 и добавки полиэтилена, обладают гетерогенной морфологией поверхности, при которой термопласт относительно равномерно распределен в непрерывной матрице эластомера. Светлые области на рис. 1 представляют агломераты наполнителя размерами порядка 250 нм со средними расстояниями между агломератами порядка 1,3 мкм, распределенные на фоне поверхности полимерной матрицы каучука.

Визуализированный эффект довольно равномерного распределения термопласта в матрице каучука указывает на эффективность использованной технологии приготовления данных материалов, что очень важно для получения эластомерных композитов с новыми функционализированными физико-механическими свойствами.

1. *Насыров И. Ш.* Натуральный и синтетический цис-полиизопрены. Ч. 2. Свойства СКИ мировых производителей и российских торговых марок производства // Промышленное производство и использование эластомеров. — 2020. — №3–4. С. 45–55.
2. *Павлюк Б. Ф.* Основные направления в области разработки полимерных функциональных материалов // Авиационные материалы и технологии. — 2017. — №8. — С. 15.
3. *Chen M. K.*, *Zhang R.*, *Tang M. Z. et al.* The Effect of Branching Structure on the Properties of Entangled or Non-covalently Crosslinked Polyisoprene // Chinese Journal of Polymer Science. — 2021. — V. 39, No. 1. — P. 113–121.
4. *Ding Y.*, *Wang J.*, *Song S.* Synthesis and Characterization of Linear Polyisoprene Supramolecular Elastomers Based on Quadruple Hydrogen Bonding // Polymers. — 2020. — V. 12, No. 1. — P. 110.
5. *Tang M.*, *Bai S.*, *Xu R. et al.* Oligopeptide binding guided by spacer length lead to remarkably strong and stable network of polyisoprene elastomers // Polymer. — 2021. — V. 233. — P. 124185.
6. *Wang G.*, *Yu Q.*, *Hu Y. et al.* Influence of the filler dimensionality on the electrical, mechanical and electromagnetic shielding properties of isoprene rubber-based flexible conductive composites // Composites Communications. — 2020. — V. 21. — P. 100417.
7. *Wemyss A. M.*, *Bowen C.*, *Plesse C.* Dynamic crosslinked rubbers for a green future: A material perspective // Materials Science and Engineering: R: Reports. — 2020. — V. 141. — P. 100561.
8. *Valiev K. K.*, *Minaev A. Y.*, *Stepanov G. V. et al.* Scanning Probe Microscopy of Magnetorheological Elastomers // J. Surf. Investig. — 2019. — V. 13. — P. 825–827.

НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ПОЛОСЕ С ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И В ПОЛОСЕ С ТРЕЩИНОЙ*

***И. В. Меньшова*[1,2], *М. Д. Коваленко*[3], *А. П. Кержаев*[1], *Д. А. Власов*[4]**

[1]*ИТПЗ РАН, Москва, Россия;* [2]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;*
[3]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [4]*НИУ МГСУ, Москва, Россия*

В свободной полосе $\{S\colon |x| < \infty, |y| \le 1\}$ сравниваются решения следующих двух задач в четно-симметричной постановке: 1) решение для свободной полосы с поперечной трещиной, расположенной на отрезке $|y| \le \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$; 2) решение для свободной полосы с остаточными напряжениями.

В первом случае известен профиль поперечного разрыва продольных перемещений

$$U(y) = \begin{cases} \pm\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2}, & |y| \le \alpha; \\ 0, & \alpha < |y| < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Верхний и нижний знаки в формуле (1) относятся соответственно к правой $(x \ge 0)$ и левой $(x \le 0)$ полуполосам.

Во втором случае $U(y)$ — это форма поперечного разрыва, который образуется в полосе после сброса остаточных напряжений.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-21-00257, https://rscf.ru/project/25-21-00257/.

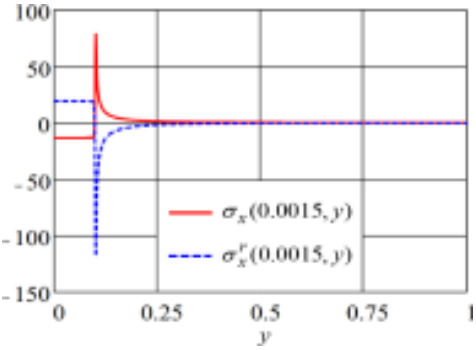


Рис. 1. Нормальные напряжения $\sigma_x(x, y)$ и $\sigma_x^r(x, y)$ в сечении $x = 0{,}0015$

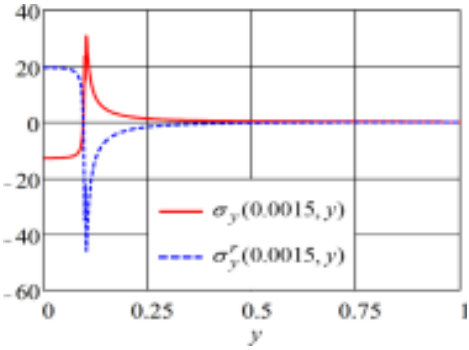


Рис. 2. Нормальные напряжения $\sigma_y(x, y)$ и $\sigma_y^r(x, y)$ в сечении $x = 0{,}0015$

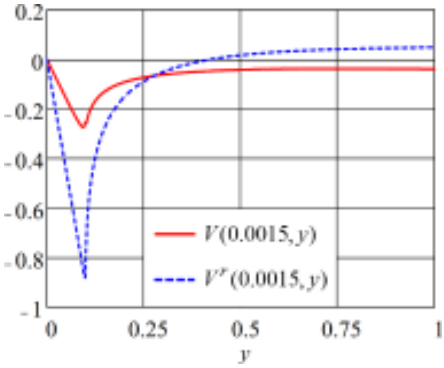


Рис. 3. Поперечные перемещения $V(x, y)$ и $V^r(x, y)$ в сечении $x = 0{,}0015$

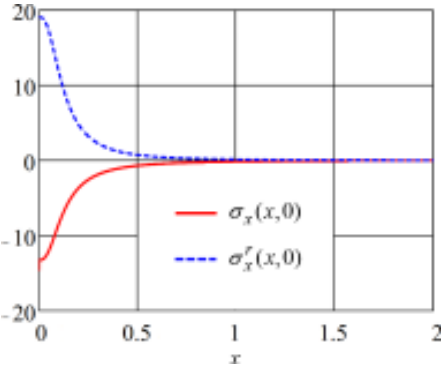


Рис. 4. Нормальные напряжения $\sigma_x(x, y)$ и $\sigma_x^r(x, y)$ при $y = 0$

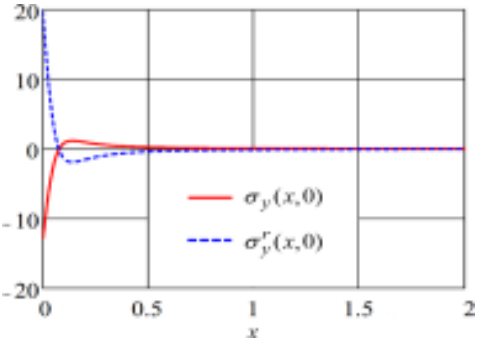


Рис. 5. Нормальные напряжения $\sigma_y(x, y)$ и $\sigma_y^r(x, y)$ при $y = 0$

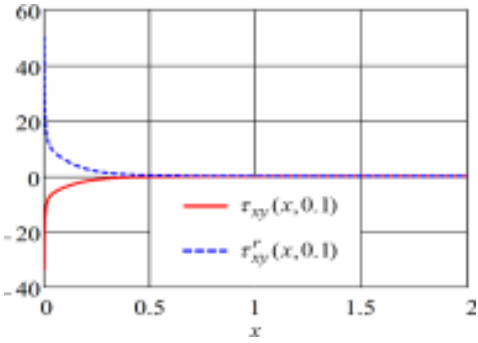


Рис. 6. Касательные напряжения $\tau_{xy}(x, y)$ и $\tau_{xy}^r(x, y)$ при $y = 0{,}1$

Решения обеих задач имеют вид рядов по собственным функциям Папковича–Фадля [1]. Эти функции имеют вид, например,

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k[(\sin\lambda_k - \lambda_k\cos\lambda_k)\cos\lambda_k y - \lambda_k y\sin\lambda_k\sin\lambda_k y],$$
$$\xi(\lambda_k, y) = \left(\frac{1-\nu}{2}\sin\lambda_k - \frac{1+\nu}{2}\lambda_k\cos\lambda_k\right)\cos\lambda_k y - \frac{(1+\nu)\lambda_k y\sin\lambda_k\sin\lambda_k y}{2}. \qquad (2)$$

Числа λ_k — комплексные корни характеристического уравнения $\lambda + \sin\lambda\cos\lambda = 0$, ν — коэффициент Пуассона.

Решение для полосы с трещиной имеет вид, например,

$$\sigma_x(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\big(A_k s_x(\lambda_k,y)e^{\lambda_k|x|}\big), \quad U(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\big(A_k \xi(\lambda_k,y)e^{\lambda_k|x|}\big), \quad \mathrm{Re}\,\lambda_k < 0. \tag{3}$$

Коэффициенты разложений A_k определяются в явном виде с помощью соотношения ортогональности Папковича [2]:

$$A_k = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^3} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2}\, s_x(\lambda_k,y)\,dy. \tag{4}$$

Остаточные напряжения в полосе S создаются следующим образом. Рассмотрим правую полуполосу с симметрично искривленными длинными сторонами, торец которой имеет вид (1) (со знаком $+$). Аналогично рассмотрим левую полуполосу, являющуюся зеркальным отражением правой относительно оси симметрии y. Приложим к ним некоторую массовую нагрузку такую, что стороны полуполос станут прямолинейными. Склеим полуполосы по торцам и снимем массовую нагрузку. В результате получим бесконечную полосу с прямолинейными свободными сторонами, в которой есть остаточные напряжения. Решение этой задачи имеет вид [3], например,

$$\begin{aligned} \sigma_x^r(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{s_x(\lambda_k,y)}{\cos^2\lambda_k}\,\frac{u_k}{\overline{\lambda}_k}\,\frac{\mathrm{Im}\big(\overline{\lambda}_k e^{\lambda_k|x|}\big)}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right), \\ U^r(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\cos^2\lambda_k}\,\frac{u_k}{\lambda_k}\,\frac{\mathrm{Im}\big(\lambda_k e^{\lambda_k|x|}\big)}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Сравним полученные решения. Примем далее $\alpha = 0{,}1$, $\nu = 0{,}33$. На рис. 1 показаны распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x,y)$ и $\sigma_x^r(x,y)$ в сечении $x = 0{,}0015$. Они имеют схожий характер распределения, но разные знаки, так как в первом случае берега разреза раздвигаются, а во втором они стягиваются. Напряжения на разрезе в обоих случаях постоянны, но не равны по величине и знаку. Это же относится и к нормальным напряжениям $\sigma_y(x,y)$ и $\sigma_y^r(x,y)$, показанным на рис. 2. На рис. 3 показано распределение поперечных перемещений в полосе с трещиной и поперечных перемещений, которые возникают при сбросе остаточных напряжений. Характер и знаки перемещений одинаковы, но во втором случае перемещения значительно больше. Это же относится и к продольным перемещениям. На рис. 4 и 5 показаны кривые распределения нормальных напряжений вдоль горизонтальной оси полосы ($0 \le x \le 2$) при $y = 0$, а на рис. 6 приведены кривые для касательных напряжений при $y = 0{,}1$. Кривые имеют одинаковый характер, близки по модулю, но имеют разные знаки.

1. *Коваленко М. Д.*, *Шуляковская Т. Д.* Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. — 2011. — №5. — С. 78–98.
2. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 27, №4. — С. 335–339.
3. *Коваленко М. Д.*, *Меньшова И. В.*, *Шуляковская Т. Д.* Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. — 2013. — №5. — С. 121–144.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАКОНА СУХОГО ТРЕНИЯ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

***П. Г. Морев*[1], *А. А. Маркин*[2]**

[1]*ОГУ им. И. С. Тургенева, Орел, Россия;* [2]*ТулГУ, Тула, Россия*

Краевые задачи механики твердого тела почти всегда решаются численно из-за их крайней сложности. Но даже численные методы наталкиваются на серьезные трудности, связанные с сильной нелинейностью и сингулярностью решения. Существуют три источника сингулярности: резкий переход материала из упругого в пластическое состояние, что проявляется как излом кривой напряжение–деформация; условие непроникновения; закон сухого трения. И если первые два типа сингулярности сглаживаются довольно легко, то с контактным трением все обстоит гораздо сложнее. Если представить себе материальную точку деформируемого тела, находящуюся на поверхности контакта и переходящую из состояния прилипания в состояние скольжения, то скорость скольжения при этом изменяется скачком от нуля до какого-то конечного значения, что затрудняет интегрирование по времени. С целью уменьшения этого скачка траекторию скольжения разделяют на (фиктивный) обратимый и необратимый участки. При этом на обратимом участке малой длины скольжение подчиняется закону упругости, а на необратимом — закону сухого трения. Однако при переходе от обратимого скольжения к необратимому траектория материальной точки опять-таки терпит излом, что наглядно показано в работе [1]. Существует методика регуляризации лагранжиана контактной задачи, называемая Augmented Lagrangian Method, которая формулируется не в скоростях, а в перемещениях, что делает проблематичным использование схем интегрирования по времени высокого порядка; также необходимы трудоемкие итерационные методы решения систем нелинейных уравнений. Существуют и другие способы регуляризации решения контактной задачи, направленные конкретно на сглаживание закона трения Кулона (например, [2, 3]). Однако и они, даже если и формулируются в скоростях, не разрешены относительно этих скоростей и требуют применения затратных итерационных методов.

Целью настоящей работы было найти общий подход к регуляризации закона сухого трения, обеспечивающий применение явных схем Рунге–Кутта высокого (в идеале — произвольного) порядка для интегрирования по времени разрешающих систем ОДУ, избегая необходимости использования итерационных алгоритмов. Решены следующие задачи: 1) формулировка принципа квазистатического равновесия контактной пары, разрешенная относительно скоростей; 2) регуляризация полученной системы уравнений. Решение первой задачи основано на скоростном вариационном принципе, включающем обобщенные координаты и силы, определяющие движение и нагружение абсолютно жесткого тела [4, 5], дополненного условием скольжения и законом трения в дифференциальной форме. Решение второй задачи получено путем разделения траектории скольжения материальной точки на короткий обратимый участок, соответствующий внутренности конуса Кулона, где движение подчиняется закону упругости, и длинный необратимый участок, соответствующий поверхности конуса Кулона, на котором выполняется закон сухого трения. После этого вводится третий, переходный участок, соответствующий тонкому слою вблизи внутренней стороны поверхности конуса Кулона. Данный участок обеспечивает плавный переход от режима обратимого скольжения к режиму необратимого, решая поставленную задачу регуляризации закона сухого

трения. После этапа пространственной дискретизации получается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающая применение явных схем Рунге–Кутта любого порядка.

1. *Bussetta Ph.*, *Marceau D.*, *Ponthot J.-Ph.* The adapted augmented Lagrangian method: a new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem // Computanional Mechanics. — 2012. — V. 49. — P. 259–275.
2. *Areias P.*, *Pinto da Costa A.*, *Rabczuk T.*, *Queiros de Melo F.J.M.*, *Dias da Costa D.*, *Bezzeghoud M.* An alternative formulation for quasi-static frictional and cohesive contact problems // Computanional Mechanics. — 2014. — V. 53. — P. 807–824.
3. *Areias P.*, *Pinto da Costa A.*, *Rabczuk T.*, *Cesar de Sa J.* A simple and robust Coulomb frictional algorithm based on 3 additional degrees of freedom and smoothing // Finite Elements in Analysis and Design. — 2019. — V. 167. — P. 103321.
4. *Морев П.Г.* Вариант метода конечных элементов для контактных задач // Известия РАН. Сер. Механика твердого тела. — 2007. — №4. — С. 168–182.
5. *Morrev P.* A variational statement of quasistatic «rigid–deformable» contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. — 2011. — V. 222. — P. 115–130.

О МОДЕЛИРОВАНИИ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ИЗДЕЛИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ПЛАВЛЕНИЯ*

***И.С. Никитин*[1], *В.И. Голубев*[1,2], *А.Д. Никитин*[1], *Б.А. Стратула*[1]**

[1]*ИАП РАН, Москва, Россия;* [2]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Селективное лазерное плавление (СЛП) является современной перспективной технологией создания инженерных изделий сложной пространственной формы. Несмотря на ряд достоинств, таких как высокая степень интеграции с современными CAD-системами, относительная дешевизна производства, возможность создания изделий сложной геометрии, технология СЛП обладает недостатком в виде относительно низкой усталостной прочности получаемых изделий. Анализ данных усталостных испытаний, представленных в литературе [1], показывает большой разброс и высокую чувствительность циклической прочности к параметрам печати — скорости, мощности, шагу лазерного луча и др. Таким образом, возникает возможность оптимизации параметров процесса СЛП по критерию усталостной долговечности. В настоящей работе представлен подход и прогностическая модель оценки усталостной прочности СЛП-изделий в зависимости от параметров печати.

Работа состоит из двух частей — в первой проводится моделирование процесса селективного лазерного плавления при различных параметрах сканирования (мощности лазерного луча, скорости, горизонтального и вертикального перекрытия соседних треков). Результатом такого моделирования является топология получаемой картины отвержденных треков с характерными особенностями и дефектами в виде недоплавленных и/или переплавленных зон. Во второй части проводится численное моделирование усталостной прочности и долговечности образцов с заданным распределением дефектов плавления, полученных на первом этапе моделирования.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 23-19-00640).

Таким образом, подход позволяет связать параметры СЛП-процесса с расчетным ресурсом.

Задача нелинейной теплопроводности для многофазной среды ставится для представительного объема (рис. 1), состоящего из сформированной подложки из основного материала, слоя порошкового материала, по которому движется лазерный луч. На верхней поверхности образца воздействие лазерного луча задается в виде нормально-кругового подвижного источника тепла, на оставшейся части поверхности задаются условия теплообмена с окружающей средой.

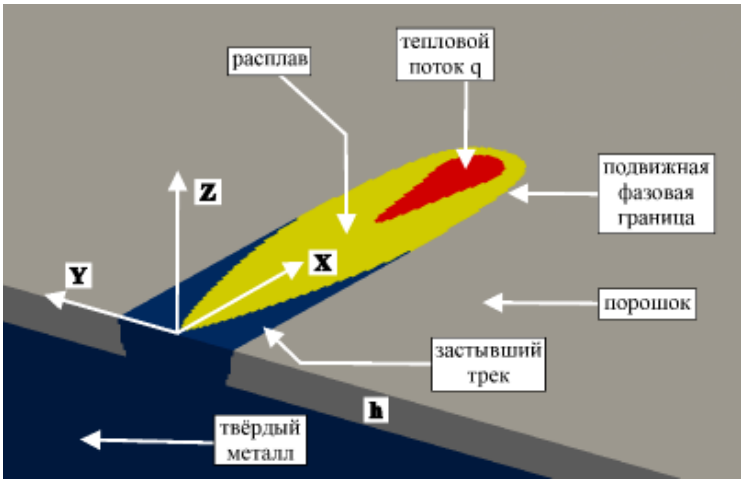


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной модели для решения задачи нелинейной теплопроводности в многофазной среде

Математическая формулировка нелинейной задачи теплопроводности, описывающая процесс селективного лазерного плавления, в энтальпийной формулировке [2] имеет следующий вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(E)\frac{\partial T(E)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(E)\frac{\partial T(E)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(E)\frac{\partial T(E)}{\partial z}\right). \qquad (1)$$

Энтальпийная формулировка математической постановки задачи селективного лазерного плавления использована для того, чтобы избежать явного выделения неизвестных межфазных границ при численном решении нелинейной многофазной задачи теплопроводности [2]. Используются кусочно-линейные зависимости температуры и теплопроводности от энтальпии, учитывающие возможные фазовые переходы. В результате решения этой задачи получены характерные границы отвержденных треков при многослойном лазерном плавлении. Полученные геометрические параметры слоистой микроструктуры использованы для формулировки задачи циклической повреждаемости образца для нахождении усталостной долговечности. Формируемая микроструктура определяет пространственное распределение упругой неоднородности СЛП-материала. Далее решается задача усталостного разрушения корсетного СЛП-образца в условиях циклического нагружения стационарными колебаниями заданной амплитуды.

Для оценки усталостной прочности образцов, получаемых методом СЛП, использована мультирежимная двухкритериальная модель усталостного разрушения [3]. В основу модели положены представления о кинетике накопления уста-

лостной повреждаемости ψ материала под действием циклических нагрузок и соответствующей деградации его упругих модулей:

$$\frac{d\psi}{dN} = B(\sigma, \Delta\sigma)\psi^{\gamma}/(1-\psi^{1-\gamma}),$$

$$\lambda, \mu(\psi) = \begin{cases} \lambda_0, \mu_0(1-\kappa\psi) & \text{при} \quad \psi < \psi_*, \\ 0 & \text{при} \quad \psi_* \le \psi \le 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $B(\sigma, \Delta\sigma)$ — коэффициент, который зависит от напряженно-деформированного состояния в цикле нагружения и параметров усталостной кривой материала [3], $\Delta\sigma$ — размах циклической нагрузки, γ — параметр, определяющий скорость накопления повреждаемости. В результате вычислений установлена связь между усталостной долговечностью СЛП-образцов и технологическими параметрами их производства. Предложенный подход может быть использован для оптимизации параметров и стратегии лазерного плавления для обеспечения наибольшей усталостной долговечности образца или изделия.

1. *Stoffregen H., Butterweck K., Abele E.* Fatigue analysis in selective laser melting: Review and investigation of thin-walled actuator housings // Solid Freeform Fabrication Symposium. — 2013. — P. 635–650.
2. *Никитин И. С., Голубев В. И., Никитин А. Д., Стратула Б. А.* Численное моделирование процесса селективного лазерного плавления порошков из титановых и алюминиевых сплавов // Математическое моделирование. — 2025. — Т. 37, №1. — С. 61–80.
3. *Бураго Н. Г., Никитин И. С., Никитин А. Д., Стратула Б. А.* Численное моделирование усталостного разрушения на основе нелокальной теории циклической повреждаемости // Математическое моделирование. — 2024. — Т. 36, №3. — С. 3–19.

ТРЕХПОЛЬНЫЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ОБОЛОЧКИ ПРИ УПРУГО-НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

***А. П. Николаев*[1], *Ю. В. Клочков*[1], *Н. А. Кирсанова*[2], *О. В. Вахнина*[1], *М. Ю. Клочков*[3]**

[1]*ВолГАУ, Волгоград, Россия;* [2]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия;* [3]*ВолгГТУ, Волгоград, Россия*

1. *Физические и геометрические соотношения.* Используется диаграмма растяжения нелинейно упругого материала в координатах σ–ε (напряжения–деформации). Принимается линейная зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений σ_0 и деформаций ε_0

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0; \quad \Delta\sigma_0 = k\Delta\varepsilon_0, \tag{1.1}$$

где $\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Коэффициент пропорциональности k определяется выражением

$$k \equiv \frac{E^0}{1-2\nu^0} = \frac{E_c^0}{1-2\nu^l}, \tag{1.2}$$

где E^0, ν^0 — модуль упругости и коэффициент поперечной деформации на начальном участке диаграммы растяжения; E_c^0, ν^l — секущий модуль и коэффициент поперечной деформации в произвольном участке диаграммы растяжения материала.

Из равенства (1.2) определяется величина ν', используемая при построении диаграммы деформирования,

$$\nu' = \frac{1}{2} - \frac{1-2\nu^0}{2E^0}E_c^0, \tag{1.3}$$

что совпадает с формулой для упругопластического деформирования материала [1].

Определяющие уравнения в произвольной точке нелинейно упруго-деформируемой оболочки на шаге нагружения в криволинейной системе координат формируются на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений [2]

$$\Delta\varepsilon^{\zeta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}P_{\Delta\varepsilon} = \lambda\Big(\Delta\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}P_{\Delta\varepsilon}\Big), \tag{1.4}$$

где коэффициент пропорциональности $\lambda = (3/2)E_K^{\partial}$; E_K^{∂} — касательный модуль диаграммы деформирования в начале шага нагружения; $P_{\Delta\varepsilon} = (1/K)P_{\Delta\sigma}$; $P_{\Delta\sigma} = \sigma_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ — первый инвариант тензора приращений напряжений; $g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta$ — ковариантные компоненты метрического тензора.

Соотношения (1.4) представляются в матричном виде

$$\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon^{\zeta}\}} = \underset{3\times3}{[C]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}}, \tag{1.5}$$

на основе которых с использованием гипотезы Кирхгофа–Лява формируются соотношения [2]

$$\underset{6\times1}{\{\Delta S\}} = \underset{6\times6}{[h]}\,\underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}, \tag{1.6}$$

где $\underset{1\times6}{\{\Delta S\}}^T = \{\Delta N^{11}\Delta N^{22}\Delta N^{12}\Delta M^{11}\Delta M^{22}\Delta M^{12}\}$ — строка приращений усилий и моментов; $\underset{1\times6}{\{\Delta\varepsilon\}}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}\Delta\varepsilon_{22}2\Delta\varepsilon_{12}\Delta\aleph_{11}\Delta\aleph_{22}2\Delta\aleph_{12}\}$ — строка деформаций и искривлений срединной поверхности оболочки, определяемая кроме (1.6), через приращения перемещений соответствующей точки срединной поверхности $(\Delta v^1, \Delta v^2, \Delta v)$ матричным выражением

$$\underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon^{K}\}} = \underset{6\times3}{[L]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta v\}}, \tag{1.7}$$

где $\underset{1\times3}{\{\Delta v\}}^T = \{\Delta v^1\Delta v^2\Delta v\}$; $\underset{6\times3}{[L]}$ — матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

2. *Матрица деформирования конечного элемента.* Конечный элемент принимается в виде четырехугольного фрагмента срединной поверхности оболочки с узлами i, j, k и l.

Искомыми величинами на шаге нагружения являются приращения перемещений $\underset{1\times3}{\{\Delta v\}}^T$, приращения усилий и моментов $\underset{1\times6}{\{\Delta S\}}^T$, приращения деформаций и искривлений срединной поверхности $\underset{1\times6}{\{\Delta\varepsilon\}}^T$ [3].

В качестве узловых неизвестных приняты матрицы-строки [3]: $\underset{1\times36}{\{\Delta v_y\}}^T$, включающие приращения перемещений и их первые производные; $\underset{1\times24}{\{\Delta S_y\}}^T$, включающие

приращения усилий и моментов; $\underset{1\times 24}{\{\Delta\varepsilon_y\}^T}$, включающие приращения деформаций и приращения искривлений срединной поверхности.

Приняты следующие бикубические и билинейные аппроксимирующие выражения [3]:

$$\begin{gathered}\underset{3\times 1}{\{\Delta v\}} = \underset{3\times 36}{[A]}\,\underset{36\times 1}{\{\Delta v_y\}};\ \underset{6\times 1}{\{\Delta\varepsilon_c^K\}} = \underset{6\times 3}{[L]}\ \underset{3\times 36}{[A]}\,\underset{36\times 1}{\{\Delta v_y\}} = \underset{6\times 36}{[B]}\,\underset{36\times 1}{\{\Delta v_y\}};\\ \underset{6\times 1}{\{\Delta S\}} = \underset{6\times 24}{[H]}\,\underset{24\times 1}{\{\Delta S_y\}};\quad \underset{6\times 1}{\{\Delta\varepsilon^a\}} = \underset{6\times 24}{[H]}\,\underset{24\times 1}{\{\Delta\varepsilon_y\}}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Для получения искомых параметров на шаге нагружения использован нелинейный функционал Лагранжа с дополнительным условием равенства нулю действительной работы на приращениях деформаций разности внутренних усилий, определенных с использованием их непосредственной аппроксимации, и их величин, определенных через аппроксимацию приращений перемещений (2.1) [3].

После подстановки аппроксимирующих выражений (2.1) и выполнения минимизации по узловым неизвестным получаются системы уравнений, с использованием которых определяются в первом приближении силовые, деформационные и кинематические параметры.

При выполнении последующих итераций на шаге нагружения предлагается коэффициент λ физических уравнений (1.4) определять с использованием определителей третьих инвариантов девиаторов приращений деформаций $|D_3(\Delta\varepsilon)|$ и девиаторов приращений напряжений $|D_3(\Delta\sigma)|$ выражением

$$\lambda = \left[\frac{|D_3(\Delta\varepsilon)|}{|D_3(\Delta\sigma)|}\right]^{1/3} \tag{2.2}$$

и повторить процесс до достижения заданной точности.

Изложенный алгоритм открывает возможность определения напряженно-деформированного состояния нелинейно упруго-деформируемых конструкций с использованием данных диаграммы растяжения материала в первом приближении.

1. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Юрайт, 2024. — 402 с.
2. *Kiseleva R. Z.*, *Kirsanova N. A.*, *Nikolaev A. P. et al.* Variants of physical equations in a curvilinear coordinate system and their comparison based on mixed FEM // Materials Physics and Mechanics. — 2024. — V. 52, No. 3. — P. 33–43.
3. *Klochkov M. Yu.*, *Nikolaev A. P.*, *Pshenichkina V. A. et al.* Physically nonlinear deformation of the shell using a three-field FEM // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2025. — No. 18(2). — P. 209–217.

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИМОРФНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТЕПЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ*

А. В. Остpик, М. А. Ахметова, Д. Н. Николаев

ФИЦ ПХФ и МХ РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия

Диоксид кремния (кремнезем) относится к группе основных породообразующих минералов и входит в состав коры и мантии Земли, а также других планет. Построение уравнений состояния (УРС) кремнезема при высоких давлениях требуется

*Работа выполнена в рамках Госзадания (регистрационный номер 124020600049-8).

при исследованиях формирования и эволюции космических тел, в том числе, и при прогнозировании последствий их столкновения.

Кроме того, диоксид кремния используется в динамических экспериментах в качестве эталонного материла в методе отражения. Метод отражения предполагает наличие надежного УРС для описания поведения материала эталона при высоких давлениях. При ударном сжатии переход SiO_2 (α-кварца) в кристаллические модификации (в коэсит, а затем в стишовит) и в расплав требует заметных затрат энергии, и при построении УРС учет полиморфизма важен [1].

В настоящее время имеется представительный набор УРС поликристаллических тел, в том числе, и табличных. Однако при их использовании в численных кодах значительная часть времени затрачивается не на численное решение дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи, а на интерполирование 2D-таблиц термодинамических функций в зависимости от параметров состояния. На практике часто требования к точности описания поведения вещества не столь высоки, как достигаемые в табличных УРС. Поэтому целесообразна разработка малопараметрических УРС с информацией в аналитическом виде или на основе 1D-таблиц. В этом случае для аналитического представления термодинамических потенциалов оказываются удобными степенные функции определенных видов. В качестве примера строятся УРС полиморфных фаз диоксида кремния в области сжатия.

Уравнений состояния записываются в форме Ми–Грюнайзена:

$$E = E(\rho, T) = E_c(\rho) + E_T(\rho, T) = E_c(\rho) + \int_0^T C_v(\rho, T)\, dT, \tag{1}$$

$$P = P_c(\rho) + P_T(\rho, T) = P_c(\rho) + \Gamma(\rho, T)\rho E_T = \rho^2 \frac{dE_c}{d\rho}(\rho) + \Gamma(\rho, T)\rho \int_0^T C_v(\rho, T)\, dT, \tag{2}$$

где ρ — плотность вещества; E, E_c, E_T — полная, холодная и тепловая удельные энергии; P, P_c, P_T — полное, холодное и тепловое давления; $\Gamma = \Gamma(\rho, T)$ — функция Грюнайзена; $C_v(\rho, T)$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Для дебаевского приближения с температурой Дебая $\theta_D(\rho)$, зависящей от плотности, имеем (ν — число атомов в молекуле)

$$E_T(\rho, T) = \frac{3RT\nu}{\mu} D[x], \quad C_v = \frac{9R\nu}{\mu}\left(\frac{4}{3}D[x] - \frac{x}{e^x - 1}\right), \quad x = \frac{\theta_D(\rho)}{T}, \quad D[x] = \frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{t^3\, dt}{e^t - 1}. \tag{3}$$

В рамках этого приближения функция Грюнайзена не зависит от температуры и определяется соотношением

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_0(\rho) = -\frac{\partial \ln(\theta_D)}{\partial \ln(1/\rho)}, \tag{4}$$

что обеспечивает выполнение условия термодинамической совместности [2].

Для поликристаллического тела функция $\Gamma_0(\rho)$ рассчитывается из известного соотношения ($t = 0$ — теория Ландау–Слэтера; $t = 1$ — теория Дуглейла–Макдональда; $t = 2$ — теория свободного объема; $\gamma = 2t/3$)

$$\Gamma_0(\rho) = \frac{t-2}{3} - \frac{1}{2\rho}\frac{d^2}{d(1/\rho)^2}\left(\rho^{-\gamma}P_c(\rho)\right)\left[\frac{d}{d(1/\rho)}\left(\rho^{-\gamma}P_c(\rho)\right)\right]^{-1}, \quad P_c(\rho) = -\frac{dE_c}{d(1/\rho)}. \tag{5}$$

Из приведенных соотношений следует, что рассматриваемый вид УРС определяется заданием потенциала холодной энергии. Примем потенциалы холодного давления и энергии в степенной форме ($n > m$)

$$P_c = \frac{K_0}{n-m}(\delta^n - \delta^m), \quad E_c = -\int P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{K_0}{(n-m)\rho_0}\left(\frac{\delta^n}{n-1} - \frac{\delta^m}{m-1}\right) + H_0, \quad \delta = \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{6}$$

где δ — степень сжатия; ρ_0, K_0 — плотность и объемный модуль сжатия при нулевых значениях давления и абсолютной температуры; H_0 — константа, зависящая от уровня отсчета энергии; n, m — параметры потенциалов ($n > m$).

Подставляя (6) в (5), получаем выражение для функции Грюнайзена

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_0(\rho) = \frac{t-2}{3} + \frac{1}{2}\frac{(m-\gamma)(m-\gamma+1) - (n-\gamma)(n-\gamma+1)\delta^{n-m}}{m-\gamma-(n-\gamma)\delta^{n-m}}, \tag{7}$$

Согласно (7) при больших плотностях коэффициент Грюнайзена стремится к $(3n-1)/6$, и если принять, в соответствии с квантово-статистической моделью Томаса–Ферми, что для сильно сжатого вещества $\Gamma = 2/3$, то получаем часто используемое значение $n = 5/3$. При $\delta = 1$ из (7) следует значение коэффициента Грюнайзена $\Gamma_{00} = (3(m+n) - 2t - 1)/6$ и в случае, когда эта величина известна, имеем соотношение для определения свободного параметра t

$$t = (3(m+n) - 6\Gamma_{00} - 1)/2, \tag{8}$$

откуда в рамках модели получаем при $t \geq 0$ ограничение снизу на показатели степени

$$m + n \geq 2\Gamma_{00} + 1/3.$$

Функцию температуры Дебая от плотности находим подстановкой (7) в (4)

$$\theta_D = \delta^{\frac{t-2}{3}}\sqrt{\frac{(n-\gamma)\delta^{n-\gamma+1} - (m-\gamma)\delta^{m-\gamma+1}}{n-m}}\theta_{D0}, \tag{9}$$

Отметим, что при $t = 1$ и $n = 5/3$, $m = 4/3$ (эти значения показателей следуют из соображений теории размерности [3]) соотношения (7), (9) записываются, как

$$\Gamma_0(\rho) = \frac{2\delta^{1/3} - 1}{3\delta^{1/3} - 2}, \quad \theta_D = \theta_{D0}(3\delta^{4/3} - 2\delta)^{1/2}, \tag{10}$$

и в таком виде успешно использовались в работе [4] для описания поведения стишовита при высоких давлениях. Однако параметр t в них не варьировался (использовалась теория Дуглейла–Макдональда с $t = 1$), что приводило к значению $\Gamma_{00} = 1$, отличному от известных данных для стишовита. Хотя это отличие оказалось несущественным для согласия с экспериментальными данными, полученного в работе [4], но изменив значение параметра t можно построить УРС с требуемой величиной Γ_{00}.

В результате, с помощью предлагаемых УРС, построены фазовая диаграмма и ударные адиабаты SiO_2 с учетом полиморфных и фазового (плавления в ударной волне) переходов. Получено согласие расчетных и известных экспериментальных данных.

1. *Григорян С. С.*, *Евтерев Л. С.*, *Замышляев Б. В.*, *Кривошеев С. Г.* Об ударно-волновых процессах в силикатных породах с учетом фазовых превращений // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, №6. — С. 1292–1295.

2. *Ostrik A., Nikolaev D.* Shock induced melting of sapphire // J. Phys.: Conf. Ser. — 2022. — V. 2154. — 012010.
3. *Сарры М. Ф.* Термодинамическая теория уравнения состояния вещества // Журнал технической физики. — 1998. — Т. 68, №10. — С. 1–9.
4. *Надыкто Б. А., Надыкто А. Б., Ломайкин А. И.* Уравнение состояния стишовита до 1000 ГПа и более 10000 К, фазовая стабильность стишовита и описание при высоких давлениях ударных адиабат полиморфных фаз SiO_2 как ударных адиабат пористого стишовита // ВАНТ. Серия: Теоретическая и прикладная физика. — 2020. — №1. — С. 29–39.

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ, СОЕДИНЕННОГО С ЖЕСТКИМ ОПОРНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПРОСЛОЙКУ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ*

***В. Н. Паймушин*[1], *В. М. Шишкин*[2]**

[1]*КНИТУ–КАИ, Казань, Россия;* [2]*ВятГУ, Киров, Россия*

Рассмотрим стержень-полосу толщиной h, состоящий из незакрепленных участков 1 и 2, соединенный с жестким опорным элементом 4 через тонкую упругую прослойку 3, имеющую малую в сравнении с h толщину t (рис. 1). Обозначим через $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(0)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(0)}$ осевые перемещения (в направлении оси ox) и прогиба (в направлении оси oz) точек осевой линии стержня, представляя перемещения его произвольных точек $M(x,z)$ классической моделью Кирхгофа–Лява:

$$\begin{gathered} U^{(s)} = u^{(s)} - zw^{(s)}_{,x}, \quad W^{(s)} = w^{(s)}; \quad -h/2 \le z \le h/2; \\ 0 \le x \le a_1 \quad \text{при} \quad s = 1; \quad -l \le x \le -(l + a_2) \quad \text{при} \quad s = 2; \\ -l \le x \le 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

которой в геометрически линейном приближении соответствуют кинематические и физические соотношения

$$\varepsilon^{(s)}_x = U^{(s)}_{,x} = u^{(s)}_{,x} - zw^{(s)}_{,xx}, \quad \sigma^{(s)}_x = E_1\varepsilon^{(s)}_x = E_1\left(u^{(s)}_{,x} - zw^{(s)}_{,xx}\right), \quad s = 0, 1, 2. \tag{2}$$

Перемещения $U^{(s)}$, $W^{(s)}$ в сечениях $x = 0$, $x = -l$ должны удовлетворять кинематическим условиям сопряжения участков стержня

$$u^{(0)} = u^{(s)}, \quad w^{(0)} = w^{(s)}, \quad w^{(0)}_{,x} = w^{(s)}_{,x}, \quad u^{(0)}_{,x} = u^{(s)}_{,x}, \quad s = 1, 2. \tag{3}$$

Для перемещений $U^{(3)}(x,\zeta)$, $W^{(3)}(x,\zeta)$ прослойки примем аппроксимации

$$U^{(3)} = u^{(3)} + \zeta\gamma^{(3)}, \quad W^{(3)} = w^{(3)} + \zeta\varphi^{(3)}, \quad -l \le x \le 0, \quad -t/2 \le \zeta \le t/2, \tag{4}$$

которые подчиним условиям

$$\begin{gathered} U^{(3)}\left(x, \zeta = -\frac{t}{2}\right) = u^{(3)} - \frac{t}{2}\gamma^{(3)} = 0, \quad W^{(3)}\left(x, \zeta = -\frac{t}{2}\right) = w^{(3)} - \frac{t}{2}\varphi^{(3)} = 0, \\ u^{(3)} + \frac{t}{2}\gamma^{(3)} = u^{(0)} + \frac{h}{2}w^{(0)}_{,x}, \quad w^{(3)} + \frac{t}{2}\varphi^{(3)} = w^{(0)}. \end{gathered} \tag{5}$$

*Исследование выполнено за счет средств Российского научного фонда (проект №23-19-00021).

Из (5) следуют зависимости

$$u^{(3)} = \frac{u^{(0)}}{2} + \frac{h}{4}w^{(0)}_{,x}, \quad \gamma^{(3)} = \frac{1}{t}\Big(u^{(0)} + \frac{h}{2}w^{(0)}_{,x}\Big), \quad w^{(3)} = \frac{w^{(0)}}{2}, \quad \varphi^{(3)} = \frac{w^{(0)}}{t},$$

с учетом которых выражения (4) преобразуются к виду

$$U^{(3)} = \Big(1 + \frac{2\zeta}{t}\Big)\Big(\frac{u^{(0)}}{2} + \frac{h}{4}w^{(0)}_{,x}\Big), \quad W^{(3)} = \Big(1 + \frac{2\zeta}{t}\Big)\frac{w^{(0)}}{2}. \tag{6}$$

Принимая для прослойки модель трансверсально-мягкого материала, в соответствии с (6) в геометрически линейном приближении получим кинематические и физические соотношения

$$\varepsilon^{(3)}_{\zeta} = \frac{\partial W^{(3)}}{\partial \zeta} = \frac{w^{(0)}}{t}, \quad \gamma^{(3)}_{x\zeta} = \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(3)}}{\partial x} = \frac{u^{(0)}}{t} + \Big(\frac{h}{2t} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{t}\Big)w^{0}_{,x}, \tag{7}$$

$$\sigma^{(3)}_{\zeta} = E^{0}_{3}\varepsilon^{(3)}_{\zeta} = \frac{E^{0}_{3}}{t}w^{(0)}, \quad \sigma^{(3)}_{x\zeta} = G^{0}_{13}\gamma^{(3)}_{x\zeta} = G^{0}_{13}\Big[\frac{u^{(0)}}{t} + \Big(\frac{h}{2t} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{t}\Big)w^{0}_{,x}\Big]. \tag{8}$$

На основе соотношений (2), (7), (8) и вариационного уравнения принципа Даламбера–Лагранжа с учетом условий (3) получены уравнения движения закрепленного участка 0 стержня, уравнения движения и граничные условия к ним для незакрепленных участков 1, 2 стержня, а также силовые условия сопряжения участков, формулируемые в сечениях $x = 0$ и $x = -l$. Построены аналитические решения полученных уравнений движения при действии гармонической возмущающей силы $P = P_0 e^{i\omega\tau}$ (i — мнимая единица, ω — круговая частота, τ — время).

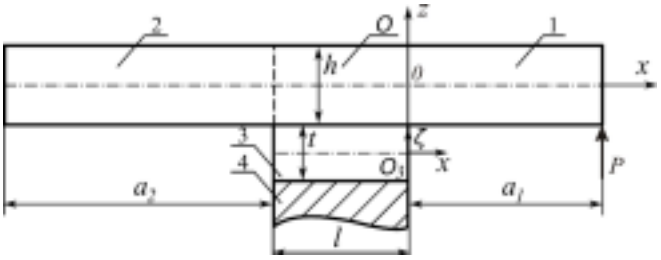
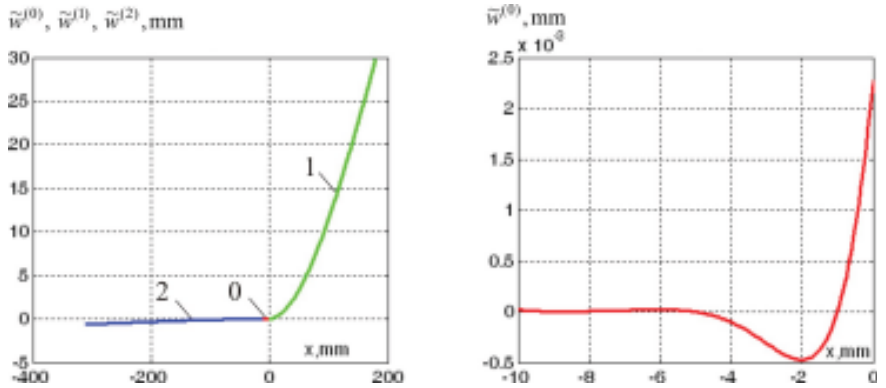


Рис. 1. Соединение стержня-полосы с опорным элементом: 0 — участок закрепления; 1, 2 — нагруженный и ненагруженный участки; 3 — прослойка; 4 — опорный элемент

С использованием полученных решений проведены численные эксперименты по исследованию прохождения изгибных колебаний в ненагруженную консоль стержня-полосы (рис. 1) через участок закрепления конечной длины в зависимости от величины модуля упругости прослойки E^{0}_{3}, ее толщины t и длины l закрепленного участка при изменении одной из данных величин и фиксированных значениях двух других параметров. Размеры стержня: $a_1 = 180$ мм; $a_2 = 300$ мм; $h = 2{,}9$ мм. Материал — алюминиевый сплав Д16Т с характеристиками: $E_1 = 72$ ГПа; $\rho = 2770$ кг/м^3. На стержень действует вынуждающая гармоническая сила $P = P_0 e^{i\omega\tau}$ с амплитудой $P_0 = 1920$ Н/м (на единицу ширины стержня) и частотой $\omega = \omega_1$, где ω_1 — низшая собственная частота.

Для учета демпфирующих свойств материала при резонансных колебаниях стержня использовалась гипотеза комплексного внутреннего трения [1, 2 и др.], в соответствии с которой модуль упругости E_1 заменялся его комплексным аналогом $E^{*}_{1} = E_1(1 + i\delta_1/\pi)$, где δ_1 — логарифмический декремент колебаний материала при растяжении-сжатии.



а *б*

Рис. 2. Амплитуды изгибных колебаний $\widetilde{w}^{(0)}$, $\widetilde{w}^{(1)}$, $\widetilde{w}^{(2)}$ (*а*) и $\widetilde{w}^{(0)}$ (*б*) участков стержня при $t = 0{,}1$ мм, $l = 10$ мм и $E_3^0/E_1 = 0{,}3$: 0 — $\widetilde{w}^{(0)}$; 1 — $\widetilde{w}^{(1)}$; 2 — $\widetilde{w}^{(2)}$

В ходе численных экспериментов установлено, что амплитуда колебаний $\widetilde{w}^{(1)}|_{x=a_1}$ при уменьшении модуля E_3^0 несколько возрастает. Наибольшие изменения происходят в отношении амплитуды $\widetilde{w}^{(2)}|_{x=-(l+a_2)}$, которая при уменьшении E_3^0 заметно возрастает. Увеличение t и уменьшение l приводят к существенному возрастанию степени прохождения колебаний в ненагруженную консоль стержня, что можно объяснить естественным снижением жесткости закрепленного участка за счет деформирования прослойки в направлении оси $0_3\zeta$. На рис. 2 приведены амплитуды изгибных колебаний $\widetilde{w}^{(0)}$, $\widetilde{w}^{(1)}$, $\widetilde{w}^{(2)}$ участков стержня, полученные при толщине прослойки $t = 0{,}1$ мм, длине закрепленного участка $l = 10$ мм и отношении $E_3^0/E_1 = 0{,}3$.

1. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. — М.: Госстройиздат, 1960. — 129 с.
2. *Рикардс Р. Б.*, *Барканов Е. Н.* Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов // Механика композит. материалов. — 1991. — №5. — С. 823–830.

ВЕРИФИКАЦИЯ МОМЕНТНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Д. В. Седова, В. В. Трофимов, Д. Т. Чекмарев

ННГУ, Нижний Новгород, Россия

Рассматривается новая схема решения трехмерных статических и динамических задач теории упругости. Для аппроксимации уравнений теории упругости по пространственным координатам используется моментная схема метода конечных элементов, которая строится на основе ажурной схемы на базе 4-узлового конечного элемента с линейной аппроксимацией перемещений в пределах элемента. Ажурные схемы отличаются от традиционных схем расположением конечных элементов в виде тетраэдров по одному в центрах ячеек гексаэдрической сетки.

*Работа выполнена при поддержке РНФ (проект №24-29-00422).

Моментная схема получается в результате проецирования ажурной схемы на базе конечного элемента в виде семимерного симплекса в трехмерное пространство, в результате получаем 4-параметрическое семейство численных схем МКЭ решения трехмерной задачи теории упругости [1].

В рассматриваемых 8-узловых конечных элементах в виде гексаэдров, тензоры деформаций являются постоянными в пределах элемента. Первые три столбца каждой матрицы деформаций и напряжений соответствуют обычным деформациям и напряжениям, а остальные столбцы — моментным составляющим (интегралы от напряжений в данных столбцах соответствуют изгибающим и крутящим моментам конечного элемента).

Параметры схемы можно настраивать, изменяя влияние моментных составляющих в элементе. Отметим, что при увеличении данных параметров влияние моментных составляющих в элементе убывает и при устремление их к бесконечности мы получаем схему 8-узлового полилинейного конечного элемента с одной точкой интегрирования или известную для задач динамики разностную схему Уилкинса, в которой влияние моментов не учитывается. Если данный параметр уменьшать, то влияние моментов будет расти.

Согласно опыту реализации и исследования свойств аналогичных ажурной схем, данная схема должна обладать лучшей сходимостью и отсутствием нежелательных эффектов сдвигового запирания и неустойчивости типа «песочные часы» [2].

В работе приводятся решения ряда статических и динамических задач с использованием явной и неявной схем. Результаты численных расчетов сравниваются с аналитическими решениями и решениями на основе других численных методик. Проведена оценка точности и эффективности моментного конечного элемента по сравнению с традиционными схемами метода конечных элементов.

1. *Абу Даввас Я.*, *Модин И. А.*, *Чекмарев Д. Т.* Моментный конечный элемент для решения трехмерных задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. — 2023. — Т. 85, №2. — С. 164–177.
2. *Чекмарев Д. Т.*, *Глазова Е. Г.*, *Седова Д. В.* Неявная ажурная схема решения трехмерных задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2025. — Т. 167, кн. 1. — С. 169–180.

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРИМЫКАНИИ К ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ДВОЯКОСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНЫ

С. П. Сейранян

ИМ НАН РА, Ереван, Армения

В продолжение работы [1] и публикации автора [2] рассматривается предложенное в [3] единственное ограниченно решение для прогиба $\widetilde{w}(x,y)$ задачи изгиба прямоуголь-ной защемленной по контуру пластины при произвольной, но симметричной относительно осей симметрии прямоугольника поперечной нагрузке. Доказано, что частные производные от $\widetilde{w}(x,y)$ пластины по координатам x и y $\partial\widetilde{w}(x,y)/\partial x$ н $\partial\widetilde{w}(x,y)/\partial y$ (а с ними и $\widetilde{w}(x,y)$ [4]) непрерывны в замкнутом прямоугольнике плана пластины.

1. Исходные основные опубликованные авторские результаты. Решение задачи изгиба прямоугольной защемленной на контуре пластины при симметричной относительно осей симметрии прямоугольника поперечной нагрузке $q(x,y)$

для прогиба $\widetilde{w}(x,y)$ в прямоугольнике $(x,y) \in G_{=}[-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$ в работе автора [2] получено в виде

$$\widetilde{w}(x,y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1,3\ldots}^{\infty} \sum_{m=1,3\ldots}^{\infty} \frac{q_{im} \cos \lambda_i x \cos \mu_m y}{(\lambda_i^2 + \mu_m^2)^2} +$$
$$+ \frac{\sqrt{b/a}}{2D} \sum_{i=1,3\ldots}^{\infty} \widetilde{E}_i \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{\lambda_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i} (\alpha_i \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y - \lambda_i y \operatorname{sh} \lambda_i y) \cos \lambda_i x +$$
$$+ \frac{\sqrt{a/b}}{2D} \sum_{m=1,3\ldots}^{\infty} \widetilde{F}_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{\mu_m^2 \operatorname{ch} \beta_m} (\beta_m \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch} \mu_m x - \mu_m x \operatorname{sh} \mu_m x) \cos \mu_m y, \quad (1)$$

где D — изгибная жесткость пластины, $\lambda_i = i\pi/a$, $\mu_m = m\pi/b$, $\alpha_i = i\pi b/(2a)$, $\beta_m = m\pi a/(2b)$,

$$q_{im} = \frac{4}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q(x,y) \cos \lambda_i x \cos \mu_m y \, dx \, dy. \quad (2)$$

Коэффициенты

$$\widetilde{E}_i, \quad \widetilde{F}_m, \quad |\widetilde{E}_i| \le K/i^{1/2}, \quad |\widetilde{F}_m| \le K/m^{1/2}, \quad \text{где} \quad K > 0 \text{ — некоторая константа,} \quad (3)$$

решение вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

2. О непрерывном примыкании к граничным условиям решения $\widetilde{w}(x,y)$. Имеем

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} [(\alpha_i \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y - \lambda_i y \operatorname{sh} \lambda_i y) \cos \lambda_i x] = (\alpha_i \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i |y| - \lambda_i |y| \operatorname{sh} \lambda_i |y|) \frac{d^s \cos \lambda_i x}{dx^s} =$$
$$= [\lambda_i \operatorname{sh} \lambda_i (b/2 - |y|)/ \operatorname{ch} \alpha_i + \lambda_i (b/2 - |y|) \operatorname{sh} \lambda_i |y|] d^s \cos \lambda_i x / dx^s, \quad \text{где} \quad s = 0, 1. \quad (4)$$

Но

$$\operatorname{sh} t \le e^t, \quad e^t/2 \le \operatorname{ch} t \le e^t \quad \text{при} \quad t \ge 0. \quad (5)$$

Поэтому (5)

$$\alpha_i \operatorname{sh} \lambda_i (b/2 - |y|)/(\lambda_i^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_i) =$$
$$= b \operatorname{sh} \lambda_i (b/2 - |y|)/(2\lambda_i \operatorname{ch}^2 \alpha_i) \le 2b/\lambda_i e^{-\lambda_i (|y| + b/2)} \le 2b/\lambda_i e^{-\alpha_i}, \quad (6)$$

$$\lambda_i (b/2 - |y|)/(\lambda_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i) \operatorname{sh} \lambda_i |y| \le 2(b/2 - |y|)/\lambda_i e^{-\lambda_i (b/2 - |y|)}. \quad (7)$$

Далее исследуем функцию $f(c,t) = t \exp(-ct)$ при $c > 0$, $t \ge 0$ на экстремум. Дифференцируя $f(c,t)$ по t и приравнивая производную нулю, получаем $f'(c,t) = (1 - ct) \exp(-ct) = 0$, $f'(c, 1/c) = 0$, $f'(c,t) > 0$ ($f'(c,t) < 0$) при $0 \le t < 1/c$ ($t > 1/c$). Тогда $f_{\max}(c,t) = f(c, 1/c) = 1/(ec)$. Поэтому с учетом (6) получаем

$$\lambda_i (b/2 - |y|)/(\lambda_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i) \operatorname{sh} \lambda_i |y| \le 2/\lambda_i f(\lambda_i, b/2 - |y|) \le 2/(e\lambda_i^2). \quad (8)$$

Отсюда, с учетом (3), (4), (6) и (8) приходим к оценке

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} \left[E_i \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{\lambda_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i} (\alpha_i \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y - \lambda_i y \operatorname{sh} \lambda_i y) \cos \lambda_i x \right] \right| =$$
$$= |E_i| \left[\frac{b \operatorname{sh} \lambda_i (b/2 - |y|)}{2\lambda_i \operatorname{ch}^2 \alpha_i} + \frac{(b/2 - |y|) \operatorname{sh} \lambda_i |y|}{\lambda_i \operatorname{ch} \alpha_i} \right] \left| \frac{d^s \cos \lambda_i x}{dx^s} \right| \le \frac{2K}{m^{1/2}} \left(b e^{-\alpha_i} + \frac{1}{e\lambda_i} \right) \lambda_i^{s-1} =$$
$$= O(1/m^{5/2 - s}) \quad \text{при} \quad s = 0, 1. \quad (9)$$

Далее аналогично последовательно находим

$$\frac{d}{dy}(\alpha_i \operatorname{th}\alpha_i \operatorname{ch}\lambda_i y - \lambda_i y \operatorname{sh}\lambda_i y) = \left(\lambda_i\alpha_i \operatorname{th}\alpha_i \operatorname{sh}\lambda_i|y| - \lambda_i \operatorname{sh}\lambda_i|y| - \lambda_i^2|y|ch\lambda_i|y|\right)\operatorname{sgn}(y) =$$

$$= \left[-\lambda_i\alpha_i \operatorname{ch}\lambda_i(b/2-|y|)/\operatorname{ch}\alpha_i - \lambda_i \operatorname{sh}\lambda_i|y| + \lambda_i^2(b/2-|y|)\operatorname{ch}\lambda_i|y|\right]\operatorname{sgn}(y), \quad (10)$$

$$\lambda_i\alpha_i \operatorname{ch}\lambda_i(|y|-b/2)/(\lambda_i^2 \operatorname{ch}^2\alpha_i) \le 2be^{\lambda_i(b/2-|y|-b)} \le 2be^{-\alpha_i}, \quad (11)$$

$$\lambda_i/(\lambda_i^2 \operatorname{ch}\alpha_i)\operatorname{sh}\lambda_i|y| \le 2/\lambda_i e^{\lambda_i(|y|-b/2)} \le 2/\lambda_i, \quad (12)$$

$$\lambda_i^2(b/2-|y|)/(\lambda_i^2 \operatorname{ch}\alpha_i)\operatorname{ch}\lambda_i|y| \le 2(b/2-|y|)e^{\lambda_i(|y|-b/2)} = 2f(\lambda_i,(b/2-|y|)) \le 2/(e\lambda_i), \quad (13)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left[E_i\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{\lambda_i^2 \operatorname{ch}\alpha_i}(\alpha_i \operatorname{th}\alpha_i \operatorname{ch}\lambda_i y - \lambda_i y \operatorname{sh}\lambda_i y)\cos\lambda_i x\right]\right| \le$$

$$\le |E_i|\left[\frac{\alpha_i \operatorname{ch}\lambda_i(b/2-|y|)}{\lambda_i \operatorname{ch}^2\alpha_i} + \frac{\operatorname{sh}\lambda_i|y|}{\lambda_i \operatorname{ch}\alpha_i} + \frac{(b/2-|y|)\operatorname{ch}\lambda_i|y|}{\operatorname{ch}\alpha_i}\right] \le$$

$$\le \frac{2K}{i^{1/2}}\left[be^{-\alpha_i} + \left(1+\frac{1}{e}\right)\frac{1}{\lambda_i}\right] = O(1/i^{3/2}). \quad (14)$$

Значит, исходный первый ординарный ряд в (1) и ряды, полученные его формальным частным почленным дифференцированием по x или y, мажорируются числовыми сходящимися рядами, что приводит к их равномерной сходимости к непрерывным суммам [4, С. 431) и к почленной дифференцируемости исходного ряда по x или y в G [4, С. 435]. Аналогично с точностью обозначений доказывается непрерывность и непрерывная почленная дифференцируемость второго ординарного ряда.

Рассмотрим теперь повторный ряд

$$\sum_{i=1,3\ldots}^{\infty}\sum_{m=1,3\ldots}^{\infty}\frac{q_{im}}{(\lambda_i^2+\mu_m^2)^2}\frac{d^s\cos\lambda_i x}{dx^s}\cos\mu_m y, \quad \text{где} \quad (x,y)\in G, \quad s=0,1 \quad (15)$$

при двоякосимметричной нагрузке общего вида

$$q(x,y) = \overline{q}(x,y) + \sum_{n=1}^{N}P_n\sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2}\delta\left(x+(-1)^{k_1}\xi_n\right)\delta\left(y+(-1)^{k_2}\eta_n\right),$$
$$\text{где} \quad |\overline{q}(x,y)| \le q^* = \text{const}, \quad q^* > 0, \quad (16)$$

P_n — сосредоточенные силы. Тогда

$$|q_{im}| \le \frac{4}{ab}\left|\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} q(x,y)\cos\lambda_i x\cos\mu_m y\,dx\,dy\right| \le 4q^* + \frac{16}{ab}\sum_{n=1}^{N}|P_n| = K_2 = \text{const},$$
$$K_2 > 0. \quad (17)$$

Поэтому с учетом преобразованного неравенства Юнга [3]

$$\alpha^2+\beta^2 \ge C\alpha^\gamma\beta^{2-\gamma}, \quad \text{где} \quad 0\le\gamma\le 2, \quad \alpha,\beta\ge 0, \quad C>0 \text{ — некоторая константа}, \quad (18)$$

$$\left|\frac{d^s\cos\lambda_i x}{dx^s}\frac{q_{im}\cos\mu_m y}{(\lambda_i^2+\mu_m^2)^2}\right| \le \frac{K_2\lambda_i^s}{(\lambda_i^2+\mu_m^2)^2} \le \left(\frac{K_2}{C^2\lambda_i^{2\gamma-s}\mu_m^{4-2\gamma}}\right)\Bigg|_{\gamma=5/4} = \frac{K_2}{C^2\lambda_i^{2,5-s}\mu_m^{1,5}}, \quad (19)$$

$$\left|\frac{d^s\cos\lambda_i x}{dx^s}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{q_{im}\cos\mu_m y}{(\lambda_i^2+\mu_m^2)^2}\right| \le \frac{K_2}{C^2\lambda_i^{2,5-s}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^{1,5}} < \infty, \quad s=0,1, \quad (x,y)\in G. \quad (20)$$

Оценки (19), (20) показывает, что ординарный ряд в (15) при $s = 0{,}1$ с индексом суммирования m (i) мажорируется числовым сходящимся рядом. Тогда при $s = 0{,}1$ данные ряды сходятся равномерно, что приводит к сходимости в G к непрерывной сумме ряда с индексом m, а затем и ряда с индексом i [4, С. 431]. И далее к непрерывной частной поч-ленной дифференцируемости по x в G повторного ряда в (1) [4, С. 435].

Аналогично доказывается непрерывная частная дифференцируемость по y, если с учетом (19) при $s = 0$ прежде измененить порядок суммирования в ряде (15) [4, С. 393].

Следовательно [4, С. 67, 97], $\widetilde{w}(x, y) \in C[G]$, $\partial\widetilde{w}(x, y)/\partial x \in C[G]$, $\partial\widetilde{w}(x, y)/\partial y \in C[G]$.

1. *Тимошенко С. П.*, *Войновский–Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963. — 635 с.
2. *Сейранян С. П.* К решению задачи изгиба прямоугольной защемленной по контуру пластины методом С. П. Тимошенко // Материалы XXII Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4–13 сентября, Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2021. — С. 276–279.
3. *Сейранян С. П.* О сходимости тригонометрических рядов изгибающих моментов на защемленном контуре прямоугольной симметрично нагруженной пластины // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды VIII Международной конференции, Цахкадзор, РА, 1–5 октября, 2023. — С. 224–228.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — Т. I, II.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВЫРАЩИВАНИИ СЛОЯ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА

Г. П. Соколов, К. А. Чехонин

ДВГУПС, Хабаровск, Россия

В лазерном аддитивном производстве металлоизделий определение остаточных напряжений необходимо для достижения точности размеров выращиваемого изделия (коробление), предотвращения преждевременного усталостного его разрушения и расслоения. Поскольку на аддитивный процесс наращивания влияет более 70 параметров, экспериментальные исследования по определению остаточных напряжений требуют много времени и средств. Более того, экспериментальные измерения зависят от формы и размера изделия, уровня и эволюции измеренных напряжений, подготовки образцов к измерению и точности измерения методами рентгеновской или нейтронной дифракции. В этих условиях, математическое моделирование термомеханических процессов при затвердевании металла в технологиях аддитивного производства изделий имеет важное значение и является более информативным. Процесс аддитивного производства включает нагрев, плавление и затвердевание расплава в условиях движущегося лазерного источника энергии с послойным выращиванием изделия. В результате этого различные области заготовки подвергаются повторному нагреву и охлаждению. Пространственно-временные температурные циклы сопровождаются аккумуляцией введенного от лазерного источника тепла и развитию остаточных напряжений и деформаций приводящих к возможному образованию дефектов (трещины, расслоения, коробление и т. д.).

Однако и математическая формализация лазерного аддитивного наращивания сопряжена с большими трудностями. При затвердевании металла в нем протекают

сложнейшие физические, диффузионные, химические, металлургические и микроструктурные процессы. Процесс фазового перехода в материале сопровождается большими градиентами температур (до $G = 14$ град/мкм), которые определяют уровень и эволюцию технологических напряжений, возникающих в материале. Их уровень может превысить предел набранной прочности материала, что может привести к образованию микротрещин, вплоть до образования магистральных. Высокая скорость охлаждения (10^3–10^6 град/с) определяет формирующуюся морфологию и микроструктуру материала (например, размер и ориентацию зерен), а следовательно, и его физико-механические свойства.

Кроме этого, фазовый переход в металлах представляет собой сильный релаксационный процесс. Считается, что в интервале температур $\Delta T = (T_m - 0{,}8T_m)$ в окрестности температуры плавления T_m, в затвердевающем металле преобладают вязкоупругие свойства. В дальнейшем, в процессе охлаждения материала и микроструктурных изменений, его реологические свойства представляются в виде упруго-пластических моделей, с зависящими от температуры физико-механическими свойствами. С теоретической точки зрения, рассматриваемую задачу можно отнести к механике растущих тел. В этих условиях аналитическое решение рассматриваемой задачи удается получить в крайне упрощенных постановках.

В настоящей работе рассматривается быстропротекающий трехмерный процесс консолидации слоя алюминиевого сплава, сформированного с использованием прямой подачи полидисперсного порошка металла и энергии лазера при реализации аддитивной технологии. В основу математической модели положены уравнения равновесия с вязко-упругопластической реологической моделью и уравнение энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных потерь. Учитывается влияние температуры и фазового состояния среды на ее физико-механические и теплофизические свойства. Численное решение задачи производится методом конечных элементов с использованием адаптационного алгоритма построения сеточной области. Валидация математической модели и численного алгоритма проводилась путем сравнения с экспериментальными результатами. В ходе исследований обнаружен эффект «размягчения» механических свойств алюминиевого сплава, который учтен в математической модели путем введения дополнительного кинетического уравнения для эволюции дислокационной плотности в выращиваемом слое. Показано влияние технологических режимов (мощности лазера, скорости сканирования) и механизмов упрочнения и разупрочнения на эволюцию технологических напряжений в выращиваемом слое алюминиевого сплава.

УСТАНОВКА И СПОСОБ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ЭВОЛЮЦИИ ФОРМЫ СЕГМЕНТА ПРИ ЕГО МЕТАНИИ

М. Ю. Сотский, В. А. Велданов, Д. В. Гелин, В. И. Колпаков, Д. А. Лысов, В. А. Марков

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Физическое моделирование явлений, сопровождающихся пластическим деформированием материала метаемых сегментов, трансформацией их формы, предоставляет необходимые опытные данные для верификации расчетных программ виртуального моделирования рассматриваемых процессов. На XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам в 2023 г. нами были представлены результаты разработки

действующего образца исследовательской метательной установки и получаемые экспериментальные данные в области лабораторного изучения процесса формирования компактных ударников из сегментов, моделирующих метаемые детали реальных конструкций, на траектории их полета к мишени. На XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли в 2024 г. был представлен один из рассматриваемых нами вариантов виртуального моделирования этого сложного физического процесса. Экспериментальные данные использованы для верификации результатов моделирования. В настоящее время завершено положительно рассмотрение технических решений на патентоспособность [1, 2]. В данном докладе мы представляем конструктивные особенности разработанной установки, а также способ и технологию для метания тел малого удлинения. Частным случаем метания является вариант торцевого метания, при котором метаемый элемент размещается на дульном срезе ствола. Метательная установка [1] показана на рис. 1.

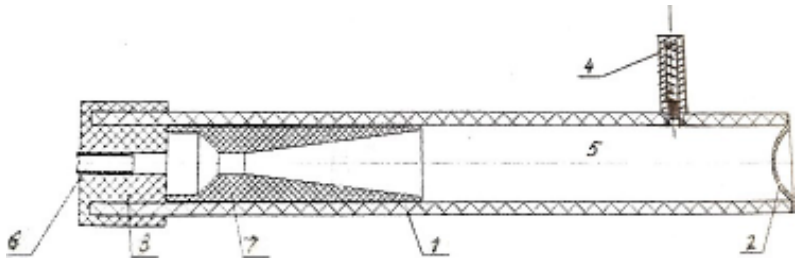


Рис. 1. Установка в варианте для метания элементов из пластически деформируемого материала (в сборе с корректором)

Донная часть ствола *1* скреплена с затворным узлом *3*. Конструкция клапана *4* показана на рисунке условно, принцип действия сравним с используемым в ниппеле для камерных шин. Дульная часть ствола может быть снабжена узлом закрепления метаемого объекта *2* (сегмента) с возможностью его разъединения со стволом. Внутри ствола, как и в прототипе (авторский патент RU 2619501), может быть размещена управляющая замкнутая оболочка, выполненная из эластичного материала и заполненная рабочим газом *5*. Внутренний объем ствола соединен через магистраль *6* и запорно-регулирующую аппаратуру с источником рабочего газа, выполненным в виде электролизера для получения рабочего газа в виде смеси кислорода и водорода. Запорно-регулирующая аппаратура содержит искровой разрядник. Функционирование установки обеспечивается управляющей аппаратурой. Эффективность при проведении серии опытов может быть повышена при исключении из конструкции установки управляющей оболочки, как отдельного конструктивного элемента. При этом, внутренний объем ствола ограничен тремя внутренними поверхностями: ствола, затворного узла и метаемого сегмента.

С целью обеспечения регулирования переходных процессов при передаче детонации из магистрали к рабочему газу в стволе, к затворному узлу может быть подведен и соединен с ним элемент ввода детонации из магистрали в метательный газовый объем. Частный случай исполнения элемента (в виде корректора *7*) представлен на рис. 1 в сборе с остальными конструктивными частями установки. Объективно, из анализа видеосъемки параметров фронта детонации при его перемещении по объему рабочего газа внутри ствола к метаемому сегменту, установлено, что плоский фронт детонации в газе формируется сразу при выходе из корректора и в неизменной форме подходит к метаемому сегменту. Плоскостность фронта обес-

печивает заданное опытом однообразное воздействие на сегмент и формирование ударника компактной формы в процессе перемещения сегмента к мишени. Действие и точность функционирования предлагаемой метательной установки были проверены в опытах при выполнении ствола из оптически прозрачного материала, поликарбоната. Высокоскоростной видеокамерой фиксировались на регистрациях особенности процессов внутренней баллистики, стадии воздействия газа на метаемый сегмент на этапе его ускорения и дальнейшего баллистического движения.

С применением представленных технических решений придается требуемая скорость метаемым телам (плоскостным элементам, объектам) дискообразной формы, толщина которых в направлении метания не превышает диаметра (поперечного размера) метаемого тела. В докладе показан конструктивный вариант действующего образца лабораторной исследовательской установки для проведения опытов, которые позволяют фиксировать динамику изменения формы модели метаемой облицовки (сегмента) различной начальной геометрии и геометрических соотношений. В частности, пологой полусферической формы. Полученные из опыта результаты были ранее представлены в докладах и сопоставлены с результатами виртуального моделирования. Начальные данные частных опытов воспроизведены в численном расчете, реализуемом в двумерной осесимметричной постановке, при этом подобраны константы уравнений состояния для сегмента из пластилина и для водородно-кислородной смеси.

Работа выполнена с использованием оборудования научно-учебного комплекса кафедры «Высокоточные летательные аппараты» МГТУ им. Н. Э. Баумана «Фундаментальные и прикладные исследования физики быстропротекающих процессов». Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры С. Г. Андрееву, А. А. Васекину, Н. Д. Гелину и выпускнику кафедры Ю. Д. Корягину за активное участие в разработке технических решений, реализации действующих образцов, проведении опытов и исследовании процесса с применением виртуального моделирования.

1. Патент RU 2835083 C2, F42B 99/00 Метательная установка и устройство ввода детонации / Велданов В. А., Гелин Д. В., Лысов Д. А., Колпаков В. И., Сотский М. Ю., по заявке о выдаче патента на изобретение №2022133914 от 22.12.2022. Опубликовано: 21.02.2025 Бюл. №6.
2. Патент RU 2835614 C2, F41F 1/00 Способ метания элементов / Велданов В. А., Гелин Д. В., Лысов Д. А., Колпаков В. И., Сотский М. Ю., по заявке о выдаче патента на изобретение №2022133920 от 22.12.2022. Опубликовано: 03.03.2025 Бюл. №7.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОЛЗУЧЕСТИ В УПЛОТНИТЕЛЬНОМ УЗЛЕ ПРЕМИАЛЬНОГО РЕЗЬБОВОГО СОЕДИНЕНИЯ

К. С. Стрелков

ИПМех РАН, Москва, Россия

1. Введение. Резьбовые соединения класса «Премиум» выполняют важную функцию при добыче углеводородов, сохраняя конструкционную целостность, прочность и герметичность скважины в сложных условиях эксплуатации. В некоторых случаях, к примеру, добычи вязкой нефти, резьбовые соединения эксплуатируются в условиях повышенных температур, при которых может проявляться эффект ползучести, который в свою очередь приводит к релаксации контактных давлений и потере герметичности уплотнительного узла соединения [1, 2].

На рис. 1 представлено продольное сечение отечественного премиального резьбового соединения ОМК VEGA [3].

Герметичность в соединении такого типа достигается за счет контактных давлений, возникающих при сборке вследствие радиального натяга, в основном — по уплотнительным поверхностям. В связи с тем, что герметичность соединения полностью определяется распределением контактных давлений. Для оценки герметичности в условиях ползучести необходима разработка расчетной модели, которая позволить определить взаимосвязь между распределениями контактных давлений в начальный и в любой другой момент времени.

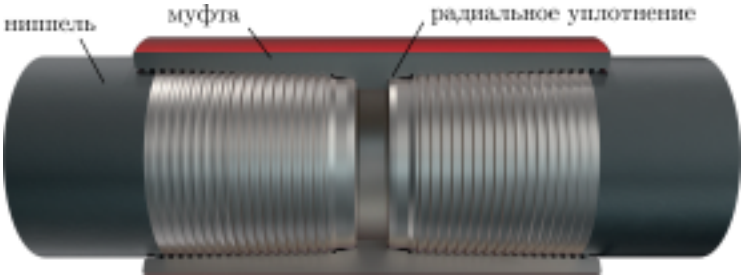


Рис. 1. Схема премиального резьбового соединения ОМК VEGA

2. Начальное распределение контактного давления. Начальный закон распределения контактного давления может быть определен на основе теории Герца [4] при использовании ширины контактной зоны из известного значения момента свинчивания [5]:

$$p(x,0)=\frac{E^*}{2R_s}\sqrt{w_s^2-x^2},\quad R_s=\frac{R_{s1}R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}},\quad E^*=\frac{E}{2(1-\mu^2)},\tag{1}$$

где R_s — эквивалентный радиус контактной области, R_{s1} — радиус сферы на уплотнительной поверхности ниппеля, R_{s2} — радиус сферы на уплотнительной поверхности муфты, w_s — полуширина контактной зоны, E^* — эквивалентный модуль упругости, используемый в плоских задачах теории упругости в случае одинаковых материалов контактирующих тел, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

3. Прогибы ниппеля. Ниппель под действием контактного давления за счет радиального натяга с муфтой без учета контакта резьбы и упорного торца в первом приближении можно представить как цилиндрическую оболочку, нагруженную на конце радиальной силой, распределенной по окружности у торца оболочки, а также внутренним давлением газа. Решение для прогибов может быть получено суперпозицией двух задач [6]:

— действие краевой радиальной нагрузки: $v_1(x)=-[P/(2D\beta^3)]e^{-\beta x}\cos\beta x$, где давление в контактной зоне заменено на радиальное сосредоточенное усилие $P=\int_{-w_s}^{w_s}p(x)\,dx$, при этом коэффициент затухания перемещений $\beta=\sqrt[4]{3(1-\mu^2)/(R^2h^2)}$ и цилиндрическая жесткость $D=Eh^3/[12(1-\mu^2)]$;

— действие внутреннего давления q: $v_2=qR^2/(Eh)$.

Было установлено, что полученное аналитическое решение хорошо согласуется с численным решением, полученном в конечно-элементном пакете ANSYS при помощи моделирования сборки с натягом резьбового соединения в осесимметричной постановке.

4. Релаксация контактных давлений вследствие ползучести. Окружные напряжения в оболочке можно выразить через прогибы следующим образом [7]:

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{v(x)}{R} + \mu\delta\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right] = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{qR}{Eh} - \frac{Pe^{-\beta x}}{D\beta}\left(\frac{\cos\beta x}{2\beta^2 R} + \delta\mu\sin\beta x\right)\right], \quad (2)$$

где δ — расстояние от срединной поверхности ниппеля до поверхности уплотнения. Представим общую формулу для окружной деформации ползучести для ниппеля исходя из широко используемой степенной зависимости [8]:

$$\varepsilon_n t = \frac{\sigma_n^n}{(n-1)E}\left(\frac{1}{\sigma_t^{n-1}} - \frac{1}{\sigma_{t0}^{n-1}}\right), \quad (3)$$

где ε_n — постоянная (обычно принимаемая 10^{-4}); σ_n, n — постоянные, определяемая из данных испытаний на ползучесть; σ_{t0} — окружное напряжение в начальный момент времени; σ_t — окружное напряжение по истечении времени t. Выразим окружное напряжение по истечении времени t следующим образом:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{t0}}{k}, \quad (4)$$

где k — коэффициент релаксации окружных напряжений. Из (4) выразим коэффициент релаксации окружных напряжений:

$$k = \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)E\sigma_{t0}^{n-1}\varepsilon_n t}{\sigma_n^n} + 1}. \quad (5)$$

Таким образом, определив коэффициент релаксации окружных напряжений из выражения (5), можно провести оценку падения контактных давлений в уплотнительном узле, учитывая, что исходя из выражения (2), окружное напряжение прямо пропорционально усилию от радиального натяга P. В свою очередь, усилие от радиального натяга связано с распределением контактных давлений и с полушириной контактной зоны.

1. *Zhang Y.*, *Lian Z.*, *Zhou M.*, *Lin T.* Viscoelastic behavior of a casing material and its utilization in premium connections in high-temperature gas wells // Advances in Mechanical Engineering. — 2018. — V. 10(12). — P. 1–8.
2. *Стрелков К. С.*, *Попов А. Л.* Влияние ползучести на герметичность резьбовых соединений класса «Премиум» // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. — Воронеж, 2024. — С. 687–694.
3. *Никифоров Д. В.*, *Стрелков К. С.* Резьбовое соединение трубных изделий нефтепромыслового сортамента. Патент на изобретение №2767871, 2021.
4. *Xie J.* FEA Modeling for Thermal Well Casing Connection Evaluation Programs // Science in the Age of Experience. — P. 10–11.
5. *Стрелков К. С.*, *Попов А. Л.* Определение контактного давления на уплотнительной поверхности премиальных резьбовых соединений при помощи аналитических моделей // Материалы XII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (17–19 сентября 2024 г., Самара, Россия). — Самара: СамГТУ, 2024. — С. 1-х.
6. *Тимошенко С. П.*, *Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
7. *Билык С. Ф.* Герметичность и прочность конических резьбовых соединений труб нефтяного сортамента. — М.: Недра, 1981. — 352 с.
8. *Работнов Ю. Н.*, *Милейко С. Т.* Кратковременная ползучесть. — М.: Наука, 1970. — 222 с.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ УДАРНЫХ СПЕКТРОВ

В. А. Терешин

СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Для воспроизведения требуемых ударных спектров необходимы предварительные динамические расчеты испытательных стендов. Выполнение таких расчетов осуществляется с помощью программ, предназначенных для решения задач механики деформируемого твердого тела [1]. В работе исследуется возможность получения простых аналитических зависимостей, позволяющих с не слишком большими ошибками быстро подобрать параметры стенда [5]. Из всего многообразия ударных стендов ограничимся схемами, в которых стол с испытуемым изделием ударяет по станине через достаточно жесткую прокладку [2, 4]. В работе не рассматриваются медленные процессы, обусловленные амортизаторами и прокладками, формирующими ударный импульс. Исследования показали, что амплитуды ускорений при ударе приборного стола о станину превосходят амплитуды при ударе бойка по столу. Следовательно, в качестве начального условия для расчетов можно принять движение стола как твердого тела с уже приобретенной скоростью вне зависимости от способа разгона. Из вышесказанного следует, что для описания интересующих нас динамических процессов с достаточной точностью можно рассмотреть падающие и отраженные продольные волны, возникающие в системе «приборный стол — станина».

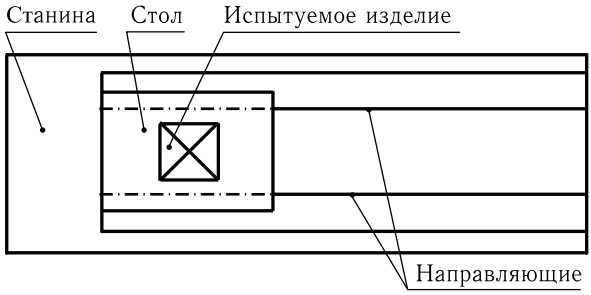


Рис. 1. Схема ударного стенда

Рассмотрим схему ударного стенда, показанную на рис. 1, в момент, когда стол касается станины. При этом динамическая модель стенда может быть представима в виде единого твердого тела, состоящего из двух однородных участков, характеризуемых основными параметрами приборного стола и станины. Соединение стола со станиной полагается абсолютно жестким и невесомым. Для описания продольных колебаний этой системы воспользуемся волновым уравнением

$$\ddot{u}(x,t) \quad = a^2 u''(x,t) \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{gathered} u'(0,t) = 0; \quad u'(l_1 + l_2, t) = 0; \quad u(l_1 - 0) = -u(l_1 + 0); \\ u(x,0) = 0; \quad \dot{u}(x,0) = v[\Phi(x) - \Phi(x - l_1)], \end{gathered} \tag{2}$$

где x — кусочно-линейная координата поперечных сечений составного стержня, определенная на интервале $[0; l_1 + l_2]$; l_1 и l_2 — длины приборного стола и станины соответственно; t — время; u — продольное перемещение сечения; $a = \sqrt{E/\rho}$ —

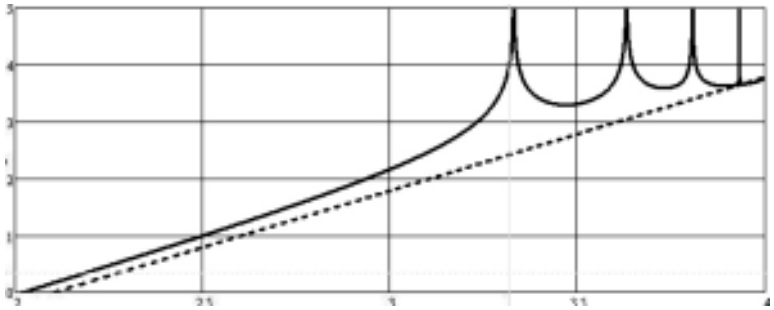


Рис. 2. Ударный спектр

скорость распространения волны; E и ρ — модуль нормальной упругости и плотность материала; F — площадь поперечного сечения стержня; v — начальная скорость стола; Φ — функция Хевисайда; точка и штрих обозначают частные производные по времени и координате; нижние индексы относятся к столу и станине. Очевидно, что рассматриваемая система эквивалентна прямому двухступенчатому стержню со свободными концами. Его частотное уравнение [3]

$$\frac{E_1F_1a_2}{E_2F_2a_1} = -\frac{\operatorname{tg}(kl_2/a_2)}{\operatorname{tg}(kl_1/a_1)} \tag{3}$$

в возможном диапазоне параметров исследуемых конструкций ударных стендов имеет решения, отличающиеся от случая однородного стержня постоянного сечения,

$$k_n = \frac{\pi a}{l_1 + l_2}n \tag{4}$$

не более чем на 10%. Перемещение середины стола при этом можно представить в виде

$$u\left(\frac{l_1}{2}; t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2va\sin(k_nl_1/a)\cos(k_nl_1/2a)\sin(k_nt)}{k_n^2(l_1 + l_2)}. \tag{5}$$

Для определения ударного спектра запишем ускорение условного осциллятора с собственной частотой ω, установленного в этом месте

$$\ddot{y}(t) = 2va\frac{\omega^2}{l_1 + l_2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(k_nl_1/a)\cos(k_nl_1/2a)[\omega\sin(\omega t) - k_n\sin(k_nt)]}{k_n(\omega^2 - k_n^2)}. \tag{6}$$

Под ударным спектром понимается следующее выражение [4, 5]

$$S(\omega) = \lg\{\max_t[\ddot{y}(t)]\}, \tag{7}$$

измеряемое в единицах «g». Воспользуемся оценкой сверху ускорения (6) и ограничимся несколькими слагаемыми ряда. На рис. 2 показана зависимость

$$S(\omega) = \lg\left\{\frac{2va\omega^2}{g(l_1 + l_2)}\sum_{n=0}^{7} \frac{\sin(k_nl_1/a)\cos k_nl_1/2a)}{k_n|\omega - k_n|}\right\} \tag{8}$$

сплошной линией как функция логарифма частоты ω (Гц) при следующих параметрах стенда: $a = 6400$ м/с, $v = 0{,}5$ м/с, $l_1 = 0{,}36$ м, $l_2 = 1{,}14$ м. Заметим, что учет только первого слагаемого, причем для низких частот осциллятора, дает

неплохую аппроксимацию $\overline{S}(\omega)$ функции (8) в требуемом диапазоне частот от 10 до 10000 Гц [4]

$$\overline{S}(\omega) = \lg\left\{\frac{2va\omega^2 \sin(k_1 l_1/a)\cos(k_1 l_1/2a)}{g(l_1+l_2)k_1^2}\right\}, \qquad (9)$$

изображенную штриховой линией на рис. 2.

Расчеты, показали возможность приближенного определения параметров испытательного оборудования для формирования требуемого ударного спектра на основе простой аналитической зависимости.

1. *Беляев А. К. и др.* Параметрические резонансы в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // Вестник СПбГУ. Сер. 1. — 2016. — Т. 3(61), Вып. 1. — С. 77–94.
2. *Манжосов В. К.* Модели продольного удара. — Ульяновск: УлГТУ, 2006. — 160 с.
3. *Смирнов А. С.* Продольные колебания стержней: Учеб. пособ. — СПб.: Политех-Пресс, 2023. — 370 с.
4. ГОСТ Р 51371-99. Методы испытаний на стойкость к механическим внешним воздействующим факторам машин, приборов и других технических изделий. Испытания на воздействие ударов. — М., 2000. — 24 с.
5. *Tereshin V.* Shock response spectra as a result of linear interactions. Part F5 // In book: Advances in Mechanical Engineering. — Springer, 2020. — P. 151–161. — DOI: 10.1007/978-3-319-72929-9_16.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНЫХ МЕТОДИК НА БАЗЕ ЯВНЫХ И НЕЯВНЫХ СХЕМ

В. В. Трофимов, Д. Т. Чекмарев

ННГУ, Нижний Новгород, Россия

Для моделирования нестационарных процессов в упругих средах часто используют МКЭ. Выбор шага явной схемы по времени ограничен сверху (критерий Куранта–Фридрихса–Леви) и снизу (погрешность исходных данных), явная схема является условно устойчивой. С другой стороны, неявные схемы безусловно устойчивы, но их использование сопряженно с большими вычислительными затратами на каждом шаге по времени из-за необходимости решения системы уравнений, в общем случае нелинейных. Поэтому, исследование схем, имеющих преимущества обоих схем, сочетающих устойчивость неявных схем и скорость явных, является актуальной задачей.

Явные схемы удобны при решении задач быстрой динамики, с высокими частотами. Для медленной динамики более эффективны неявные методы. В некоторых задачах, в которых сочетаются низкочастотные вибрации и ударные импульсы, необходима гибридная схема: низкочастотные колебания требуют неявной схемы (большой шаг по времени, устойчивость), высокочастотная часть требует явной схемы (малый шаг по времени, как следствие теоремы Котельникова). Чисто явная или неявная схема приведет к потере точности или чересчур долгим расчетам. Хотелось бы, чтобы расчетчик автоматически переключался между схемами при необходимости. Методы и критерии переключения проанализированы в [1, 2].

Также, кроме нагрузок имеют значение и зоны, в которых ведется расчет. Например, стыки разных материалов, отверстия и вырезы, жесткие включения, которые являются концентраторами напряжения, требуют более подробной сетки

и, как следствие, абсолютно устойчивой неявной схемы. Но такой расчет в остальной области, построенной на более грубой сетке, будет нерациональной тратой машинного времени. В разных областях должны применяться разные схемы, на границе областей проводится согласование в сильной или слабой форме. Возможно различие и во временных шагах, то есть определяются «главные» зоны, в которых интегрирование производится с наибольшим стабильным шагом, остальные зоны интегрируются кратно меньшими шагами, то есть субциклами. Селективное субциклирование также крайне полезно для композитных материалов, когда использование чисто неявной схемы слишком трудозатратно [3, 4].

1. *Куриэль-Соса Х. Л.*, *де Соуза Нето Э. А.*, *Оуэн Д. Р. Дж.* Комбинированный неявно-явный алгоритм для нелинейного конечно-элементного анализа во временной области // Communications in Numerical Methods in Engineering. — 2005. — Т. 22, №1. — С. 63–75.
2. *Куриэль-Соса Х. Л.*, *Бег О. А.*, *Мурильо Х. М. Л.* Конечно-элементный анализ структурной неустойчивости с использованием техники переключения между неявной и явной схемами // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. — 2013. — Т. 14, №5. — С. 452–464.
3. *Соарес Д.*, *Салес И. д. С.*, *Пинто Л. Р.*, *Мансур В. Дж.* Исследование адаптивных процедур временного интегрирования для анализа распространения волн // Acoustics. — 2024. — Т. 6, №3. — С. 651–680.
4. *Ву Я.-С.*, *У Я.-С.*, *Смолински П.* Алгоритм многошагового интегрирования для динамики конструкций на основе модифицированного правила трапеций // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2000. — Т. 187, №3–4. — С. 641–660.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКТИВНО АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

Т. А. Хан, Л. М. Гавва, В. В. Фирсанов

МАИ, Москва, Россия

Весовое совершенствование авиационных конструкций связано с использованием конструктивно анизотропных панелей из композиционных материалов в самолетостроении, приводит к необходимости развития уточненных методов для оценки напряженно-деформированного состояния и устойчивости на этапе проектирования. Новые уточненные расчетные модели являются базисом оптимального проектирования легких элементов авиационной техники.

Рассматриваются задачи устойчивости для прямоугольной плоской слоистой панели средней и большой толщины из полимерных композиционных материалов, обладающей анизотропией вследствие несимметричной схемы укладки слоев пакета. Панели находятся под действием распределенных нагрузок, приложенных к кромкам в плоскости обшивки.

Цель работы — постановка задач статики, моделирование устойчивости конструктивно анизотропных панелей средней и большой толщины из композиционных материалов с учетом деформаций поперечного сдвига в рамках нового разрешающего дифференциального уравнения в частных производных десятого порядка (1). Для композитной панели ортотропной структуры в составе линейного дифференциального оператора уравнения содержатся производные четного порядка

по каждой из координат. Постоянные коэффициенты уравнения определяются геометрическими параметрами панели и механическими характеристиками материала конструкции. Модули сдвига полимерного композита в вертикальных плоскостях $x0z$ и $y0z$ одинаковы.

Разрешающее уравнение десятого порядка сформировано с использованием метода символического интегрирования системы пяти дифференциальных уравнений равновесия панели по уточненной модели с учетом деформаций поперечного сдвига в плоскостях $x0z$ и $y0z$,которыми пренебрегают при расчете тонкостенных обшивок.

Для ортотропной панели средней и большой толщины решение задачи устойчивости осуществляется в рамках общего дифференциального уравнения устойчивости десятого порядка (1), построенного на основе дифференциального уравнения равновесия с учетом приведенной нагрузки от действия нормальных и тангенциальных усилий [1]:

$$\left\{K_{10,0}\frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + K_{8,2}\frac{\partial^{10}}{\partial x^{8}\partial y^{2}} + K_{6,4}\frac{\partial^{10}}{\partial x^{6}\partial y^{4}} + K_{4,6}\frac{\partial^{10}}{\partial x^{4}\partial y^{6}} + K_{2,8}\frac{\partial^{10}}{\partial x^{2}\partial y^{8}} + K_{0,10}\frac{\partial^{10}}{\partial y^{10}} + \right.$$
$$+ K_{8,0}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{8}} + K_{6,2}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{6}\partial y^{2}} + K_{4,4}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{4}\partial y^{4}} + K_{2,6}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{2}\partial y^{6}} + K_{0,8}\frac{\partial^{8}}{\partial y^{8}} + K_{6,0}\frac{\partial^{6}}{\partial x^{6}} + K_{4,2}\frac{\partial^{6}}{\partial x^{4}\partial y^{2}} +$$
$$\left. + K_{2,4}\frac{\partial^{6}}{\partial x^{2}\partial y^{4}} + K_{0,6}\frac{\partial^{6}}{\partial y^{6}}\right\}\Phi(x,y) = N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (N_{xy} + N_{yx})\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Кривизны панели определяются прогибом

$$w = \left\{W_{80}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{8}} + W_{62}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{6}\partial y^{2}} + W_{44}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{4}\partial y^{4}} + W_{26}\frac{\partial^{8}}{\partial x^{2}\partial y^{6}} + W_{08}\frac{\partial^{8}}{\partial y^{8}} + W_{60}\frac{\partial^{6}}{\partial x^{6}} + \right.$$
$$\left. + W_{42}\frac{\partial^{6}}{\partial x^{4}\partial y^{2}} + W_{24}\frac{\partial^{6}}{\partial x^{2}\partial y^{4}} + W_{06}\frac{\partial^{6}}{\partial y^{6}} + W_{40}\frac{\partial^{4}}{\partial x^{4}} + W_{22}\frac{\partial^{4}}{\partial x^{2}\partial y^{2}} + W_{04}\frac{\partial^{4}}{\partial y^{4}}\right\}\Phi(x,y). \quad (2)$$

Решение линеаризованных задач на собственные значения в замкнутом виде выполнено в двойных тригонометрических рядах для частного случая согласованных граничных условий по контуру. Решение строится точными аналитическими методами.

Составлены прикладные программы на языке операционной среды MATLAB. Проанализированы критические усилия изгибной формы потери устойчивости углепластиковых обшивок в сечениях по размаху крыла для различных схем укладки слоев в пакете.

В качестве примера представлены результаты оценки границ применимости теории деформаций поперечного сдвига первого порядка и теории тонких пластин для сжатых в продольном направлении плоских прямоугольных обшивок из углепластика при изменении порядка укладки продольных, косых и поперечных слоев пакета.

Исследованы задачи устойчивости обшивки из углепластика с семислойным пакетом $0/+45/-45/90/0/90/0$, коэффициент сдвига принят равным $2/3$, H — толщина обшивки, b — ширина панели.

Зафиксировано расхождение результатов расчетов по сравнению с классической теорией слоистых панелей:

— 1, 2% ($H = 7{,}28$ мм, $b/H = 41$); для тонких обшивок с толщиной до $H = 7{,}28$ мм, $b/H = 41$ применима теория, построенная в рамках классических гипотез;

— 7, 4% ($H = 18{,}20$ мм, $b/H = 16$); для обшивок средней толщины от $H = 7{,}28$ мм, $b/H = 41$ до $H = 18{,}20$ мм, $b/H = 16$ необходимо использовать теорию деформаций поперечного сдвига.

При оптимальном проектировании панелей вблизи бортовой нервюры, когда толщина обшивки превышает $H = 18{,}20$ мм, $b/H = 16$, ограничения на целевую функцию веса необходимо вводить по прочности на сжатие, так как средние по пакету критические напряжения соответствуют высоким запасам по устойчивости.

Исследованы задачи устойчивости обшивки из углепластика с семислойными пакетами +45/−45/0/0/90/+45/−45, +45/−45/0/90/90/+45/−45. Коэффициенты сдвига приняты равными 1,0 и 2/3. Зафиксировано расхождение результатов расчетов по сравнению с классической теорией слоистых панелей.

Выполнена оценка границ применимости теории деформаций поперечного сдвига первого порядка и теории тонких пластин для сжатых в продольном направлении плоских прямоугольных обшивок из углепластика при варьировании толщин монослоев, углов укладки косых слоев в пакете и схем укладки. Оценка границ применимости теорий предназначена для построения аналитических ограничений по устойчивости при проектировании конструктивно анизотропных композитных обшивок.

Постановка задач исследования устойчивости, предлагаемые аналитические подходы к решению являются новыми разработками [1], отличаются от известных моделей [2], ранее предложенных моделей [3] и представляют интерес с точки зрения практики проектирования панелей из современных композиционных материалов для перспективных изделий авиационной техники.

1. *Корольский В. В.*, *Гавва Л. М.*, *Фирсанов В. В.* Ограничения по устойчивости для оптимального проектирования конструктивно анизотропных обшивок летательных аппаратов средней и большой толщины из композиционных материалов // Конструкции из композиционных материалов. — 2024. — №3. — С. 23–31.
2. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis. — London, NY, Washington, D.C.: CRC Press, 2004. — 855 p.
3. *Гавва Л. М.*, *Фирсанов В. В.* Математические модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия РАН. МТТ. — 2020. — №3. — С. 122–133.
Gavva L. M., *Firsanov V. V.* Mathematical Models and Methods for Calculating the Stress–Strain State of Aircraft Panels from Composite Materials Taking into Account the Production Technology // Mechanics of Solids (Springer). — 2020. — No. 3. — P. 603–612.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГОГО ТЕЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ*

Н. В. Чертова

ИФПМ СО РАН, Томск, Россия

Границы раздела твердого тела с жидкостью широко представлены в природе, живых организмах и технике. Указанные границы являются характерной особенностью геологических сред, пористых и трещиноватых флюидонасыщенных мате-

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН (тема номер FWRW-2021-0002).

риалов, костной ткани и многих конструкций энергетического, технологического и другого оборудования, упругие элементов которых эксплуатируются в условиях погружение в жидкость [1, 2]. Многочисленные исследования показывают, что границы раздела оказывают существенное влияние на процессы деформации и разрушения твердых тел [3, 4].

Напряженно-деформированное состояние на границе раздела можно изучать, рассматривая задачу прохождения плоской гармонической волны через границу раздела [5]. При решении этой задачи находятся коэффициенты отражения и преломления, которые позволяют определить амплитуды деформаций на границе. Таким образом, было исследовано деформированное состояние на свободной поверхности упругого тела [6], на границе раздела двух упругих тел при условиях идеального контакта и скольжения [7] и на границе упругого тела с идеальной жидкостью [8]. В настоящей работе рассматриваются закономерности поведения волн и деформаций на границе контакта упругого тела с вязкой жидкостью.

В жидкости с малой вязкостью, ограничившись приближением, что поглощенная звуковая энергия слабо меняет состояние среды и, несмотря на диссипативные процессы, среда остается в состоянии равновесия, распространение продольных и поперечных волн определяется волновыми векторами [9]

$$k_l = \frac{\omega\sqrt{1+i\omega b/(C_0^2\rho_0)}}{C_0} = \frac{\omega[1+i\omega b/(2C_0^2\rho_0)]}{C_0}, \quad k_t = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}}. \tag{1}$$

Здесь C_0 — скорость звуковой волны в жидкости; ρ_0 — плотность; ω — частота; η, ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, определяющие параметр $b = \zeta + 4\eta/3$. Выражение для волнового вектора продольной волны k_l получено при условии $\omega b/(C_0^2\rho_0) \ll 1$. В случае идеального контакта твердого тела и жидкости (прилипания) на границе выполняются равенства

$$V_z^s = v_z, \quad V_y^s = v_y, \quad \sigma_{zz}^s = \sigma_{zz}^f, \quad \sigma_{zy}^s = \sigma_{zy}^f, \tag{2}$$

где v_i, V_i^s — компоненты скорости жидкости и упругого тела; σ_{ij}^s, σ_{ij}^f — компоненты упругих напряжений твердого тела и жидкости. Используя выражения для падающей и отраженных волн упруго тела и преломленных волн в жидкости определим смещения, скорости и напряжения в контактирующих телах. Подставив соответствующие величины в граничные условия (2), получим системы уравнений для коэффициентов Френеля и законы отражения и преломления, которые в случае падающей продольной волны примут

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_l^- & \sin\theta_t^- & \cos\theta_l^+ & -\sin\theta_t^+ \\ \sin\theta_l^- & -\cos\theta_t^- & -\sin\theta_l^+ & -\cos\theta_t^+ \\ \sin 2\theta_l^- & \dfrac{-\cos\theta_t^-}{c} & -i2t\rho(s/c)^2\sin\theta_l^-\cos\theta_l^+ & (1-i)\dfrac{s\rho}{c^2}\cos 2\theta_t^+ \\ \cos 2\theta_t^- & c\sin 2\theta_t^- & 2\rho s(i-t_0)(t_0 - t\sin\theta_l^{+2}) - s\rho & -i2t\rho s^2\sin\theta_l^-\cos\theta_t^+ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{ll} \\ R_{tl} \\ T_{ll} \\ T_{tl} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_l^0 \\ -\sin\theta_l^0 \\ \sin 2\theta_l^0 \\ -\cos 2\theta_t^- \end{vmatrix},$$

$$\theta_l^- = \theta_l^0, \quad k_t^-\sin\theta_t^- = k_l^0\sin\theta_l^0, \quad k_l^+\sin\theta_l^+ = k_l^0\sin\theta_l^0, \quad k_t^+\sin\theta_t^+ = k_l^0\sin\theta_l^0. \tag{3}$$

Здесь $s = C_0/C_l$, $\rho = \rho_0/\rho_s$ — отношения продольных скоростей и плотностей жидкости и упругого тела; $c = C_t/C_l$ — отношение скоростей твердого тела; $t = \omega\eta/(\rho_0 C_0^2)$ — безразмерное время релаксации, обусловленное сдвиговой вязкостью жидкости; $t_0 = (t_v + 4t/3)/2$ — время релаксации, учитывающее вязкость

при сдвиге и объемных изменениях; θ_l^0 — угол падения P-волны на границу раздела, совпадающую с плоскостью $z = 0$, в плоскости zy декартовой системы координат; $\theta_{l(t)}^-$, $k_{l(t)}^-$ — углы отражения и волновые вектора отраженных P- и SV-волн; $\theta_{l(t)}^+$, $k_{l(t)}^+$ — углы преломления и волновые вектора преломленных волн. Для падающей волны сдвига система уравнений с матрицей коэффициентов (3) позволяет определить коэффициенты Френеля $|R_{lt}\ R_{tt}\ T_{lt}\ T_{tt}|^T$ при свободных членах уравнений $|-\sin\theta_t^0\ \ -\cos\theta_t^0\ \ \cos(2\theta_t^0)/c\ \ \sin(2\theta_t^0)c|^T$, где $R_{l(t)t} = A_{l(t)}^-/A_t^0$, $T_{l(t)t} = (iA_{l(t)}^+/\omega)/A_t^0$, верхний индекс T обозначает трансформирование. Законы отражения и преломления для падающей SV-волны запишутся в виде

$$\theta_t^- = \theta_t^0, \quad k_t^- \sin\theta_t^- = k_t^0 \sin\theta_t^0, \quad k_l^+ \sin\theta_l^+ = k_t^0 \sin\theta_t^0, \quad k_t^+ \sin\theta_t^+ = k_t^0 \sin\theta_t^0. \quad (4)$$

Выражения для смещений на границе раздела позволяют записать деформации в упругом теле $\varepsilon_{in}^s = E_{in}^+ A$ и жидкости $\varepsilon_{in}^f = E_{in}^- A$ через соответствующие амплитуды деформаций и безразмерной множитель, которые в случае падающей P-волны имеют вид: $A = ik_l^0 A_l^0 \exp(ik_l^0 \sin\theta_l^0 y)$

$$\begin{aligned}
E_{zz}^- &= (1 + R_{ll})(\cos\theta_l^0)^2 + R_{tl}\frac{\sin(2\theta_t^-)}{2c}, \quad E_{zz}^+ = \frac{k_l^+}{k_l^-} T_{ll}(\cos\theta_l^+)^2 - T_{lt}\frac{\sin(2\theta_t^+)k_t^+}{2k_l^-},\\
E_{yy}^- &= (1 + R_{ll})(\sin\theta_l^0)^2 - R_{tl}\frac{\sin(2\theta_t^-)}{2c}, \quad E_{yy}^+ = \frac{k_l^+}{k_l^-} T_{ll}(\sin\theta_l^+)^2 + T_{lt}\frac{\sin(2\theta_t^+)k_t^+}{2k_l^-},\\
E_{zy}^- &= (1 - R_{ll})\frac{\sin(2\theta_l^0)}{2} + R_{tl}\frac{\cos(2\theta_t^-)}{2c}, \quad E_{yy}^+ = \frac{k_l^+}{k_l^- T_{ll}}\frac{\sin(2\theta_l^+)}{2} + T_{lt}\frac{\cos(2\theta_t^+)k_t^+}{2k_l^-},\\
W_{zy}^- &= R_{tl}/2c, \qquad W_{yy}^+ = T_{lt}k_t^+/2k_l^-.
\end{aligned} \quad (5)$$

Аналитические решения систем уравнений для коэффициентов отражения и преломления, полученные с помощью пакета Math 4.0, были использованы для построения их зависимостей и зависимостей компонент деформаций от угла падения волны при различных параметрах контактирующих тел. На основе полученных результатов определены деформационные моды на границе раздела в упругом теле и вязкой жидкости. Проанализировано влияние упругих параметров задачи s, ρ, c и коэффициентов вязкости t, t_0 на исследуемые зависимости коэффициентов Френеля и амплитуд деформаций.

1. *Dongare A. M.*, *Rajendran A. M.*, *Namburu R. et al.* // J. Mater. Sci. — 2018. — V. 53, is. 9. — P. 5511–5514.
2. *Смолин А. Ю.*, *Еремина Г. М.* // Изв. Вузов. Физика. — 2020. — Т. 63, №9. — С. 80–85.
3. *Zho Q.*, *Huang P.*, *Liu M.*, *Wang F. et al.* // J. Alloy. Compd. — 2017. — V. 698. — P. 906–912.
4. *Golovnev I. E.*, *Golovneva E. I.*, *Fomin V. M.* // Phys. Mesomech. — 2021. — V. 24(1). — P. 14–19.
5. *Ландау Л. Д.* Теория упругости. Т. VII. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
6. *Чертова Н. В.* // Письма в ЖТФ. — 2015. — Т. 41, Вып. 22. — С. 15–24.
7. *Chertova N. V.*, *Grinyaev Yu. V.* // Phys. Mesomech. — 2022. — V. 25(4). — P. 353–365.
8. *Chertova N. V.*, *Grinyaev Y. V.* // Russ. Phys. J. — 2023. — V. 66(9). — P. 95–102.
9. *Виноградов М. Б.*, *Руденко О. В.*, *Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1990. — 432 с.

АНАЛИЗ ДИАГРАММЫ НАПРЯЖЕНИЕ–ДЕФОРМАЦИЯ ДЛЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ*

С. В. Шешенин, П. Д. Клементьев, Н. Б. Артамонова

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Теории пластичности, основанные на единой зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций (диаграмма σ_{eqv}–ε_{eqv}), иногда называются классическими. Зависимость напряжений только от второго инварианта девиатора деформаций может не выполняться для ряда материалов, содержащих поры и другие дефекты структуры, что приводит к зависимости свойств этих материалов от вида напряженного состояния. В нашей работе вид напряженного или деформированного состояния определяется первыми двумя инвариантами. Целью является определение зависимости кривой интенсивности напряжений от интенсивности деформаций от первого инварианта и пути нагружения в пространстве первых двух инвариантов. Применяемый подход заключается в явном расчете на мезоуровне (уровне структуры материала), последующем осреднении напряжений и деформаций и получении кривой на макроуровне. Рассматриваются малые деформации. В линейной теории упругости существует математически строгая теория осреднения, приводящая к конструктивному методу их вычисления. В случае нелинейных определяющих соотношений это не так, однако определение эффективных определяющих соотношений допускает обобщение. Это позволяет проводить вычисление, например, эффективной диаграммы интенсивность напряжения–интенсивность деформации. В данной работе это сделано для модельного пористого материала. Для исследования используется модель материала с эллипсоидальными и угловатыми порами. Включения — упругие, а материал матрицы описывается классической теорией течения.

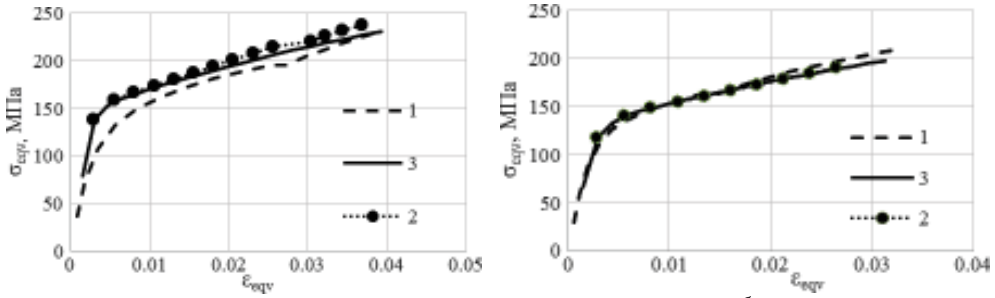
Результаты численных расчетов на мезоуровне (уровне структуры материала) показали, что пористость сама по себе может вызвать зависимость указанной диаграммы от объемной деформации. Показано, что диаграмма зависит от пути деформирования, величины объемной деформации и гладкости границы пор.

Представительная область представляла собой куб. Ее деформирование осуществлялось за счет задания на границе линейного поля перемещений, состоящего из различных комбинаций простого сдвига и объемного сжатия. Комбинации состояли в задании пропорционального деформирования — сначала сдвига, а затем всестороннего сжатия и, наоборот, сначала сжатия, а потом сдвига.

На рис. 1 заметна разница в диаграммах между путем деформирования в порядке объемное растяжение–сдвиг и двумя другими путями деформирования для угловатых пор. Разница диаграмм для структуры с угловатыми порами достигла 29%, для эллипсоидальных пор разница существенно меньше и составляет около 7%. Таким образом, можно сделать вывод, что для угловатых пор наблюдается зависимость диаграммы σ_{eqv}–ε_{eqv} от пути деформирования, а для эллипсоидальных пор ее почти нет. Для угловатых пор различие наблюдается, если сначала происходит объемное деформирование, а затем сдвиг.

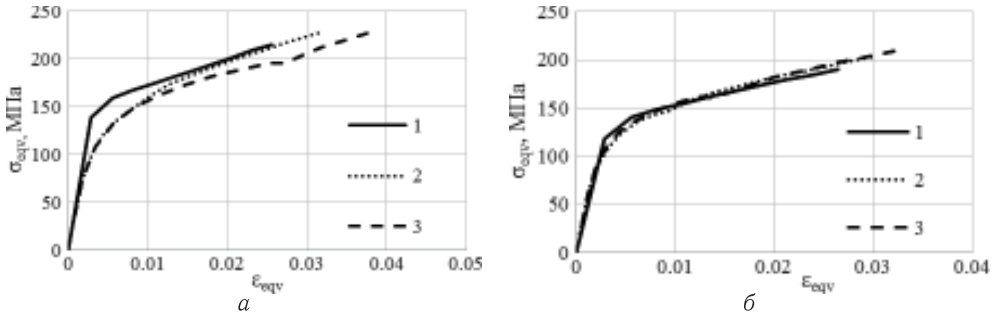
Были проведены серии расчетов, определяющие зависимость диаграмм σ_{eqv}–ε_{eqv} от θ при сложном пути деформирования. Результаты представлены на рис. 2. Применялось деформирование с последовательным приложением деформаций: сначала

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №25-21-00111.



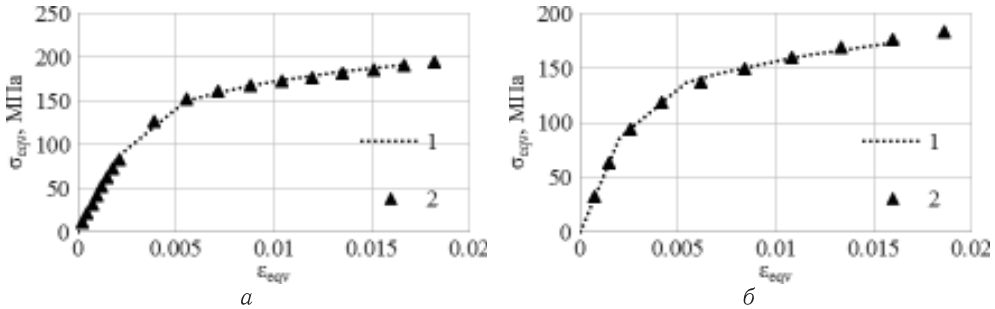
а *б*

Рис. 1. Осредненные диаграммы σ_{eqv}–ε_{eqv} пористого материала: (*а* — модель с угловатыми порами; *б* — модель с эллипсоидальными порами): 1 — последовательные объемное сжатие, сдвиг; 2 — последовательные сдвиг, объемное растяжение; 3 — пропорциональное деформирование



а *б*

Рис. 2. Осредненные диаграммы σ_u–ε_u пористого материала (*а* — модель с угловатыми порами; *б* — модель с эллипсоидальными порами): 1 — $\theta = 0$, сдвиг; 2 — $\theta = -0{,}01$, $\theta = -0{,}02$



а *б*

Рис. 3. Сравнение диаграмм по макромодели Друкера–Прагера и структурной модели пористого материала: (*а* — $\theta = -0{,}005$; *б* — $\theta = -0{,}015$): 1 — макромодель; 2 — модель угловатой пористой структуры на мезоуровне

объемная деформация, потом сдвиг. Видно, что с увеличением объемной деформации наступление пластичности возникает при меньших эквивалентных напряжениях. Для величины $\theta = -0{,}01$ диаграмма зависимости эквивалентных напряжений от эквивалентных деформаций вначале совпадает с диаграммой, соответствующей величине $\theta = -0{,}02$, но по мере увеличения деформации, диаграмма начинает совпадать с диаграммой, соответствующей $\theta = 0$. Диаграмму осредненного материала для $\theta = -0{,}02$ удалось описать на макроуровне с применением модели

Друкера–Прагера. На рис. 3 приведены графики зависимости σ_{equ}–ε_{equ} материала с пористой угловатой структурой и его макромодели при различных величинах объемной деформации: $\theta = -0{,}005$ и $\theta = -0{,}015$.

Таким образом, для пути деформирования, состоящего из первоначального объемного сжатия и последующего сдвига, вычислительные эксперименты на мезоуровне приводят к теории Друкера–Прагера на макроуровне в случае угловатых пор. Именно такая последовательность нагружения характерна для грунтов.

Таким образом показано, что даже если пластические свойства матрицы не зависят от пути деформирования или объемного сжатия, то наличие угловатых пор приводит к тому, что осредненная диаграмма эквивалентное напряжение — эквивалентная деформация зависит.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДЯЩЕЙ ИЗ СТАЦИОНАРНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУИ. ПОЛНОСТЬЮ КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

М. В. Абгарян[1]***, А. М. Бишаев***[2]

[1]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия;* [2]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Теме, заявленной в названии, посвящено много работ. Наиболее полно решение этой проблемы содержится в [1]. И этой работе предполагалось, что струя, выходящая из стационарного плазменного двигателя (СПД) состоит из однозарядных ионов ксенона, его же нейтральных атомом и электронов. Для моделирования движения ионов и нейтралов была построена кинетическая модель, которая учитывала резонансную перезарядку — взаимодействие между ионами и нейтралами, в результате которого происходит обмен электроном. Этот процесс имеет наибольшее дифференциальное сечение взаимодействия. Электрическое поле при этом находилось при помощи модификации предложенной А. И. Морозовым гипотезы «термолизованного потенциала». В работе [2] было предложено полностью кинетическое описание задачи о струе. В этой работе авторы также отказались от гипотезы «термолизованного потенциала», определяя электрическое поле непосредственно из уравнения Максвелла. Вопросам численного моделирования задачи о струе в новой постановке посвящен данный доклад.

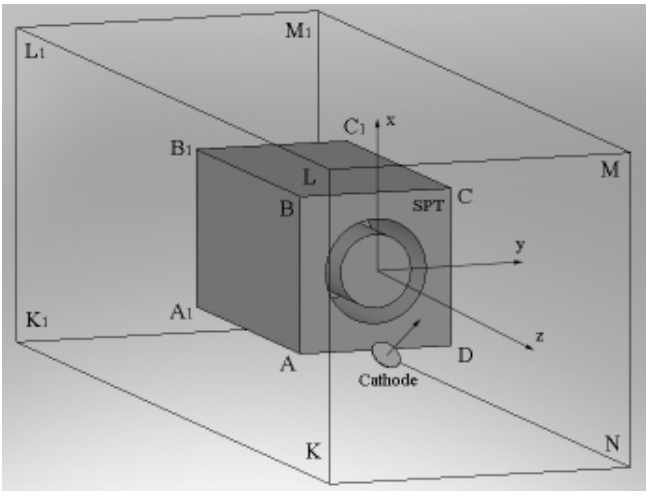


Рис. 1

Из кольцевого отверстия двигателя, который моделируется параллелепипедом $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходят в окружающее пространство ионы и нейтралы. Электроны испускаются катодом (он изображен на рис. 1) и поступают через кольцевое

отверстие в двигатель. Безразмерный вид уравнений, описывающих приведенную выше задачу следующий:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\xi^k\frac{\partial f_e}{\partial x^k}+FE^k\frac{\partial f_i}{\partial \xi^k}=\frac{1}{\mathrm{Kn}_{in}}J_{in},\ \mathrm{Sh}_e\frac{\partial f_e}{\partial t}+v^k\frac{\partial f_e}{\partial x^k}-E^k\frac{\partial f_e}{\partial v^k}=0,\ \mathrm{Sh}_n\frac{\partial f_n}{\partial t}+w^k\frac{\partial f_n}{\partial x^k}=\frac{1}{\mathrm{Kn}_{ni}}J_{ni},$$

где $f_i(t,\vec{x},\vec{\xi})$ — функция распределения ионов; $f_e(t,\vec{x},\vec{v})$ и $f_n(t,\vec{x},\vec{w})$ суть функции распределения электронов и нейтралов соответственно; J_{in}, J_{ni} — интегралы столкновений, моделирующие резонансную перезарядку. Остальными символами, которые входят в вышеприведенные уравнения, обозначены безразмерные параметры — числа Кнудсена, Струхаля и другие. Электрическое поле предполагается потенциальным, т. е. $\vec{E}=-\nabla\varphi$, где $\varepsilon^2\Delta\varphi=(n_e-n_i)$, $\varepsilon=r_d/a$, r_d есть дебаевский радиус [2]. В [2], когда $\varepsilon\ll 1$ (квазинейтральная плазма), показано, что величина $N=n_i-n_e$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}+\frac{n_n(t,\vec{x})\nu(t.\vec{x})}{R\varepsilon}\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\overline{n}(t,\vec{x})}{2\varepsilon^2(\mathrm{Sh}_e)^2}N=Q(t.\vec{x}).$$

В этом уравнении, которое является строгим следствием уравнений сохранения, $\overline{n}=m_e/(m_in_i+n_e)$, $R=1/\mathrm{Kn}_d$, $\mathrm{Kn}_d=r_d/a$, а остальные величины определены в [2] и являются функциями макропараметров плазмы. Проведенный в [2] асимптотический анализ показал, что $N(t,\overline{x})$ на $[t_9,t_0+\Delta t]$ м точностью до $O(\varepsilon^3)$ будет находится из уравнения

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}+\frac{n_n(t_0,\vec{x})\nu(t_0,\vec{x})}{R\varepsilon}\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\overline{n}(t_0,\vec{x})}{2\varepsilon^2(\mathrm{Sh}_e)^2}N=Q(t_0,\vec{x}). \tag{1}$$

Его нетрудно записать — $N(t-t_0,\vec{x})=\overline{N}(t-t_0,\vec{x})+\dfrac{2\varepsilon^2(\mathrm{Sh}_e)^2}{\overline{n}(t_0,\overline{x})}$, где

$$\overline{N}(t-t_0,\vec{x})=\begin{cases}Ae^{-\propto(t-t_0)}\cos(\omega(t-t_0)+\varphi), & \omega^2=\dfrac{\overline{n}}{2}-\dfrac{\alpha^2}{4}>0,\\[2ex] Ae^{-\alpha_1)(t-t_0)}+Be^{-\alpha_2(t-t_0)}, & \alpha_1=\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4}-\dfrac{\overline{n}}{2}},\quad \alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}-\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4}-\dfrac{\overline{n}}{2}}.\end{cases}$$

Будем считать, что в момент времени t_0 функции распределения ионов, электронов и нейтралов заданы, значит заданы все макропараметры. Присутствующее в кинетических уравнениях электрическое поле на $[t_9,t_0+\Delta t]$ будем определять из решения уравнения Пуассона, а именно

$$\varphi(t_0+\Delta t,\vec{x})=\int\limits_{V_1}\frac{\dfrac{N(t_0+\Delta t.\vec{x})}{\varepsilon^2}}{|\vec{x}_1-\vec{x}|}d\vec{x}_1=\int\limits_{V}\frac{\dfrac{\overline{N}(t_0+\Delta t,\vec{x}_1)}{\varepsilon^2}+\dfrac{2(\mathrm{Sh}_e)^2}{\overline{n}(t_0,\vec{x}_1)}Q(t_0,\vec{x}_1)}{4\pi|\vec{x}_1-\vec{x}|}d\mathbf{x}_1.$$

Присутствующие в выражении для $\overline{N}$ неизвестные константы находятся, если для (1) поставить задачу Коши

$$N(t_0,\vec{x})-n_i(t_0,\vec{x})-n_e(t_0,\vec{x}),\frac{\partial N(t_0,\vec{x})}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{j}(t_0,\vec{x}),$$

где $\vec{j}=\vec{j}_i-(1/\mathrm{Sh}_e)\vec{j}_e$, $\vec{j}_i=\int_{\Omega_i}\vec{\xi}f_i\,d\vec{\xi}$, $\vec{j}_e=\int_{\Omega_e}\vec{v}f_e\,d\vec{v}$. С найденным значением электрического поля кинетические уравнения для ионов и нейтралов решаются описанным в [1] методом расщепления по физическим процессам. Новым элементом здесь

является кинетическое уравнение для электронов $\mathrm{Sh}_e \dfrac{\partial f_e}{\partial t} + v^k \dfrac{\partial f_e}{\partial x^k} - E^k \dfrac{\partial f_e}{\partial v^k} = 0$. Оно должно решаться с граничным условием

$$f_e(x, y, 0, \vec{v}) = \frac{\overline{n}_e}{\pi^{3/2}} \exp\{-\vec{v}^2\}, \quad v_z > 9, \quad x^2(y - y_k)^2 \le r_k^2. \tag{2}$$

Здесь $(0, y_k, 0)$ — координаты центра выходного отверстия катода, r_k — его радиус (рис. 1). Величина $\overline{n}_e$ определяется значением катодного тока. Эта величина задается. Трудности решения кинетического уравнения электронов обусловлены малостью величины Sh_e ($\mathrm{Sh}_e \approx 0{,}02$), что приводит к образованию тонкого порядка Sh_e временного слоя, в течении которого распределение электронов будет подстраиваться к распределению, происходящему в медленном времени. Будем предполагать, что движение электронов в быстром времени описывается уравнением

$$\mathrm{Sh}_e \frac{\partial f_e}{\partial t} + v^k \frac{\partial f_e}{\partial x^k} = 0.$$

Его решение с граничным условием (2) при $t \to +\infty$ задавалось в качестве начальной функции распределения для электронов. А потом использовались уже упомянутые методы расщепления.

1. *Абгарян М. В.*, *Бишаев А. М.* Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы // ЖВМ и МФ. — 2018. — Т. 39, №7. — С. 1132–1146.
2. *Абгарян М. В.*, *Бишаев А. М.*, *Рыков В. А.* О моделировании струи разреженной плазмы на основе кинетических уравнений // ЖВМ и МФ. — 2023. — Т. 129. — С. 1984–1992.

ИССЛЕДОВАНИЕ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ ЦЕПОЧЕК НАД О. ЧЕДЖУ ПО ДАННЫМ ЯПОНСКОГО ГЕОСТАЦИОНАРНОГО СПУТНИКА HIMAWARI-8*

***М. Г. Алексанина*[1,2], *М. М. Чернышова*[2]**

[1]*ИАПУ ДВО РАН, Владивосток, Россия;* [2]*ДВФУ, Владивосток, Россия*

Вихревые цепочки в атмосфере как проявления турбулентности стало возможным наблюдать с помощью современных методов спутникового дистанционного зондирования. Актуальность работы связана с пониманием явлений турбулентности в атмосфере, что может быть использовано в метеорологии и климатологии для улучшения прогнозов погоды, а также для оптимизации авиационных и морских маршрутов.

Обычно вихревые цепочки в атмосфере образуются над вулканическими островами в тех случаях, когда нижний слой атмосферы ограничен сверху инверсией температуры, располагающейся ниже вершины острова или гребня хребта. Инверсия препятствует обтеканию препятствия сверху, в результате чего реализуется исключительно боковое обтекание. При образовании вихревых цепочек невозмущенный крупномасштабный поток с наветренной стороны, как правило, устойчив во времени, и его скорость в нижнем слое атмосферы составляет 8–10 м/с [1, 2].

Японский сервис (`https://www.eorc.jaxa.jp/ptree/index.html`) позволяет наблюдать остров Чеджу, фактически, в режиме реального времени. Это предо-

*Исследование выполнено в рамках госзадания FWFW-2025-0005.

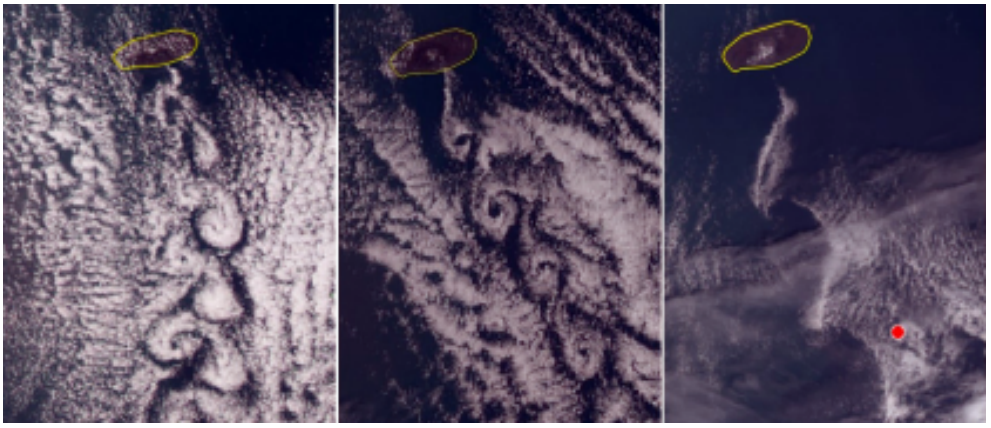


Рис. 1. Три вида атмсферных вихревых цепочек

ставляет возможность исследовать условия возникновения и ключевые параметры, которые влияют на вид вихревых цепочек, в частности, на примере над вулканическим островом Чеджу в Корейском проливе (Азиатско-Тихоокеанский регион (АТР), где атмосферные вихревые цепочки (АВЦ) наблюдаются регулярно). Было проведено детальное исследование вихревых дорожек, включающее, анализ параметров ветра (`https://earth.nullschool.net/ru/` — сервис глобальной карты ветров) расчет параметров АВЦ и параметров среды. Рассчитывались радиусы и скорость перемещения центров вихрей; расстояния между вихрями одной закрутки; расстояния от линии центров одной закрутки до линии центров противоположной закрутки; высота инверсии; ширина препятствия; факторы, определяющие вид АВЦ — скорость и ассиметрия/симметрия ветра, высота инверсии температурного профиля атмосферы (`https://psl.noaa.gov/data/atmoswrit/profile/` американский сервис, который на определенные координаты и дату выдает профиль давления и температуры в атмосфере).

С 2016 по 2024 гг. были найдено и проанализировано 41 АВЦ. Для каждой АВЦ были посчитаны ключевые параметры внешней среды, а также геометрические и гидродинамические параметры АВЦ. Все данные были собраны в таблицы и проанализированы.

Были обнаружены три типа АВЦ (2 закрутки,1 закрутка, зигзаг) (рис. 1): зигзагообразные АВЦ составляют 29%, одна закрутка АВЦ — 39%, две закрутки АВЦ — 32% (рис. 2).

Рис. 2. Диаграмма часты появления разных атмосферных вихревых цепочек

Также были построены различные зависимости, цель которых понять, какие характеристики внешней среды являются ключевыми для того, чтобы АВЦ имели разный вид. Было выявлено следующее:

1. Наибольшие различия внешнего вида атмосферных вихревых цепочек наблюдаются при разных высотах инверсии (высота инверсии определяет линейный

размер препятствия), а также при разной силе ветра, которая влияет на скорость смещения вихрей в атмосферной цепочке.

2. Стоит отметить, что для разных наблюдаемых АВЦ число Струхаля было почти постоянно, а число Рейнольдса различно.

3. Факторами, определяющими вид АВЦ, являются скорость ветра и структура температурного профиля атмосферы.

4. Зигзагообразная АВЦ образуется при набегающем ветре, скорость которого меньше 8 м/с.

5. Циклоническая односторонняя закрутка АВЦ наблюдается при асимметрии скорости ветра, когда справа ветер больше, чем слева.

6. Двухсторонняя закрутка АВЦ наблюдается, когда ветер слева и справа одинаков, симметричен относительно острова, и по скорости больше 8 м/с.

1. *Ван–Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986. — 184 с.
2. *Левин В. А.*, *Алексанина М. Г.*, *Дьяков С. Е.*, *Еременко А. С.*, *Казанский А. В.* Исследование дорожек Кармана в облачности за Курильскими островами // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. — 2018. — №4. — С. 106–115.

ОБ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО ЭКОНОМИЧНОМ РАСЧЕТЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

А. К. Алексеев

МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Интегрирование многомерных функций является достаточно трудоемкой операцией, подразумевающем N^d операций в d-мерном пространстве, где N — число узлов по координатной оси. Чаще всего оно выполняется с помощью метода Монте-Карло, чья трудоемкость не зависит от размерности пространства, однако подразумевает использование достаточно большого ($\sim 10^6$) ансамбля точек. В данной работе мы рассматриваем альтернативные возможности расчета многомерных интегралов с помощью тензорных разложений. При этом многомерная функция представляется значениями в узлах равномерной сетки, т. е. «тензором» $f_{i_1,i_2\ldots i_d}$ [1].

Здесь мы рассмотрим простейшее тензорное разложение, а именно каноническое разложение $f_{i_1,i_2\ldots i_d} = \sum_{\alpha=1}^{r} Q^1_{\alpha,i_1} Q^2_{\alpha,i_2} \ldots Q^d_{\alpha,i_d}$, где d — порядок тензора (размерность пространства), r — ранг разложения. Можно показать, что аппроксимация интеграла

$$\iiint f(x_1,\ldots,x_d)\,dx_1\ldots dx_d \approx \sum_{i_1\ldots i_d}^{I_1\ldots I_d} f_{i_1,i_2\ldots i_d} h^d$$

может быть выражена с помощью канонического разложения в виде

$$\sum_{i_1\ldots i_d}^{I_1\ldots I_d} f_{i_1,i_2\ldots i_d} \approx \sum_{i_1\ldots i_d}^{I_1\ldots I_d} \sum_{\alpha=1}^{r} Q^1_{\alpha,i_1} Q^2_{\alpha,i_2} \ldots Q^d_{\alpha,i_d} = \sum_{\alpha=1}^{r} \Big\{ \Big(\sum_{i_1}^{I_1} Q^1_{\alpha,i_1} \Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\sum_{i_d}^{I_d} Q^d_{\alpha,i_d} \Big) \Big\}.$$

При этом вместо интегрирования в d-мерном пространстве, подразумевающем $O(N^d)$ операций, проводится $r \times d$ одномерных интегрирований с общим числом операций $O(d \times N \times r)$, что приводит к существенному снижению вычислительных

затрат. Следует отметить следующие особенности. При свертке (интегрировании) по части индексов, ядра с несвернутыми индексами выносятся за скобки. При использовании произведения Адамара можно получить выражение

$$C_{lmp} = A_{lmp}B_{lmp} = \sum_{\alpha=1}^{r} Q^{A,u}_{\alpha,l} Q^{A,v}_{\alpha,m} Q^{A,w}_{\alpha,p} \cdot \sum_{\alpha=1}^{r} Q^{B,u}_{\alpha,l} Q^{B,v}_{\alpha,m} Q^{B,w}_{\alpha,p} = \sum_{\alpha=1}^{r\times r} D^{u}_{\alpha,l} D^{v}_{\alpha,m} D^{w}_{\alpha,p},$$

где новые ядра $D^{u}_{\alpha,l}$ выражаются через произведения старых ядер и их количество равно r^2.

Интерес к многомерному численному интегрированию частично обусловлен тем, что при численном решении уравнения Больцмана одной из достаточно трудоемких операций является расчет моментов (газодинамических параметров), что связано с интегрированием плотности распределения $f_{ijklmp} = f(x_i, y_j, z_k, u_l, v_m, w_p)$ по подпространству скоростей. Для уравнения Больцмана газодинамические моменты, рассчитываемые с помощью канонического разложения, имеют следующий вид:

$$\rho_{ijk} = \sum_{l,m,p} f_{ijklmp}\, du_l\, dv_m\, dw_p = \sum_{\alpha} Q^{X}_{\alpha,i} Q^{Y}_{\alpha,j} Q^{Z}_{\alpha,k} \sum_{l,m,p} Q^{u}_{\alpha,l} Q^{v}_{\alpha,m} Q^{w}_{\alpha,p}\, du_l\, dv_m\, dw_p =$$
$$= \sum_{\alpha} \Big\{ Q^{X}_{\alpha,i} Q^{Y}_{\alpha,j} Q^{Z}_{\alpha,k} \sum_{l} Q^{u}_{\alpha,l} \sum_{m} Q^{v}_{\alpha,m} \sum_{p} Q^{w}_{\alpha,p}\, du_l\, dv_m\, dw_p \Big\},$$

$$(\rho u)_{ijk} = \sum_{l,m,p} u_l f_{ijklmp}\, du_l\, dv_m\, dw_p = \sum_{\alpha} Q^{X}_{\alpha,i} Q^{Y}_{\alpha,j} Q^{Z}_{\alpha,k} \sum_{l,m,p} u_l Q^{u}_{\alpha,l} Q^{v}_{\alpha,m} Q^{w}_{\alpha,p}\, du_l\, dv_m\, dw_p =$$
$$= \sum_{\alpha} \Big\{ Q^{X}_{\alpha,i} Q^{Y}_{\alpha,j} Q^{Z}_{\alpha,k} \sum_{l} u_l Q^{u}_{\alpha,l} \sum_{m} Q^{v}_{\alpha,m} \sum_{p} Q^{w}_{\alpha,p}\, du_l\, dv_m\, dw_p \Big\},$$

$$\frac{T_{ijk}}{3R\rho_{ijk}} = \int \sum_{\nu} (\xi_\nu - u_\nu)^2 f\, d\xi = \sum_{l,m,p} f_{ijklmp} \big\{ (u_l - \overline{u})^2 + (v_m - \overline{v})^2 + (w_p - \overline{w})^2 \big\}\, du_l\, dv_m\, dw_p =$$
$$= \sum_{l,m,p} f_{ijklmp} (u_l - \overline{u})^2\, du_l\, dv_m\, dw_p + \sum_{l,m,p} f_{ijklmp} (v_m - \overline{v})^2\, du_l\, dv_m\, dw_p +$$
$$+ \sum_{l,m,p} f_{ijklmp} (w_p - \overline{w})^2\, du_l\, dv_m\, dw_p.$$

Кроме расчета макропараметров течения эти моменты могут использоваться и внутри алгоритма решения уравнения Больцмана, если интеграл столкновений имеет вид BGK. В этом случае вычислительные затраты также снижаются радикально.

В общем случае расчета интеграла столкновений ($\xi \in R^3$ — скорость текущей частицы, ξ_a — падающей, ξ^s — текущей рассеянной, ξ^s_a — падающей рассеянной) убыль частиц (число частиц, покидающих группу ξ) имеет вид

$$J^{-}(\xi) = f(\xi) \int f(\xi_a)\, d\xi_a = f(\xi) \sum_{\alpha=1}^{r} \Big(\sum_{l} Q^{u}_{\alpha,l} \cdot \sum_{m} Q^{v}_{\alpha,m} \cdot \sum_{p} Q^{w}_{\alpha,p} \Big),$$

также включающий интегрирование по скоростям. При использовании канонического разложения для расчета этого интеграла вместо $O(N^3)$ операций понадобится $O(3 \times r \times N)$ операций.

Прибыль частиц (число частиц, поступающих в группу ξ) имеет вид

$$J^+(\xi) = \int f(\xi^s) f(\xi_a^s)\, d\xi_a = \int \varphi(\xi_a)\, \psi(\xi_a)\, d\xi_a,$$

где под интегралом имеется произведение Адамара трансформированных функций. Для интегрирования потребуется каноническое разложение нового тензора $\theta(\xi_a) = f(\xi^s) f(\xi_a^s)$, получаемого интерполяцией $f(\xi_{lmp}^s) f(\xi_{a,lmp}^s)$ по $f(\xi_{lmp})$ при преобразовании координат (повороте сетки), что требует $O(N^3)$ операций. В таком варианте использование тензорного разложения для расчета $J^+(\xi)$ выигрыша в числе операций не дает.

Таким образом, расчет интегралов (моментов) с помощью канонического разложения позволяет получать результаты с затратами $O(d \times N \times r)$ операций, что позволяет резко сократить время счета. Использование канонического разложения для интеграла столкновений в форме БГК также дает существенную экономию счета. Применение тензорного разложения для расчета интеграла столкновений в общей форме в части $J^-(\xi)$ очень эффективно, в части $J^+(\xi)$ алгоритмически сложнее и менее экономично с вычислительной точки зрения.

Каноническое разложение не является единственным (и лучшим) тензорным разложением, другие варианты разложения также дают существенную экономию при интегрировании. В частности, расчеты интегралов для тензорного поезда [2] рассмотрены в [3], соответствующие затраты имеют вид $O(d \times N \times r^2)$.

В данной работе представлены численные результаты решения уравнения Больцмана в форме БГК с использованием канонического разложения, демонстрирующие высокую вычислительную эффективность описываемого подхода. Расчет ядер канонического разложения проводился в соответствии с алгоритмом [4].

1. *Hackbusch W.* Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus. — Springer, 2012.
2. *Oseledets V.* Tensor–train decomposition // SIAM J. Sci. Comput. — 2011. — V. 33. — P. 2295–2317.
3. *Oseledets I.*, *Tyrtyshnikov E.* TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra Appl. — 2010. — V. 432. — P. 70–88.
4. *Алексеев А. К.*, *Бондарев А. Е.*, *Пятакова Ю. С.* Об использовании канонического разложения для визуализации результатов параметрических расчетов // Научная визуализация. — 2023. — Т. 15, №4. — С. 12–23.

МИКРО-ВЗРЫВНАЯ ФРАГМЕНТАЦИЯ ВОДОТОПЛИВНЫХ КАПЕЛЬ НА ОСНОВЕ КЕРОСИНА*

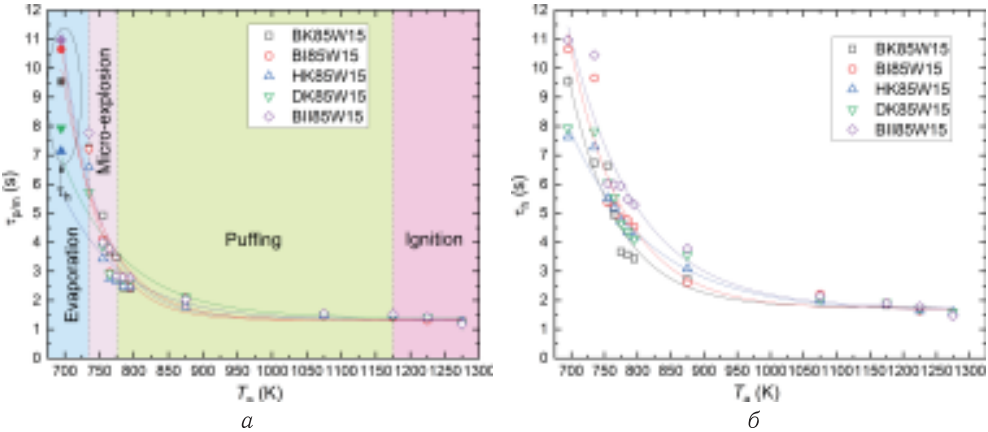
Д. В. Антонов, О. В. Высокоморная, П. А. Стрижак

ТПУ, Томск, Россия

Микро-взрывная фрагментация двухжидкостных топливных систем представляет значительный интерес для современных энергетических технологий [1]. Это явление играет важную роль в повышении эффективности сгорания топлив, в том числе авиационных, и увеличению площади поверхности испарения [2]. Использование водотопливных композиций позволяют существенно уменьшить образование сажи и оксидов азота. Исследования [3] показали, что добавление воды в топливо может повысить полноту сгорания на 20% за счет эффекта микро-взрыва при фраг-

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 23-69-10006.

ментации. Безусловно, отсутствие полноты систематических данных о поведении различных сортов керосина в качестве оболочки двухжидкостных капель ограничивает разработку оптимальных систем впрыска, в том числе создание соответствующих прогностических математических моделей. Описание использованных экспериментальных стенда и методики представлены в [4]. Нагрев капель осуществлялся в трубчатой муфельной печи. Видеорегистрация осуществлялась при параметрах 512×512 пикс, 1000–5000 кадров/с. Исследованы процессы нагрева, испарения и фрагментации композиционных капель, в которых в качестве топливной оболочки использовался базовый керосин (ТС-1) и биокеросин. По результатам экспериментов определены границы возникновения фрагментации композиционных капель в режиме оптимального микро-взрыва, при котором родительская капля распадалась при нагреве на множество вторичных фрагментов.



а *б*

Рис. 1. Значения времен задержки распада (*а*) и времен существования (*б*) композиционных капель разного состава при начальном размере капель $D_{d0} \approx 1{,}6$ мм

Экспериментальные результаты использовались при разработке математической модели нагрева и фрагментации композиционных капель. Численные расчеты проводились в диапазонах размеров капель от 0,01 до 1 мм, температуры внешней газовоздушной среды от 500 до 2000 K. Концентрация дисперсной фазы (воды) составляла 10 vol.%. Задача тепломассопереноса в неоднородной капле решалась с применением метода конечных элементов. Распределение температуры внутри неоднородной капли с учетом пространственной и временной сеток описывалось нестационарным линейным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + P(r), \tag{1}$$

где

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_w = \dfrac{\lambda_w}{(c_w \rho_w)} & \text{в водяном ядре,} \\ \kappa_f = \dfrac{\lambda_f}{(c_f \rho_f)} & \text{в топливной оболочке,} \end{cases} \tag{2}$$

где $\kappa_{w(f)}$, $\lambda_{w(f)}$, $c_{w(f)}$ и $\rho_{w(f)}$ — температуропроводность, теплопроводность, теплоемкость и плотность воды (топлива) соответственно, $P(r)$ — дополнительный источник тепла за счет радиационного нагрева от пламени.

$$P(r) = 3 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot Q_a \cdot \theta_R^4 / (R_d c_1 \rho_1), \tag{3}$$

где θ_R — радиационная температура; Q_a — коэффициент излучения, который в соответствии с [5] предполагается равным 1 для моделирования максимального эффекта от радиационного нагрева.

Начальные условия:

$$T|_{t=0} = \begin{cases} T_{w0}(r,z) & \text{в водяном ядре,} \\ T_{f0}(r,z) & \text{в топливной оболочке.} \end{cases} \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{r=0} = 0 \quad \text{на оси симметрии,} \tag{5}$$

$$T|_{R=R_w-} = T|_{R=R_w+}, \quad \lambda_w \left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_w-} = \lambda_f \left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_w+} \quad \text{на границе вода/топливо,} \tag{6}$$

$$2\pi R_d \lambda_f \left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_d} = h(T_{\text{eff}} - T_s), \tag{7}$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $T_{\text{eff}} = T_g + (\rho_f L_f R_{d(e)})/h$, h — коэффициент теплоотдачи, $R_{\dot{d}(e)} = |\dot{m}_d|/4\pi\rho_f R_d^2$ — скорость испарения, L_f — теплота парообразования топливной оболочки.

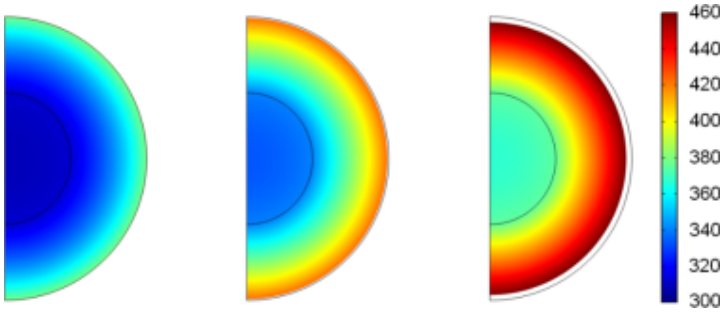


Рис. 2. Типичные поля температуры для неоднородных капель керосин/вода (10 об.%) в моменты времени 0,01 с, 0,02 с и 0,03 с

На рис. 2 представлены типичные поля температуры для трех составов при начальном размере $R_{d0} = 100$ мкм и температуре газовоздушной среды $T_g = 1373$ K.

1. *Antonov D. V. et al.* Puffing/micro-explosion in rapeseed oil/water droplets: The effects of coal micro-particles in water // Fuel. — 2021a. — V. 289. — P. 119814.
2. *Antonov D. V.*, *Fedorenko R. M.*, *Strizhak P. A.* Micro-Explosion Phenomenon: Conditions and Benefits // Energies. — 2022. — V. 15, No. 7670.
3. *Antonov D. V.*, *Kuznetsov G. V.*, *Strizhak P. A.* Comparison of the characteristics of micro-explosion and ignition of two-fluid water-based droplets, emulsions and suspensions, moving in the high-temperature oxidizer medium // Acta Astronaut. — 2019. — V. 160. — P. 258–269.
4. *Antonov D.V et al.* Puffing/micro-explosion in composite fuel/water droplets heated in flames // Combust. Flame. — 2021b. — V. 233. — P. 111599.
5. *Fedorenko R. M.*, *Yanovsky L. S.*, *Strizhak P. A.* The effect of micro-explosive fragmentation of water-fuel droplets on their spray combustion emissions // Fuel. — 2025. — V. 396. — P. 135344.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАХОЛАЖИВАНИЯ УЧАСТКА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ МАГИСТРАЛИ

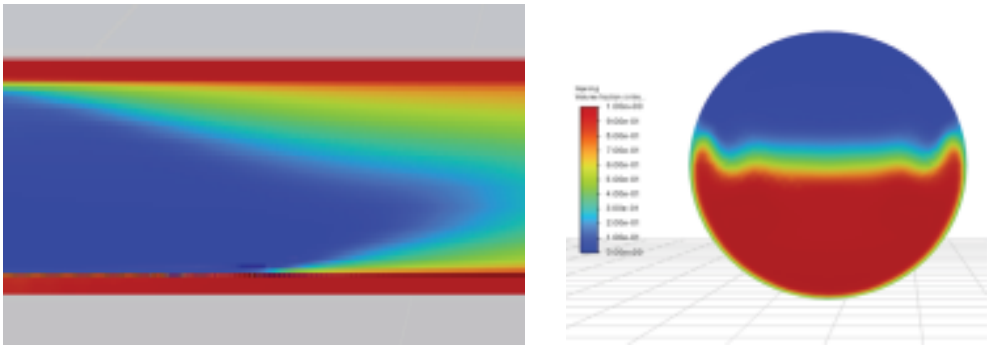
И. В. Антюхов

МАИ, Москва, Россия

Одной из важных частей процесса запуска ракетного двигателя является захолаживание магистралей перед подачей компонентов топлива в камеру сгорания. Топливные магистрали находится при температуре окружающей среды, и их температуру необходимо уменьшить до температуры криогенных компонентов топлива. Применение в ракетной технике криогенных компонентов топлива обеспечивает получение максимальных величин удельного импульса — основного показателя энергоэффективности двигателя. Низкая температура криогенных компонентов топлива создает значительные проблемы при захолаживании, заправке, хранении компонентов и опорожнении баков, запуске ДУ, особенно в условиях невесомости при длительных орбитальных полетах.

При захолаживании происходит взаимодействие криогенной жидкости с поверхностью канала в следующей последовательности: пленочное кипение, пузырьковое кипение, конвекция. До 80% времени захолаживания занимает пленочное кипение.

Достаточно эффективно процесс захолаживания проходит в дисперсно-кольцевом режиме, который возникает из переходного режима или непосредственно из кольцевой структуры стержневого режима, для которого типична повышенная концентрация капель жидкости около стенки. Дисперсно-кольцевая структура потока существует при массовых скоростях потока выше 100 кг/(м^2 · с). В этом случае по длине канала испаряется до 80% жидкости.



а *б*

Рис. 1. Результаты математического моделирования процесса заполнения горизонтальной магистрали жидким азотом: *а* — процесс заполнения магистрали; *б* — распределение жидкой и газообразной фазы в сечении канала

Совершенствование математических методов расчета процесса захолаживания и термостатирования трактов криогенных магистралей двигательных установок и криообеспечения мощных энергетических устройств требует детального изучения теплогидравлических характеристик парожидкостных криогенных потоков при пленочном кипении в каналах. Успешное решение многих аспектов этой проблемы определяется получением надежных экспериментальных данных о структуре потока, взаимодействии фаз на границе их раздела и созданием математических моделей рассматриваемых процессов.

В настоящее время актуальным становиться трехмерное моделирование структуры криогенного потока в рассматриваемых магистралях с использованием современных программных продуктов, таких как ANSYS или Flowvision.

Для замыкания системы уравнений сохранения, использованной в рассмотренной математической модели, были использованы экспериментальные данные по значениям температур кризисов пленочного (T_{cr2}) и пузырькового (T_{cr1}) кипения, полученные ранее на экспериментальных установках в МАИ, а также данные по структуре криогенного парожидкостного потока в каналах при смене режимов кипения.

В результате проведенного расчета получены изменения температуры стенок модельной магистрали, распределение жидкой и газовой фазы по длине канала и в различных сечениях, определено время захолаживания магистрали. Также по результатам расчета определены значения теплового потока в пленочном и пузырьковом режимах кипения. Максимальный тепловой поток достигает 85 кВт/м^2.

1. *Калинин Э. К.*, *Дрейцер Г. А.*, *Костюк В. В.*, *Берлин И. И.* Методы расчета сопряженных задач теплообмена. — М.: Машиностроение, 1983. — 232 с.
2. *Костюк В. В.*, *Фирсов В. П.* Теплообмен и гидродинамика в криогенных двигательных установках. — М.: Наука, 2015. — 319 с.
3. Теплопередача в двухфазном потоке / Под ред. Д. Баттерворса и Г. Хьюитта: пер. с англ. — М.: Энергия, 1980. — 328 с.
4. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Под ред. В. Д. Виоленского: пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 124 с.
5. *Аметистов Е. В.*, *Клименко В. В.*, *Павлов Ю. М.* Кипение криогенных жидкостей / Под ред. В. А. Григорьева. — М.: Энергоатомиздат, 1995. — 400 с.
6. *Ягов В. В.*, *Дедов А. В.* Теплообмен при пленочном кипении в турбулентном потоке недогретой жидкости // Теплоэнергетика. — 2009. — №3. — С. 21–29.

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА КАПЕЛЬ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТУШЕНИЯ ПОЖАРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БПЛА*

***В. А. Архипов*[1], *Н. Н. Золоторёв*[1], *К. Г. Перфильева*[1], *О. В. Матвиенко*[1,2]**

[1]*ТГУ, Томск, Россия;* [2]*ТГАСУ, Томск, Россия*

Тушение пожаров является важной и ответственной задачей, требующей применения эффективных методов и технологий. Одним из наиболее действенных способов борьбы с крупными возгораниями является сброс воды на очаг пожара с борта летательного аппарата. В настоящее время в области пожаротушения находят применение новые технологии развития беспилотной авиации. В частности, использование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) способных размещать на борту системы пожаротушения. Применение недорогих БПЛА открывает новые возможности для борьбы с пожарами на ранних стадиях и в условиях слабого ветра. Такие БПЛА позволяют оперативно реагировать на небольшие очаги возгорания и низовые пожары, что способствует их своевременному обнаружению и эффективному тушению. Преимущество таких инновационных способов применения БПЛА заключается в сокращении времени начала ликвидации, минимизации ущерба и обеспечении безопасности личного состава пожарных служб.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-19-00307-П, https://rscf.ru/project/22-19-00307/.

Для расчета и оптимизации процесса сброса воды в очаг пожара разработан ряд математических моделей, описывающих гравитационное осаждение жидко-капельного облака, процессы его испарения и взаимодействия с зоной горения [1, 2]. Тушение пожаров с применением летательных аппаратов происходит в присутствии интенсивной турбулентности, которая значительно влияет на перенос дисперсной фазы и на плотность орошения подстилающей поверхности.

Методика расчета переноса капель и плотности орошения подстилающей поверхности подробно рассмотрена в [2]. Уравнения динамики капли можно записать в виде [3]

$$\rho_b \frac{du_{\mathrm{b},i}}{dt} = \frac{3}{4} C_D \rho D_i^{-1} A (u - u_{\mathrm{b},i}) + F_{\mathrm{TD,x}i},$$

$$\rho_{\mathrm{b}} \frac{dv_{\mathrm{b},i}}{dt} = \frac{3}{4} C_D \rho D_i^{-1} A (v - v_{\mathrm{b},i}) + F_{\mathrm{TD,y}i},$$

$$\rho_{\mathrm{b}} \frac{dw_{\mathrm{b},i}}{dt} = \frac{3}{4} C_D \rho D_i^{-1} A (w - w_{\mathrm{b},i}) + (\rho - \rho_{\mathrm{b}}) g + F_{\mathrm{TD},zi},$$

где $A = \sqrt{(u - u_{\mathrm{b},i})^2 + (v - v_{\mathrm{b},i})^2 + (w - w_{\mathrm{b},i})^2}$.

В результате взаимодействия капель с турбулентным потоком происходит их хаотическое движение, напоминающее молекулярную диффузию. Капли жидкости, подобно молекулам, стремятся распространяться в направлении меньшей концентрации. Этот процесс диффузии обусловлен стремлением системы к достижению более равномерного распределения частиц. Сила турбулентной дисперсии аппроксимирует турбулентную диффузию дисперсной фазы в воздушном потоке. Эта сила в результате действия турбулентных пульсаций воздушной фазы приводит к переносу капель жидкости из области с высокой объемной долей к низкой и моделируется следующим образом [4]:

$$F_{TD,xi} = C_{TD} \rho_b \varphi^2 k \left(\frac{\partial C_i}{\partial x} \right),$$

$$F_{TD,yi} = C_{TD} \rho_b \varphi^2 k \left(\frac{\partial C_i}{\partial y} \right),$$

$$F_{TD,zi} = C_{TD} \rho_b \varphi^2 k \left(\frac{\partial C_i}{\partial z} \right),$$

где C_{TD} — коэффициент силы турбулентной дисперсии; φ — коэффициент инерционности частиц, который рассчитывался аналогично [5, 6].

Для определения характеристик турбулентности в атмосфере использовалась полуэмпирическая модель [7] согласно которой турбулентную кинетическую энергию атмосферы можно определить в виде

$$k = C_\mu^{-2} \left(\frac{\mu_a}{\rho \Lambda} \right)^2,$$

где μ_a — турбулентная вязкость атмосферы; Λ — масштаб турбулентности, зависящие от класса устойчивости атмосферы; $C_\mu = 0{,}09$ — константа модели.

Согласно результатам математического моделирования, неустойчивая стратификация атмосферы способствует усилению турбулентных возмущений в воздушной среде. Повышение уровня турбулентности в атмосфере вызывает более интенсивный перенос капель жидкости в горизонтальном направлении. Усиление горизонтального переноса капель приводит к увеличению площади покрываемой жидкостью, сброшенной с летательного аппарата. Несмотря на увеличение общей

площади орошения, более интенсивное распространение капель по горизонтали приводит к уменьшению их концентрации в отдельных участках зоны тушения. Необходимо учитывать данные эффекты при разработке и применении соответствующих математических моделей и технических решений.

1. *Копылов Н. П.*, *Хасанов И. Р.*, *Кузнецов А. Е.*, *Федоткин Д. В.*, *Москвилин Е. А.*, *Стрижак П. А.*, *Карпов В. Н.* Параметры сброса воды авиационными средствами при тушении лесных пожаров // Пожарная безопасность. — 2015. — №2. — С. 49–55.
2. *Архипов В. А.*, *Матвиенко О. В.*, *Жарова И. К.*, *Маслов Е. А.*, *Перфильева К. Г.*, *Булавко А. М.* Моделирование динамики жидко-капельного хладагента при авиационном тушении пожаров // Вестник ТГУ. Математика и механика. — 2019. — №62. — С. 68–78.
3. *Матвиенко О. В.*, *Архипов В. А.*, *Данейко О. И.*, *Усанина А. С.*, *Басалаев С. А.*, *Булавко А. М.* Моделирование динамики орошения подстилающей поверхности при авиационном тушении пожаров // ИФЖ. — 2023. — Т. 96, №5. — С. 1242–1254.
4. *Bertodano M. A. L.* Two fluid model for two-phase turbulent jets // Nuclear engineering and design. — 1998. — V. 179, No. 1. — P. 65–74.
5. *Матвиенко О. В.*, *Евтюшкин Е. В.* Теоретическое исследование процесса очистки загрязненной нефтью почвы в гидроциклонных аппаратах // ИФЖ. — 2007. — Т. 80, №3. — С. 72–80.
6. *Матвиенко О. В.*, *Дик И. Г.* Численное исследование сепарационных характеристик гидроциклона при различных режимах загрузки твердой фазы // Теоретические основы химической технологии. — 2006. — Т. 40, №2. — С. 219–224.
7. *Берлянд М. Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975. — 448 с.

ТЕЧЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В СМЕСИТЕЛЯХ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ*

Е. И. Борзенко, Д. Н. Гарбузов, М. А. Ефремов

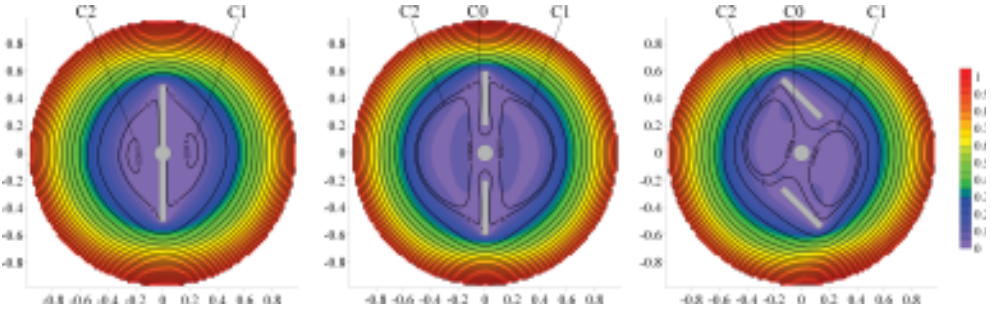
ТГУ, Томск, Россия

Процессы смешения играют ключевую роль в различных промышленных отраслях, включая химическую, пищевую, фармацевтическую и полимерную индустрии. Эффективное смешение критически важно для обеспечения качества продукции, оптимизации технологических процессов и интенсификации тепло- и массопереноса [1]. В условиях, когда большинство полимерных жидкостей демонстрируют сложное реологическое поведение, требуются специализированные подходы для достижения эффективного смешения. Целью настоящего исследования является численное моделирование течения степенной жидкости в смесительном аппарате с вращающейся лопастью сплошной и якорной конфигураций, анализ структуры потока и оценка качества процесса смешения с помощью ансамбля маркерных частиц.

Проведено численное исследование течения степенной жидкости в смесительных аппаратах с тремя конфигурациями мешалок: сплошная лопасть (№1), прямая якорная лопасть (№2) и наклонная якорная лопасть (№3). Неньютоновские свойства среды описываются с помощью степенного закона Оствальда — де Виля. В основе решения лежит метод контрольного объема и корректирующая процедура SIMPLE, реализованные на неструктурированной триангулярной сетке [2, 3].

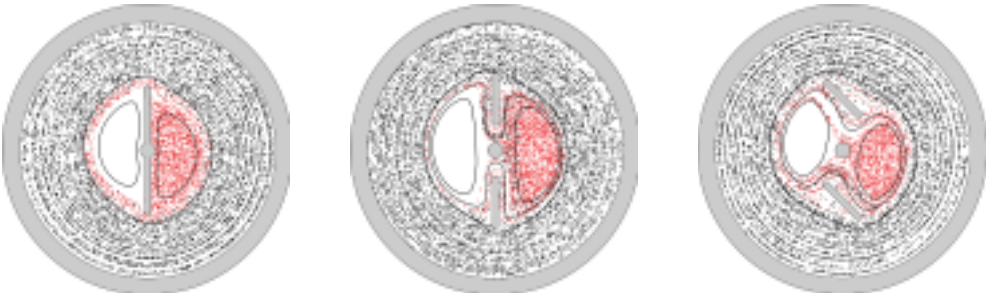
*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-29-00594).

Показана структура потока, характеризующаяся формированием циркуляционных зон в окрестности лопастей и области сдвигового течения вдоль твердой стенки аппарата (рис. 1). Для дилатантной жидкости ($n = 1{,}5$) реализуются две изолированные зоны (C1 и C2). Для якорных мешалок (конфигурации №2 и №3) характерным является наличие линии тока C0, которая огибает обе зоны C1 и C2.



а *б* *в*

Рис. 1. Распределение магнитуды вектора скорости и линии тока в подвижной системе координат при $\mathrm{Re} = 1$ и $n = 1{,}5$: *а–в* — конфигурация №1–3



а *б* *в*

Рис. 2. Распределение маркеров при $\mathrm{Re} = 40$ и $n = 0{,}7$; *а–в* — конфигурация №1–3

Процесс смешения визуализировался с использованием ансамбля маркерных частиц (рис. 2). Количественная оценка качества смешения проводилась посредством оригинальной характеристики неоднородности распределения маркеров.

Наименьшее значение характеристики неоднородности обеспечивает конфигурация лопастей №3 (рис. 3, *в*), для которой при $n = 0{,}5$ значение характеристики составляет $\nu = 0{,}02$. При этом в центральной зоне смесителя остаются области локальной неоднородности.

1. *Benhanifia K.*, *Redouane F.*, *Lakhdar R. et al.* Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model // Sci Rep. — 2022. — V. 12(1). — P. 1–20.
2. *Борзенко Е. И.*, *Гарбузов Д. Н.* Течение ньютоновской жидкости в смесителях различных конфигураций // Вычислительная механика сплошных сред. — 2024. — Т. 17, №4. — С. 486–495.
3. *Борзенко Е. И.*, *Гарбузов Д. Н.*, *Ефремов М. А.* Влияние конфигурации двухлопастной мешалки на картину течения вязкой жидкости в смесителе // Известия вузов. Физика. — 2025. — Т. 68, №6(811). — С. 66–73.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭРОЗИИ ТРУБОПРОВОДА И НАРАЩИВАНИЯ СТЕНОК В КРИТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ CAD/CAE-СИСТЕМ

С. А. Борисов, С. В. Добровольский, Ю. И. Глуховская, А. С. Мякочин, И. В. Подпорин

МАИ, Москва, Россия

Одной из проблем эксплуатации транспортных систем для жидкостей, газов и гетерогенных потоков через трубопроводные конструкции являются эрозионные процессы, воздействующие на стенки трубопроводов и приводящие к неэффективности функционирования системы в целом или разрушению труб изнутри, увеличению вероятности техногенных инцидентов и снижению эксплуатационной производительности.

Для противодействия эрозионному разрушению и продления сроков эксплуатации трубопровода можно усилить конструкцию добавочным материалом снаружи трубы в критических областях.

Однако такой способ усиления конструкции имеет очевидные недостатки, среди которых: 1) неточное покрытие заплатками критических областей, возможен излишний расход материала; 2) неизбежный зазор между наружной поверхностью трубы и внутренней поверхностью приваренной заплатки, который при эрозионном пробое стенки трубы ускорит разрушительные процессы; 3) сложность сварных работ для труб из цветных металлов (медь, алюминий и др.).

Для усиления стенок трубопровода можно использовать сравнительно дешевый низкотемпературный газодинамический метод [1], при котором сверхзвуковой гетерогенный поток воздушно-порошковой смеси воздействует на подложку, формируя на ней покрытие нужной толщины из металлического порошкового материала. Такой метод с успехом реализуется на существующей экспериментальной установке [2].

Газодинамический метод позволяет создавать многослойные разнотолщинные покрытия [3] в областях, подверженных интенсивному эрозионно-коррозионному износу, и может рассматриваться как одно из решений задачи усиления стенок трубопровода в критических областях.

Критическая область — это область внутренней поверхности трубы, в которой эрозия происходит наиболее быстро. Эрозионный износ внутренней поверхности трубы возникает при воздействии воздушного потока с примесью твердых частиц (гетерогенного потока). Чем выше аэродинамическое давление потока в трубе, тем толще должна быть стенка в критической области, чтобы противостоять эрозионному износу.

В данной работе предлагается методика автоматизации моделирования эрозионного износа на основе CAD/CAE-проектирования с использованием 3D-модели сегмента трубопровода с внешней заплаткой переменной формы. Параметрическое изменение формы и толщины заплатки обеспечивает быстрый расчет для разных вариантов заплаток. Автоматически меняя форму и толщину заплатки в критической области, можно получить время, за которое произойдет эрозионный пробой стенки трубы, и тем самым обеспечить требуемый ресурс эксплуатации трубопровода, минимизируя затраты.

Определение критических областей производится с помощью численного моделирования эрозии [4] в CAE-системе ANSYS Fluent [5]. В свою очередь, CAE-модель эрозии строится на основе параметрической CAD-модели SolidWorks для

сегмента трубопровода с наружной заплаткой, представляющей усиление стенки трубы в критической области.

На рис. 1 показан пример результатов симуляции эрозионного разрушения внутренней поверхности трубы в критической области на сгибе при воздействии высокоскоростного гетерогенного потока.

Проведен ряд симуляций эрозионного износа с различными граничными условиями при воздействии гетерогенного воздушного потока с примесью частиц песка и никеля со скоростями от 10 до 350 м/с и температурами от 27 до 600 градусов Цельсия. Для оценки результатов скорости эрозии и параметрического изменения 3D-модели заплатки создана программа с использованием инструментов SolidWorks API [6], которая протестирована на результатах различных симуляций.

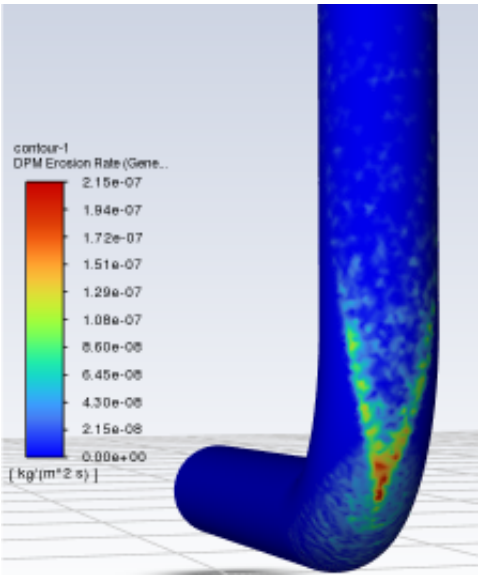


Рис. 1. Критическая область эрозии на сгибе трубы

Таким образом, применение рассмотренной методики CAD/CAE-проектирования в сочетании с низкотемпературным газодинамическим методом создания покрытий обеспечивает, в том числе, следующие преимущества:

1) проведение множества симуляций эрозионного износа при различных граничных условиях за короткое время для подбора материала, формы и толщины наружных заплаток в критических областях трубы, гарантирующих заданный срок эксплуатации трубопровода;

2) возможность спроектировать конструкцию трубопровода из более легких труб, из другого материала или с меньшей толщиной стенок, наращивая стенки только в критических областях, снижая тем самым общую стоимость проекта.

1. *Никитин П. В.*, *Пайко В. В.*, *Фролов Ю. П.* Способ и устройство для нанесения защитных покрытий холодным газодинамическим методом // Деп. ВИНИТИ 2258-В96. 1996.
2. *Borisov S. A.*, *Glukhovskaya Y. I.*, *Dobrovolskiy S. V.*, *Nikitin P. V.*, *Podporin I. V.* Concept of an Experimental Setup for Testing the Technology for the Formation of New Anti-Corrosion Coating Materials Using Low-Temperature Supersonic Heterogeneous Flows // TEM J. — 2020. — V. 9, Issue 2. — P. 566–572.
3. *Borisov S.*, *Gloukhovskaya J.*, *Dobrovolskiy S.*, *Myakochin A.*, *Podporin I.* Mechanism of heterogeneous flow — solid substrate interaction on the formation of coatings of different thicknesses using different types of spray accelerators // MATEC Web of Conferences. — 2022. — V. 362. — 01004. — DOI: 10.1051/matecconf/202236201004.
4. *Строкач Е. А.*, *Кожевников Г. Д.*, *Пожидаев А. А.* Численное моделирование процесса эродирования твердыми частицами в газовом потоке // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. — 2021. — №67.
5. Курсы по работе с ANSYS [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https://courses.ansys.com/index.php/courses`.
6. SolidWorks API Документация [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https://www.solidworks.com/partner-product/video-tutorials-solidworks-api`.

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕТАНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЕДИНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ. КРИВАЯ НАСЫЩЕНИЯ*

В. Ю. Гидаспов, М. Д. Денисов, Ф. Т. Кули-заде

МАИ, Москва, Россия

Для описания термодинамических свойств метана в газообразном и жидком состояниях в литературе [1–3] предлагается использовать единое выражение для потенциала Гельмгольца

$$F(\rho, T) = RT\left[f_0\left(\frac{\rho}{\rho_c}, \frac{T_c}{T}\right) + f_r\left(\frac{\rho}{\rho_c}, \frac{T_c}{T}\right)\right], \tag{1}$$

где ρ — плотность; T — температура; R — газовая постоянная метана; ρ_c, T_c — плотность и температура в критической точке; $f_0 - f_r$ — «идеальная» и «реальная» составляющие потенциала Гельмгольца.

Для обеспечения неотрицательности значений давления, теплоемкостей и скорости звука выражение для потенциала Гельмгольца должно удовлетворять четырем соотношениям:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T > 0, \quad -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_\rho > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\, \partial T}\right) > 0, \quad \rho\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\right)_T + 2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T > 0.$$

Данные условия могут нарушаться при температурах ниже чем в критической точке. Например, при температуре $T = 140$ K условия выполняются для значений плотности из интервалов $[0, 30]$ и $[375, 500]$ кг/м^3. Данный факт необходимо учитывать при разработке вычислительных алгоритмов для расчета параметров метана в области ниже критической точки.

Одной из решаемых задач является расчет термодинамических свойств метана при заданных давлении и температуре. Давление находится из (1) путем решения нелинейного уравнения

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T = \frac{p}{\rho^2}. \tag{2}$$

При заданном давлении и температуре ниже критической уравнению (2) удовлетворяет два значения плотности. Физически допустимым является то решение, у которого меньше потенциал Гиббса (химический потенциал)

$$G = F + \frac{p}{\rho}. \tag{3}$$

Рассмотрим зависимость приведенного потенциала Гиббса от давления (рис. 1). Кривая 1 соответствует значениям плотности из первого интервала, кривая 2 — из второго. Из рис. 1 видно, что при давлении от 10^4 до $1{,}2 \cdot 10^6$ Па существует два решения, при более высоких давлениях — одно. При давлении от 10^4 до $6{,}412 \cdot 10^5$ (давление насыщения) физически допустимым является решение, соответствующее газовой фазе, при давлении от $6{,}412 \cdot 10^5$ до $1{,}257310^6$ — жидкой.

На рис. 2 приведена рассчитанная кривая насыщения метана — линия на плоскости p–T на которой равны потенциалы Гиббса газообразной и жидкой фаз [4, 5].

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (номер темы FSFF-2023-0008).

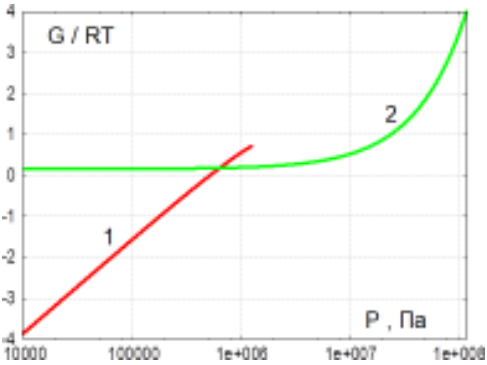


Рис. 1. Зависимость приведенного химического потенциала метана от давления при 140 K

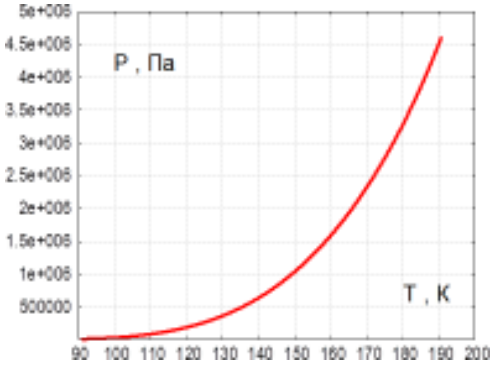


Рис. 2. Кривая насыщения метана

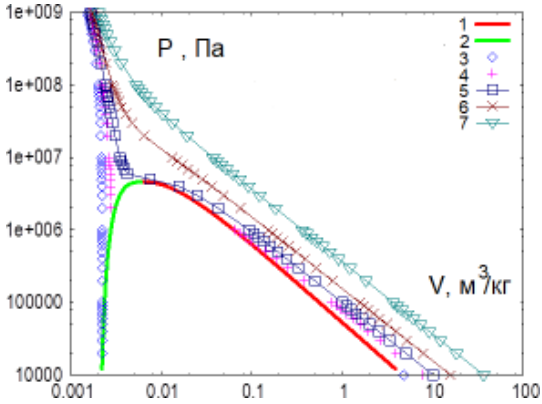


Рис. 3. Зависимость давления от удельного объема при различных температурах. Кривая насыщения: 1 — газовая фаза; 2 — жидкая фаза; 3 — $T = 92$ K; 4 — 150 K; 5 — 192 K; 6 — 300 K; 7 — 700 K

На рис. 3 представлены рассчитанные изотермы давления на фазовой плоскости p–V. Ниже критической точки приведена кривая насыщения, разделяющая газовую и жидкую фазы.

1. *Shetzman U.*, *Wagner W.* A New Equation of State and Tables of Thermodynamic Properties for Methane Covering the Range from the Melting Line to 625 K at Pressures up 1000 MPa // J. Phys. Chem. Ref. Data. — 1991. — V. 20, No. 6.
2. *Сычев В. В.*, *Вассерман А. А.*, *Загорученко В. А.*, *Козлов А. Д.*, *Спиридонов Г. А.*, *Цимарный В. А.* Термодинамические свойства метана: ГСССД. — М.: Изд-во стандартов, 1979. — 348 с.
3. ГОСТ Р 8.1020-2023. Метан жидкий и газообразный. Термодинамические свойства, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности в диапазоне температур от 91 до 700 K и давлениях до 100 МПа. — М.: Российский институт стандартов, 2023. — 40 с.
4. *Гидаспов В. Ю.* Численное моделирование стационарных детонационных волн в смеси частиц алюминия с воздухом // Труды МАИ. — 2011. — №49. — С. 83.
5. *Гидаспов В. Ю.*, *Москаленко О. А.* Численное моделирование многофазных течений с физико-химическими превращениями в каналах. — М.: Изд-во МАИ, 2022. — 240 с.

ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ПАРОЖИДКОСТНОГО МЕТАНА*

В. Ю. Гидаспов, О. А. Москаленко

МАИ, Москва, Россия

Рассмотрим автомодельное течение в центрированном веере волн разрежения [1]. Если принять за координату цента веера точку $(0, 0)$ то параметры течения зависят от переменной $\xi = x/t$. Уравнения одномерной нестационарной газовой динамики в характеристической форме имеют вид

$$C^0\colon \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad dS = 0; \qquad C^{\pm}\colon \quad \frac{dx}{dt} = u \pm a, \quad du \pm \frac{1}{\rho a} dp = 0. \tag{1}$$

Для замыкания (1) в работе используется единое уравнение состояния для метана [2]

$$F(\rho, T) = RT\left[f_0\left(\frac{\rho}{\rho_c}, \frac{T_c}{T}\right) + f_r\left(\frac{\rho}{\rho_c}, \frac{T_c}{T}\right)\right], \tag{2}$$

Течение будем рассматривать в равновесной постановке. Пусть веер волн разрежения, образован характеристиками семейства C^- (рис. 1) и известны параметры слева от веера (u_0, p_0, T_0) и давление справа от веера $p_1 < p_0$. Параметры течения внутри веера зависят от автомодельной переменной $\xi = x/t = u - a$ и могут быть рассчитаны из нелинейного уравнения относительно давления, являющегося следствием системы (1):

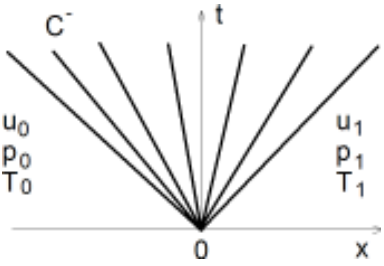


Рис. 1. Центрированный веер волн разрежения (C^-) (u — скорость, p — давление, T — температура)

$$\xi + a(p) - u_0 + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho(p)\, a(p)}\, dp = 0.$$

Зависимости плотности и скорости звука от давления $(\rho(p), (p))$ определяются из замыкания (2) и условия сохранения энтропии $S(p, T) = S_0 = S(p_0, T_0)$.

В веере волн разрежения давление уменьшается и кривая расширения может пересечься с кривой насыщения. Например, в случае, если начальная приведенная энтропия [2] равна -6, то при достижении давления $2 \cdot 10^6$ Па и последующем уменьшении давления для обеспечения изоэнтропийности процесса должна происходить конденсация паров метана. Таким образом, для расчета изоэнтропического расширения термодинамические свойства метана должны быть определены в двухфазной области.

Введем массовую долю жидкой фазы ζ при фазовом переходе [3]. Удельный потенциал Гиббса и его частные производные по давлению и температуре для газо-жидкостной смеси запишем как линейные функции ζ. Например:

$$G(p, T) = G_L(p, T)\zeta + G_V(p, T)(1 - \zeta), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_L(p, T)}\zeta + \frac{1}{\rho_V(p, T)}(1 - \zeta). \tag{3}$$

С использованием (3) могут быть рассчитаны произвольные термодинамические функции, включая потенциал Гельмгольца и его частные производные по температуре и плотности, энтальпия, энтропия, скорость звука и т. д.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (номер темы FSFF-2023-0008).

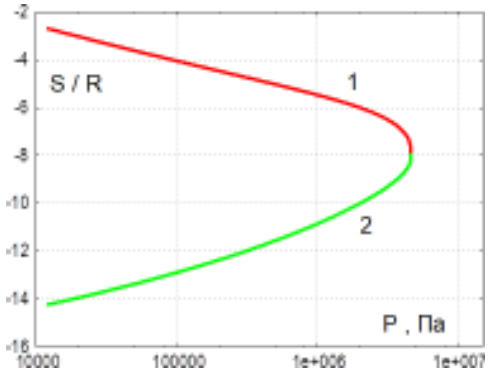


Рис. 2. Зависимость приведенной энтропии [2] от давления вдоль кривой насыщения: 1 — газовая фаза; 2 — жидкая фаза; газовая постоянная $R = 518{,}2705$ Дж/(кг · К)

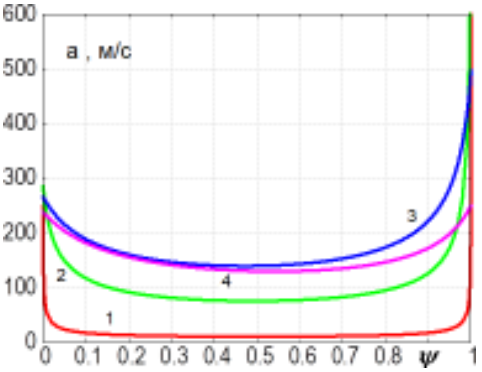


Рис. 3. Зависимость скорости звука от объемной доли жидкой фазы на кривой насыщения: 1 — $T = 92$ К; 2 — 140 К; 3 — 180 К; 4 — 190 К ($\psi = \dfrac{\zeta\rho_V(p,T)}{\zeta\rho_V(p,T) + (1-\zeta)\rho_L(p,T)}$. Плотность на кривой насыщения: ρ_L — жидкая фаза, ρ_V — газовая фаза)

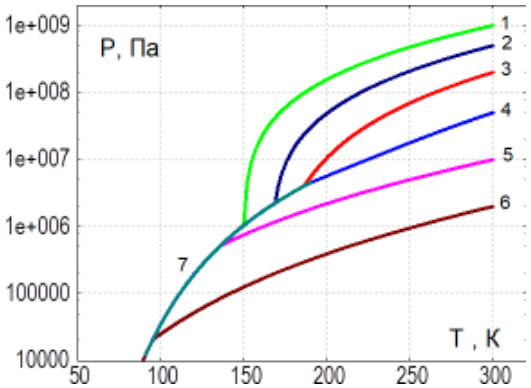
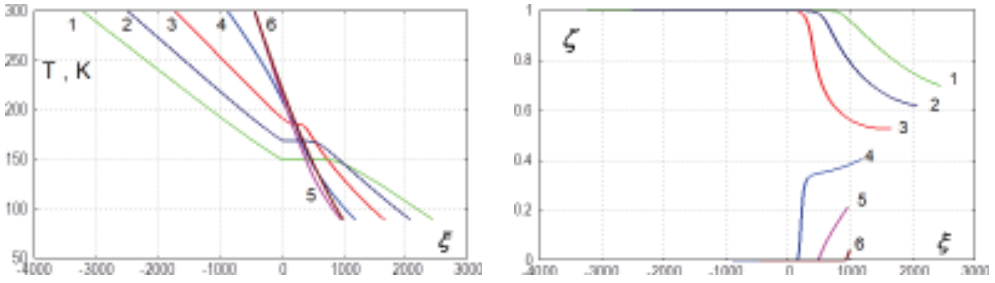


Рис. 4. Зависимость давления от температуры в веере волн разрежения при различных значениях давления p_0: 1 — 10^9 Па; 2 — $5 \cdot 10^8$; 3 — $2 \cdot 10^8$; 4 — $5 \cdot 10^7$; 5 — 10^7; 6 — $2 \cdot 10^6$; 7 — кривая насыщения метана



а *б*

Рис. 5. Распределения температуры (*а*) и массовой доли жидкой фазы (*б*) в веере волн разрежения при различных значениях давления p_0 ($p_1 = 10^4$ Па, $T_0 = 300$ К, 1 — 10^9 Па; 2 — $5 \cdot 10^8$; 3 — $2 \cdot 10^8$; 4 — $5 \cdot 10^7$; 5 — 10^7; 6 — $2 \cdot 10^6$)

Необходимо отметить, что, как известно [4], скорость звука в двухфазной области может быть существенно ниже, чем в однофазной.

Численно решается система уравнений (1)–(3) при различной начальной энтропии (рис. 4 и 5). Кривые 1–3 соответствуют энтропии жидкой фазы (рис. 2) и подходят к кривой насыщения слева на фазовой плоскости p–T (рис. 4), кривые 4–6 соответствуют энтропии газовой фазы и подходят к кривой насыщения справа. Далее расширение происходит по кривой насыщения и сопровождается фазовым переходом рис. 5. Фазовому переходу жидкость–пар соответствует полочка на графиках температуры внутри веера волн разрежения (рис. 5, *а*).

1. *Гидаспов В. Ю.*, *Северина Н. С.* Элементарные модели и вычислительные алгоритмы физической газовой динамики. Одномерные нестационарные течения: Учеб. пособ. — М.: Факториал, 2015. — 84 с.
2. *Shetzman U.*, *Wagner W.* A New Equation of State and Tables of Thermodynamic Properties for Methane Covering the Range from the Melting Line to 625 K at Pressures up 1000 MPa // J. Phys. Chem. Ref. Data. — 1991. — V. 20, No. 6.
3. *Гидаспов В. Ю.* Численное моделирование стационарных волн горения и детонации в смеси частиц бора с воздухом // Труды МАИ. — 2016. — №91. — С. 3.
4. *Накоряков В. Е.*, *Покусаев Б. Г.*, *Шрайбер И. Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 248 с.

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В ПАРОЖИДКОСТНОМ МЕТАНЕ*

В. Ю. Гидаспов, Н. С. Северина

МАИ, Москва, Россия

Решение задачи о распаде произвольного разрыва [1, 2] для различных сред и в различных постановках представляет значительный научный интерес, так как ее приближенные решатели составляют основу численных схем расчета многомерных многофазных течений с физико-химическими превращениями. Алгоритм решения данной задачи в газе с произвольным уравнением состояния приводится в работах [2–4]. Необходимым элементом для решения является вид термического и калорического уравнений состояния. В данной работе будем рассматривать метан, свойства которого в газовой и жидкой фазе описываются единым уравнением состояния — выражением для потенциала Гельмгольца $F(\rho, T)$ [5].

В соответствии с [5] будем рассматривать метан при температурах $90{,}6941\ \text{K} < T < 700\ \text{K}$ и давлениях $0{,}011696\ \text{МПа} < p < 1000\ \text{МПа}$. Для корректного расчета термодинамических свойств метана выражение для потенциала Гельмгольца должно удовлетворять ряду свойств:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T > 0, \quad -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_\rho > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\, \partial T}\right) > 0, \quad \rho\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\right)_T + 2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T > 0.$$

Данные неравенства всегда выполняются при температуре превышающей критическую (T_c), и могут нарушаться при температуре меньшей критической. Обозначим через $\rho_V = \rho_V(T)$ — плотность на кривой насыщения [5], соответствующую газовой фазе, а через $\rho_L = \rho_L(T)$ — жидкой фазе. В интервале плотностей

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (номер темы FSFF-2023-0008).

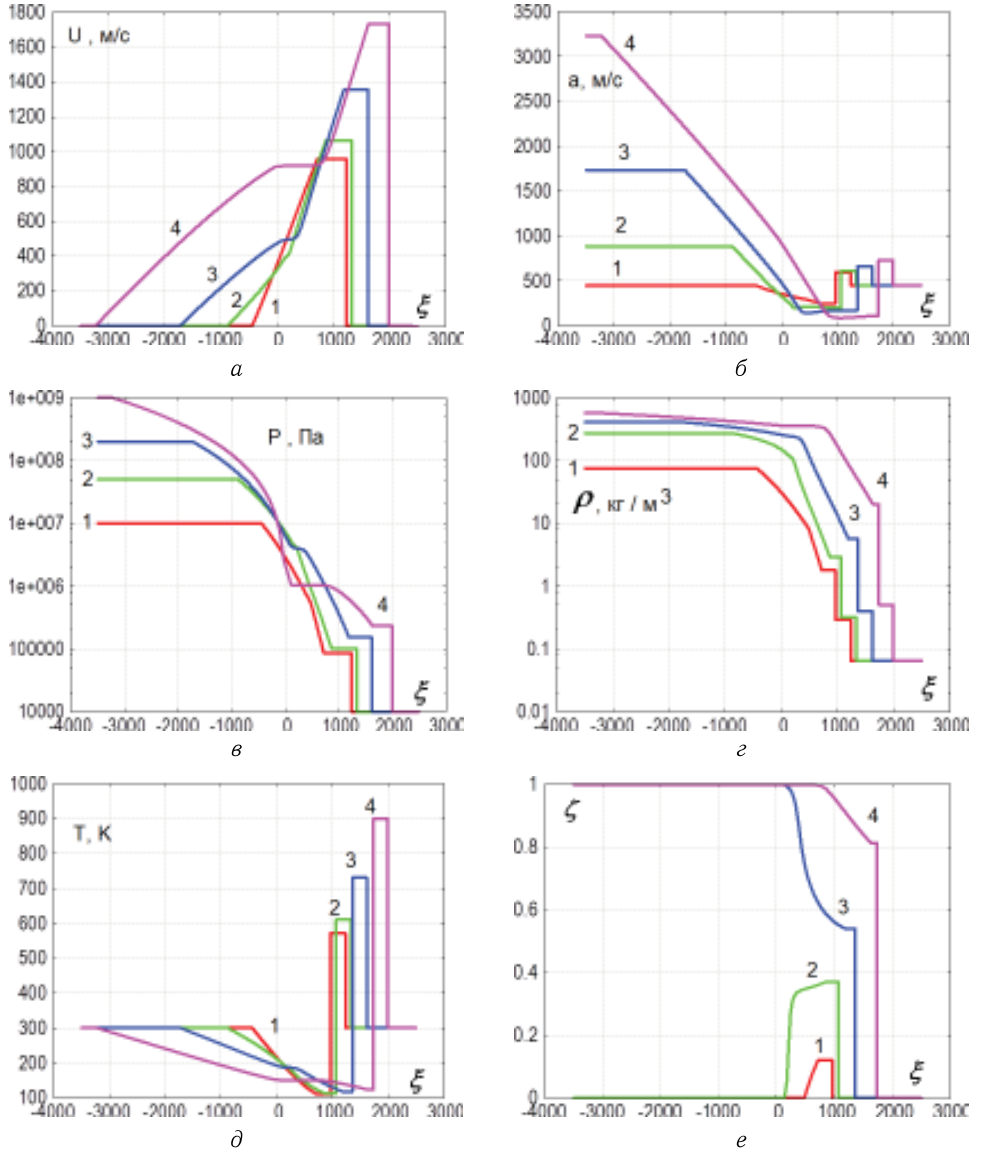


Рис. 1. Зависимости скорости (*а*), скорости звука (*б*), давления (*в*), плотности (*г*), температуры (*д*), массовой доли жидкой фазы (*е*) от автомодельной переменной при различных значениях давления: 1 — $p_L = 10^7$ Па; 2 — $5 \cdot 10^7$; 3 — $2 \cdot 10^8$; 4 — 10^9

$\rho_V < \rho < \rho_L$ будем считать смесь двухфазной с массовой долей жидкой фазы равной $\zeta = (1/\rho - 1/\rho_L)/(1/\rho_V - 1/\rho_L)$, тогда можно задать выражение для потенциала Гельмгольца приводящее к корректным результатам расчетов, как в однофазной, так и двухфазной областях [5, 6]:

$$\widetilde{F}(\rho, T) = \begin{cases} F(\rho, T), & T > T_C \cup \big(T < T_C \cup (\rho < \rho_1 \cap \rho > \rho_2)\big), \\ F(\rho_L, T)\zeta + F(\rho_V, T)(1-\zeta), & T < T_C \cup \rho_V < \rho < \rho_L. \end{cases}$$

Все остальные, необходимые для проведения расчетов термодинамические функции могут быть рассчитаны с использованием выражений для потенциала Гельмгольца и его частных производных по плотности и температуре.

На рис. 1 приведены результаты численного решения задачи о распаде произвольного разрыва в метане при различных начальных значениях давления слева от разрыва (скорости равнялись 0, температура 300 K).

Необходимо отметить, что при изоэнтропическом расширении в веере волн разрежения в рамках используемой равновесной модели реализовывался фазовый переход пар-жидкость кривые 1, 2 рис. 1, *е*, жидкость–пар — кривые 3, 4.

1. *Годунов С. К.*, *Забродин А. В.*, *Иванов М. Я.*, *Крайко А. Н.*, *Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
2. *Гидаспов В. Ю.*, *Северина Н. С.* Элементарные модели и вычислительные алгоритмы физической газовой динамики. Одномерные нестационарные течения: Учеб. пособ. — М.: Едиториал УРСС, 2015. — 84 с.
3. *Shetzman U.*, *Wagner W.* A New Equation of State and Tables of Thermodynamic Properties for Methane Covering the Range from the Melting Line to 625 K at Pressures up 1000 MPa // J. Phys. Chem. Ref. Data. — 1991. — V. 20, No. 6.
4. *Накоряков В. Е.*, *Покусаев Б. Г.*, *Шрайбер И. Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 248 с.
5. *Гидаспов В. Ю.* Вычислительный алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва в равновесно-реагирующем газе // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, №8. — С. 64–76.
6. *Гидаспов В. Ю.*, *Зыонг Д. М.* Влияние свойств реального газа на распад разрыва в детонирующем газе // Труды МАИ. — 2022. — №123.

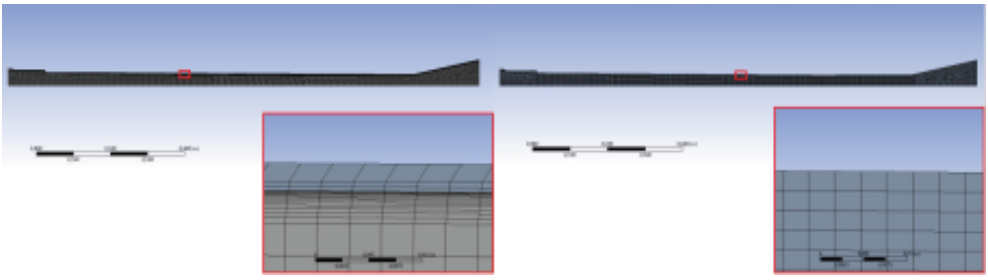
МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ ЗАРЯДА ТВЕРДОГО ТОПЛИВА

Н. Р. Гимаева, Л. Л. Миньков

ТГУ, Томск, Россия

Энергетические устройства (ЭУ) широко используются в аэрокосмической промышленности благодаря своей простоте, высокой эффективности и надежности. Канал заряда бессопловой ЭУ профилируется таким образом, чтобы выход его части имитировал сопло, разгоняющее поток двухфазных продуктов сгорания до нужных параметров. Создание критических условий течения продуктов сгорания в сечении канала перед расширяющейся «сопловой» частью может привести к большим напряжениям в зонах контакта заряда с элементами камеры сгорания и деформациям канала, способным разрушить заряд в начале квазистационарного участка работы ЭУ. Условия, предъявляемые к физико-механическим свойствам твердых топлив (ТТ) в широком температурном диапазоне эксплуатации $(-45, +70)\,^{\circ}\mathrm{C}$ требуют комплексного подхода к разработке конструкции и выбору материалов. Управление модулем упругости ТТ представляет собой сложную задачу, поскольку снижение или увеличение этого параметра может оказать разное влияние на напряжения и деформации в зоне скрепления и канале заряда при разных температурах.

В связи с тем, что задачу нестационарной газовой динамики о течении продуктов сгорания предполагается решать совместно с задачей зажигания заряда ТТ, то расчетная область для разных постановок будет иметь отличия: для решения сопряженной задачи сеточная область включает не только канал, но и твердотельную область, имитирующую ТТ, для нахождения температуры поверхности ТТ посредством решения обыкновенного дифференциального уравнения достаточно моделировать только канал (рис. 1).



а *б*

Рис. 1. Сеточная область для решения сопряженной задачи (*а*) и нахождения температуры поверхности путем решения дифференциального уравнения (*б*)

Мембрана в начальный момент времени моделируется твердой стенкой. После достижения на твердой стенке давления вскрытия, твердая стенка заменяется на выходную границу. Рассмотрена модель турбулентного течения сжимаемого вязкого газа. Программная реализация модели осуществлена средствами Ansys Fluent.

Проведено численное моделирование процесса зажигания поверхности ТТ продуктами сгорания инициирующего устройства в бессопловой ЭУ с учетом вскрытия мембраны, что позволяет определить время выхода на режим ЭУ. Следует отметить, что при подключении к горению части топлива в области критического сечения канала ЭУ наблюдается скачок давления внутри канала. Показано, что разные подходы в моделировании процесса зажигания ТТ приводят к различиям в распределении давления вдоль поверхности ТТ, время зажигания ТТ вблизи инициирующего устройства в обоих случаях около 35 мс, ближе к критическому сечению и далее по потоку время зажигания для случая, где температура ТТ была найдена путем решения обыкновенного дифференциального уравнения — 45 мс, нестационарного уравнения теплопроводности — 38 мс. Полученные результаты открывают перспективы для дальнейших исследований и разработок в области создания более эффективных бессопловых ЭУ. Контроль за процессом зажигания может привести к повышению надежности и эффективности этих систем.

1. Специалисты по взрывчатым веществам, пиротехнике и боеприпасам // Биографическая энциклопедия. — М.: АвиаРус-XXI, 2006.
2. *Qiang Li*, *PeijinLiu*, *Guoqiang He*. Fluid–solid coupled simulation of the ignition transient of solid rocket motor // Acta Astronautica. — 2015. — V. 110. — P. 180–190. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2015.01.017.
3. *Goodman T. R.* Integral Methods for nonlinear heat transfer // Advances in Heat Transfer / Ed. by T. Irvine, J. Hartnett. — New-York: Academic Press, 1964. — V. 1. — P. 51–122.
4. Взрывчатые вещества, пиротехника, средства инициирования в послевоенный период: Люди. Наука. Производство. — М.–СПб: Гуманистика, 2001. — 928 с.
5. *Соркин Р. Е.* Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. Внутренняя баллистика. — М.: Наука, 1983. — 288 с.

КОЭФФИЦИЕНТ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КАК ГЛАВНАЯ СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ХОРОШО ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА

С. О. Гладков, Н. С. Нагибин

МАИ, Москва, Россия

В настоящем сообщении речь пойдет о вычислении коэффициента лобового сопротивления для тела, имеющего форму капли. Такая форма, как отмечается в монографии [1], представляет собой идеально обтекаемое тело, но при этом подразумевается, что число Маха невелико, а угол атаки равен нулю. В этом случае мы имеем дело с чисто лобовым обтеканием.

При решении этой задачи мы будем опираться на работу [2]. То есть, речь пойдет о центральном сечении капли, толщину которой h будем считать конечной. Контур этого двухмерного сечения будем обозначать с помощью функции $\eta(x)$.

Согласно [1] коэффициент лобового сопротивления введем с помощью определения:

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S}, \tag{1}$$

где ρ — плотность континуума, u — скорость течения, S — полная площадь поверхности, F_x — сила сопротивления.

Исходя из (1), полную площадь можно вычислить, воспользовавшись следующим выражением:

$$S = 2\int_0^a \eta(x)\,dx + 2h\int_0^a \sqrt{1+\eta'^2}\,dx, \tag{2}$$

где a — максимальная длина капли вдоль оси x, а h — толщина центрального сечения вдоль оси y перпендикулярной плоскости сечения.

Множитель «2» появляется благодаря учету осевой симметрии сечения относительно оси x.

Следуя работе [2], силу сопротивления будем вычислять по формуле:

$$F_x = 2\mu h u a\int_0^a H\,dx, \tag{3}$$

где μ — динамическая вязкость.

Подынтегральная функция согласно [2] есть

$$H = \frac{1}{x^2}\left[\left(2G + \frac{\eta}{x}G'\right)\eta' + G'\left(1 - \frac{\eta^2}{x^2}\right) - \frac{2\eta}{x}G - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{a}{x}G\right)\eta''\right]\Bigg|_{\xi=\eta/x}, \tag{4}$$

где функция

$$G(\xi) = \frac{1}{C(\xi^2+1) - \dfrac{R}{4}[\xi + (\xi^2+1)\operatorname{arctg}\xi]}, \tag{5}$$

а ее аргумент $\xi = \eta(x)/x$, C — безразмерная константа интегрирования.

Перепишем формулу (5) вместе с ее производной в виде

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{t^2}{C(t^2+f^2) - 0{,}25R[tf + (t^2+f^2)\operatorname{arctg}(f/t)]}, \\ G'(\xi) &= \frac{t^4[(t^2+f^2)(Rt - 4Cf) + t^2Rf\operatorname{arctg}(f/t)]}{2a(t^2+f^2)\{C(t^2+f^2) - 0{,}25R[tf + (t^2+f^2)\operatorname{arctg}(f/t)]\}^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

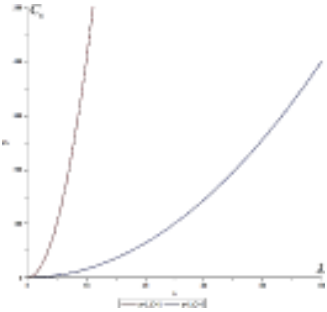


Рис. 1

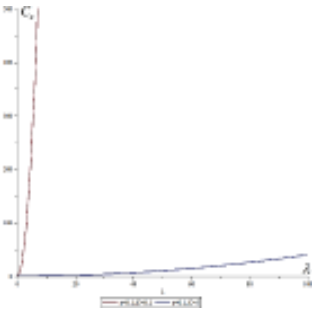


Рис. 2

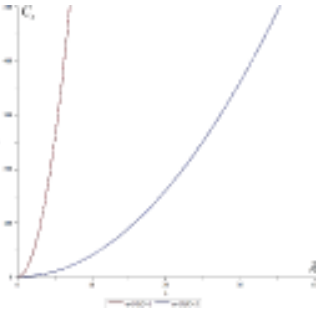


Рис. 3

где независимый аргумент t введен согласно замене $x = at$, а функция

$$f = f(t) = te^{-\alpha t}, \tag{7}$$

где α — безразмерный феноменологический множитель.

В результате для коэффициента лобового сопротивления найдем

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S} = \frac{2h}{aR}\xi(\alpha)J, \tag{8}$$

где число Рейнольдса $R = au/\nu$, множитель $\xi(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{[1-(\alpha+1)e^{-\alpha}]}$.

$$J = \int_0^1 H(t, R, C, \lambda)\, dt, \tag{9}$$

где подынтегральная функция приводится к виду

$$H(t, R, C, \lambda) = \alpha(2-\alpha)e^{-\alpha t} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha t}}{\psi} + \frac{\varphi_1\varphi_2}{2\psi^2}. \tag{10}$$

А все фигурирующие в ней безразмерные функции есть

$$\varphi_1 = \varphi_1(\alpha, \lambda) = \frac{1 + (1 - \alpha t - \lambda^2)e^{-2\alpha t}}{1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t}},$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(\alpha, \lambda, C, R) = \frac{R}{t}\left[1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t} - 4\lambda C e^{-\alpha t}(1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t})\right] + \frac{\lambda \operatorname{Re}^{-\alpha t}}{t^2}\operatorname{arctg}(\lambda e^{-\alpha t}),$$

$$\psi = \psi(\alpha, \lambda, C) = C[1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t} + \operatorname{arctg}(\lambda e^{-\alpha t})] + \lambda e^{-\alpha t}, \tag{11}$$

$$\lambda = b/a. \tag{12}$$

В результате всех выкладок находим окончательно

$$C_x = \frac{h\lambda}{2l}\frac{\xi(\alpha)(2-\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda}{[C(1+\lambda^2+\operatorname{arctg}\lambda)+\lambda]^2(1+\lambda^2)}. \tag{13}$$

Видно, что при $\alpha = 0$ $\xi(0) = 1$.

В случае, если $\lambda \ll 1$ (продольный размер тела значительно превышает его поперечный размер) коэффициент лобового сопротивления стремится к нулю по закону

$$C_x \approx \frac{h\lambda^2}{lC^2}\xi(\alpha) \sim \lambda^2. \tag{14}$$

Исходя из численного интегрирования соотношения (13), для разных значений входящих в него параметров, полученные зависимости можно проиллюстрировать с помощью рис. 1–3.

Закачивая сообщение, стоит отметить:

1) вычислен коэффициент лобового сопротивления капли, форму которой мы аппроксимировали главным сечением по оси симметрии с конечной шириной h;

2) найденная зависимость проиллюстрирована графически для разных значений параметров.

1. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Т. 6. — М.: Наука, 1988. — 733 с.
2. *Гладков С. О.*, *Нагибин Н. С.* К вопросу аналитического определения наилучшей формы обтекания тел в вязком континууме // Известия вузов. Физика. — 2024. — Т. 67, В. 3. — С. 39–52.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ОСТРОГО КОНУСА В ТРУБЕ ЛЮДВИГА — ТЕСТОВЫЙ СЛУЧАЙ*

С. А. Глазков, А. Р. Горбушин, М. С. Грибкова, Д. И. Дугин, А. Д. Епихин, А. Е. Козик, Е. А. Крапивина, В. Е. Мошаров, В. Н. Радченко

ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия

В трубе Людвига УТ-1М (ЦАГИ) в диапазоне числа $\mathrm{Re} = (7–26) \cdot 10^6$ проведены экспериментальные исследования канонического тела — острого конуса с углом раствора 10° и длиной 0,96 м (рис. 1) при больших сверхзвуковых скоростях. Предварительно выполнены расчеты (RANS) обтекания конуса в трубе с помощью пакета EWT-ЦАГИ для определения оптимального положения конуса и приемника типа Пито–Прандтля в рабочей части. Одновременно измерялись нестационарные аэродинамические нагрузки с помощью внутримодельных шестикомпонентных тензометрических весов, динамическое поведение конуса и тензометрических весов с помощью трехосевых акселерометров, нестационарные давления на поверхности конуса и приемника типа Пито–Прандтля датчиками Kulite, температура поверхности конуса с помощью термочувствительной краски [1], пульсации температуры с помощью термоанемометра постоянного напряжения с пленочным датчиком и

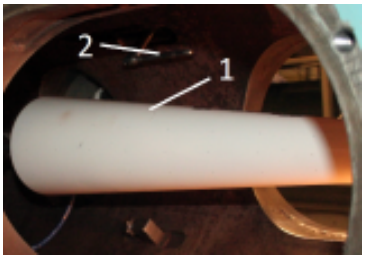


Рис. 1. Конус в рабочей части УТ-1М: 1 — конус; 2 — приемник Пито–Прандтля

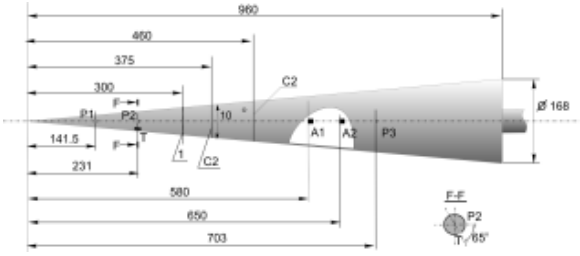


Рис. 2. Схема конуса с расположением датчиков. P1–P3 — датчики давления Kulite XCS-062-5D; A1, A2 — акселерометры Dytran3333A2; T — пленочный датчик термоанемометра; 1 — турбулизатор; C2 — стыки элементов конуса

*Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ №23-19-00041.

визуализация обтекания теневым методом. Схема конуса с расположенными на нем датчиками представлена на рис. 2.

По измеренной температуре поверхности конуса определялось распределение числа Стэнтона (рис. 3) и ламинарно-турбулентный переход пограничного слоя на поверхности конуса. Положение начала (Ret) и окончания (ReT) ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя на поверхности конуса при нулевом угле атаки в зависимости от единичного числа Рейнольдса Re_1 приведено на рис. 4 в сравнении с результатами других исследований.

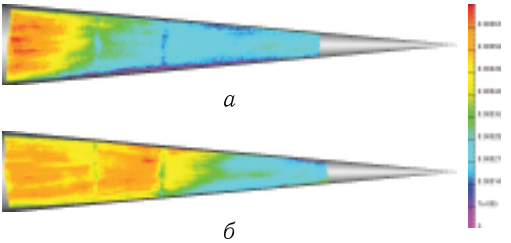


Рис. 3. Распределение числа Стэнтона по поверхности конуса при $Re = 8{,}1 \cdot 10^6$ (*а*) и $12{,}2 \cdot 10^6$ (*б*)

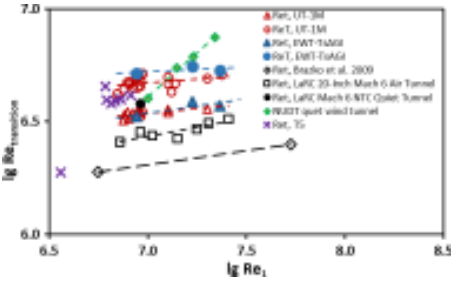


Рис. 4. Положение ламинарно-турбулентного перехода на поверхности конуса

На рис. 5 приведены зависимости полного давления в процессе пуска установки от времени: показания приемника Пито Pt′: скорректированные показания приемника Пито Pt′ cor на влияние полости между датчиком и приемным отверстием (резонатор Гельмгольца) разработанным в [2] методом; результаты стационарного расчета программой EWT-TsAGI; результаты расчета по уравнениям газовой динамики, используя полное давление в форкамере и число Маха на срезе сопла (2). На рис. 6 приведены зависимости статического давления от времени: статическое давление, измеренное приемником Прандтля P; давления P1, P2, P3 на боковой поверхности конуса (рис. 2); донное давление P4; статическое давление, рассчитанное по полному давлению в форкамере и числу Маха на срезе сопла Ps; статическое давление, вычисленное программой EWT-TsAGI.

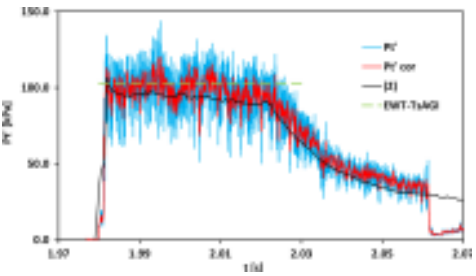


Рис. 5. Полное давление за прямым скачком уплотнения в зависимости от времени

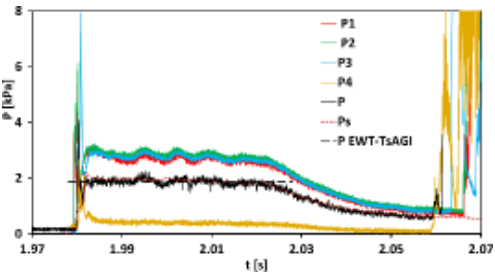


Рис. 6. Статическое давление в зависимости от времени

Продольная компонента силы AF, измеренная тензометрическими весами, и сила сопротивления конуса D, рассчитанная разработанным в [3] методом, показаны на рис. 7. Амплитуда продольных колебаний конуса, вызванных силой AF, составила 0,03 мм на частоте 168 Гц. Значения коэффициента сопротивления конуса при двух значениях числа Рейнольдса приведены на рис. 8 в зависимости от

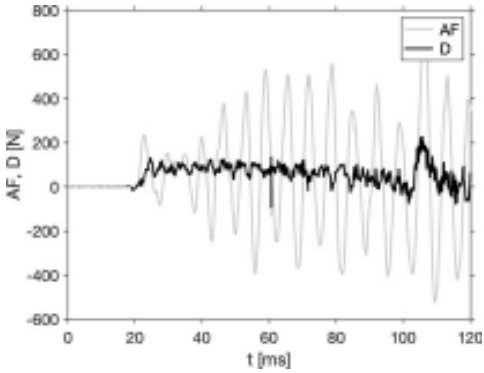


Рис. 7. Продольная сила AF и сила сопротивления D конуса, в зависимости от времени при $\mathrm{Re}_l \approx 25 \cdot 10^6$ и нулевом угле атаки

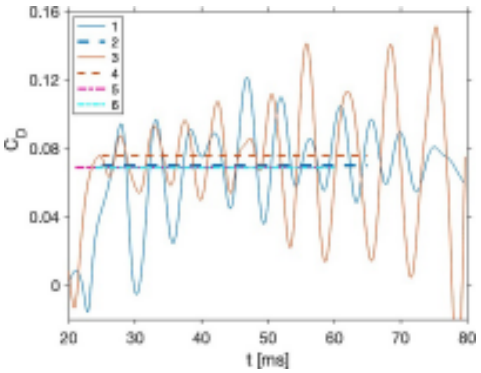


Рис. 8. Коэффициент сопротивления в зависимости от времени: 1 — $\mathrm{Re}_l \approx 8{,}9 \cdot 10^6$; 2 — среднее значение $C_D = 0{,}070$; 3 — $\mathrm{Re}_l \approx 25{,}6 \cdot 10^6$; 4 — среднее значение $C_D = 0{,}076$; 5 — EWT-TsAGI при $\mathrm{Re}_l \approx 25 \cdot 10^6$, $C_D = 0{,}0689$; 6 — EWT-TsAGI при $\mathrm{Re}_l \approx 8{,}5 \cdot 10^6$, $C_D = 0{,}0688$

времени. Колебания коэффициента сопротивления на частоте 168 Гц обусловлены продольными колебаниями конуса. На рисунке также приведены стационарные результаты, полученные программой EWT-TsAGI.

Получены уникальные экспериментальные данные нестационарного обтекания острого конуса в трубе Людвига (тестовый случай) для валидации вычислительных программ.

1. *Borovoy V.*, *Mosharov V.*, *Noev A.*, *Radchenko V.* Temperature sensitive paint application for investigation of boundary layer transition in short-duration wind tunnels // EUCASS Proceedings Series — Advances in AeroSpace Sciences. — 2012. — V. 3. — P. 15–24.
2. *Gorbushin A.*, *Anokhina E.*, *Stolyarov E.* Unsteady pressure measurement in the presence of a cavity between the sensor and the flow // Sensors and Actuators A: Physical. — 2023. — V. 349. — 114095.
3. *Gorbushin A. R.*, *Kozik A. E.*, *Anokhina E. N.* Non-stationary load measurement using six-component strain-gauge balances // Measurement. — 2024. — V. 226. — 114176.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ РАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КОНТУРА С ПЛАЗМЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Б. В. Градов, А. В. Пролетарский

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Решение задач управления параметрами электрической цепи, содержащей в своем составе разряд в различных плазмообразующих средах, требует построения моделей формирования и развития плазменного столба для оптимизации длительности и крутизны фронтов импульса тока, электрического сопротивления разрядного промежутка, потерь энергии на электродах и в электрическом контуре и др. [1, 2]. При этом большое значение имеет термодинамический анализ состояния плазмы, во многом определяющий номенклатуру учитываемых в моделях

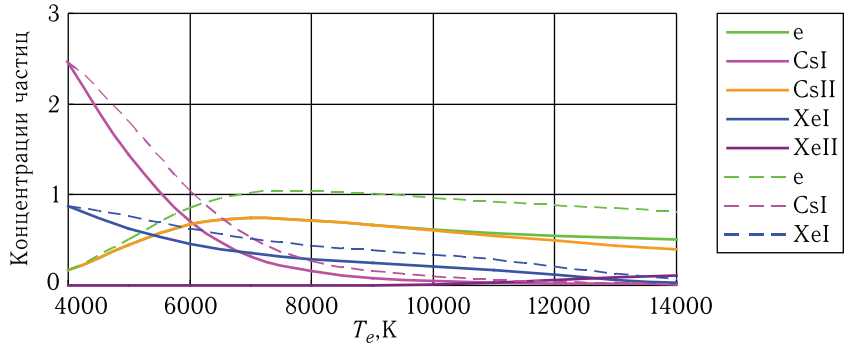


Рис. 1. Состав плазмы Cs–Xe в зависимости от электронной температуры. Сплошные линии — $T_e = T$ (равновесная плазма), пунктирные — $T = 4000$ K (неравновесная плазма). Давление $p = 0{,}2$ МПа, соотношение числа тяжелых частиц Cs и Xe — 3 : 1. Концентрация частиц в единицах 10^{18} см$^{-3}$

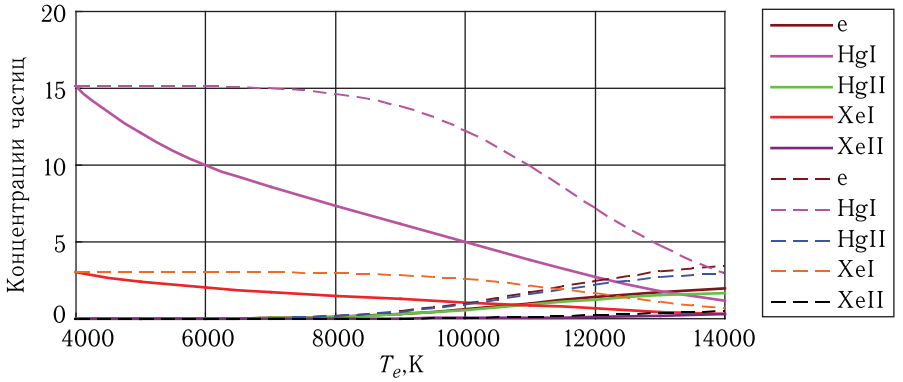


Рис. 2. Состав плазмы Hg–Xe в зависимости от электронной температуры. Сплошные линии — $T_e = T$ (равновесная плазма), пунктирные — $T = 4000$ K (неравновесная плазма). Давление $p = 1{,}0$ МПа, соотношение числа тяжелых частиц Cs и Xe — 5 : 1. Концентрация частиц в единицах 10^{18} см$^{-3}$

процессов и содержание информационного оснащения моделирования [3, 4]. Во многих случаях эффекты неравновесности проявляются прежде всего в отрыве температур электронов T_e, и тяжелых частиц T. В настоящей работе построена двухтемпературная модель слабонеидеальной плазмы с больцмановским заселением уровней энергии тяжелых частиц и максвелловским распределением электронов по скоростям. Учитываются снижение потенциалов ионизации атомов и ионов [5], кулоновская добавка к давлению плазмы, поправки к статистическим весам верхних уровней энергии частиц в плазменных микрополях при расчете статистических сумм. Нелинейная модель состояния плазмы включает уравнения Саха с температурой T_e, уравнение закона Дальтона с температурами частиц T_e и T, соотношение тяжелых компонент разных сортов, уравнение квазинейтральности, уравнение для параметра неидеальности плазмы [5].

На рисунках 1 и 2 показано влияние температурного расслоения на концентрации электронов, атомов и первых ионов. В представленном диапазоне температур роль вторых ионов мала. Отличие одно- и двухтемпературных состояний достаточно заметно. Например, в случае состава с цезием концентрация электронов, определяющая электропроводность плазмы и электронную теплопроводность,

отличается при $T_e = 8000$ K почти на 30%. Для цезиевой плазмы из-за низкого потенциала ионизации Cs концентрация электронов значительна уже при низких температурах, поэтому отличие в тяжелых частицах здесь не так сильно, как в случае ртутной плазмы (рис. 2), где электроны появляются в заметном количестве при температуре T_e, начиная с 8000 K.

До этих значений Te концентрации HgI и XeI практически не зависят от электронной температуры. Концентрации электронов в ртуть-ксеноновой плазме тоже заметно изменяются при переходе к двухтемпературной модели.

В работе рассчитаны составы плазмы, внутренняя энергия, плотность, теплоемкость, скорость звука, а также величины, характеризующие отклонение плазмы от состояния идеального газа: снижение потенциала ионизации, поправка к давлению на кулоновское взаимодействие частиц, параметр неидеальности. В контексте оптимизации параметров разрядного контура исследованы смеси паров щелочных и щелочно-земельных металлов с ксеноном, которые могут рассматриваться в качестве рабочих плазмообразующих сред для источников излучения различного назначения [6, 7].

1. *Гавриш С. В.*, *Градов В. М.*, *Кузнецова А. В.*, *Терентьев Ю. И.* Математическое моделирование и исследование импульсных разрядных ламп инфракрасного излучения // Светотехника. — 2008. — №5. — С. 14–18.
2. *Градов В. М.*, *Гавриш С.В*, *Коробков С. С.*, *Пугачев Д. Ю.* Ультрафиолетовое излучение импульсно-периодических разрядов в инертных газах // Прикладная физика. — 2019. — №6. — С. 18–23.
3. *Филиппов М. В.*, *Коробков С. С.*, *Градов В. М.*, *Желаев И. А.* Ультрафиолетовое излучение импульсно-периодических разрядов высокого давления в ксеноне // Математика и математическое моделирование. — 2017. — №6. — С. 54–69.
4. *Гавриш С. В.*, *Кобзарь А. И.*, *Кугушев Д. Н.*, *Градов В. М.* Разработка модулируемых цезиевых источников ИК-излучения повышенной мощности // Прикладная физика. — 2010. — №2. — С. 85–90.
5. *Грязнов В. К.*, *Иосилевский И. Л.*, *Красников Ю. Г. и др.* Теплофизические свойства рабочих сред газофазного ядерного реактора. — М.: Атомиздат, 1980. — 304 с.
6. *Градов В. М.*, *Коробков С. С.*, *Терентьев Ю. И.* Моделирование нестационарных процессов в импульсных трубчатых ксеноновых лампах в условиях возврата в плазму отраженного излучения // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2019. — №1. — С. 90–108. — DOI: 10.18698/0236-3933-2019-1-90-108.
7. *Gradov V. M.*, *Gavrish S. V.*, *Rudakov I. V.* Thermal mode of sapphire shells and depth of modulation of radiation of pulsed-periodic sources of infrared radiation // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия Машиностроение. — 2019. — №1(124). — С. 4–15.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ВО ВРЕМЕНИ СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ РАЗРЯДОВ В ИНЕРТНЫХ ГАЗАХ

В. М. Градов

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Задачи оптимизации систем, использующих мощные импульсные источники селективного излучения с ксеноновым и криптоновым наполнениями, в области квантовой электроники, светотехники, различной облучательной и нагревательной техники, фототехнологий и многих других сферах ставят проблему детального изучения излучательных характеристик этих источников, к числу которых относятся

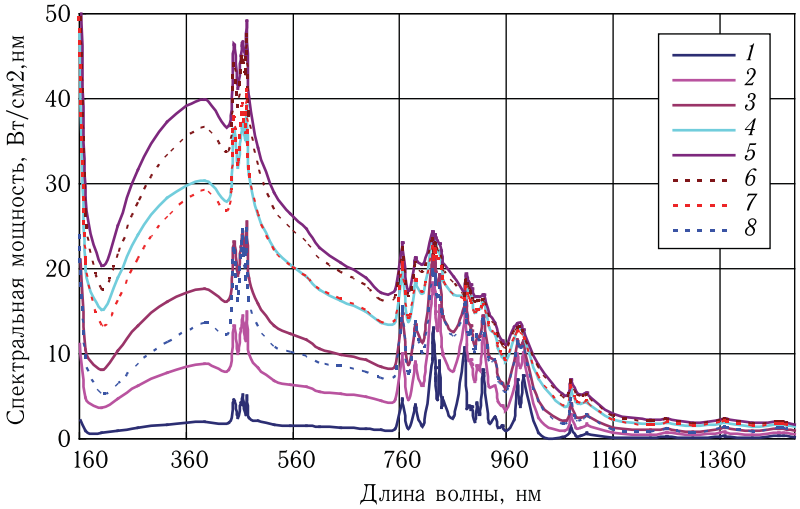


Рис. 1. Временные зависимости спектрального распределения мощности излучения для моментов времени в течение импульса: *1* — 24; *2* — 44; *3* — 64; *4* — 94; *5* — 134; *6* — 184; *7* — 214; *8* — 274 мкс. Радиус разрядного канала — 0,35 см, длина — 12 см. Параметры разрядного контура: емкость конденсатора — 200 мкФ, начальное напряжение на конденсаторе — 1,3 кВ, индуктивность — 48 мкГн

временные зависимости спектральных компонент в процессе прохождения импульса тока [1, 2]. В настоящей работе указанные зависимости получены на основе модели, учитывающей развитие разряда в составе электрического LRC-контура [3]. Учтено, что излучение имеет сложный дискретно-непрерывный спектральный состав, формируемый фотоионизацией атомов и ионов, переходами электронов в полях нейтральных и ионизованных частиц, линиями, уширенными рядом механизмов, среди которых решающий вклад вносят квадратичное штарковское и резонансное уширения [4]. Плазма пространственно неоднородна и слабонеидеальна, в составе присутствуют атомы, одно- и двукратно заряженные ионы и электроны. Модель поддерживается базой данных по термодинамическим и теплофизическим свойствам плазмы [3, 5].

В спектре заметная роль принадлежит спектральным линиям (рис. 1). Особенно велика их роль в области 750–1100 нм. Сплошными кривыми (*1–5*) представлены спектры на переднем фронте импульса до момента достижения максимума тока (*5*), пунктирными (*6–8*) — на спаде тока. При этом максимальная осевая температура, равная 13054 К, достигается на 94-й микросекунде (кривая *4*), максимальная средняя по объему температура, равная 10894 К, реализуется на 184 мкс (*6*). Кривая (*7*) соответствует максимуму давления в разряде (1,29 МПа).

На рис. 2 показано спектральное распределение энергии излучения за весь импульс для обсуждаемого разряда. Вид кривых спектра энергии и мощности излучения по составу компонент близки, однако соотношение энергии в области 750–1100 нм и более коротковолновом диапазоне заметно отличается по сравнению с соотношением мощностей на рис. 1. Излучение в более длинноволновой области сильнее затянуто во времени, чем в коротковолновой, и на спаде импульса дает ощутимый вклад в полную лучистую энергию. Действительно, к моменту максимума тока (134 мкс) доля энергии,вложенной в разряд, составляет 38% от энергии, запасенной в конденсаторе, а к моменту достижения максимальной средней темпе-

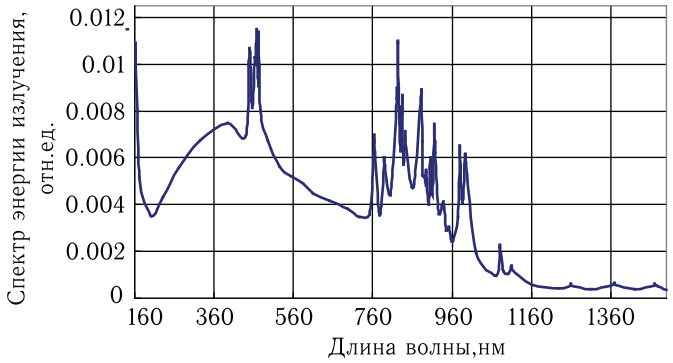


Рис. 2. Спектральное распределение энергии излучения. Параметры разряда указаны в подписи к рис. 1

ратуры — 59%. При этом до конца импульса (до 275 мкс на уровне 0,35 от максимума тока) в разряд вкладывается еще 29% энергии, запасенной в конденсаторе.

В работе представлены результаты вычислительных экспериментов для разрядов в ксеноне и криптоне. По основным рассчитываемым электрическим и оптическим характеристикам плазмы проведено детальное сопоставление с экспериментальными данными. Разработанные модель, методы и алгоритмы реализованы в пакете прикладных программ, который может быть использован для оптимизация характеристик разного рода светотехнических и облучательных систем, а также поиска новых плазмообразующих сред для создания высокоэффективных излучателей.

1. *Градов В. М.*, *Иванов В. В.*, *Терентьев Ю. И.*, *Щербаков А. А.* К теории мощного нестационарного ксенонового разряда с учетом испарения стабилизирующих его стенок // Теплофизика высоких температур. — 1981. — Т. 19, №1. — С. 28.
2. *Gradov V. M.*, *Gavrish S. V.* Mathematical Modeling of Selective Emitting Nonequilibrium Plasma in Complex Optical Systems // Light & Engineering. — 1997. — V. 5, No. 3. — P. 16.
3. *Филиппов М. В.*, *Коробков С. С.*, *Градов В. М.*, *Желаев И. А.* Ультрафиолетовое излучение импульсно-периодических разрядов высокого давления в ксеноне // Математика и математическое моделирование. — 2017. — №6. — С. 54–69.
4. *Градов В. М.*, *Коробков С. С.*, *Терентьев Ю. И.* Моделирование нестационарных процессов в импульсных трубчатых ксеноновых лампах в условиях возврата в плазму отраженного излучения // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2019. — №1. — С. 90–108. — DOI: 10.18698/0236-3933-2019-1-90-108.
5. *Градов В. М.*, *Гавриш С. В.*, *Рудаков И. В.* Спектрально-энергетические характеристики импульсно-периодических источников мощного инфракрасного излучения с сапфировыми оболочками // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2018. — №3(120). — С. 91–103. — DOI: 10.18698/0236-3933-2018-3-91-103.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ В РЕЖИМАХ «СВЕТОВОГО КОТЛА»

В. М. Градов

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Разработана математическая модель и представлены результаты исследования состояния разрядной плазмы, находящейся в радиационном поле, формируемом как собственным излучением, отражающимся в осветительной системе, так и в

результате воздействия внешних источников. На практике такая ситуация типична для систем, применяемых в осветительной технике, квантовой электронике, медицине, плазменных технологиях и т. д. В качестве плазмообразующих сред рассматриваются инертные газы и их смеси с парами щелочных металлов.

Модель учитывает пространственную неоднородность плазы, что имеет решающее значение для расчета переноса излучения в реабсорбированных спектральных линиях. Процедура расчета лучистого переноса в системе сред и поверхностей осветителя реализуется трассировкой лучей посредством слежения за прохождением по элементам системы выделенной порции лучистой энергии (кванта) до ее полного поглощения в системе или ухода из нее. При встрече с поверхностью квант может отразиться, поглотиться, преломиться, причем при диффузном отражении направление отражения считается случайным и равномерно распределено по полусфере. Пропускающая поверхность может быть зеркальной или диффузной, судьба фотона, попавшего на такую поверхность, определяется с помощью случайных чисел. Процедура выполняется для всех длин волн, на которых излучает моделируемая плазма. После того, как все выпущенные фотоны распределятся по элементам системы, в том числе и в плазме, выполняется итерация по расчету температурного поля в разряде [1].

Развитие разряда при воздействии радиационного поля, сформированного собственным отраженным излучением, а возможно и излучением других разрядов системы, происходит иначе, чем при функционировании вне системы. Излучение, поступающее в плазму извне, частично поглощается в объеме, изменяя тепловой режим разряда, а, соответственно, и его электрофизические и спектрально-энергетические характеристики. Возникает эффект «светового котла».

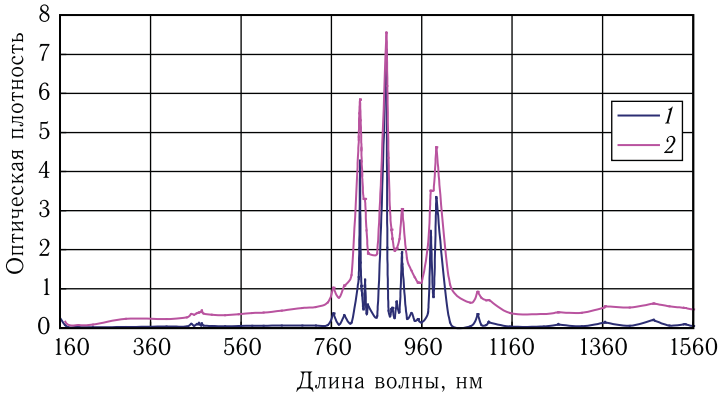


Рис. 1. Зависимость оптической плотности разряда от длины волны: 1 — коэффициент отражения равен 0, 2 — 1

Наиболее отчетливо данный эффект проявляется в ситуации, когда отражение излучения происходит на границе плазмы, т. е. система вырождается до простого отражателя, нанесенного на внутреннюю поверхность оболочки, стабилизирующей разряд. При этом можно промоделировать идеальный «световой котел», когда все испущенное излучение возвращается в разряд (спектральный коэффициент отражения $\rho_\lambda = 1$) с отчетливой демонстрацией всех его особенностей, особенно когда разряды являются сильно излучающими. К последним несомненно принадлежат разряды в ксеноне. На рис. 1–3 представлено сравнение состояния ксеноновой разрядной плазмы по ряду характеристик при работе в открытом пространстве

и в случае, когда на внутренней поверхности оболочки нанесено отражающее покрытие с коэффициентом отражения ρ_λ. На всех рисунках внутренний радиус разрядной трубки $R = 0{,}35$ см, электрический ток $I = 300$ А, давление плазмы $p = 1{,}5$ МПа, коэффициент ρ_λ принимается постоянным по всему спектру. Рассматривается квазистацинарная стадия разряда (максимум электрического тока).

Эффект от возврата излучения сильно зависит от оптической плотности плазмы $\tau_\lambda = \int_0^R k_\lambda\, dr$, где k_λ, r — коэффициент поглощения плазмы на длине волны λ и текущее значение радиальной координаты. Согласно рис. 1 оптическая плотность открытого разряда ($\rho_\lambda = 0$) заметно больше единицы только в области мощных линий (760–1100 нм).

В остальной части спектра разряд практически прозрачен при указанных параметрах. При $\rho_\lambda = 1$ температура возрастает и существенно τ_λ увеличивается во всем диапазоне длин волн, оставаясь кроме указанной области меньше единицы. Соответственно меняется и состояние плазмы по мере роста ρ_λ.

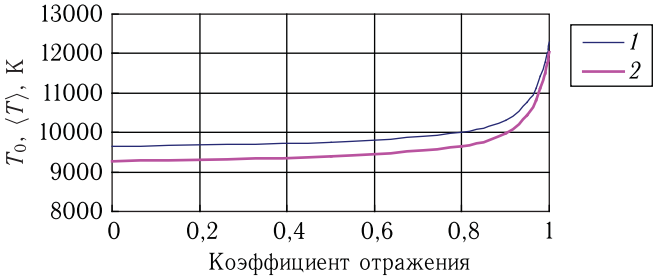


Рис. 2. Зависимость осевой (*1*) и средней (*2*) температур плазмы от коэффициента отражения

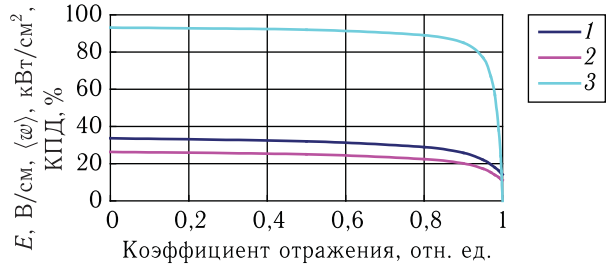


Рис. 3. Зависимости от коэффициента отражения напряженности электрического поля (*1*), удельной электрической мощности (*2*) и КПД излучения (*3*)

На рис. 2 видно, что при увеличении ρ_λ от 0 до 0,8 эффект возврата излучения практически отсутствует, т. е. все излучение в ходе многократных отражений выходит наружу, мало поглощаясь и не способствуя подогреву разряда. И только при приближении ρ_λ к единице эффект «светового котла» проявляется в полной мере, а при $\rho_\lambda = 1$ осевая и средняя температуры возрастают почти на 30%. При этом профили температуры из за подогрева периферии разряда становятся более наполненными. То же показывает рис. 3 для других характеристик разряда.

1. *Градов В. М.*, *Коробков С. С.*, *Терентьев Ю. И.* Моделирование нестационарных процессов в импульсных трубчатых ксеноновых лампах в условиях возврата в плазму отраженного излучения // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2019. — №1. — С. 90–108. — DOI: 10.18698/0236-3933-2019-1-90-108.

ХАРАКТЕРИСТИКИ И РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ В КЛАПАННЫХ СИСТЕМАХ

***Ю. А. Гришин*[1], *О. А. Гришин*[1], *В. Н. Бакулин*[2,3]**

[1]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* [2]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;*
[3]*МАИ, Москва, Россия*

Расчетное моделирование течений в клапанных системах требует знания их газодинамических характеристик (карт). Карты должны отражать особенности сложных по структуре и режимам потоков через клапаны, назначать соответствующие коэффициенты расхода μ в виде зависимостей от хода h открытия клапана (геометрического критерия) и перепада давления или соответствующей приведенной скорости потока λ (динамического критерия). Так, в частности, задание μ системы «цилиндр — выпускной клапан — патрубок» поршневого двигателя позволяет правильно оценить сопротивление выпуску из цилиндра и потери располагаемой работы турбины [1, 2]. Коэффициент μ как основная часть граничных условий у клапана необходим при 1D- даже 0D-моделировании газообмена [3, 4], которые не утрачивают своего значения не фоне активного внедрения пакетов пространственного 3D-моделирования [5, 6].

Проточная часть системы представляет собой многорежимное комбинированное сопло с внутренним отрывным течением и двумя характерными проходными сечениями (горлами) [7]. Это кольцевое сечение начала отрыва, т. е. выхода из клапанной щели с переменной площадью $F_v = \pi D_v h \cos\beta$, где D_v — диаметр выхода, β — угол фаски клапана, и сечение с постоянной площадью F_e, в котором отрывное течение, возникшее за клапаном, присоединяется к стенкам, и здесь может быть переход в более широкий выпускной коллектор. В сечении F_v и при высокой форсировке двигателя в сечении F_e возникают критические режимы с запиранием потока. Коэффициент μ фактически оценивает газодинамические потери отрывного течения между клапанной щелью и сечением F_e, т. е. в клапанном патрубке, в короткой клапанной щели потери пренебрежимо малы, поэтому следует говорить не о коэффициенте расхода клапана, а о коэффициенте расхода системы или коэффициенте расхода патрубка μ_e. Известно [1], что в области докритического течения влияние перепада давлений p_e/p_c на μ_e незначительно, и в практических расчетах им пренебрегают.

Таким образом, здесь остается зависимость μ_e только от геометрического критерия, и $\mu_e = \mu_e(h)$. Струйное отрывное течение в патрубке за клапаном и соответствующие газодинамические потери аналогичны потерям при внезапном расширении потока от сечения F_v до сечения F_e. Для докритического режима при допущении о несжимаемости ($\rho = \text{const}$) потока, проходящего через скачок с отношением сечений $f = F_v/F_e$ на базе законов сохранения расхода, энергии и импульса, где учтен поворот потока на угол β, для оценки μ_e получается формула $\mu_e = f/\sqrt{1 + 2f(f - \sin\beta)}$. Формула является универсальной в смысле пригодности к расчетам систем различных размеров, но имеющих одинаковые значения относительного геометрического критерия f. На примерах расчетов реальных систем была показана достаточная для практики точность результатов, ошибка 2–5% по сравнению с экспериментальными данными.

Для определения границы докритического течения, т. е. момента запирания в клапане, необходим учет сжимаемости потока. С помощью газодинамических функций [7, 8] для сечений F_v и F_e выражается закон сохранения расхода в нескольких формах:

$$G = \frac{mF_v p_v^* q(\lambda_v)}{\sqrt{T_v^*}} = \frac{\mu_e m F_e p_{es}^* q(\lambda_{es})}{\sqrt{T_{es}^*}} = \frac{mF_e p_e y(\lambda_e)}{\sqrt{T_e^*}}. \qquad (1)$$

Рассматривая адиабатный процесс, имеем равенство $T_v^* = T_{es}^* = T_e^* = T_c^* = T_c$. Во второй формуле записи (1) за μ_e следует выражение расхода изоэнтропного течения, где $p_{es}^* = p_v^* = p_c^* = p_c$. При запирании в клапане $q(\lambda_v = 1) = 1$ с помощью первой и второй формул получается выражение $q(\lambda_{escv}) = f/\mu_e$ для определения значения приведенной изоэнтропной скорости λ_{escv} в сечении F_e в момент запирания в клапане. Этому моменту соответствует отношение давлений $(p_e/p_c)_{cve} = \varepsilon_{ve} = \pi(\lambda_{escv})$. По координатам $\mu_e(h)$, λ_{escv} или, иначе $\mu_e(f)$, λ_{escv} строится линия запирания в клапане (рис. 1). С увеличением хода h эта линия приходит в последнюю точку, где $f/\mu_e = 1$. Здесь площадь F_v стала равной «эффективной» площади $\mu_e F_e$, $q(\lambda_{escv}) = \lambda_{escv} = 1$ и $\varepsilon_{ve} = \varepsilon = [2/(k+1)]^{k/(k-1)}$, т. е. только в этой точке для запирания имеем «классическое» отношение давлений идеального запирания ε. Таким образом, за счет больших потерь отрывного течения критический режим в клапане на малых и средних h достигается уже при $\varepsilon_{ve} = 0{,}867$ ($k = 1{,}4$) а не при $\varepsilon = 0{,}528$, как это ошибочно принято считать в настоящее время [1].

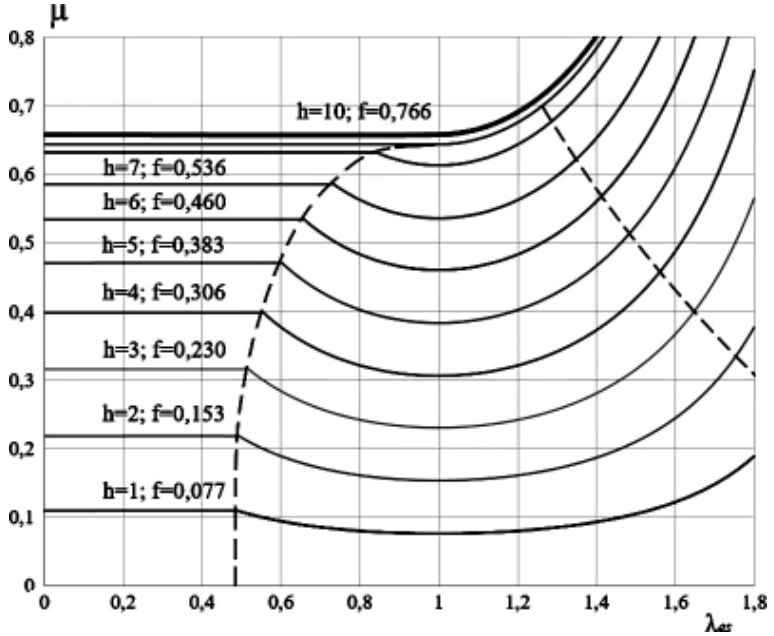


Рис. 1. Карта коэффициента расхода патрубка μ_e дизеля 1Ч 8,5/8 (пунктир — линии запирания в клапане и на выходе из патрубка)

С уменьшением p_e/p_c и соответствующим ростом λ_{es} за клапанной щелью возникает затопленное сверхзвуковое течение [7, 8], которое в силу реальной вязкости постепенно «размывается». В результате оно расширяется, присоединяется к стенкам и к сечению F_e снова становится дозвуковым. При дальнейшем уменьшении p_e/p_c скорость возрастает и возникает вторичное запирание уже и во втором горле F_e. Очевидно, при этом запирание в F_v сохраняется, и с помощью первого и третьего соотношений зависимости (1) при $\lambda_v = 1$ и $\lambda_e = 1$ получается формула для определения условий вторичного запирания $(p_e/p_c)_{cee} = \varepsilon_{ee} = f\varepsilon$. Таким образом, с помощью ГДФ для всех режимов течения может быть построена параметрическая карта клапанной системы, подобная газодинамическим картам (характеристикам) компрессоров и турбин [9].

1. *Вырубов Д. Н.*, *Иващенко Н. А.*, *Ивин В. И. и др.* Двигатели внутреннего сгорания: Теория поршневых и комбинированных двигателей / Под ред. А. С. Орлина, М. Г. Круглова. — 4-е изд. — М.: Машиностроение, 1983. — 327 с.
2. *Grishin Yu. A.*, *Bakulin V. N.* Separating loss in axial-flow-turbine cascades // Journal of Engineering Physics and Termophysics. — 2020. — V. 93, No. 4, July. — P. 868–877. — DOI: 10.1007/s10891-020-02189-z.
3. *Grishin Yu. A.*, *Zenkin V. A.*, *Khmelev R. N.* Boundary conditions for numerical calculation of gas exchange in piston engines // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2017. — V. 90, No. 4, July. — DOI: 10.1007/s10891-017-1644-4.
4. *Grishin Yu. A.*, *Semenchukova V. S.*, *Bakulin V. N.* Numerical Simulation of Wave Processes in a Piston Engine Using Nonstationary Gas Dynamic Functions // Aircraft and Rocket Engine Theory. Russ. Aeronaut. — 2021. — No. 64. — P. 305-313. — DOI: 10.3103/S1068799821020197.
5. *Grishin Yu. A.*, *Bakulin V. N.* New Calculation Schemes Based on the Large_Particle Method for Modeling Gas_Dynamic Problems // Doklady Physics. — 2015. — V. 60, No. 12. — P. 555–558. — DOI: 10.1134/S1028335815120058.
6. *Grishin Yu. A.*, *Bakulin V. N.* Numerical investigation of flow in a centrifugal compressor // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2015. — V. 88, No. 5, September. — DOI: 10.1007/s10891-015-1309-0.
7. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. В 2 ч.: Учеб. руководство. — 5-е изд. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1991. — 600 с.
8. *Жирицкий Г. С.*, *Локай В. И.*, *Максутова М. К. и др.* Газовые турбины двигателей летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1971. — 620 с.
9. *Холщевников К. В.*, *Емин О. Н.*, *Митрохин В. Т.* Теория и расчет авиационных лопаточных машин. — 2-е изд. — М.: Машиностроение, 1986. — 432 с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ СПЛАВА WC–TiC–Co МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЭРОЗИОННОГО ДИСПЕРГИРОВАНИЯ

***М. И. Дворник*[1], *К. А. Чехонин*[2]**

[1]*ХФИЦ ИМ ДВО РАН, Хабаровск, Россия;* [2]*ВЦ ДВО РАН ХФИЦ, Хабаровск, Россия*

Метод электроэрозионного диспергирования (ЭЭД) является быстропротекающим и многомасштабным процессом и позволяет получать сферические частицы из заготовок твердого сплава. В данной работе экспериментально исследованы энергозатраты, производительность процесса получения порошка методом электроэрозионного диспергирования в масле, изопропиловом и этиловом спиртах твердого сплава WC–5TiC–10Co. Так же был исследован химический, фазовый, морфологический и гранулометрический составы полученных порошков. Для диспергирования использовали специально разработанную установку, состоящую из генератора импульсов и емкостей с диэлектрической жидкостью. Полученный полидисперсный порошок состоит из сферических частиц, образованных фрагментацией жидкого расплава и последующей быстрой кристаллизацией фрагментов и паров сплава. Показано, что за счет использования импульсов высокой мощности (около 9,6–10,5 Дж) удельные энергозатраты при получении 1 кг порошка методом электроэрозионного диспергирования сплава WC–TiC–Co оказались относительно невысокими (3,3–4,5 кВт · ч). Для повышения производительности предлагается использовать генератор импульсов с энергией около 10 Дж. Химический и фазовый состав получаемого порошка контролируем путем использования различных

углеводородных жидкостей. Полученный порошок состоит преимущественно из сферических частиц диаметром от 10 до 50 мкм (более 50% объема) с ультрамелкозернистой микроструктурой, который может применяться в лазерных аддитивных технологиях и при формовании изделий методом спекания.

Однако возможности экспериментальных методов исследования электроискрового диспергирования сильно ограничены и типичны для быстропротекающих, со сложной физикой (электродинамика, электромагнетизм, термодинамика, гидродинамика и т. д.), разномасштабных по времени процессов, где многие эффекты преобладают очень короткое время. Ясный общепринятый физический механизм электроискрового диспергирования в настоящее время отсутствует. Поэтому разработка адекватных математических моделей и эффективных алгоритмов их решения является фундаментальной проблемой. Предложенные до настоящего времени математические модели имеют неопределенность в определении: а) доли энергии разряда передаваемой сплаву; б) радиуса плазменного канала между электродами; в) давления плазмы на поверхность ванны с расплавом и т. д.

В настоящей работе проведено трехмерное численное моделирование МКЭ взаимодействия плазмы от электрического разряда, расплава металла заготовки с недогретой жидкостью диэлектрика. Трехфазные потоки расплав–вода–пар с резкими границами между фазами описываются уравнениями Навье–Стокса для слабо сжимаемой жидкости и уравнения энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных потерь. Отслеживание неизвестных фазовых границ производится методом уровней Сесина (LSM-метод). На поверхности ванны с расплавом учитываются напряжения Марангони. Эволюция тока и напряжения, полученные с осциллографа, используются для расчета энергии разряда. Поток тепла плазмы, давление плазмы и радиус плазменного пузыря были оценены с помощью модели плазмы и служат входными данными для модели расплавленной ванны для прогнозирования объема материала, удаляемого с поверхности заготовки. Латентное тепло при плавлении и рекристаллизации расплава моделировалось как отдельный источниковый член в уравнении энергии с линеаризацией эффективной энтальпии в функции от температуры. Теплофизические свойства материала зависят от температуры и фазового состояния. При моделировании динамики расплавленной ванны заготовки, уравнения энергии и потоков пара, расплава металла решаются совместно в области, содержащей диэлектрик и заготовку. Взаимодействие инициировалось резким увеличением давления недогретой окружающей жидкости диэлектрика, что приводило к коллапсу пузыря с газом и паром с возмущением поверхности расплава и дальнейшей его фрагментации. Численные расчеты показали, что в начальный момент времени при испарении сплава над ванной с расплавом образуется грибовидный поток пара вытекающий с поверхности ванны со скоростью около 125 м/с. В окрестности ванны с расплавом образуется три вихря: а) от истечения паров сплава; б) паров сплава над вогнутой свободной поверхностью ванны с максимальной скоростью 110 м/с и в) расплава металла в ванне в виде тонкого пограничного слоя с распределением скорости от 0,1–1 м/с. Расчетный диаметр образования плазменного канала между электродами и средний размер полидисперсных частиц сплава согласуется с экспериментальными данными. Приведенная методика расчета применена для исследования эрозионного процесса (фрагментации) ванны расплава металла, полученной путем воздействия электрического разряда. Скорость остывания плазменного канала играет важную роль во всем процессе диспергирования. Например, увеличение плотности диэлектрика приводит к большему сопротивлению при расширении плазменного канала и, как следствие, плазма гаснет быстрее в плотной среде с образованием

более мелких частиц сплава. Показано влияние плотности энергии электрического разряда, эффективного радиуса теплового источника и продолжительности импульсного воздействия на геометрию ванны расплава металла и процесс его фрагментации. Значения диаметра кратера для большинства экспериментальных измерений показывают хорошее соответствие с моделируемыми формами кратера. Однако численная модель переоценивает глубину кратера по сравнению с экспериментом. Лучшее соответствие геометрии кратера в численной модели эксперименту наблюдалось в случае линейной зависимости критической температуры испарения от температуры плазменного канала и включения физики затвердевания остаточного расплава в ванне. Кроме этого, был проведен тестовый эксперимент для валидации численных расчетов. Их сравнение показало среднюю погрешность в геометрии кратера (глубина, ширина) не превышала 6,2%. Это свидетельствует о том, что результаты конечно-элементной модели хорошо согласуются с экспериментальными результатами, а последовательное измельчение шага адаптивной сетки позволяет достичь сеточной сходимости алгоритма. Разработанная математическая модель и эффективный численный алгоритм расчета позволяют лучше понять механизм диспергирования, являются эффективным средством оптимизации рабочих параметров электроэрозионного диспергирования твердых сплавов, увеличить производительность процесса и прогнозировать размер и микроструктуру получаемых порошков.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ КОМПОНЕНТНОГО СОСТАВА КАПЕЛЬ ВСЛЕДСТВИЕ ИХ СТОЛКНОВЕНИЙ В ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

Ю. В. Зуев

МАИ, Москва, Россия

Газокапельные турбулентные струйные течения используются во многих областях техники. Практически во всех устройствах используются двухфазные струи с большой начальной объемной концентрацией жидкости. При определенных условиях в газокапельных течениях возможно столкновение капель, в результате которого изменяются размер, скорость и концентрация капель, что в свою очередь приводит к изменению параметров газа.

В данной работе исследуется массообмен между каплями различного размера при их взаимодействии в двухфазной струе. При этом используется математическая модель, которая является развитием модели, приведенной в [1]. В модифицированной модели капли жидкости объединяются в F фракций, и принимается, что капли каждой фракции f ($f = 1, 2, \ldots, F$) имеют одинаковые диаметры, скорости, объемные концентрации и другие физические свойства. Вещества капель могут состоять из нескольких компонентов k ($k = 1, 2, \ldots, K$), имеющих объемную концентрацию φ_f^k. Расчет коагуляции и дробления капель проводится методом Лагранжа [2], при котором фиксируется количество фракций и прослеживается изменение размеров и других параметров капель. Принимается, что в начальном сечении струи имеется F фракций капель, состоящих из веществ с одинаковыми физическими свойствами. При этом вещества капель помечаются индексом $k = f$, т. е. в каплях фракции $f = 1$ присутствует только компонент $k = 1$, в каплях фракции $f = 2$ — компонент $k = 2$ и т. д. Обмен массой при столкновениях капель

приведет к тому, что капли каждой фракции будут состоять из K компонентов в различных пропорциях. Прослеживание компонентного состава капель при их движении позволяет получить более детальную информацию о процессах коагуляции и дробления капель в струе.

При выводе уравнений, описывающих двухфазную струю, в качестве исходных уравнений берутся мгновенные уравнения массы и количества движения, записанные для областей, занятых каждой фазой. Эти уравнения последовательно осредняются по пространству [3] и времени [4], в результате чего получаются уравнения Рейнольдса, осредненные по пространству. Система осредненных уравнений включает: уравнения массы и количества движения фаз; уравнения, описывающие изменение диаметра капель фракции f и их компонентного состава φ_f^k вследствие коагуляции и дробления; уравнения состояния фаз и уравнения, связывающие объемные концентрации фаз и объемные концентрации компонентов в каплях.

При проведении расчетов газокапельной струи принимается, что ее непрерывной фазой является воздух, а дискретной фазой — капли, объединенные в пять фракций с характерными размерами (диаметрами) 10, 30, 50, 70 и 90 мкм. Вещество капель состоит из пяти компонентов, объемная концентрация φ_f^k которых в каплях может меняться вследствие соударений капель, заканчивающихся их коагуляцией или дроблением. В начальном сечении струи $\varphi_f^k = 1$ при $f = k$ и $\varphi_f^k = 0$ при $f \neq k$, т. е. в этом сечении струи капли фракций f состоят только из одного компонента $k = f$. Далее, за счет межчастичного взаимодействия, в каплях каждой фракции появляются другие компоненты, и компонентный состав капель меняется при их движении; исследование динамики компонентного состава капель каждой фракции дает возможность проанализировать интенсивность массообмена между каплями и соотношение между коагуляцией и дроблением отдельных капель. При этом считается, что физические характеристики всех компонентов одинаковы и соответствуют физическим характеристикам воды. Расчеты проводятся для пяти значений суммарной объемной концентрации капель в начальном сечении струи $\alpha_{f\Sigma 0} = 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}$ и $2 \cdot 10^{-3}$) в предположении, что концентрации всех фракций капель равны ($\alpha_{f0} = \alpha_{f\Sigma 0}/5$), т. е. между этими концентрациями соблюдается пропорция $1 : 1 : 1 : 1 : 1$. При выполнении расчетов принимается: радиус начального сечения струи (радиус сопла) $R_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ м; на срезе сопла скорость воздуха $u_0 = 100$ м/с, скорости капель всех фракций $u_{f0} = 80$ м/с, температуры воздуха и капель $T_0 = T_{f0} = 300$ K, поперечные поля всех параметров фаз равномерные; струя истекает в неподвижную воздушную среду ($u_e = 0$) с давлением $p = 10^5$ Па и температурой $T_e = 300$ K. Индексом «0» обозначены радиус и параметры фаз в начальном сечении струи, индексом «e» — параметры газа в окружающей среде.

Расчеты, проведенные для различных значений начальной суммарной объемной концентрации капель (на срезе сопла) $\alpha_{f\Sigma 0}$ в диапазоне ее изменения 10^{-4}–$2 \cdot 10^{-3}$, показали, что при начальной суммарной объемной концентрации капель 10^{-4} столкновения капель практически не влияют на концентрацию капель в струе. С увеличением $\alpha_{f\Sigma 0}$ влияние межчастичного взаимодействия на концентрацию капель в струе резко усиливается, причем концентрация мелких капель уменьшается, а концентрация крупных капель увеличивается по сравнению со случаем отсутствия такого взаимодействия. При этом происходит значительное увеличение диаметров крупных капель вдоль оси двухфазной струи, а диаметры мелких капель изменяются незначительно. Это указывает на то, что в струе с выбранными граничными условиями для капель всех фракций коагуляция преобладает над дроблением, когда мелкие капли исчезают, а масса крупных капель увеличивается.

На относительно небольшом расстоянии от сопла происходит существенное изменение величин долей компонентов в каплях, а затем доли компонентов остаются неизменными. Это расстояние практически не зависит от начальной суммарной концентрации капель в струе и для заданных граничных условий примерно равно ста радиусам начального сечения струи. По мере увеличения концентрации $\alpha_{f\Sigma 0}$ соотношение между компонентами в каплях φ_f^k стремится к соотношению между объемными концентрациями капель выделенных фракций в начальном сечении струи α_{f0} — 1 : 1 : 1 : 1 : 1.

Такой же качественный результат получен при расчете двухфазной струи с объемными концентрациями фракций капель в начальном сечении струи, составляющими пропорцию: 1 : 2 : 4 : 2 : 1.

В результате анализа проведенных расчетов сделан вывод о том, что при больших начальных концентрациях капель (превышающих 10^{-3}) на небольшом расстоянии от сопла вследствие столкновений капель в струе происходит полное перемешивание веществ, из которых они первоначально состояли, и при этом пропорции объемов этих веществ в каплях соответствуют пропорциям объемных концентраций капель выделенных фракций в начальном сечении струи. Также результаты расчетов указывают на то, что в струе одновременно протекают и коагуляция, и дробление капель, но коагуляция при заданных граничных условиях преобладает над дроблением.

1. *Зуев Ю. В.*, *Лепешинский И. А.*, *Гузенко А. А.* Влияние инерционности частиц на кинематические характеристики двухфазной струи // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2015. — №2. — С. 70–74. — EDN: UDYCLT.
2. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974. — 212 с.
3. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред: в 2 ч. — М.: Наука, 1987. — Ч. 1. — 464 с.
4. *Хинце И. О.* Турбулентность, ее механизм и теория. — М.: Физматгиз, 1963. — 680 с.

ПРОГРЕВ И ИСПАРЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ КАПЕЛЬ СУСПЕНЗИЙ С ТВЕРДЫМИ НЕРАСТВОРИМЫМИ ПРИМЕСЯМИ

***С. А. Керимбекова*[1,2], *Г. В. Кузнецов*[1,2], *П. А. Стрижак*[1,2]**

[1]*ТПУ, Томск, Россия;* [2]*ИТ СО РАН, Новосибирск, Россия*

Проблема сокращения запасов чистой воды является ключевой в глобальном кризисе [1], вызванном растущей численностью населения, загрязнением источников промышленными, бытовыми и сельскохозяйственными отходами и изменением климата. Недостаток доступа к безопасной питьевой воде приводит к росту заболеваемости и смертности населения, экономическим потерям и социальным конфликтам. Решение проблемы требует применение комплексного подхода, включающего сохранение водных ресурсов, разработку эффективных методов очистки и изменение потребительского поведения [2]. Технологические и сточные воды в результате производственной и хозяйственной деятельности, как правило, загрязнены металлами, химическими реагентами, фосфатами, маслами, органическими и неорганическими соединениями, микроорганизмами. К настоящему времени разработано несколько технологий очистки загрязненных вод от примесей. Широкое применение нашли методы термической (жидкофазное окисление) и огневой

очистки загрязненных вод не заменимы при высокой концентрации органических и минеральных веществ в составе очищаемой воды. Сущность метода заключается в распылении сточных вод в камеры с газовой средой, нагретой до 900–1000 °C. Вода испаряется, а органические примеси выгорают.

В последнее десятилетие активно предпринимаются попытки разработки способов и методов повышения эффективности технологий термической и огневой очистки воды от нерегламентированных твердых примесей за счет совершенствования конструкций камер и адаптации систем впрыска [3]. Экспериментально исследованы закономерности прогрева и испарения капель моножидкостей [4], растворов [5] и суспензий [6]. Однако пока не изучены в полной мере основные характеристики процессов тепломассопереноса и фазовых превращений при нагреве и испарении капель суспензий с учетом того, что при разных концентрациях и свойствах примесей эти характеристики существенно отличаются [7]. Кроме этого, на процесс прогрева и испарения неоднородных капель влияют и условия подвода энергии к капле.

Объектами исследования выступали капли водных суспензий с типичными твердыми нерастворимыми примесями. В данном исследовании с целью анализа наиболее типичных твердых нерастворимых примесей использованы: оксиды алюминия и титана; минеральные примеси в виде частиц глины; мелкодисперсная форма полимера (пластик); углеродистые частицы (отход углеобогащения — шлам). Основу суспензии составляла дистиллированная вода. Массовая доля примесей в суспензиях варьировалась от 0,5 до 2,5%. Выбор твердых нерастворимых компонентов и диапазон изменения массовой концентрации обусловлены привязкой к условиям термической очистки воды. Им соответствует диапазон от 0,05 до 1 мг/л [3]. В экспериментах определялись скорости прогрева и испарения капель суспензий с каждым видом примеси отдельно и их комбинацией сильно отличающихся по теплофизическим характеристикам и поведению в составе суспензии. Использование в экспериментах теплового нагнетателя с возможностью регулирования скорости движения воздуха и его температуры (диапазон температур от 333 до 732 K, а диапазон скоростей от 0 до 5,3 м/с) позволило варьировать плотность теплового потока к капле в диапазоне до 70 кВт/м^2.

Экспериментально установлены зависимости скоростей испарения капель водных суспензий при массовой концентрации твердых примесей 1% от температуры газовой среды. Величина скорости испарения капель суспензии с комбинацией двух примесей, теплофизические характеристики и поведение которых в суспензии сильно отличаются, соответствует диапазону между скоростями испарения капель суспензии с каждым видом твердой примеси по отдельности. Это связано с коллективным эффектом компенсации различного поведения примесей. Например, частицам оксида алюминия, которым характерно быстрое осаждение в нижнюю часть капли, противодействуют быстро всплывающие на поверхность капли частицы полиамида. Скорости испарения капель суспензии увеличивается с ростом температуры газовой среды. Так, при T_g до 400 K отклонение скоростей испарения капель многокомпонентных суспензий не превышает 10%, а при температуре 670 K достигает 50%. Установленные зависимости скорости прогрева и испарения капли суспензии от температуропроводности и температуры газовой среды имеют полиномиальный вид. Путем аппроксимации экспериментальных значений получено математическое выражение для прогнозирования скорости прогрева и испарения капель суспензии ($R_d = 0{,}8$–$1{,}3$ мм) с твердой нерастворимой примесью при известном значении температуропроводности суспензии и температуре внешней газовой среды.

Полученные математические выражения имеют ряд практических применений, в частности оптимизация процесса очистки: знание скоростей прогрева и испарения позволяет оптимизировать процесс термической очистки воды, что может повысить эффективность удаления примесей и улучшить качество очищенной воды. Также прогнозирование скорости прогрева помогает определить оптимальное время и температуру газовой среды, что может снизить потребление энергии и уменьшить затраты на очистку воды. В связи с очевидной сложностью обеспечения равномерного распределения твердых нерастворимых примесей в каплях суспензий целесообразно руководствоваться установленными в настоящей работе диапазонами изменения скоростей прогрева и испарения в качестве некоторых базовых.

1. *Huang Z.*, *Yuan X.*, *Liu X.* The key drivers for the changes in global water scarcity: Water withdrawal versus water availability // Journal of Hydrology. — 2021. — V. 601. — 126658.
2. *Tong S.*, *Xia R.*, *Chen J.*, *Li W.*, *Chen Y.*, *Xu C.-Y.* A diagnostic framework to reveal future clean water scarcity in a changing climate // J. Hydrol. Reg. Stud. — 2024. — V. 56. — 102040.
3. *Shannon M. A.*, *Bohn P. W.*, *Elimelech M.*, *Georgiadis J. G.*, *Marias B. J.*, *Mayes A. M.* Science and technology for water purification in the coming decades // Nature. — 2008. — V. 452. — P. 301–310.
4. *Han K.*, *Song G.*, *Ma X.*, *Yang B.* An experimental and theoretical study of the effect of suspended thermocouple on the single droplet evaporation // Appl. Therm. Eng. — 2016. — V. 101. — P. 568–575.
5. *Kuznetsov G. V.*, *Feoktistov D. V.*, *Orlova E. G.*, *Misyura S. Y.*, *Morozov V. S.*, *Islamova A. G.* Evaporation modes of LiBr, $CaCl_2$, LiCl, NaCl aqueous salt solution droplets on aluminum surface // Int. J. Heat Mass Transf. — 2018. — V. 126. — P. 161–168.
6. *Batishcheva K. A.*, *Kuznetsov G. V.*, *Orlova E. G.*, *Vympina Y. N.* Evaporation of colloidal droplets from aluminum–magnesium alloy surfaces after laser-texturing and mechanical processing // Colloids Surfaces A: Physicochem. Eng. Asp. — 2021. — V. 628. — 127301.
7. *Vysokomornaya O. V.*, *Kuznetsov G. V.*, *Strizhak P. A.*, *Shcherbinina A. A.* Evaporation of aqueous suspension drops with ground admixtures in the region of high-temperature combustion products // Theor. Found. Chem. Eng. — 2017. — V. 51. — P. 468–475.

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗРАБОТКЕ И ПРИМЕНЕНИИ ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ТИПА ЭЛЕКТРОСПРЕЙ

Д. А. Криворучко, В. В. Нигматзянов, А.В. Скрылёв

МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия

В настоящее время наблюдается активное освоение орбиты Земли частными и государственными компаниями, учебными заведениями [1]. На низкую орбиту запускаются тысячи космических аппаратов (КА), большинство из которых относятся к малым (МКА) [2]. Идет активное строительство так называемых группировок космических аппаратов или роев.

В связи с ростом количества аппаратов, наличия так называемого космического мусора на орбите, необходимости совершать коррекцию положения КА, а также потребностью увеличения срока активного существования остро стоит необходимость в использовании на борту МКА двигательных установок (ДУ). Данные ДУ должны беспечивать требуемые значения тяг, иметь ограниченное, вследствие малости самих аппаратов, энергопотребление и размеры.

В России и за рубежом активно разрабатываются ДУ, удовлетворяющие указанным выше требованиям, создаются новые типы электроракетных двигателей (ЭРД) и адаптируются существующие [3–5].

Одним из таких типов являются двигатели типа электроспрей ЭРДЭ, получившие такое название от эффекта распыления жидкости в электрическом поле, подтипом таких двигателей являются коллоидные двигатели.

Двигатель данного типа успешно отработал на научном аппарате LISA Pathfinder [6], в данный момент ЭРДЭ активно разрабатываются за рубежом и используются на ряде МКА [7]. В России активная работа по исследованию и разработке ЭРДЭ ведется в МФТИ.

Данный доклад посвящен данному типу двигателя, показаны его преимущества с точки зрения использования на борту МКА.

1. CubeSat Database [Электронный ресурс]. — URL: `https://sites.google.com/a/slu.edu/swartwout/cubesat-database`.
2. BryceTech — Smallsats by the Numbers 2025 [Электронный ресурс]. — URL: `https://brycetech.com/reports/report-documents/smallsats-2025/`.
3. *Levchenko I. et al.* Space micropropulsion systems for Cubesats and small satellites: From proximate targets to furthermost frontiers // Applied Physics Reviews. — 2018. — V. 5, Issue 1. — 011104. — DOI: 10.1063/1.5007734.
4. *Alnaqbi S.*, *Darfilal D.*, *Swei S. S. M.* Propulsion Technologies for CubeSats: Review // Aerospace. — 2024. — V. 11. — P. 502. — DOI: 10.3390/aerospace11070502.
5. *Hsu A.* Small Satellite Propulsion Technologies Compendium The Aerospace Corporation, DISTRO A Version 1.41; 2023.
6. *Anderson G. et al.* Experimental results from the ST7 mission on LISA Pathfinder // Phys. Rev. D. — 2018. — V. 98. — 102005. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.102005.
7. NASA/TP—20250000142. State-of-the-Art Small Spacecraft Technology; February 2025.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

***И. А. Крюков*[1], *И. Э. Иванов*[2,3]**

[1]*ИПМех РАН, Москва, Россия;* [2]*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* [3]*МАИ, Москва, Россия, Москва*

В данной работе рассматриваются, двухфазные, монодисперсные потоки (газ — твердые частицы, газ — жидкие капли), в которых плотность дисперсной фазы превышает плотность несущей фазы более чем в 1000 раз, при объемной доле дисперсной фазы порядка 0,0001–0,01 («разбавленные» течения). Особенности газодисперсных течений рассматривались в [1, 4, 9].

На базе математической модели для течений двухфазных сред [2–7], модификации метода Годунова [3, 6, 7] и метода HLL [8] разработан вычислительный алгоритм расчета течений неравновесных газодисперсных сред с малой объемной концентрацией дисперсной фазы. Реализуется полностью континуальное описание двухфазной среды в рамках Эйлер-Эйлерова подхода. Основное внимание уделено учету влияния скоростной неравновесности (скольжению) фаз на соотношение траекторий движения частиц и газовой фазы, а так же на взаимодействие дисперсной фазы с твердыми стенками. Рассмотрены два типа условий для дисперсной фазы в рамках Эйлерова описания — условия моделирования взаимодействия частиц «удар с отскоком» и условия «удар с залипанием» на стенке. Решены задачи о

распаде произвольного разрыва в двухфазной среде в канале постоянной ширины. Исследованы плоские, двумерные, сверхзвуковые ($M = 4{,}42$, по газовой фазе) газодисперсные разбавленные течения возле сжимающего угла и угла расширения. Варьировались размеры частиц в диапазоне значений: $d_l = 10^{-6}$ м, $d_l = 10^{-5}$ м, $d_l = 10^{-4}$ м, $d_l = 10^{-3}$ м и объемная доля дисперсной фазы в диапазоне значений: $\alpha_l = 0{,}001$, $\alpha_l = 0{,}01$, $\alpha_l = 0{,}04$, $\alpha_l = 0{,}05$, $\alpha_l = 0{,}1$.

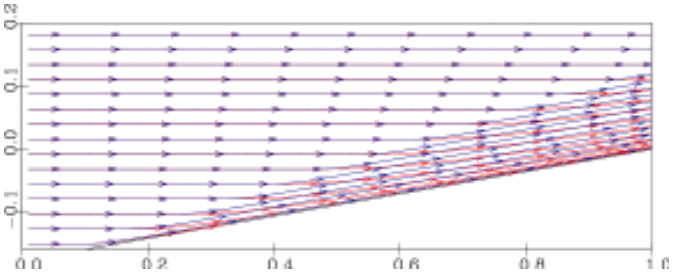


Рис. 1

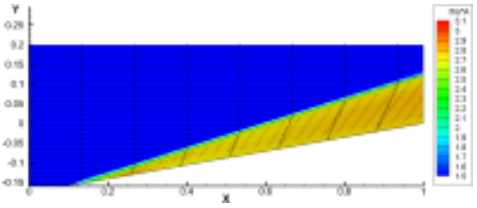


Рис. 2

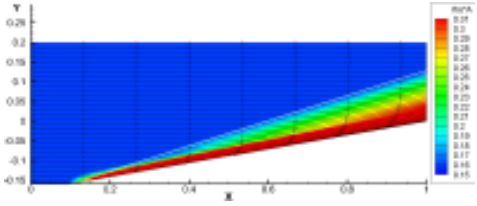


Рис. 3

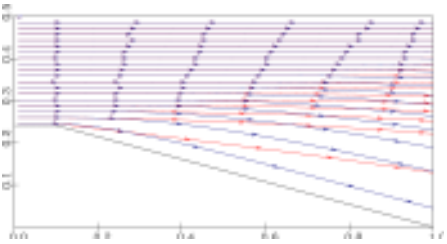


Рис. 4

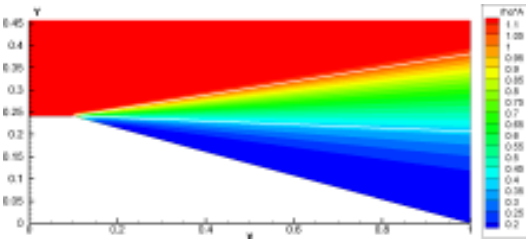


Рис. 5

На рисунках 1–3 показаны результаты расчетов сверхзвукового двухфазного течения, вблизи угла сжатия в 10°. Несущая фаза — воздух, параметры на входе: давление $p_g = 10^5$ Па, скорость $u_g = 2040$ м/с, температура $T_g = 529$ K, число Маха $M_g = 4{,}42$. Дисперсная фаза — твердые или жидкие шарики из вещества с параметрами и уравнением состояния воды: $p_l = 10^5$ Па, $u_l = 2040$ м/с, $T_l = 529$ K, $M_l = 0{,}47$, плотность $\rho_l = 1000$ кг/м^3, диаметр частиц $d_l = 0{,}0001$ м. Объемная доля дисперсной фазы $\alpha_l = 0{,}001$.

На рис. 1 показаны траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии), на рис. 2 — поле парциальной плотности несущего газа $\alpha_g \rho_g$, на рис. 3 — поле парциальной плотности дисперсной среды $\alpha_l \rho_l$. Белой линией показано положение ударной волны при обтекании сжимающего угла чистым газом.

На рисунках 4 и 5 показаны результаты расчетов «сверхзвукового» двухфазного течения, вблизи угла разрежения в $-15°$. Параметры натекающего потока такие же, как и в случае сжимающего угла (диаметр частиц $d_l = 0{,}0001$ м, объемная доля дисперсной фазы $\alpha_l = 0{,}001$).

На рис. 4 показаны траектории движения несущей и дисперсной фазы, на рис. 5 — поле парциальной плотности несущего газа $\alpha_g \rho_g$. Белыми линиями показаны положения предельных характеристик в веере волн разрежения при обтекании угла расширения чистым газом.

В результате проведенного параметрического исследования в структуре возмущенного течения определены размеры зон релаксации, равновесного течения в зависимости от варьируемых параметров. Так же в пристеночных областях течения установлено присутствие «пелен» (сжимающий угол) и зоны течения чистого газа (угол расширения).

1. *Крайко А. Н.* К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, №1. — С. 96–106.
2. *Baer M. R.*, *Numizato J. W.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiphase Flow. — 1986.
3. *Saurel R.*, *Abgrall R.* A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comp. Phys. — 1999. — V. 150. — P. 425–467.
4. *Saurel R.*, *Chinnayya A.*, *Carmouze Q.* Modelling compressible dense and dilute two-phase flows // 2017. hal-01454839.
5. *Иванов И. Э.*, *Крюков И. А.*, Исследование моделей межфазного трения в системах уравнений динамики многофазных сред // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (AMMAI'2024), 1–8 сентября 2024 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2024. — С. 52–54.
6. *Иванов И. Э.* Численное моделирование многофазных течений с большим содержанием дисперсной фазы // Вестник Московского авиационного института. — 2009. — Т. 16, №2. — С. 62–70.
7. *Иванов И. Э.*, *Крюков И. А.*, Численный алгоритм моделирования двухфазных течений, содержащих границы раздела фаз // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2012. — Т. 13, вып. 4. — URL: `http://chemphys.edu.ru/issues/2012-13-4/articles/369/`.
8. *Harten A.*, *Lax P. D.*, *Van Leer B.* On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM Review. — 1983. — V. 25(1). — P. 35–61.
9. *Крайко А. Н.*, *Сулайманова С. М.*, Двужидкостные течения смеси газа и твердых частиц с «пеленами» и «шнурами», возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // Прикладная математика и механика. — 1983. — Т. 47, №4. — С. 619–630.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД-ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

С. Ю. Маламанов

БГТУ «Военмех», Санкт-Петербург, Россия

Взаимодействие гидродинамического и электромагнитного полей являются первопричиной многих явлений в природе и технике. Наибольший эффект достигается при взаимной перпендикулярности векторов скорости движения среды и индукции магнитного поля. Это прямое следствие выражения, представляющего силу Лоренца. В работе рассматривается линейное магнитное поле при круговом

движении жидкости, которой является морская вода ($\sigma = 5$ См/м), помещенная внутрь закрытого сверху и снизу цилиндрического канала. Схема течения показана на рис. 1. Внешнее магнитное поле $B_0 = 10$ Тл приложено вертикально в направлении оси *OY*. Современные вычислительные комплексы дают возможность применять разнообразные граничные условия: стенки канала могут быть как неподвижными, так вращающимися, при этом физическая «обстановка» без искажения передается как во внутрь, так и наружу. Рассматривались два случая: все поверхности вращаются в одном направлении с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с (как показано на рис. 1) и вращение «дна» и «крышки» происходит в противоположном направлении по отношению к боковой стенке цилиндра. Значение угловой скорост одно и то же. Существующая сила трения между стенками и жидкостью приводит ко вращению и самой жидкости. Электрическое поле отсутствует. Стенки канала — непроводящие. Рассматриваемый случай представляет собой простой МГД-генератор. Численное моделирование проводилось с помощью гидродинамического комплекса ANSYS.CFX. Распределения физических величин, на нижеследующих графиках, представлены вдоль радиуса горизонтальной плоскости симметрии. На рис. 2 показаны профили скорости для случая, когда движутся все поверхности в одном направлении — красная кривая 1 и когда «дно» и «крышка» вращается в противоположном направлении по отношению к боковой стенке — кривая 2. По оси абсцисс отложен относительный радиус (отнесен к радиусу цилиндра), а по оси ординат относительная скорость, $V_{\max}$ — это максимальное значение скорости в канале. Хорошо видно, что изменение вращения верхней и нижней поверхностей на противоположное не оказывает существенного влияния на круговое движение жидкости. Наглядно это демонстрирует рис. 3. Цифры 1 и 2 обозначают те же случаи расчета.

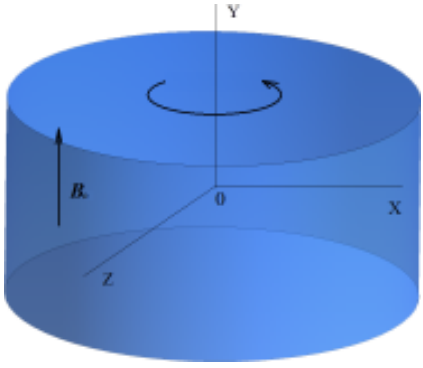


Рис. 1. Схема течения

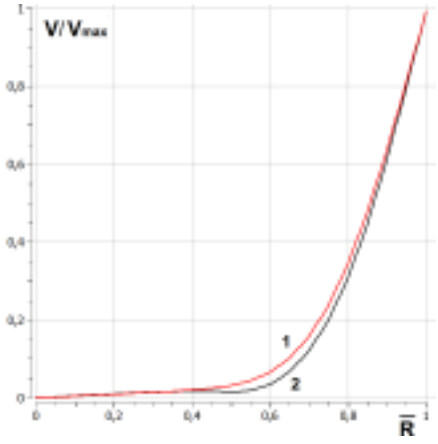


Рис. 2. Распределение относительной скорости

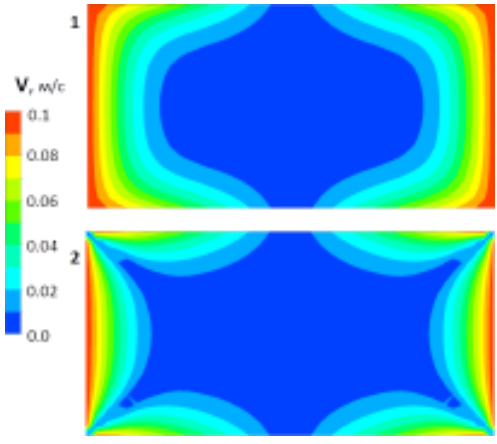


Рис. 3. Распределение скорости

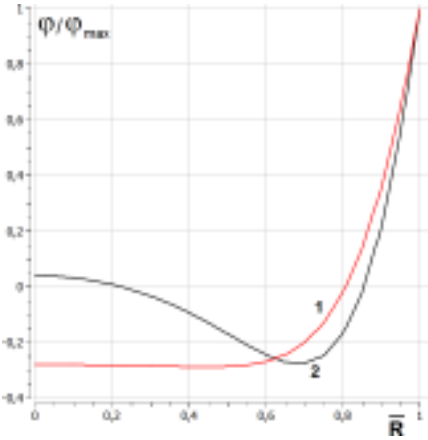


Рис. 4. Распределение потенциала

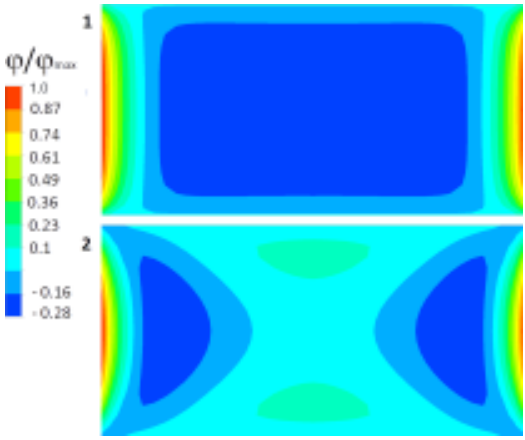


Рис. 5. Распределение потенциала

Морская вода в целом нейтральна, но при ее движении в магнитном поле действие силы Лоренца приводит к разделению зарядов и возникает разность потенциалов. Распределения потенциала показаны на рисунках 4 и 5, $\varphi_{\max}$ — это максимальное значеие потенциала в канале. Поведение кривых явно указывает на то, что происходит разделение заряда (объемное): центральная область заряжается отрицательно, а периферия — положительно. При этом, изменение вращения верхней и нижней поверхностей на противоположное приводит к более сложному распределению заряда (потенциала) в пространстве канала — рис. 5.

По результатам работы можно сделать вывод о том, что круговое движение слабопроводящей жидкости в цилиндрическом канале, находящейся в однородном магнитном поле, приводит к появлению области отрицательного и положительного заряда, что обуславливает генерацию электрического поля.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОЙ ДИСПЕРСИИ НА СПИНОВОЕ ГОРЕНИЕ

А. А. Марков

ИПМех РАН, Москва, Россия

Тепловая дисперсия вызывается флуктуациями температуры газа в отдельных порах и обусловлена различиями скорости газа в порах, извилистостью газового пространства, размерами сгорающих частиц. В ряде работ показана важность дисперсионных слагаемых в усредненных уравнениях наряду с молекулярной диффузией тепла и вещества [1]. Детальная структура пористой среды в значительной степени нерегулярна, известны лишь некоторые статистические свойства этой структуры. Были предложены модели усреднения на основе взаимно-проникающих континуумов, в которых утраченная детальная информация о микромасштабах, таких как конфигурация межфазных границ присутствует в виде коэффициентов тепло- и массопереноса [2]. Под спиновым горением (СГ) принято считать режим горения, при котором очаг экзотермической химической реакции движется по спирали. Научный интерес к проблеме СГ обусловлен тем, что это — нелинейное волновое явление, альтернативное обычному послойному горению. Режимы СГ изучены в работах [3–6], где можно найти обширную библиографию.

В данной работе изучается влияние тепловой дисперсии на процесс СГ в случаях, когда теплопроводность твердой фазы значительно превышает теплопроводность газа, Исследование опирается на результаты [7, 8]. Рассматривается синтез карбида титана в режиме спинового горения: $Le \ll 1$, $Ze = 6{,}03$, $T_{ad} = 3300$ K.

Описание модели и результаты расчетов. Рассматривается нестационарное спиральное горение на плоской поверхности. Процессы в толщине слоя пренебрегаются. Это допущение принималось в [8]. В данной работе используются параметры: $\mathrm{Ma} = u_0/\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ — число Маха, $\mathrm{Re} = l_0^2/(t_0\nu_{\mathrm{air}})$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Pe}_T = l_0^2\big(\chi\rho_{\mathrm{air}}cp_{\mathrm{air}} + (1-\chi)\rho_{\mathrm{TiC}}cp_{\mathrm{TiC}}\big)/(t_0\lambda_\Sigma)$ — тепловое число Пекле, которое незначительно зависит от пористости, так при $\chi = 0{,}1$, $\chi = 0{,}5$, $\chi = 0{,}9$, $\mathrm{Pe}_T = 2{,}89\cdot 10^3$, $\mathrm{Pe}_T = 2{,}87\cdot 10^3$, $\mathrm{Pe}_T = 2{,}65\cdot 10^3$ соответственно, $\mathrm{Re} \approx 1$, $(\mathrm{Re} = 1{,}16)$. Характерные величины $t_0 = 2$ с, $l_0 = 0{,}015$ м, $u_0 = 7{,}5\cdot 10^{-3}$ м/с, $p_0 = \rho_0 T_0 R/M_0$ — давление газа, $D_0 = 2\cdot 10^{-5}$ м^2/с — коэффициент диффузии, χ — пористость, $\rho_0 = \rho_{\mathrm{air}} = 0{,}4$ кг $\cdot$ м$^{-3}$ — плотность воздуха, $\lambda_0 = \lambda_{\mathrm{air}} = 0{,}06$ Вт $\cdot$ м$^{-1}\cdot$ K — теплопроводность газа, $\lambda_{\mathrm{TiC}} = 6{,}8$ Вт $\cdot$ м$^{-1}\cdot$ K^{-1} — теплопроводность карбида титана, $c_p = C_{p,\mathrm{air}} = 1114$ Дж/(кг $\cdot$ K) — теплоемкость воздуха, $C_{\mathrm{TiC}} = 1800$ Дж/(кг $\cdot$ K) — теплоемкость карбида титана, $d_p = 10^{-4}$ м — средний диаметр частицы твердой фазы, $\nu_{\mathrm{air}} = 9{,}7\cdot 10^{-5}$ м^2/с — кинематическая вязкость, ρ_g — плотность газовой фазы. Температура находится по формуле $T_g = T_0(1+\beta\widetilde{T}_g)$, $\beta = RT_0/E$ — безразмерный параметр, характеризующий энергию активации, R, E — газовая постоянная, энергия активации, $\widetilde{Q} = Qt_0k/(\rho_0 c_p T_0)$, Q — тепловой эффект горения, $\gamma = c_P T_0\beta/Q$. Давление газа $p = \rho_g T_0(1+\beta\widetilde{T}_g)R/M_0$, R — газовая постоянная, $R = 8{,}3$ Дж/моль, M_0 — средняя молярная масса воздуха, $M_0 = 0{,}29$ кг/моль, ξ — коэффициент извилистости пор, k_f — коэффициент проницаемости в законе Дарси, ρ_g — плотность газа, ρ_{1S} — плотность карбида титана, k — константа скорости реакции горения, $\widetilde{k} = t_0k/\rho_0$, $\widetilde{\alpha}_{ex}$ — коэффициент теплообмена с внешней средой, $\widetilde{\lambda}_g$ — коэффициент теплопроводности, $\widetilde{D}$ — коэффициент диффузии, индекс air относится к параметрам для воздуха при нормальных условиях, безразмерные переменные, отмеченные тильдой. Далее переменные — безразмерные, тильда опускается; φ, r — угловая и радиальная компоненты скорости в полярной системе координат. Базовые уравнения модели — сохранение массы газовой и твердой фазы при кинетике горения [8], уравнение Дарси–Бринкмана движения газа в порах и теплового баланса имеют вид [9]

$$\frac{\partial\chi\rho_g\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Ma}^2}\nabla p = -\frac{\chi}{k_f\,\mathrm{Re}}\mathbf{u} + \frac{\chi}{\xi\,\mathrm{Re}}(\nabla\cdot\tau), \quad p = \rho_g(1+\beta T), \tag{1}$$

$$\big(\rho_g c_{pg}\chi + \rho_S c_S(1-\chi)\big)\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T\Big) = \nabla\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}_T}\left(\chi + (1-\chi)\frac{\lambda_{\mathrm{TiC}}}{\lambda_0}\right)\nabla T\right) + Q_D + Q_r. \tag{2}$$

Уравнение движения газа (1) включает градиент давления, сопротивление движению газа в порах и потерю количества движения на преодоление вязкого трения согласно модели Дарси–Бринкмана. Уравнение (2) — баланс тепла при тепловом равновесии газа и твердой фазы включает тепловыделение в

$$Q_r = Q\chi(1-\chi)\rho_{1S}\rho_g k\exp\Big(\frac{T}{\beta T+1}\Big)$$

процессе горении дисперсионный тепловой поток $Q_D = \zeta_D\nabla\cdot\big((1{,}8|u| + 0{,}025|v|)\nabla T\big)$, учитывающий анизотропию тепловой дисперсии в продольном и радиальном на-

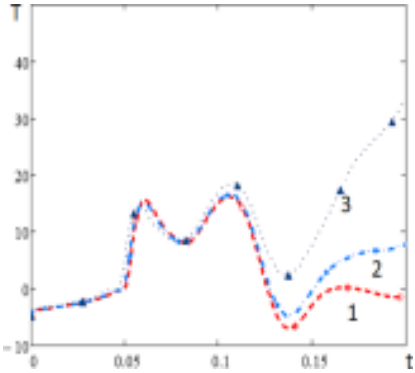


Рис. 1. Динамика температуры $T(t)$, $x = 0$, $y = 0{,}75$

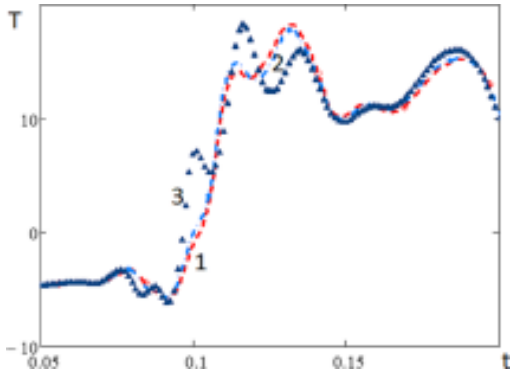


Рис. 2. Динамика температуры $T(t)$, $x = 0$, $y = 1{,}5$. Линии 1–3 — изменение температуры при дисперсии $\zeta_D = 0$, $\zeta_D = 0{,}1$ и $\zeta_D = 0{,}8$. Динамика температуры газа в области $0 < r < 2$ при дисперсии $\zeta_D = 0{,}6$ представлена температурными полями в моменты времени $t = 0{,}05, 0{,}15$

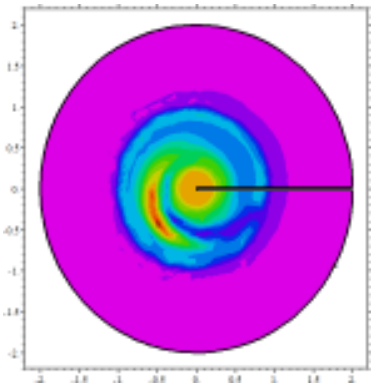


Рис. 3. $T(0{,}05, \varphi, r)$

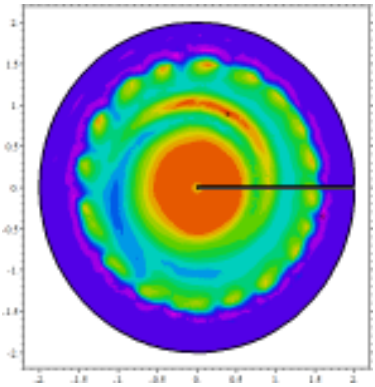


Рис. 4. $T(0{,}15, \varphi, r)$

правлениях [1]. Величина тепловой в проведенных расчетах дисперсии представлена параметром $\zeta_D = \chi d_p(\lambda_{\mathrm{TiC}}/\lambda_0)$.

Выводы. Проведено численное исследование перемежающихся тепловых структур спирально раскручивающихся очагов горения на пористой поверхности в режимах существенного влияния тепловой дисперсии (ТД)) на пределе однородного самовоспламенения поверхности кругового плоского диска. Характерное время возникновения двухголового спина происходит с опережением в сравнении с моделью $\zeta_D = 0$ (рис. 3 и 4). Установлено, что ТД приводит к образованию нагретого кругового ядра, возникающего вследствие дисперсии, которая способствует распространению горения на область большой площади, расположенной вблизи инициации горения (рис. 1 и 2). Ядро расширяется со временем. Вокруг ядра формируется структура спирально раскручивающихся зон с локальными максимумами температуры и областями сравнительно низкой температуры. Отмечен эффект перегрева вблизи границы $r = 1$, возникающий перед последующим охлаждением (рис. 2) из-за свободного теплообмена на внешней границе. Расчеты

показали, что при малой молекулярной теплопроводности нагретое ядро возникает при взаимном влиянии тепловой дисперсии и быстрого конвективного переноса тепла в радиальном направлении из головы спина.

1. *Hsu C. T.*, *Cheng P.* Thermal dispersion in a porous medium // Int. J. Heat Mass Transf. — 1990. — V. 33. — P. 1587–1597.
2. *Whitaker S.* Transport equations for multi-phase systems Chemical Engineering // Science. — 1973. — V. 28. — P. 139–147.
3. *Delgado J. M. P. Q.* Longitudinal and transverse dispersion in porous media // Chem. Eng. Res. Des. — 2007. — V. 85. — P. 1245–1252.
4. *Dvoryankin Y.*, *Strunina A. G.*, *Merzhanov A. G.* Combustion stability of thermite NVNicms // Fiz. Gor. i Vzryva. — 1985. — V. 21, No. 4. — P. 44–47.
5. *Ivleva T. P.*, *Merganov A. G.* Three-Dimensional Spinning Waves of gasless combustion // Dokl. Akad. Nauk. — 2000. — V. 371, No. 6. — P. 753–758.
6. *Novozhilov B. V.* Quasistationary theory of spiral combustion regime // Internat. J. SHS. — 1993. — V. 2, No. 3. — P. 207–213.
7. *Vadchenko S. G.*, *Filimonov I. A.* Wave combustion modes of hafnium in nitrogen // Comb. Explos. & Shock waves. — 1999. — V. 35, issue 2. — P. 155–161.
8. *Марков А. А.*, *Филимонов И. А.* Модель нестационарного спирального горения на плоскости // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2021. — Т. 22, вып. 3.
9. *Марков А. А.* Модели Навье–Стокса и Дарси–Бринкмана для синтеза микронных частиц магний-цинкового феррита // Теоретические основы химической технологии. — 2024. — Т. 58, №3. — С. 367–381. — DOI: 10.31857/S0040357124030117.

МЕТОД РАСЧЕТА ЭМИССИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕРАВНОВЕСНОГО УГЛЕРОДОСОДЕРЖАЩЕГО ГАЗА

А. М. Молчанов, Ю. В. Фролова

МАИ, Москва, Россия

В работе предложен метод расчета радиационных характеристик двухатомных газов в условиях колебательно-вращательной неравновесности. Он основан на модифицированной узкополосной модели k-распределения (kd), включающей поправки колебательной и вращательной функции распределения, а также осредненные функции Больцмана по соответствующим температурам.

При проектировании спускаемых аппаратов для Марса и Венеры необходимо учитывать тепловую нагрузку при входе в атмосферу. Наряду с конвективным теплообменом важную роль играет перенос излучения. В нагревающем газе наблюдается неравновесность между поступательными, вращательными и колебательными энергетическими модами молекул. В атмосферах Марса и Венеры преобладают такие частицы как углекислый газ и азот, которые в следствие интенсивном нагреве в ударной волне преобразуются в одноатомные и двухатомные молекулы (CO, CN и т. п.).

Расчет эмиссионных свойств газов сопряжен с рядом трудностей, в первую очередь — необходимость предсказания спектральных коэффициентов поглощения и учет явления спектральной корреляции.

Наиболее точный метод — line-by-line (LBL), который интегрирует результаты расчетов передачи излучения по узким спектральным интервалам [1]. Однако из-за большого числа спектральных линий газов метод LBL слишком вычислительно затратен для инженерных расчетов. Более быстрые приближенные методы — стати-

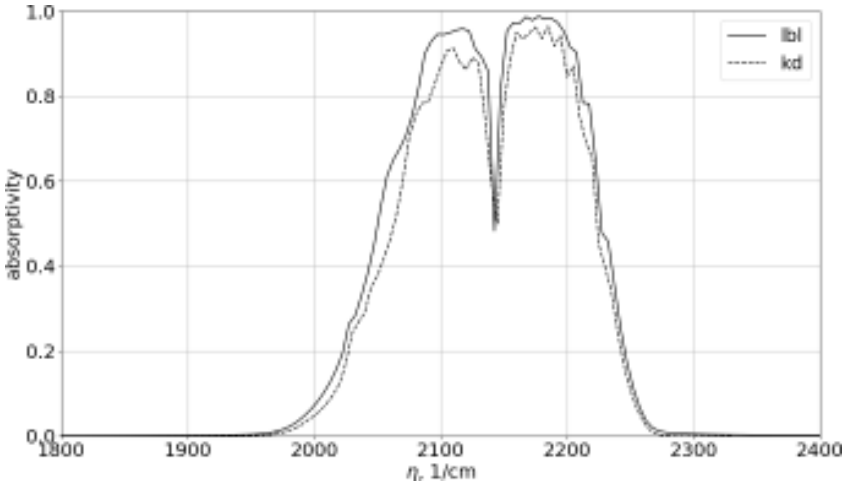


Рис. 1. Пропускательная способность слоя газа в тесте №3: LBL — расчет методом LBL; kd — расчет методом k-распределения

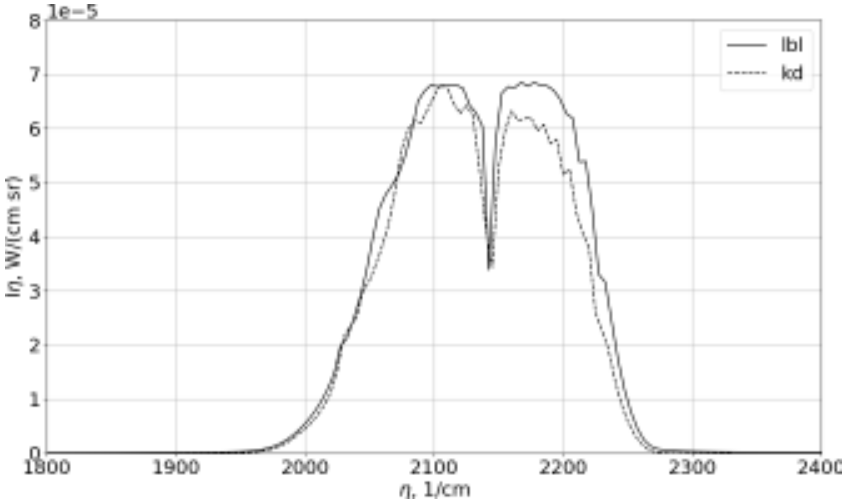


Рис. 2. Спектральная яркость слоя газа в тесте №3: LBL — расчет методом LBL; kd — расчет методом k-распределения

стическая узкополосная модель (SNB) [2, 3] и модель k-распределения (kd) [4, 5] — позволяют использовать LBL лишь для верификации.

Использование таких методов предполагает создание для каждого компонента баз данных, описывающих коэффициенты поглощения при различных значениях волновых чисел, температур и парциальных давлений газовых компонентов. Однако при неравновесных условиях число параметров увеличивается, и базы данных становятся слишком объемными для их применения.

Цель работы — создание методики расчета излучательных характеристик двухатомных газов в условиях колебательно-вращательной неравновесности, в которой используются классическая приближенная узкополосная модель kd, полученная для термически равновесного газа, с внесением поправок на неравновесность через явные алгебраические формулы.

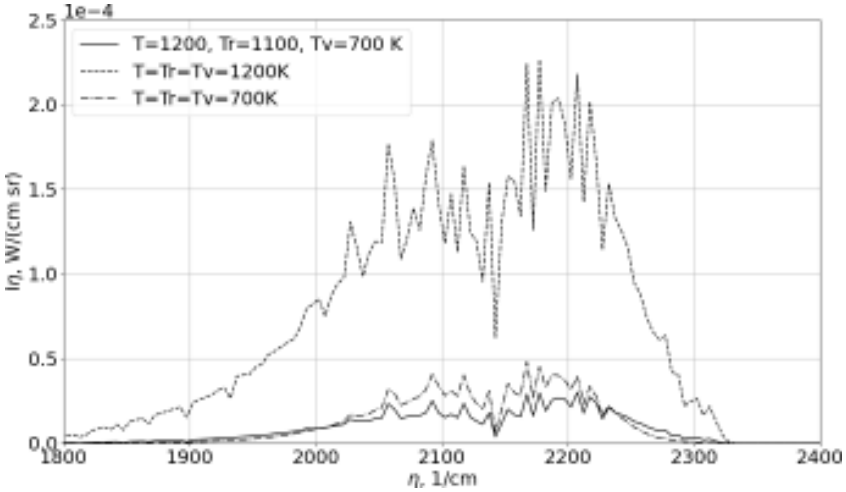


Рис. 3. Тест №7: спектральная яркость слоя газа, рассчитанная по неравновесной и равновесной методикам

В работе представлена сформированная база данных, в которой для каждой газовой полосы представлены поправочные коэффициенты, учитывающие влияние неравновесности. Размер полученной базы данных существенно меньше (на ~ 3 порядка) аналогичной базы свойств оптических коэффициентов модели k-распределения, построенной для термически неравновесного газа.

Для верификации методики проведена серия расчетов радиационных свойств монооксида углерода в диапазоне 1800–2400 $см^{-1}$ при разных соотношениях температур и давлений. В качестве эталона для сравнения использовались расчеты по точной методике LBL.

Проведенные тесты показали, что результаты расчетов по предложенной методике k-распределения хорошо согласуются с данными, полученными точным методом LBL (рисунки 1 и 2).

Показана невозможность использования равновесной методики (т. е. единой равновесной температуры) для расчета неравновесного излучения, в которой в качестве единой температуры берется одна из характерных температур энергетических мод. Спектральная яркость, полученная по неравновесной методике, ниже по сравнению с результатами расчета по равновесной методике (рис. 3).

1. *Ozawa T.*, *Garrison M. B.*, *Levin D. A.* Accurate Molecular and Soot Infrared Radiation Model for High-Temperature Flows // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. — 2007. — V. 21(1). — P. 19–27. — DOI: 10.2514/1.19137.
2. *Molchanov A. M.*, *Yanyshev D. S.*, *Bykov L. V.*, *Kovalenko A. S.* Calculation of CO2 Absorptivity under Thermal Nonequilibrium Conditions in the Wave Number Range between 400 and 1200 cm–1 // High Energy Chemistry. — 2024. — V. 58, Suppl. 3. — P. S354–S359. — DOI: 10.1134/S0018143924701169.
3. *Molchanov A. M.*, *Siluyanova M. V.* Methods for Calculating the Emission Properties of H_2O in Aviation Engineering Problems // Russian Aeronautics. — 2024. — V. 67(2). — P. 393–401. — DOI: 10.3103/S106879982402020X.
4. *Modest M. F.* Radiative Heat Transfer — 2nd ed. — Hardbound: Academic Press, 2003. — 860 p.
5. *Molchanov A. M.*, *Bykov L. V.*, *Yanyshev D. S.* Calculating thermal radiation of a vibrational nonequilibrium gas flow using the method of k-distribution // Thermophysics and Aeromechanics. — 2017. — V. 24(3). — P. 399–419. — DOI: 10.1134/S086986431703009X.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МЕХАНИЗМОВ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ ГОРЕНИЯ ВОДОРОДНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ НА ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЯ В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ С КЛИНОВИДНЫМ ТЕЛОМ

А. М. Никонов[1,2]***, Н. А. Харченко***[1,2]

[1]*ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

В настоящее время ведется большое количество исследований процессов горения в различных газодинамических системах. Большую трудность в данной области составляет проведение экспериментальных исследований. Сверхзвуковые турбулентные течения в данных системах сопровождаются возникновением сложных волновых структур, взаимодействующими ударными волнами и областями отрыва пограничного слоя, которые, в свою очередь, значительно влияют на процессы горения. Поэтому создание современных вычислительных средств для моделирования процессов турбулентного горения является актуальной задачей. Кроме того, важным аспектом при решении такого рода физических задач является апробированное описание физико-химических процессов. Следовательно, необходимо проводить детальный анализ влияния механизмов химической кинетики на результаты численного моделирования [1].

В данной работе приводится разработанная вычислительная модель [2, 3] — математическая модель и ее численная аппроксимация, используемая для моделирования процессов турбулентного горения водорода в высокоскоростных потоках, реализованная в модифицированной версии компьютерного кода ГРАТ [2]. В основе программной реализации данной вычислительной модели лежит численное решение методом конечного объема на неструктурированных сетках трехмерной системы уравнений газовой динамики, описывающей движение сжимаемого, вязкого, химически реагирующего газа, дополненной двухпараметрической RANS-моделью турбулентности k–ω SST [4]. Для численного интегрирования решаемой системы уравнений используется модифицированный метод AUSM+ [5, 6]. Помимо этого, в работе приводится реализация гибридного метода параллельных вычислений OpenMP + MPI [7], вследствие высокой вычислительной сложности решаемой физической задачи.

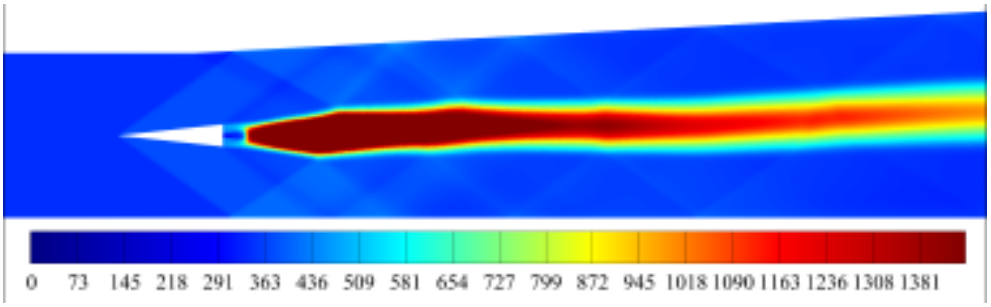


Рис. 1. Пространственное распределение статической температуры (K) в расширяющемся канале

В работе представлены результаты численного моделирования процессов турбулентного горения предварительно не перемешанной водородно-воздушной смеси в одностороннем расширяющемся канале с расположенным в нем клиновидным телом [8]. Впрыск водорода осуществляется в основании клиновидного тела.

В данной задаче имеет место возникновения сложных ударно-волновых структур, в области интенсификации горения водородно-воздушной смеси, что приводит к более эффективному смешиванию топлива и окислителя.

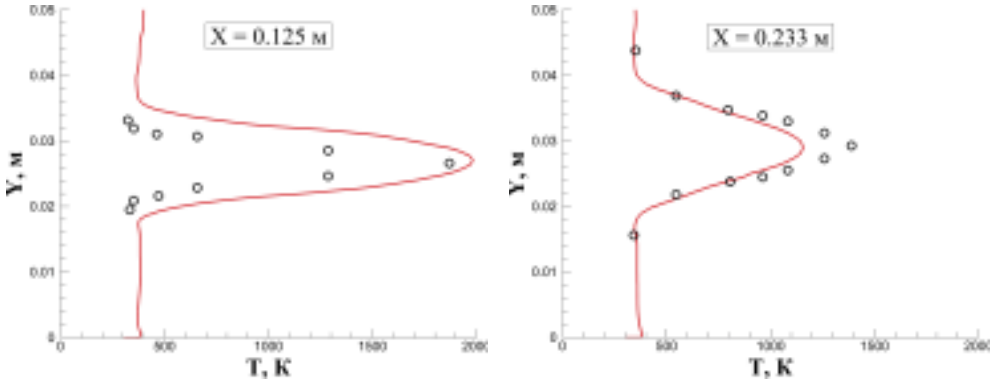


Рис. 2. Распределения статической температуры в поперечных сечениях расширяющегося канала (линия — результаты данной работы, символы — экспериментальные данные)

Основной целью данного исследования является изучение влияния различных механизмов химической кинетики горения водородно-воздушной смеси на результаты численного моделирования. Проводится сравнение полученных результатов расчетов с экспериментальными данными по распределениям параметров потока в поперечных сечениях расширяющегося канала.

1. *Никонов А. М.*, *Носенко Н. А.*, *Харченко Н. А.* Численное моделирование процессов турбулентного горения воздушно-водородной смеси в сверхзвуковом потоке // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ'2024), 1–8 сентября 2024 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2024. — С. 37–39.
2. *Харченко Н. А.*, *Никонов А. М.* Определение распределенных аэродинамических характеристик осесимметричного тела конфигурации SOCBT при турбулентном обтекании трансзвуковом потоком // Математическое моделирование и численные методы. — 2023. — №2. — С. 100–128.
3. *Никонов А. М.*, *Харченко Н. А.* Численное моделирование турбулентного горения водорода в сверхзвуковом потоке горячего влажного воздуха // Химическая физика. — 2025. — Т. 44, №4. — С. 69–78.
4. *Menter F. R.*, *Kuntz M.*, *Langtry R.* Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer. — 2003. — V. 4. — P. 625–632.
5. *Liou M.-S.* A sequal to AUSM: AUSM+ // J. Comput. Phys. — 1996. — V. 129. — P. 364–382.
6. *Chen S. S.*, *Cai F. J.*, *Xue H. C.*, *Wang N.*, *Yan C.* An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows // Appl. Math. Model. — 2020. — V. 77. — P. 1065–1081.
7. *Бессонов О. А.*, *Харченко Н. А.* Программная платформа для суперкомпьютерного моделирования задач аэротермодинамики // Программная инженерия. — 2021. — Т. 12, №6. — С. 302–310.
8. *Guerra R.*, *Waidmann W.*, *Laible C.* An experimental investigation of the combustion of a hydrogen jet injected parallel in a supersonic air stream // 3rd International Aerospace Planes Conference, AIAA. — 1991. — P. 5102.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТОВ СЖИМАЕМОСТИ НА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ГОРЯЧИХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ RANS-МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ k–kL MEAH

***Н. А. Носенко*[1,2], *Н. А. Харченко*[1,2]**

[1]*ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

В работе представлена валидационная задача моделирования турбулентного истечения сверхзвуковой горячей струи в затопленное пространство в условиях, приближенных к расчетному режиму сопла с диаметром среза $D_{jet} = 91{,}44$ мм [1]. Распределение числа Маха на выходном сечении считается равномерным ($M_{jet} = 2$). Определение газодинамических параметров вдоль оси струи с использованием инструментов численного моделирования представляет собой нетривиальную задачу в связи с трудностью описания слоев смешения в сжимаемых потоках.

Большинство известных моделей турбулентности, основанных на гипотезе Буссинеска, сильно завышает уровень генерации турбулентной вязкости в слоях смешения. Данная проблема возрастает с увеличением температуры торможения в форкамере, что не позволяет корректно моделировать искомые параметры вниз по потоку [2, 3]. Одна из причин заключается в том, что указанные модели турбулентности создавались для несжимаемых, плоских и холодных течений. Основной подход для учета эффекта сжимаемости — это уменьшение производства энергии турбулентности и увеличение анизотропии напряжений Рейнольдса в слоях смешения [4].

В данной работе валидационная задача сверхзвукового истечения горячей струи численно решается в осесимметричной постановке на регулярной сетке. Расчеты проводятся с использованием компьютерного кода ГАЛА, который является вариантом модификации программы ГРАТ [5, 6]. В его основе лежит численное решение методом контрольного объема системы уравнений газовой динамики, описывающей движение вязкого сжимаемого газа, дополненной двухпараметрическими RANS-моделями турбулентности k–ω SST (2003) [7] и k–kL MEAH (2015) [8]. В работе используется оптимальное значение числа Маха спутного потока с целью снижения его влияния на исследуемую область течения при сохранении стабильности и сходимости расчета.

Основной целью данного исследования является воспроизведение экспериментально полученных распределений газодинамических параметров вдоль оси горячей сверхзвуковой струи: числа Маха, температуры и давления торможения. Также в работе изучается влияние поправок на сжимаемость и температуру для указанных моделей турбулентности на величину длины начального участка струи, где искомые параметры в среднем по сечению остаются практически постоянными [2, 9].

Таблица 1

Исходные параметры для численного моделирования

Параметры	M	T, К	P, кПа
Форкамера	—	1116	793
Спутный поток	0,025	293	101

В табл. 1 указаны входные параметры, используемые для численного моделирования истечения сверхзвуковой горячей струи в затопленное пространство.

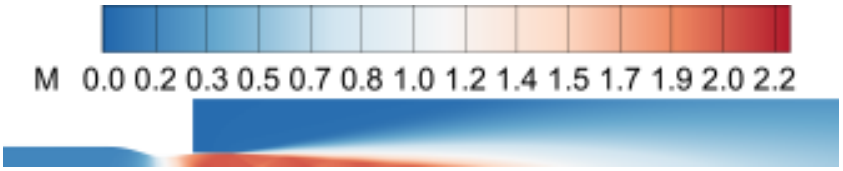


Рис. 1. Поле числа Маха, модель турбулентности k–kL MEAH (2015)

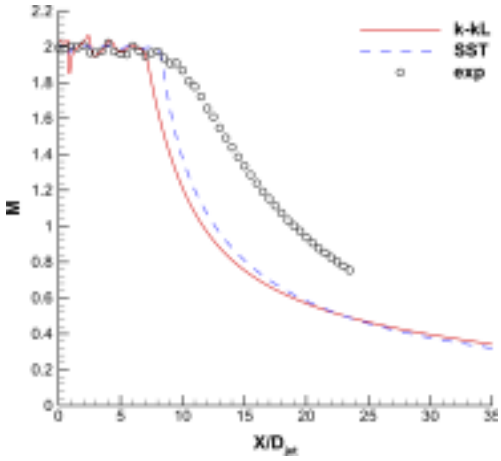
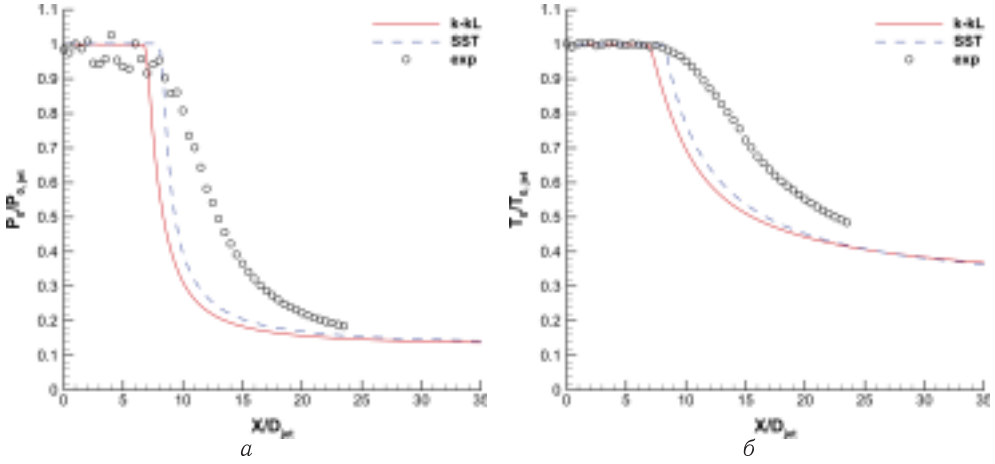


Рис. 2. Распределение числа Маха вдоль оси струи



а *б*

Рис. 3. Распределения параметров торможения вдоль оси струи: *а* — давление; *б* — температура

На рисунках 1–3 показаны распределения газодинамических параметров, полученные с использованием моделей турбулентности k–ω SST (2003) и k–kL MEAH (2015), и их сравнение с экспериментальными данными. Параметры торможения приведены к соответствующим значениям на срезе сопла. Как можно видеть, стандартные модели, основанные на гипотезе Буссинеска, недооценивают скорость затухания струи, что говорит о необходимости их дальнейшей модификации для расчета такого типа течений.

1. *Seiner J. M. et al.* The effects of temperature on supersonic jet noise emission // 14th Aeroacoustics Conference, AIAA Paper. — 1992. — No. 92-02-046. — P. 295–307.
2. *Truemner J., Mundt C.* Total temperature-based correction of the turbulence production in hot jets // American Society of Mechanical Engineers. — 2017. — P. 12.
3. *Georgiadis N. J. et al.* Status of turbulence modeling for hypersonic propulsion flowpaths // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2014 — P. 295–318.
4. *Глушко Г. С., Иванов И. Э., Крюков И. А.* Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2010. — Т. 9, №1. — С. 164–171.
5. *Харченко Н. А., Носенко Н. А.* Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически-конического тела и двойного конуса // Математическое моделирование и численные методы. — 2022. — №3. — С. 33–46.
6. *Харченко Н. А., Никонов А. М., Носенко Н. А.* Численное решение задачи турбулентного обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически-конического тела // XXXIII научно-техническая конференция по аэродинамике. ЦАГИ. — 2022. — С. 101–102.
7. *Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer. — 2003. — V. 4. — P. 625–632.
8. *Abdol-Hamid K. S., Carlson J. -R., Rumsey C. L.* Verification and Validation of the k-kL Turbulence Model in FUN3D and CFL3D Codes // 46th AIAA Fluid Dynamics Conference. — 2016. — P. 27.
9. *Dash S. M., Kenzakowski D. C.* A Compressible-dissipation extension of the k-epsilon Turbulence Model and Building–Block data for its Validation // Annual Interceptor Technology Conference. — 1992. — P. 27.

СРЫВ ДЕТОНАЦИИ ВОДОРОДНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В КОНТАЙМЕНТЕ АЭС ЗАВЕСАМИ ИЗ ВОДЯНОГО ПАРА

***А. В. Острик*[1], *В. Ю. Гидаспов*[2], *В. В. Ким*[1], *И. Э. Иванов*[2], *И. А. Крюков*[3]**

[1]*ФИЦ ПХФ и МХ РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия;*
[2]*МАИ, г. Москва, Россия;* [3]*ИПМех РАН, Москва, Россия*

Развитие водородной энергетики является одним из перспективных направлений совершенствования энергетического комплекса России [1]. Перспектива использования водорода, как топлива, определяется высокой теплотой реакции его окисления, экологичностью (конечный продукт — вода) и распространенностью в природе этого химического элемента. Однако высокая теплотворная способность водородно-воздушной смеси (ВВС) несет в себе очевидную катастрофическую опасность: детонационный взрыв водородно-воздушного облака, образующегося при утечке водорода в атмосферу [2].

При тяжелых авариях на атомных электростанциях (АЭС) может выделяться под куполом контаймента порядка полутора тонн водорода, что при образовании и детонации ВВС эквивалентно 43 т тротила (1,5 т·120 МДж/кг/4,18 МДж/кг $\approx$ 43 т). Взрыв такой мощности, как правило, разрушает конструкцию контаймента и приводит к выбросу радиоактивных веществ. Известным примером разрушительной силы детонации ВВС является Чернобыльская катастрофа в 1986 г. В результате паро-циркониевой реакции в разрушенной активной зоне Чернобыльской АЭС образовалось до 5000 м^3 ($\approx$ 450 кг) водорода, который распространился в центральный зал АЭС и образовал ВВС. Детонация этой смеси разрушила центральный зал и другие помещения четвертого энергоблока.

Образование водорода также усугубило последствия землетрясения на АЭС «Фукусима» в 2011 г. Как и в Чернобыле, цирконий, из которого традиционно

изготавливаются некоторые элементы конструкций АЭС, вступил в химическую реакцию с водяным паром и образовался водород. Детонация ВВС разрушила защитные оболочки энергоблоков, что привело к радиоактивному заражению местности, в том числе, и моря.

Таким образом, исследование детонации ВВС представляется важной для атомной энергетики задачей. Настоящая работа посвящена разработке численной модели детонации ВВС во внутреннем объеме контаймента. Особое внимание уделяется изучению возможностей защиты посредством срыва детонации ВВС завесами из водяного пара.

Ранее проведенные авторами численные исследования показали, что осесимметричная детонация стехиометрической ВВС, инициированная в основании контаймента, приводит к его катастрофическому разрушению, вследствие кумуляции детонационных волн (ДВ) в области вершины купола. В то же время в [3–7] рассматривается возможность срыва детонации водородосодержащих смесей посредством установки на пути ДВ завес из H_2O (парокапельных или из водяного пара). Так, например, в патенте [5] утверждается: «для исключения аварийных ситуаций в машинных залах ТЭС и АЭС наиболее эффективен метод предотвращения возгорания и детонации водорода с помощью направленных потоков тонкораспыленной воды и пара».

Течение многокомпонентной реагирующей смеси описывается системой уравнений Эйлера. Для замыкания этой системы используются уравнения состояния и модели термодинамики и химической кинетики [8]. В качестве начальных условий задается состояние непрореагировавшей и невозмущенной ВВС. Граничными условиями служат условия непротекания на стенках контаймента. На оси симметрии ставятся условия симметричного отражения. Рассматриваемая система уравнений с начальными и граничными условиями интегрируются численно итерационным методом расщепления по физическим процессам: на первом, газодинамическом этапе [9], численно реализуется изменение искомых величин за счет конвективного переноса, затем на втором, химическом этапе, при уже определенных плотности и удельной энергии смеси решаются уравнения химической кинетики и рассчитываются новые значения массовых долей химических компонентов, после чего цикл повторяется. Для численной аппроксимации конвективной части исходной системы уравнений использовалась явная квазимонотонная численная схема повышенного порядка точности, являющаяся модификацией схемы С. К. Годунова [9]. Предполагается кусочно-линейное распределение параметров на расчетном временном слое, к которому применяются существенно двумерные процедуры «восстановления» данных в расчетных ячейках.

Тороидальная завеса с 10% массовым содержанием пара H_2O первоначально устанавливалась на середине высоты контаймента. Несмотря на то, что завеса из паров H_2O в области перехода от цилиндрической к сферической части купола срывает установившийся режим детонации, влияние геометрического усиливающего эффекта при прохождении волны сжатия сферической части купола в конечном итоге приводит к тому, что уровень давлений и длительность воздействия на внутреннюю поверхность купола оказываются достаточными для полного разрушения сферического сегмента контаймента уже к моменту времени $t = 40$ мс. Также наличие вторичной отраженной ударной волны (УВ) достаточной интенсивности способствует удержанию высокого уровня давлений в локальной предвершинной области купола.

Следовательно, завесу требуется ставить в нижней части контаймента, в зоне, где начальная ДВ еще идет по расширяющейся области. Тогда, как и в предыдущем

варианте, в области завесы происходит срыв детонации (распад ДВ на УВ и волну горения). Однако в отличие от случая с завесой посредине высоты контаймента, воспламенения ВВС за УВ после ее взаимодействия с осью симметрии не происходит. В нижней части цилиндрического сегмента контаймента интенсивность волны сжатия составляет $P \sim 9$ бар, которая быстро снижается до уровня $P \sim 4$ бар. Далее волна нагрузки скользит по стенке купола от основания к вершине практически с постоянной скоростью ~ 795 м/с. Схождение УВ к оси симметрии происходит в момент времени $t = 95{,}5$ мс, при этом давление достигает пикового значения $P = 86$ бар. В дальнейшем волны расширяется, двигаясь от оси симметрии и уровень давлений заметно снижается до значений $P \sim 3$ бар. Прочностные расчеты с использованием нестационарной модели разрушения железобетона [10] показывают, что во всей конструкции значения параметра поврежденности D не превышают единицы и, следовательно, завеса в нижней части сооружения обеспечивает защиту контаймента от детонации ВВС в аварийной ситуации.

1. *Новак А. В.* Водород: энергия «чистого» будущего // Энергетическая политика. — 2021. — №4.
2. Safety and Security Analysis: Investigative Report by NASA on Proposed EPA Hydrogen-Powered Vehicle Fueling Station. Assessment and Standards Division Office of Transportation and Air Quality U.S. Environment Protection Agency, EPA420-R-04-016 October 2004. — 45 p.
3. *Гидаспов В. Ю.*, *Стрельцов В. Ю.* Исследование влияния капель распыленной воды на воспламенение и детонацию водородо-воздушной смеси // Мат. моделирование. — 2004. — Т. 16, №6. — С. 123–126.
4. Патент №1134030 Российская Федерация, МПК G21C 9/00 (2006.01). Устройство для подавления детонации и горения водорода: №2011139013/07: заявлено 26.09.2011: опубликовано 10.02.2012 / Большов Л. А., Кочнев С. И., Сегаль М. Д., Семенов В. Н. — 19 с.
5. Патент №2565230 Российская Федерация, МПК G21C 9/00 (2006.01). Установка для предотвращения горения и детонации водорода: №201411522: заявлено 17.04.2014: опубликовано 20.10.2015 / Большов Л. А., Сегаль М. Д., Семенов В. Н. — 18 с.
6. *Grabarczyk M. et al.* Temperature effect on explosion parameters of hydrogen-air deflagrations in presence of water vapor // Challenges of Modern Technology. — 2016. — Т. 7, №3. — С. 39–44.
7. *Cao X. et al.* Experimental research on hydrogen/air explosion inhibition by the ultrafine water mist // International Journal of Hydrogen Energy. — 2022. — V. 47, No. 56. — P. 23898–23908.
8. *Гидаспов В. Ю.*, *Северина Н. С.* Некоторые задачи физической газовой динамики. — М.: Изд-во МАИ, 2016. — 196 с.
9. *Глушко Г. С.*, *Иванов И. Э.*, *Крюков И. А.* Метод расчета турбулентных сверхзвуковых течений // Матем. моделирование. — 2009. — Т. 21, №12. — С. 103–121.
10. *Острик А. В.*, *Ким В. В.*, *Острик М. А.* Численное моделирование деформирования и разрушения конструкций из бетонных композитов при нестационарном нагружении // Конструкции из композиционных материалов. — 2022. — Вып. 4. — С. 21–28.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОСАЖДЕНИИ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ WCSPH

И. И. Потапов, О. В. Решетникова

ВЦ ДВО РАН ХФИЦ, Хабаровск, Россия

В настоящее время при моделировании процессов взвешивания и осаждения донных частиц доминируют сеточные методы, разработанные для решения задач

механики сплошных сред. Однако классические сеточные методы сталкиваются с трудностями при описании водно-песчаных смесей высокой концентрации, которые обусловлены необходимостью построения уравнений состояния многофазной среды и сложностью верификации таких уравнений. Определенное преимущество здесь получают бессеточные методы (в частности SPH) моделирования водно-песчаных смесей, позволяющие не рассматривать их как сплошную среду. Однако известные попытки решения классическим методом SPH задач на движение гранул твердой фазы в жидкой среде демонстрируют нефизичность их поведения.

Авторами в работе [1] разработана оригинальная разновидность метода WCSPH, реализующая попытку описания движения дискретной твердой гранулы в вязкой жидкой среде, оставаясь в рамках механики сплошных сред. Здесь используется комбинация классической механики движения материальной точки (гранулы) и SPH-методологии для учета обратного ее влияния на жидкую среду. Поэтому движение частицы жидкой и твердой фаз описывается разными уравнениями: соответственно Навье–Стокса и поступательного движения тела. Вместе в этим, для восстановления мгновенных значений свойств в частицах твердой и жидкой фаз используются и разные по масштабу R сглаживания SPH-ядра: соответственно с $R = 1$ и с $R = 2$.

Верификация численного решения с использованием предложенного метода производилась относительно задачи на определение гидравлической крупности частицы. Получены зависимости для гидравлической крупности частицы от ее диаметра для различных случаев дискретизации объема жидкости. Численные результаты демонстрируют хорошую согласованность с экспериментальными данными и известными феноменологическими зависимостями для кварцевого песка.

1. *Потапов И. И.*, *Решетникова О. В.* К моделированию задачи осаждения твердой частицы в вязкой несжимаемой жидкости методом гидродинамики сглаженных частиц (SPH) // Труды ИСП РАН. — 2024. — Т. 36, №4. — С. 191–202.

АНАЛИЗ ПРИЧИН РАЗРУШЕНИЯ ПЕРЕЛИВНОЙ ЗАПРУДЫ ПРОТОКИ ПЕМЗЕНСКАЯ РЕКИ АМУР

И. И. Потапов, Ю. Г. Силакова

ВЦ ДВО РАН ХФИЦ, Хабаровск, Россия

Хабаровский водный узел является участком реки Амур, который характеризуется русловыми процессами, активно влияющими на большое количество гидротехнических сооружений. Мониторингу над данными процессами посвящено большое количество работ [1–3].

Проведенный анализ гидрологических данных за 2018–2024 гг. и состояния береговых укреплений в окрестностях переливной запруды протоки Пемзенская позволил выявить причины возникновения прорана в теле запруды и определить по результатам мониторинга за 2023–2024 гг. тенденции его развития. Представлены результаты натурных наблюдений за процессом разрушения переливной запруды на протоке Пемзенская реки Амур в окрестности города Хабаровска за 2018–2024 гг.

1. *Бортин Н. Н.*, *Милаев В. М.*, *Горчаков А. М.* Влияние природных и антропогенных факторов на пропускную способность русла реки Амур у города Хабаровска при прохождении паводков // Водное хозяйство России. — 2020. — №2. — С. 66–82.

2. *Потапов Д. И.*, *Потапов И. И.* Анализ русловых деформаций р. Амур на участке Хабаровского водного узла // Информатика и системы управления. — 2020. — №2(64). — С. 68–74. — DOI: 10.22250/isu.2020.64.68-74.
3. *Потапов И. И.*, *Потапов Д. И.* Анализ русловых процессов участка р. Амур в окрестности Хабаровска за 2005–2007 гг. // Информатика и системы управления. — 2018. — №4(58). — С. 150–156. — DOI: 10.22250/isu.2018.58.150-156.

РАСШИРЕНИЕ СПЕКТРА ПРИМЕНЕНИЯ И СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ БЕССЕТОЧНОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ*

Д. Л. Ревизников, А. В. Способин

МАИ, Москва, Россия

В серии работ [1–4], посвященных численному моделированию взаимодействия крупнодисперсных частиц с ударным слоем у поверхности затупленного тела, наряду с традиционным методом конечных объемов на декартовых сетках [5], который используется для расчета газодинамических течений, в целях ускорения расчетов и сокращения требований к вычислительным ресурсам авторы применили альтернативный подход — бессеточный метод решения систем уравнений газовой динамики [6]. Впоследствии реализация и применение бессеточного метода фактически переросло в самостоятельное направление исследований, связанных как с совершенствованием самих вычислительных алгоритмов, так и с расширением спектра решаемых с помощью данного подхода задач [7, 8].

Бессеточный метод использует распределенные в пространстве узлы как альтернативу ячейкам вычислительной сетки. В основе алгоритма лежит аппроксимация частных пространственных производных газодинамических величин и зависящих от них функций в виде линейной комбинации их значений в соседних вычислительных узлах.

При применении бессеточного метода к решению нестационарных пространственных задач вычислительной аэродинамики авторы столкнулись с особенностями подхода, которые в недостаточной степени освещаются в современной научной литературе и потребовали дальнейшей проработки. В частности, в результатах трехмерного моделирования обтекания осесимметричного затупленного тела набегающим вдоль оси симметрии потоком газа наблюдалась асимметрия полей газодинамических величин. Детальное исследование эффекта показало, что он обусловлен использованием единой системы координат для расчета векторов потоков между узлами в системах уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Введение для расчета конвективных потоков между парой вычислительных узлов локальной системы координат, выбор которой определяется пространственной конфигурацией соседних узлов, позволяет исключить асимметрию решения при регулярном симметричном и существенно ее снизить при нерегулярном пространственном распределении узлов. Также повышение точности численного решения достигается применением комбинации полиномиальной (Polynomial least squares — PLS) МНК-аппроксимации частных пространственных производных для конвективных

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (номер темы FSFF-2023-0008).

потоков и аппроксимации рядом Тейлора (Taylor least squares — TLS) для вязких потоков при дискретизации системы уравнений Навье–Стокса [9].

Для моделирования бессеточным методом обтекания газом тел сложной формы разработана процедура импорта геометрических параметров из программного комплекса с открытым исходным кодом OpenFOAM, которая на основе пространственной сетки формирует набор вычислительных узлов и связей меду ними. Разрабатываются алгоритмы применения бессеточного метода в задачах с изменяемой геометрией для тел сложной формы, в том числе для моделирования движения крупных частиц в ударном слое.

Основой программной реализации бессеточных алгоритмов служит технология гетерогенных параллельных вычислений OpenCL, что позволяет получить кратное ускорение расчетов благодаря использованию графических процессоров.

1. *Ревизников Д. Л.*, *Способин А. В.* Численное моделирование обтекания тел сверхзвуковыми гетерогенными потоками. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — 212 с.
2. *Способин А. В.*, *Ревизников Д. Л.*, *Иванов И. Э.*, *Крюков И. А.* Колебания давления и теплового потока, индуцированные газодинамическим взаимодействием высокоинерционной частицы с ударным слоем // Известия вузов. Авиационная техника. — 2020. — №4. — С. 108–115.
3. *Reviznikov D. L.*, *Sposobin A. V.*, *Ivanov I. E.* Oscillatory Flow Regimes Resulting from the Shock Layer — Particle Interaction // High Temperature. — 2020. — V. 58, No. 2. — P. 278–283.
4. *Sposobin A. V.*, *Reviznikov D. L.* Impact of High Inertia Particles on the Shock Layer and Heat Transfer in a Heterogeneous Supersonic Flow around a Blunt Body // Fluids. — 2021. — V. 6, No. 11. — no. 406.
5. *Способин А. В.* Метод скользящих адаптивных декартовых сеток расчета газодинамического взаимодействия частиц с ударным слоем в сверхзвуковом потоке // Тепловые процессы в технике. — 2022. — Т. 14, №4. — С. 178–185.
6. *Способин А. В.* Бессеточный алгоритм расчета сверхзвуковых течений вязкого теплопроводного газа // Труды МАИ. — 2021. — №121. — 25 с.
7. *Способин А. В.* Бессеточный алгоритм расчета взаимодействия крупных частиц с ударным слоем в сверхзвуковых гетерогенных потоках // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, №5. — С. 1007–1027.
8. *Sposobin A. V.*, *Reviznikov D. L.* A Meshless Algorithm for Modeling the Gas–Dynamic Interaction between High-Inertia Particles and a Shock Layer // Fluids. — 2023. — V. 8. — Iss. 2. — Article No. 53.
9. *Способин А. В.*, *Ревизников Д. Л.* Особенности решения задач сверхзвукового обтекания затупленных тел бессеточным методом // Известия вузов. Авиационная техника. — 2024. — №3. — С. 97–105.

ТЛЕЮЩИЙ РАЗРЯД НА ВСТРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОДАХ

Л. Б. Рулева, С. И. Солодовников

ИПМех РАН, Москва, Россия

Свойства низкотемпературной плазмы в виде аномального и нормального тлеющих разрядов в газовых потоках при пониженном давлении широко исследуются в численных [1, 2] и физических [3, 4] экспериментах. Экспериментальные исследования разряда в аэродинамическом блоке при воздействии газового потока, инициированного ударной волной, позволяют связать временные интервалы суще-

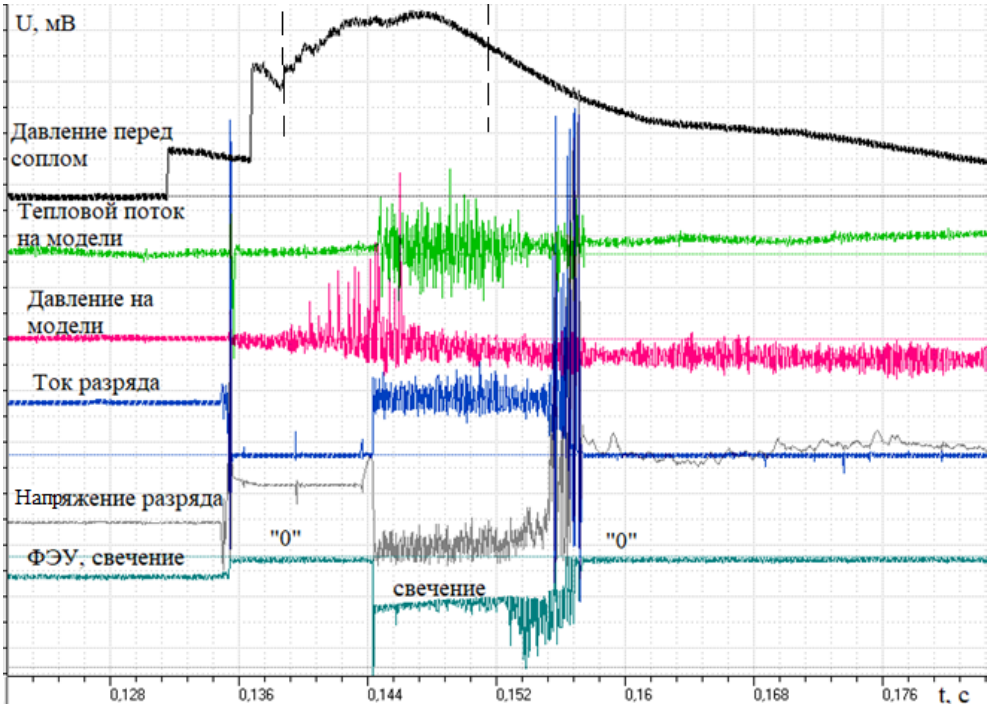


Рис. 1. Графики датчиков в эксперименте

ствования высокого давления в пробке перед коническим соплом и разряда в потоке, изучить формирование спектров излучения, предлагать способы управления потоком с помощью разряда.

На лабораторной установке ГУАТ исследовался аномальный тлеющий разряд при пониженном до 3,7 торр давлении, на встречных электродах между двумя моделями плоского канала, схема которых описана в [3], но электроды размещены под углом 135 градусов друг к другу. Модель плоского канала, из акрила, образованного двойным полуклином и затупленной кромкой, расположенные на расстоянии 10 мм друг от друга, была закреплена за соплом. На нижней пластине на расстоянии 100 мм от катода внедрены датчик давления и теплового потока. Сигналы всех датчиков оцифровывались блоками АЦП с частотой 10 МГц и записывались в компьютер в виде базы данных и графиков.

В экспериментах зарегистрировано свечение аномального тлеющего разряда с областью нормального тлеющего разряда длительностью 11,36 мс, при котором напряжение в разрядном промежутке занимает свое минимально возможное значение и остается постоянным. Присутствует возмущение сигналов датчиков при воздействии воздушного потока. После окончания действия разряда наблюдается рост сигнала датчика теплового потока и снижение давления на датчике давления. На рис. 1 приведен график сигналов в эксперименте, где сигнал фотоэлектронного умножителя (ФЭУ) показывает, что, после истечения воздушного потока из сопла, свечения разряда сначала погашено потоком, затем следует резкий всплеск сигнала, обусловленный приповерхностной ионизацией воздуха за счет отраженных в плоском канале скачков уплотнения и, через 11,36 мс, свечение отсутствует.

На графике датчика давления при торможении ударной волны перед соплом пунктиром выделена область, предлагаемая для моделирования. Она начинается на подъеме давления отраженной от торца ударной трубы ударной волны в момент срабатывания соплового клапана, и продолжается по длительности существования нормального тлеющего разряда и области свечения ФЭУ в потоке.

Вольтамперные характеристики разряда приведены на рис. 2.

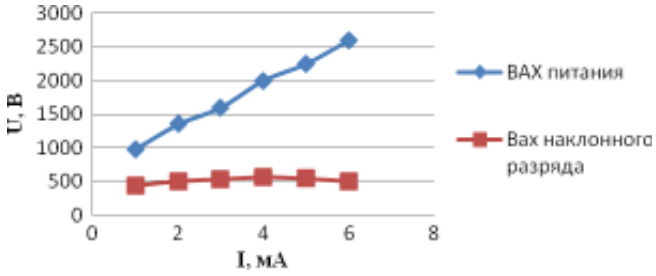
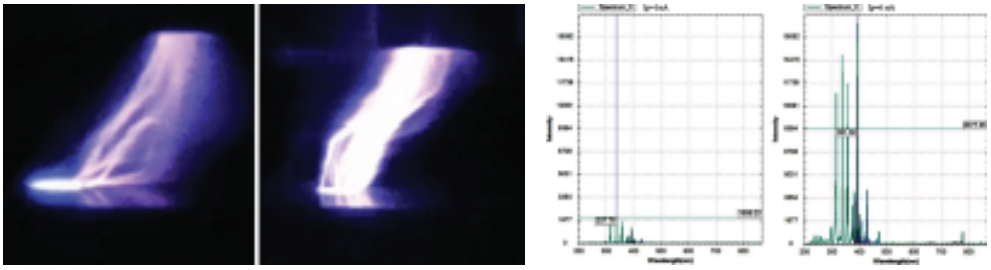


Рис. 2. Вольтамперная характеристика наклонного разряда

Область существования нормального тлеющего разряда при изменении тока 2–6 мА при напряжении питания от 1 до 2,6 кВ.

Фото свечения разряда и, соответствующих им спектров, приведены на рис. 3, *а* и *б*, соответственно.



а *б*

Рис. 3. Фото разряда (*а*) и сектры разряда $I_р = 1$ мА и 6 мА

Таким образом, экспериментально получен наклонный аномальный и нормальный тлеющий разряд при давлении 3,7 торр, в воздушном потоке. Определено время существование разряда и взаимосвязь параметров для последующей валидации.

1. *Суржиков С. Т.* Численное моделирование осесимметричного аномального тлеющего разряда между двумя плоскими дискообразными электродами // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2022. — Т. 23, вып. 4. — URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-4/articles/1012/.
2. *Суржиков С. Т.* Применение квазистационарных eRC-моделей для расчета неравновесного излучения ударных волн при скорости порядка 10 км/с // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2022. — Т. 23, вып. 4. — URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-4/articles/1015/.
3. *Солодовников С. И.*, *Рулева Л. Б.* Экспериментальные исследования газоразрядной плазмы в потоке // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2023. — Т. 24, вып. 6. — URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1079/.
4. *Рулева Л. Б.*, *Солодовников С. И.* Экспериментальные исследования тлеющего разряда на плоских электродах в потоке // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2025. — Т. 26, вып. 1. — URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2025-26-1/articles/1165/.

ВЯЗКОСТНОЕ ПАЛЬЦЕОБРАЗОВАНИЕ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ПРОЦЕССА СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ФЛЮИДНОЙ ЭКСТРАКЦИИ: ПОЛИДИСПЕРСНЫЙ ЗЕРНИСТОЙ СЛОЙ*

***А. А. Саламатин*[1], *А. С. Халиуллина*[2]**

[1]*ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия;* [2]*КФУ, Казань, Россия*

Одним из применений технологии сверхкритической флюидной экстракции (СФЭ) является извлечение ценных природных веществ — жирных масел — из растительного сырья. Технология реализуется следующим образом [1]. Молотое растительное сырье помещается в аппарат цилиндрической формы, в котором формируется стационарный пористый зернистый слой. В экстрактор нагнетается растворитель до установления в системе требуемых значений температуры и давления. Растворитель пропитывает сырье, растворяет в себе масло до предельной концентрации насыщения θ_*, которое выходит в поровое пространство аппарата. После установления термодинамических параметров чистый экстрагент прокачивается через аппарат с известным расходом, вытесняя насыщенный раствор.

Таким образом, в масштабах зернистого слоя происходит фильтрация смешивающихся жидкостей [2]. Вниз по течению расположен насыщенный раствор в равновесии с маслосодержащим сырьем. Вверх по течению движение разбавленного раствора сопровождается межфазным массообменом. В пространстве две области разделены фронтом — геометрическим местом точек, в которых концентрация раствора принимает равновесное значение. Фронт остается плоским при устойчивом развитии процесса. В противном случае малые возмущения приводят к существенной деформации поверхности, например, если фильтрация сопровождается градиентом вязкости. Течение теряет осевую и/или радиальную симметрию с образованием промытых каналов — пальцев. По каналам осуществляется преимущественное движение замещающей жидкости. В остальных областях скорость движения заметно меньше. Неравномерная промывка аппарата негативно влияет на темпы экстракции.

Условия образования пальцев хорошо изучены для фильтрации в инертных пористых средах. В этих условиях массоперенос в масштабах аппарата описывается уравнением конвективной диффузии. Фильтрация несжимаемой жидкости подчиняется закону Дарси. Многообразие наблюдаемой динамики вытеснения обусловлено существенно нелинейным механизмом массообмена между сырьем и фильтрующимся растворителем. Математически он выражается «реакционным» слагаемым — источниковым членом — в уравнении переноса концентрации. В условиях СФЭ необходимо учитывать дисперсный состав частиц, формирующих зернистый слой, постепенное истощение сырья и уменьшение активной удельной поверхности зернистого слоя, а также законы микромасштабного массопереноса на уровне индивидуальной частицы сырья.

Традиционно предполагается, что зернистый слой является полидисперсным [2–5]. Ансамбль частиц представлен двумя фракциями с сильно различающимися представительными размерами $\overline{a}_0 \ll \overline{a}_1$. В предельном случае бидисперсного зернистого слоя дисперсный состав навески сырья представлен частицами только двух указанных размеров. Экстракция из высокомасличного сырья описывается моделью сужающегося ядра.

*Работа выполнена в рамках гранта РНФ №24-71-00047.

В данной работе исследуется эффект пальцеобразования [6] в условиях СФЭ. Математическая модель состоит из уравнений фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \nabla p = -\mu(c)\mathbf{V}, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}$ — поле скорости фильтрации, p — давление в растворе, $0 < c < 1$ — нормированная на θ_* концентрация раствора, μ — его вязкость, отнесенная к проницаемости среды. Задача дополнена уравнением баланса растворенных веществ, которое в пределе больших чисел Пекле и квазистационарном приближении принимает следующий вид [7]:

$$\theta_* \mathbf{V} \cdot \nabla c = \theta_0 (1 - m) \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь θ_0 — плотность начального маслосодержания, m — пористость зернистого слоя, функция G определяет количество экстракта, выделенное из сырья в данной точке пространства к текущему моменту времени t. Для бидисперсного слоя справедливы следующие соотношения для определения G:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} g(x), \quad g(x) = \int_x^\infty f(a) \frac{da}{a}, \quad f(a) = \alpha \delta(a - a_0) + (1 - \alpha)\delta(a - a_1).$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, f — плотность объемного распределения частиц по размеру a, нормированному на $\overline{a}_1$, x — глубина проникновения фронта сужающегося ядра вглубь частицы. Она также нормирована на размер $\overline{a}_1$ крупной фракции и определяется из следующего уравнения:

$$\overline{a}_1 \theta_0 \frac{\partial x}{\partial t} = \theta_* \frac{D_{eff}}{\overline{a}_1} \frac{1 - c}{x}, \quad a_0 = \overline{a}_0 / \overline{a}_1, \quad a_1 = 1, \tag{3}$$

где D_{eff} — эффективный коэффициент диффузии масла в сырье.

Для уравнений (1)–(3), дополненных соответствующими начальным и граничным условиями, существует базовое решение, зависящее только от времени t и продольной осевой координаты z в аппарате. В работе исследуется потеря радиальной симметрии процесса при сохранении угловой. Таким образом, векторные уравнения (1)–(3) записаны в компонентах, отвечающих радиальной координате r и осевой — z. В рамках подхода линейной теории исследуется только начальный, линейный, этап потери устойчивости в результате действия малых возмущений. Исходные уравнения линеаризуются относительно малых поправок к базовому решению. Далее применяются методы разделения переменных и замороженных коэффициентов. Это позволяет построить дисперсионные кривые. Они представляют собой зависимость показателя роста амплитуды возмущений со временем от основных параметров процесса: объемной доли α частиц мелкодисперсной фракции, их размера $a_0 \to 0$, частоты возмущений β и показателя R закона Аррениуса для изменения вязкости раствора. Установлено, что при типичных условиях реализации процесса СФЭ он является устойчивым к малым возмущениям. Основным условием потери устойчивости является высокое различие вязкости насыщенного раствора и чистого растворителя. Вязкости должны отличаться более чем на один порядок. Таким образом, массообмен в условиях СФЭ можно считать стабилизирующим фактором, так как плоско-параллельная фильтрация в инертных средах при больших числах Пекле всегда неустойчива [6].

1. *Гумеров Ф. М.*, *Хайрутдинов В. Ф.*, *Зарипов З. И.* Дополнительное условие эффективности сверхкритического флюидного экстракционного процесса // Теорет. основы. хим. технол. — 2021. — Т. 55. — С. 273–285.
2. *Саламатин А. А.*, *Халиуллина А. С.*, *Калинина М. В.* Вязкостное пальцеобразование в условиях сверхкритической флюидной экстракции // Теорет. основы. хим. технол. — 2024. — Т. 59. — С. 243–255.
3. *Егоров А. Г.*, *Мазо А. Б.*, *Максудов Р. Н.* Экстракция полидисперсного зернистого слоя молотых семян масличных культур сверхкритическим диоксидом углерода // Теорет. основы. хим. технол. — 2010. — Т. 44. — С. 498–506.
4. *Егоров А. Г.*, *Саламатин А. А.* Оптимизационные задачи в теории сверхкритической флюидной экстракции масла // Известия вузов. Математика. — 2015. — Т. 59. — С. 59–69.
5. *Egorov A. G.*, *Salamatin A. A.* Bidisperse Shrinking Core Model for Supercritical Fluid Extraction // Chem. Eng. Technol. — 2015. — V. 38. — P. 1203–1211.
6. *Homsy G. M.* Viscous Fingering in Porous Media // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1987. — V. 19. — P. 247–253.
7. *Salamatin A. A.* Supercritical Fluid Extraction of the Seed Fatty Oil: Sensitivity to the Solute Axial Dispersion // Ind. Eng. Chem. Res. — 2020. — V. 59. — P. 18126–18138.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

С. В. Стрижак

ИСП РАН, Москва, Россия

Известно, что ламинарные и турбулентные течения можно изучать с помощью решения системы уравнений Навье–Стокса. К подобным течениям можно отнести вихревые атмосферные явления, течения в океане, движение жидкости в трубах и по кровеносным сосудам, обтекание потоком воздуха крыла самолета. Для моделирования подобных явлений используются различные вычислительные методы и алгоритмы, а моделирование процессов на современных серверах и вычислительных кластерах занимает значительное время. Начиная с 2019 г. активно развивается направление, связанное с разработкой архитектур физически-информированной нейронной сети (Physics-Informed Neural Network — PINN), которое существенно позволяет сократить расчетное компьютерное время. При этом нейронная сеть проектируется с использованием основных физических законов и имеющихся данных наблюдений. В работах [1, 2] авторами впервые была введена концепция физически-информированных нейронных сетей (PINN) для решения прямых и обратных задач, включающих рассмотрение различных типов уравнений в частных производных, с использованием бессеточного лагранжева метода.

В данной работе рассматривается вопрос построения архитектуры физически-информированной нейронной сети для аппроксимации системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. Выполнялось моделирование прямой задачи для 2D-несжимаемого стационарного течения Коважного при $\mathrm{Re} = 40{,}100$, для 3D-геофизического течения Бельтрами при $\mathrm{Re} = 1{,}10$ и для решения обратной задачи 2D-обтекания ламинарным потоком жидкости цилиндра при $\mathrm{Re} = 100$.

Подобная физически-информированная нейронная сеть состоит из трех основных блоков. Первая часть включает в себя модуль для вычисления остаточных слагаемых для дифференциальных уравнений в частных производных или относи-

тельную погрешность решения в норме L2, а также погрешности для начальных и граничных условий. Параметры для полносвязанной нейронной сеть определяются путем нахождения минимума для общей функции потерь. Входы для нейронной сети преобразуются в соответствующие выходы. Вторая часть это полносвязанная нейронная сеть с физическими данными, которая берет выходные поля u, v, w и вычисляет их производные, используя исходные уравнения для движения и неразрывности. Также оцениваются граничные и начальные условия, данные наблюдений из эксперимента. Последним шагом является механизм формирования обратной связи, который минимизирует функцию потерь, используя заданный оптимизатор (Adam, L-BFGS-B), в соответствии с некоторой скоростью обучения, чтобы получить оптимальные параметры для нейронной сети.

Для физически-информированной нейронной сети используется бессеточный лагранжевый метод, который включает в себя задание необходимого количества расчетных точек в исследуемой области, для начальных и граничных условий, а также процедуру вычисления производных с использованием процедуры автодифференцирования. Данная технология доступны в известных фремворках для машинного обучения TensorFow, PyTorch.

Для решения задачи необходимо предварительно задать размеры расчетной области и временной диапазон. Задача определена для безразмерных величин. В ходе решения задачи потребовалось изучить влияния гиперпараметров нейронной сети (количество нейронов, скрытых слоев) на величину расчета невязки в исходных уравнениях.

Для решения задачи о течении Коважного, для которого существует точное аналитическое решение, использовалась нейронная сеть с 4 скрытыми слоями и 50 нейронами на слой, с 7 скрытыми слоями и 50 нейронами на слой, с 10 скрытыми слоями и 100 нейронами на слой. Относительные погрешности в норме L2 достигали порядка 10^5 [3].

Для обратной задачи обтекания цилиндра при $\mathrm{Re} = 100$ использовались данные расчета спектрально-элементного кода Nektar и определялись два неизвестных параметра lambda1, lambda2. Данные параметры присутствовали в исходных уравнениях движения для двух компонент скорости для конвективных и диффузионных слагаемых.

Обучение нейронной сети и процесс предсказания параметров течения выполнялся на сервера с 32 GB RAM и время обучения составило от 30 мин до 4 ч в зависимости от выбора гиперпараметров. Динамические веса обновлялись каждые 100 эпох обучения. В качестве метрики для оценки результатов предсказания выбиралась величина MSE.

С помощью библиотеки matplotlib сравниваются поля для скорости и давления для точного решения и результата предсказания. Программный код для решения выбранных задач был реализован на языке программирования Python, библиотек для машинного обучения TensorFlow, Python, DeepXDE, Nvidia PhysicsNeMo.

Дополнительно проводилось исследование по возможности аппроксимации уравнений Сен-Венана с использованием PINN для моделирования 2D-течения в прямоугольном канале. Все необходимые гидрологические параметры для канала длиной в 100 м и шириной в выходном сечении в 2 метра были заданы. Синтетические данные генерировались в открытом расчетном коде Delft3D. Численное моделирование выполнялось методом установления на пространственной сетке с 10000 узлами. Шаг по времени выбирался равным $dt = 60$ с. Время установления решения было около 7 календарных дней. Решение задачи занимало 2 мин на одном ядре процессора CPU.

В процессе исследования для архитектуры PINN выбиралось оптимальное количество скрытых слоев для нейронной сети, количество нейронов в каждом слое, количество точек коллокации, коэффициент для скорости обучения и методы оптимизации для целевой функции потерь. По результатам предсказания PINN двух значений компонент скорости и уровня воды проводилось сравнение с синтетическими данными. Ошибка предсказания не превышала 5%.

1. *Raissi M.*, *Perdikaris P.*, *Karniadakis G. E.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. — 2019. — V. 378. — P. 686–707.
2. *Jin X.*, *Cai S.*, *Li H.*, *Karniadakis G. E.* NSFnets (Navier–Stokes flow nets): Physics-informed neural networks for the incompressible Navier–Stokes equations // Journal of Computational Physics. — 2021. — V. 426. — 109951.
3. *Кошелев К. Б.*, *Стрижак С. В.* Применение физически-обоснованной нейронной сети на примере моделирования гидродинамических процессов, допускающих аналитическое решение // Труды ИСП РАН. — 2023. — Т. 35(5). — С. 245–258.

О ВЛИЯНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ЛАЗЕРНОМ НАГРЕВЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

М. В. Торчик, М. А. Котов, В. Н. Андросенко, Ф. В. Филиппов, Н. Г. Соловьев, А. Н. Шемякин, М. Ю. Якимов

ИПМех РАН, Москва, Россия

Представлен совмещенный расчетно-экспериментальный метод определения теплофизических свойств материалов, способных сохранять эксплуатационные свойства при интенсивном аэродинамическом нагреве. Образцы исследуемого материала помещаются в герметичную камеру. В процессе лазерного нагрева регистрируется изменение температуры образца и изменение температурного поля на поверхности с тыльной стороны образца. Затем создается вычислительная модель с данными эксперимента и решается нестационарное уравнение теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями. Исходя из сравнения температурных полей делается вывод о теплоемкости и теплопроводности исследуемого материала [1].

Апробация данного метода проводилась на образцах изученного материала — графита марки МПГ-7, способного сохранять свои эксплуатационные свойства в исследуемом диапазоне температур [2]. Анализ полученных данных говорит о хорошем описании процесса распространения тепла внутри твердотельного образца при высоких температурах. Одним из важнейших источников расхождения расчетных и экспериментальных данных является распределение интенсивности в лазерном пучке, которое в расчетной модели предполагалось однородным.

Настоящая работа посвящена исследованию распределения интенсивности излучения в лазерном пучке и корректировке расчетной модели в соответствии с полученными данными.

1. *Торчик М. В. и др.* Об определении свойств конструкционных материалов для летательных аппаратов в области высоких температур совмещенным расчетно-экспериментальным методом при облучении лазерами ик диапазона // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. — 2023. — С. 188–189.

2. *Торчик М. В.*, *Котов М. А.*, *Андросенко В. Н.*, *Филиппов Ф. В.*, *Соловьев Н. Г.*, *Шемякин А. Н.*, *Якимов М. Ю.*, *Чаплыгин А. В.*, *Галкин С. С.* Исследование теплофизических свойств мелкозернистого графита МПГ-7 в диапазоне 1000–2000° при лазерном нагреве // Физика и химия обработки материалов. — 2025. — №5.

ВЗАИМОСВЯЗЬ СТРУКТУРЫ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ И ВЯЗКИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ*

А. И. Федюшкин

ИПМех РАН, Москва, Россия

Структура и тепломассоперенос конвективных течений жидкостей могут нелинейно изменяться при увеличении числа Рэлея ($\mathrm{Ra} > 10^6$) [1–3]. Это может проявляться в виде образования внутри основного конвективного течения стационарных макро-противотоков (рис. 1) и немонотонной зависимости температурного (концентрационного) расслоения от числа Рэлея [1–6]. В данной работе на примере конвективных течений несжимаемой жидкости в горизонтальном слое с боковым подводом тепла для разных чисел Рэлея [1] показан характер взаимосвязи структуры течения с компонентами тензора вязких касательных напряжений и градиентом давления.

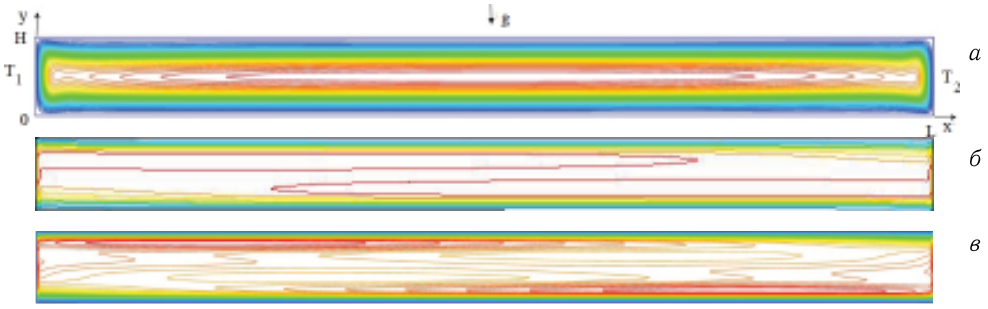


Рис. 1. Изолинии функции тока установившихся конвективных течений для разных чисел Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$; *в* — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$)

Математическая модель основана на численном решении нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска [4, 5]. Расчетная область имеет вид горизонтального слоя длиной L, высотой H, вектор силы тяжести g направлен вертикально навстречу оси $0y$ (рис. 1, *а*). Граничные условия следующие: для скорости на всех границах задано условие прилипания, для температуры: на боковых стенках заданы постоянные значения температуры T_1 и T_2 ($T_1 < T_2$), на горизонтальных стенках задано условие теплоизоляции (рис. 1, *а*). Уравнения Навье–Стокса решались методом конечных разностей [5]. Модель верифицировалась на тестовых задачах [5], а также численные результаты сравнивались с экспериментальными данными [6].

На рис. 1 показаны изолинии функции тока установившихся конвективных течений для воды при разных числах Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$;

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ №24-29-00101).

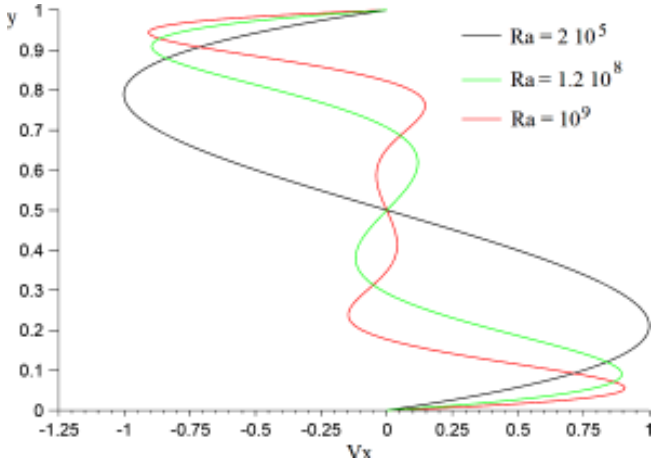
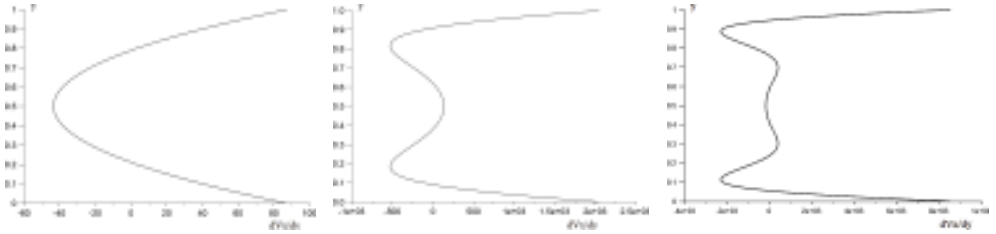
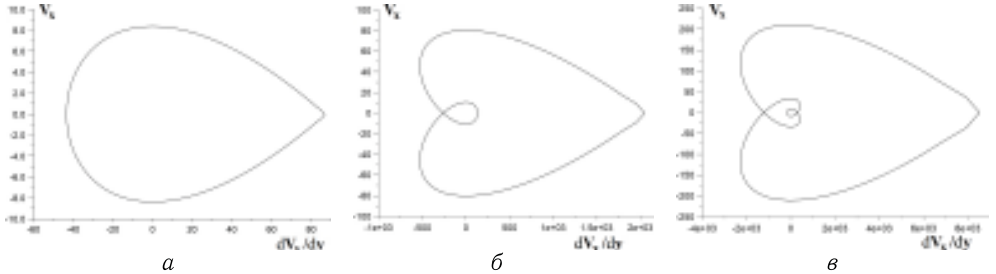


Рис. 2. Профили нормированной горизонтальной компоненты скорости V_x в среднем вертикальном сечении для разных чисел Рэлея (при $\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$): $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$ (черная линия), $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$ (зеленая линия), $\mathrm{Ra} = 10^9$ (красная линия)



а *б* *в*

Рис. 3. Профили производной от горизонтальной скорости по вертикальной координате ($\partial V_x/\partial y$) в среднем вертикальном сечении ($x/H = 6{,}355$) для трех чисел Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$; *в* — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$)



а *б* *в*

Рис. 4. Фазовые портреты горизонтальной скорости от производной горизонтальной скорости по вертикальной координате ($\partial V_x/\partial y$) в среднем вертикальном сечении для трех чисел Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$; *в* — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$)

в — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$). Эти результаты демонстрируют, что при $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$ течение одновихревое, при $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$ возникает два противотока, а при $\mathrm{Ra} = 10^9$ — четыре. На рис. 2 это нагляднее представлено на профилях горизонтальной компоненты скорости V_x (нормированной на максимальную скорость) в среднем вертикальном сечении для разных чисел Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$; *в* — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$).

В горизонтальном слое, вдали от торцевых стенок, направление течения имеет горизонтальное преобладание ($V_x \gg V_y$) (рис. 1). Для средней части слоя касательные напряжения в приближении Ньютона и постоянной вязкости μ можно записать в виде: $\tau = -\mu(\partial V_x/\partial y)$. На рис. 3 показаны профили производной от горизонтальной скорости по вертикальной координате ($\partial V_x/\partial y$) в среднем вертикальном сечении ($x/H = 6{,}355$) для разных чисел Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$; *в* — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$). При $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$ профиль касательных напряжений в среднем вертикальном сечении имеет параболический вид с одним локальным экстремумом (одновихревое течение) (рис. 3, *а*). При увеличении интенсивности конвекции ширина динамических пограничных слоев уменьшается, т. е. около горизонтальных стенок в средней части слоя увеличиваются вертикальные градиенты скорости $\partial V_x/\partial y$ и касательные напряжения τ. При $\mathrm{Ra} > 2 \cdot 10^5$ профили касательных напряжений в среднем вертикальном сечении отличаются от параболического (рис. 2, *а*) следующим образом: при появлении двух противотоков ($\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$, рис. 2, *б*), в профилях $\partial V_x/\partial y$ и τ возникает три локальных экстремума (рис. 3, *б*); при появлении четырех противотоков ($\mathrm{Ra} = 10^9$, рис. 2, *в*), в профилях $\partial V_x/\partial y$ и τ — пять локальных экстремумов (рис. 3, *в*).

На рис. 4 представлены фазовые портреты горизонтальной скорости от производной горизонтальной скорости по вертикальной координате ($\partial V_x/\partial y$) в среднем вертикальном сечении для разных чисел Рэлея: *а* — $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^5$; *б* — $\mathrm{Ra} = 1{,}2 \cdot 10^8$; *в* — $\mathrm{Ra} = 10^9$ ($\mathrm{Pr} = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$), которые также показывают отсутствие (рис. 4, *а*) и наличие двух (рис. 4, *б*) либо четырех противотоков (рис. 4, *в*).

1. *Fedyushkin A. I.* Stratification and segregation under laminar convection // Advanced Hydrodynamics Problems in Earth Sciences. — Switzerland: Springer, 2023. — P. 153–169.
2. *Федюшкин А. И.*, *Пунтус А. А.* Нелинейные особенности ламинарных течений жидкости на Земле и в невесомости // Труды МАИ. — 2018. — Т. 102. — С. 1–20.
3. *Fedyushkin A.* Convection and stratification of temperature and concentration // Fluid Dynamics and Materials Processing. — 2024. — V. 20, No. 6. — P. 1351–1364.
4. *Полежаев В. И.*, *Белло М. С.*, *Верезуб Н. А. и др.* Конвективные процессы в невесомости. — М.: Наука, 1991. — 240 с.
5. *Федюшкин А. И.* Влияние чисел Рэлея, Прандтля и граничных условий на конвективные течения жидкости в горизонтальных слоях // Математическое моделирование и численные методы. — 2020. — №1. — С. 28–44.
6. *Кирдяшкин А. Г.*, *Полежаев В. И.*, *Федюшкин А. И.* Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла // ПМТФ. — 1983. — №6. — С. 122–128.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИН ТРЕЩИН МНОГОЗОННОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ТРУБОК ТОКА

***М. Р. Хамидуллин*[1], *К. А. Поташев*[2], *А. Б. Мазо*[2]**

[1]*НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия;* [2]*КФУ, Казань, Россия*

В условиях разработки низкопроницаемых коллекторов многозонный гидравлический разрыв пласта (МГРП) на горизонтальных скважинах (ГС) является ключевым методом интенсификации добычи углеводородов [1]. Однако точная оценка параметров трещин гидроразрыва остается сложной задачей из-за отсутствия возможности прямых измерений. Трассерные исследования [2] представляют

собой перспективный метод для определения параметров трещин, но традиционные подходы к их интерпретации обладают существенными ограничениями, связанными с пренебрежением интерференцией трещин, сорбционными и дисперсионными эффектами. Полноценное трехмерное численное моделирование переноса трассеров [3], хотя и обеспечивает высокую достоверность, требует значительных вычислительных ресурсов, что делает его непрактичным для решения обратных задач.

В данной работе предложена упрощенная математическая модель [4], основанная на некоторых допущениях. Во-первых, каждый интервал МГРП аппроксимируется одной эквивалентной трещиной с усредненными фильтрационными параметрами. Во-вторых, вместо исходной трехмерной задачи предложена упрощенная модель, когда задача в пласте декомпозируется в набор одномерных задач в трубках тока, в трещине решается квазистационарная задача, в скважине — одномерная задача, что существенно снижает вычислительную сложность. Возможность параллельных вычислений обеспечивает дополнительное ускорение обработки данных.

Разработанный метод решения обратной задачи позволяет оценить геометрические и фильтрационные характеристики трещин по данным трассерных исследований. Проведена верификация модели и оценка устойчивости алгоритма. Результаты демонстрируют, что предложенный подход обеспечивает приемлемую точность при значительном сокращении вычислительных затрат, что делает его перспективным инструментом интерпретации трассерных исследований МГРП.

1. *Soliman M. Y.*, *Boonen P.* Review of Fractured Horizontal Wells Technology // Paper presented at the Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi, United Arab Emirates, October 1996. — DOI: 10.2118/36289-MS.
2. *Gardien C. J.*, *Pope G. A.*, *Hill A. D.* Hydraulic Fracture Diagnosis Using Chemical Tracers // Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, October 1996. — DOI: 10.2118/36675-MS.
3. *Mazo A. B.*, *Sattarov R. I.*, *Khamidullin M. R.*, *Potashev K. A.*, *Trifonov T. V.* Interpretation of Indicator Studies of Multistage Fracturing // Paper presented at the SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October 2017. — DOI: 10.2118/187762-MS.
4. *Мазо А. Б.*, *Хамидуллин М. Р.*, *Поташев К. А.*, *Ураимов А. А.* Математическая модель переноса водо- и нефтерастворимых трассеров при исследовании многозонного гидроразрыва пласта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2024. — №3. — С. 57–74. — DOI: 10.31857/S1024708424030058.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МНОГОМАСШТАБНЫХ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ДЛЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКЕ ИЗДЕЛИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ

***О. Н. Хатунцева*[1,2], *А. М. Шувалова*[1]**

[1]*РКК «Энергия», Королев, Московская обл., Россия;*
[2]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Этап экспериментальной отработки и валидации численных методов при создании изделий аэрокосмической техники, а также правильный перенос полученных данных на натурное изделие создает немало трудностей для исследователей. Это, в первую очередь, касается изделий, функционирующих в условиях возможного турбулентного режима, и связано, в том числе, с отсутствием универсальных подходов к описанию турбулентности.

В более ранних работах одного из авторов [1, 2] показано, что учет различия в производстве энтропии в ламинарном и турбулентных режимах течения позволяет модифицировать уравнения Навье–Стокса (УНС), записав их левые части — полные производные по времени — в расширенном фазовом пространстве, дополненном переменной $\widetilde{s} = \widetilde{s}(p) = -\varphi(p)\ln\varphi(p)$ $(0 \le \widetilde{s} \le 1/e \approx 0{,}368)$, характеризуемой плотностью вероятности реализации случайных пульсаций скорости $\varphi(p)$. Выражение для «стохастической» переменной $\widetilde{s}$ — это подъинтегральное выражение для энтропии: $S = -\int \varphi(p)\ln\varphi(p)\,dp$. При рассмотрении несжимаемой жидкости модифицированные уравнения Навье–Стокса (МУНС), записанные в безразмерном виде, приобретают вид:

$$\frac{\partial\widetilde{\vec{V}}}{\partial\widetilde{t}} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\widetilde{\vec{V}}}{\partial\widetilde{s}} + (\widetilde{\vec{V}}\widetilde{\nabla})\widetilde{\vec{V}} = -\frac{1}{\widetilde{\rho}}\widetilde{\nabla}\widetilde{P} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\widetilde{\Delta}\widetilde{\vec{V}}. \tag{1}$$

В качестве решений системы уравнений (1) выступают безразмерные значения скорости: $\widetilde{\vec{V}} = \widetilde{\vec{V}}(\widetilde{t},\widetilde{\vec{r}},\widetilde{s};\gamma) = \widetilde{\vec{V}}(\widetilde{t},\widetilde{\vec{r}},\widetilde{s}(\varphi);\gamma)$, которые могут реализоваться с вероятностью φ (на масштабе рассмотрения γ ($\gamma_{\min} \le \gamma \le 1$)) в безразмерный момент времени $\widetilde{t}$, в точке с безразмерной координатой $\widetilde{\vec{r}}$.

На основе этого подхода были аналитически получены как «ламинарные», так и обобщенные «турбулентные» решения для задачи Хагена–Пуазейля, плоской задачи Куэтта и плоской задачи Пуазейля [3–5].

МУНС позволяют получить дополнительные критерии подобия, которые, по сути, являются аналогами известных критериев подобия, полученных для «классических» УНС, но имеющие многомасштабный характер:

$$\mathrm{Sh}^{\gamma} = \frac{\tau}{T} = \gamma\frac{L}{VT}, \quad \mathrm{Ho}^{\gamma} = \frac{V\tau}{L} = \gamma, \quad \mathrm{Eu}^{\gamma} = \frac{\Delta P\tau}{LV\rho} = \gamma\frac{\Delta P}{\rho V^2}, \quad \mathrm{Re}^{\gamma} = \frac{L^2\rho}{\mu\tau} = \frac{1}{\gamma}\frac{LV}{\nu}. \tag{2}$$

«Многомасштабные» критерии подобия могут быть полезны как при валидации численных экспериментов, так и при переносе экспериментальных данных, полученных на моделях в численных и физических экспериментах, на натурные изделия, с учетом того факта, что модель (как физическая, так и расчетная), как правило, является более простой с точки зрения ее геометрии по сравнению с натурным изделием.

Если на исследуемом натурном изделии с характерным размером L находится деталь с характерным относительным размером $\widetilde{h} = h/L$ ($\widetilde{h}_0 \le \widetilde{h} \le 1$), и мы хотим понять, как отсутствие этой детали на модели скажется на результатах физического или расчетного эксперимента, то, в первую очередь, полезно выяснить, как изменится диапазон чисел подобия, например, Re^{γ}, в области течения при изменении геометрии.

В физическом эксперименте также, как и в реальных условиях эксплуатации натурного изделия, толщина вязкого слоя и минимальный масштаб производства энтропии в турбулентном течении определяются через «одномасштабное» значение числа Рейнольдса Re: $\gamma_{\min} \sim \widetilde{y}_* \approx 1/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}$, поэтому

$$\mathrm{Re}^{\gamma_{\min}} = \frac{1}{\gamma_{\min}}\frac{LV}{\nu} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}^{3/2}. \tag{3}$$

Соответственно, интервал изменения значения числа Re^{γ} можно определить, как

$$\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}^{\gamma} \le \sqrt{2}\,\mathrm{Re}^{3/2}. \tag{4}$$

При наличии детали, с характерным относительным размером $\widetilde{h}$, интервал значения числа Re^{γ} в локальной области течения будет изменяться в диапазоне:

$$\begin{cases} \mathrm{Re} \le \mathrm{Re}^{\gamma} \le \dfrac{\mathrm{Re}}{\widetilde{h}}, & \text{если} \quad \widetilde{h} > \widetilde{y}_* \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}, \\ \mathrm{Re} \le \mathrm{Re}^{\gamma} \le \sqrt{2}\,\mathrm{Re}^{3/2}, & \text{если} \quad \widetilde{h} \le \dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}. \end{cases} \tag{5}$$

То есть, наличие или отсутствие детали, с характерным размером, не превышающим толщину вязкого пограничного слоя: $\widetilde{y}_* \approx 1/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}$, никак не повлияет на диапазон значений чисел Re^{γ}, и, следовательно, эту деталь можно не воспроизводить на модели при проведении физического или расчетного эксперимента.

На минимальное значение параметра $\gamma_{\min}$ при изготовлении модели может влиять степень шероховатости поверхности. Это касается, в частности, создания аэродинамических моделей на основе технологий 3D-печати, например, SLM- и SLS-печати (послойного селективного лазерного спекания порошка) [6].

Одним из преимуществ использования этих технологий является возможность создание контролируемого масштаба и/или формы шероховатости поверхности. Влияние шероховатости на «затягивание» ламинарно-турбулентного перехода активно исследуется в авиастроении. Возможным объяснением механизма такого «затягивания» может быть разнонаправленное влияние масштаба γ на числа подобия (2), например, на многомасштабное число Рейнольдса Re^{γ} и на многомасштабное число Струхаля Sh^{γ}.

При проведении численного моделирования на основе МУНС необходимо учитывать минимальное значение параметра $\gamma = \gamma_{\min}$ и соответствующее изменение толщины вязкого слоя при изменении шероховатости поверхности, не только созданной искусственно, но и возникающее в ряде случаев естественным путем, например, в результате обгорания или, наоборот, — обледенения поверхности.

Таким образом, учет производства энтропии за счет разномасштабных стохастических возмущений в уравнениях Навье–Стокса при моделировании турбулентных режимов течения позволяет определить дополнительные критерии подобия, которые, могут быть полезны при анализе данных, полученных в физическом и/или численном эксперименте и при переносе этих данных на натурное изделие.

1. *Хатунцева О. Н.* Учет производства энтропии в уравнении Лиувилля и вывод из него «модифицированной» системы уравнений Навье–Стокса // Труды МАИ. — 2024. — №134.
2. *Хатунцева О. Н.* Учет производства энтропии в системе уравнений Навье–Стокса при описании турбулентного течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости // Труды МАИ. — 2023. — №131.
3. *Хатунцева О. Н.* О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена–Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. — 2021. — №118.
4. *Хатунцева О. Н.* О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. — 2022. — №122.
5. *Хатунцева О. Н.* Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. — 2022. — №123.
6. *Хатунцева О. Н.*, *Шувалова А. М.* О дополнительных «многомасштабных» критериях подобия для экспериментальной отработки изделий аэрокосмической техники // Вестник Московского авиационного института. — 2023. — Т. 30, №1. — С. 91–97.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯЧЕИСТОЙ ДЕТОНАЦИИ ВОДОРОДНО-ВОЗДУШНЫХ СМЕСЕЙ ПРИ ДОБАВЛЕНИИ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ*

Т. А. Хмель, А. А. Афанасенков

ИТПМ СО РАН, Новосибирск, Россия

Введение. Использование водород-кислородных и водородно-воздушных смесей в энергетических установках требует анализа процессов горения и детонации. Для улучшения характеристик используются различные промотирующие добавки. Введение в поток микродисперсных или нанодисперсных частиц алюминия позволяет увеличить энерговыделение, влияет на воспламенение, режимы и картины детонации. Газовзвеси частиц представляют широкие возможности управления характеристиками горения и детонации за счет изменения дисперсного состава, загрузки, распределения частиц в пространстве. В настоящей работе представлены результаты численного моделирования гибридной детонации в водородно-воздушных смесях с частицами алюминия, выполненные в рамках валидированной физико-математической модели приведенной кинетики, демонстрирующие различные картины течений и режимы распространения.

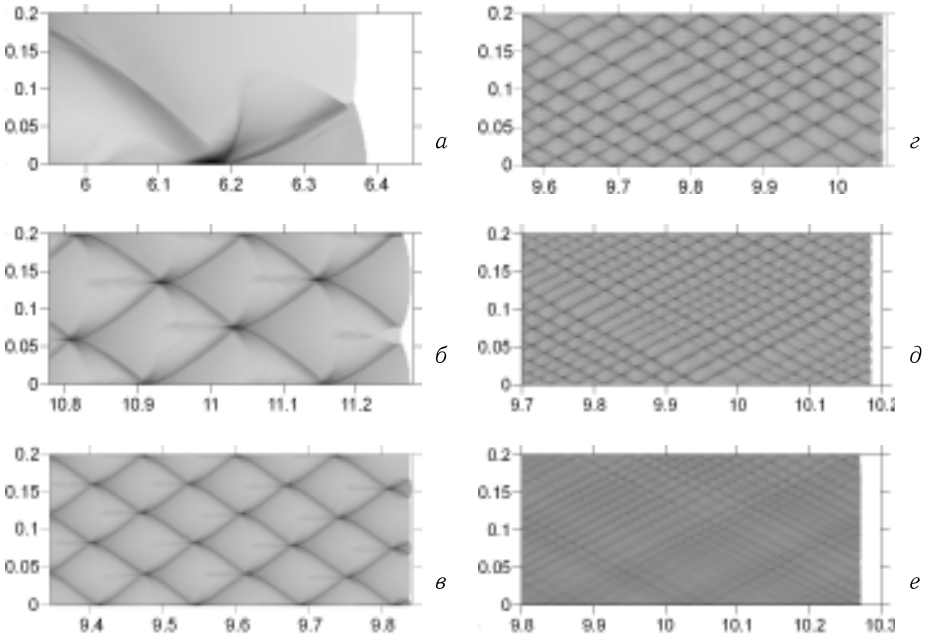


Рис. 1. Траектории тройных точек газовой, $\varphi = 0{,}4$ (*а*) и гибридной детонации при различных загрузках 1-мкм частиц алюминия: 30 г/м^3 (*б*); 50 г/м^3 (*в*); 100 г/м^3 (*г*); 150 г/м^3 (*д*); 300 г/м^3 (*е*)

Физико-математическая модель и метод расчета. Основные уравнения Эйлера вытекают из законов сохранения массы, импульса и энергии газовой и дискрет-

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта №24-29-00336, https://rscf.ru/project/24-29-00336/.

ной фаз с учетом баланса компонент газовой фазы. Принимаются во внимание: водород, кислород, пары воды, инертная газовая компонента (азот или аргон), смесь газообразных продуктов окисления алюминия (AlO, O, Al_2O, AlO_2, Al_2O_2, AlOH), конденсированные компоненты: алюминий, оксид алюминия. Горение водорода описывается моделью одностадийной приведенной кинетики [1], расширенной в [2] на бедные по водороду смеси. Гомогенные и гетерогенные реакции взаимодействия алюминия с кислородом и парами воды описываются аррениусовскими зависимостями, также учитываются процессы декомпозиции оксида [3]. Валидация модели проводилась по экспериментальным данным [4] распространения газовой и гибридной детонации в водородно-воздушной смеси с $\varphi = 0{,}87$ с частицами алюминия. Получено достаточно хорошее согласование по зависимости скорости детонации от загрузки частиц, а также характеру и размерам детонационных ячеек. Численный метод основан на схеме TVD Хартена–Лакса и Джентри–Мартина–Дэйли, применялась технология распараллеливания с использованием библиотеки OpenMP.

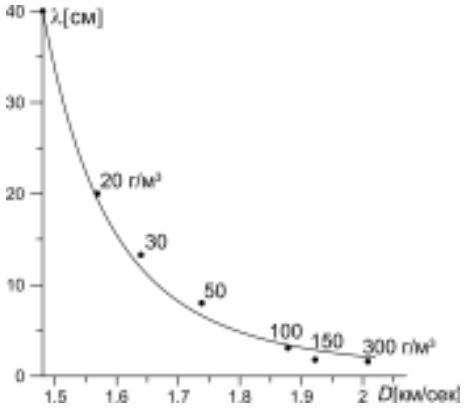


Рис. 2. Зависимость размера ячеек от скорости гибридной детонации, $\varphi = 0{,}4$

Результаты расчетов. Рассматривались задачи инициирования и распространения детонации в плоских протяженных каналах. Анализировались установившиеся режимы и формирующиеся ячеистые структуры. Примеры таких структур ($\varphi = 0{,}4$) при полном заполнении канала газовзвесью представлены на рис. 1 (поля максимальных давлений, длина и ширина канала в метрах).

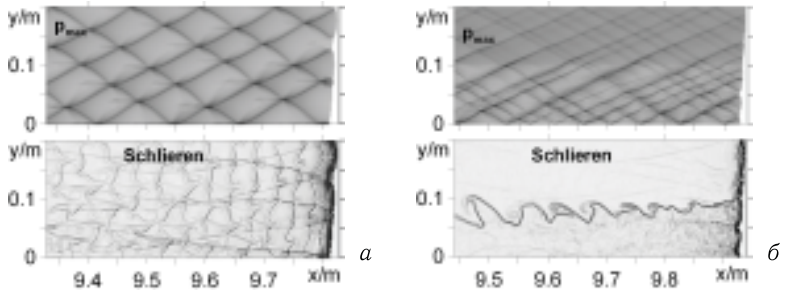


Рис. 3. Картины гибридной детонации при градиентом 0–100 г/м^3 (*а*) и слоевом 0,300 г/м^3, $h/H = 0{,}5$ (*б*) распределениях

На рис. 2 показаны зависимости скорости детонации и размера ячеек от загрузки частиц, сплошной линией показана аналитическая зависимость вида [3] $\lambda = \lambda_0 \delta \exp[E/RT_{ZND}(\delta^{-2} - 1)]$, $\delta = D/D_0$, индекс 0 отвечает газовой детонации, $E/RT_{ZND} = 7{,}4$.

При неоднородном или частичном заполнении канала газовзвесью результаты зависят от распределения частиц по сечению. При градиентном или слоевом распределениях формируются косоугольные ячейки (рис. 3, *а* от 0 на нижней стенке до 100 г/м^3 на верхней, рис. 3, *б* — 0 в нижней половине канала, 300 г/м^3

в верхней). На шлирен-фотографиях рис. 3, *б* видно развитие комбинированной неустойчивости (Рихтмайера–Мешкова и Кельвина–Гельмгольца) на поверхности, отделяющей газовзвесь от чистого газа.

В целом представленные результаты демонстрируют возможности управления процессами детонации при добавлении в газовые смеси частиц алюминия с различным распределением в пространстве.

1. *Bedarev I. A.*, *Rylova K. V.*, *Fedorov A. V.* Application of detailed and reduced kinetic schemes for the description of detonation of diluted hydrogen–air mixtures // Combust. Explos. Shock Waves. — 2015. — V. 51, No. 5. — P. 528–539.
2. *Хмель Т. А.*, *Лаврук С. А.* Моделирование ячеистой детонации в газовзвесях субмикронных частиц алюминия с различными распределениями концентрации // Физика горения и взрыва. — 2022. — Т. 58, №3. — С. 3–18.
3. *Khmel T. A.*, *Lavruk S. A.*, *Afanasenkov A. A.* Numerical modeling of detonation in hydrogen-air mixtures with aluminum particles // International Journal of Hydrogen Energy. — 2025. — V. — 128. — P. 117–130.
4. *Veyssiere B.*, *Ingignoli W.* Existence of the detonation cellular structure in two-phase hybrid mixtures // Shock Waves. — 2003. — V. 12, No. 4. — P. 291–299.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЛАЗЕРНОЙ 3D-ПЕЧАТИ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ

К. А. Чехонин

ВЦ ДВО РАН ХФИЦ, Хабаровск, Россия

Разработаны корректные математические модели и эффективные, устойчивые численные алгоритмы, реализованные с использованием метода гибридных конечных элементов на параллельных компьютерных платформах, для моделирования непрерывных пространственно-временных многомасштабных определяющих параметров тепломассопереноса с определением остаточных технологических напряжений в прямых аддитивных технологиях металлоизделий (L-DED). Предложен новый способ исследования динамических процессов 3D-печати металлоизделий путем наращивания лежащей капли. Исследованы особенности тепломассопереноса в растущей капле и эволюции ее свободной поверхности. Показано существенное влияние потока газа и массового расхода порошка на структуру конвекции расплава в капле и эволюцию свободной поверхности с образованием кратера. При этом изменяется структура течения Марангони в окрестности кратера с образованием дополнительного вихря. Этот результат получен впервые и требует дальнейшего более детального исследования. Влияние скорости сканирования лазерного луча на процесс лазерного наращивания металлического слоя можно учесть путем регулирования периода подачи лазерной энергии. Исследовано влияние технологических режимов (мощности лазера, скорости сканирования) и механизмов упрочнения и разупрочнения в наращиваемом слое металла на эволюцию технологических напряжений. Данный подход дает возможность на порядок сократить затраты компьютерного времени при численном моделировании, интегрируется в интеллектуальные информационные системы управления технологическим процессом и позволяет значительно сократить период разработки лазерной технологии выращивания металлоизделий с обеспечением требуемой надежности и их качества.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫСОТНОГО НАСАДКА ДЛЯ МАРШЕВОГО ЖРД ВТОРОЙ СТУПЕНИ СВЕРХЛЕГКОЙ РАКЕТЫ-НИСИТЕЛЯ

***С. А. Шустов*[1], *И. А. Крюков*[2], *И. Э. Иванов*[3,4]**

[1]*Самарский университет, Самара, Россия;* [2]*ИПМех РАН, Москва, Россия;*
[3]*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* [4]*МАИ, Москва, Россия*

Постановка задачи. В рамках реализации программы, изложенной в [1], излагаются результаты численного исследования эффективности высотного насадка маршевого ЖРД для второй ступени сверхлегкой ракеты носителя (РН). В целях снижения стоимости за основу маршевого ЖРД второй ступени взят ЖРД первой ступени этой РН с земным соплом, имеющим геометрическую степень расширения $\overline{F}_a = 19$. Маршевый ЖРД второй ступени РН отличается от маршевого ЖРД первой ступени РН геометрической степенью расширения сопла: $\overline{F}_a = 65$ вместо $\overline{F}_a = 19$. На рис. 1 показан теоретический контур маршевого ЖРД первой ступени РН (позиция 1, $\overline{F}_a = 19$), а также варианты контура сверхзвуковой части сопла маршевого ЖРД второй ступени: 1) с $\overline{F}_a = 65$ — в виде классического высотного сопла (позиция 2); 2) с $\overline{F}_a = 65$ в виде высотного насадка (позиция 3), пристыкованного в точке b к контуру земного сопла маршевого ЖРД первой ступени.

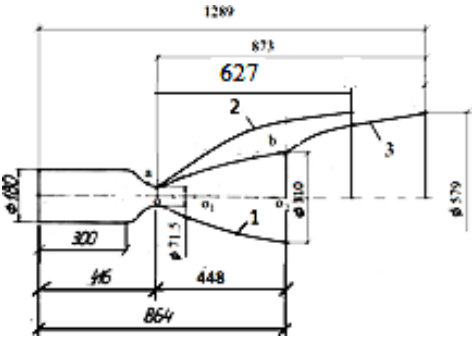


Рис. 1. Теоретические контуры рулевой камеры с земным и высотным соплом: 1 — земное сопло; 2 — высотное сопло; 3 — земное сопло с высотным насадком

Основные параметры маршевого ЖРД второй ступени РН приведены в табл. 1.

Цель численного исследования заключается в определении эффективности высотного насадка маршевого ЖРД второй ступени с $\overline{F}_a = 65$ по сравнению с классическим высотным соплом при той же величине $\overline{F}_a$.

Таблица 1

Основные параметры маршевого ЖРД второй ступени РН

$p_н$, кН	Компоненты топлива	Давление в камере сгорания, МПа	$\overline{F}_a$
4	O_2(ж) + керосин	6	65

Методика численного исследования. В численном исследовании используются уравнения Рейнольдса и двухпараметрическая модели турбулентности, а также предложенный в [2, 4, 5] вариант метода Годунова повышенного порядка для расчета сжимаемых турбулентных течений. При использовании приближения Навье–Стокса граничные условия задавались в виде теоретического контура камеры сгорания и контуров сопел, представленных на рис. 2.

Для определения начальных условий на входе в сопло маршевого ЖРД, связанных с термодинамическими свойствами продуктов сгорания (химический состав, температура, молекулярный вес, коэффициент динамической вязкости, показатель

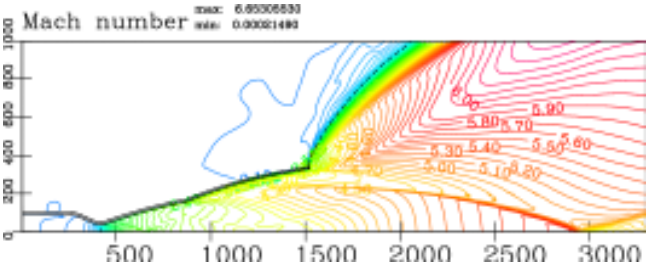


Рис. 2. Расчет поля чисел Маха в приближении Навье–Стокса в сверхзвуковой части сопла рулевой камеры с высотным насадком при $\overline{F}_a = 65$

изоэнтропы расширения и т. д.) использовался метод расчета [3], реализованный в виде программного комплекса [6].

Результаты численного исследования. Результаты термогазодинамического расчета в приближении Навье–Стокса представлены на рис. 2, на котором показано поле чисел Маха в сверхзвуковой части сопла с высотным насадком при $\overline{F}_a = 65$.

Характерной особенностью поля чисел Маха, представленных на рис. 2 является наличие висячего скачка уплотнения, который зарождается в области стыковки высотного насадка с земным соплом рулевой камеры.

Результаты численного исследования приводят к следующим выводам:

1) при использовании классического высотного сопла за счет увеличения геометрической степени расширения с $\overline{F}_a = 19$ до $\overline{F}_a = 65$ увеличение удельного импульса тяги в пустоте составляет 4,6%;

2) при использовании высотного насадке нарушается монотонность контура в точке присоединения этого насадка к земному соплу, что приводит к возникновению скачка уплотнения (рис. 2);

3) наличие этого скачка уплотнения приводит к существенной перестройке потока таким образом, что число Маха как на оси сопла, так и в основной области течения в сверхзвуковой части сопла снижается на величину около 0,5 М);

4) снижение числа Маха, в свою очередь приводит к снижению скорости потока, а, значит, к дополнительным потерям удельного импульса на величину порядка 2,4%;

5) с учетом указанных дополнительных потерь, величина выигрыша в удельном импульсе тяги за счет увеличения геометрической степени расширения с $\overline{F}_a = 19$ до $\overline{F}_a = 65$ при использования высотного насадка снижается с 4,6 до 2,2% по сравнению с классическим высотным соплом; при этом использование высотного насадка приводит к увеличению длины сверхзвуковой части сопла на 39% (с 627 до 873 мм).

1. *Шустов, С.А., Гидаспов В.Ю., Иванов И.Э.* Развитие научных идей У.Г. Пирумова в задачах физической газовой динамики сопел и струй жидкостных ракетных двигателей малой тяги // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24–31 мая 2015 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2015. — 123–125.
2. *Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А.* Метод расчета турбулентных сверхзвуковых течений // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, №12. — С. 103–121.
3. *Безменова Н.В., Гидаспов В.Ю., Иванов И.Э., Шустов С.А.* Моделирование течения продуктов сгорания в соплах ЖРДМТ // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, №6. — С. 45–51.
4. *Иванов И.Э., Крюков И.А., Ларина Е.В.* Влияние времени релаксации турбулентной вязкости на моделирование течений в соплах и струях // Изв. РАН. МЖГ. — 2014. — №5. — С. 149–159.

5. *Иванов И. Э.*, *Крюков И. А.* Численное исследование турбулентных течений с ограниченным и свободным отрывом в профилированных соплах // Вестник Московского авиациионного института. — 2009. — Т. 16, №7. — С. 23–30.
6. *Безменова Н. В.*, *Иванов И. Э.*, *Кулябин К. П.*, *Пастухов Б. Н.*, *Шустов С. А.* Программный комплекс для газодинамического расчета ЖРДМТ: структура и возможности // Тезисы докладов X Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'1999), Переславль-Залесский, 1999. — М.: МГИУ, 1999. — С. 33–34.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В УСТАНОВКЕ АТОМНО-СЛОЕВОГО ОСАЖДЕНИЯ С РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ РЕАКЦИОННОЙ КАМЕРЫ*

***В. А. Юсим*[1–3], *С. Э. Саркисов*[2], *И. С. Чекулаев*[1], *Д. Н. Чаусов*[1]**

[1]*ИОФ РАН, Москва, Россия;* [2]*НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия;*
[3]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Метод атомно-слоевого осаждения (ALD) [1, 2] это химический способ нанесения сверхтонких пленок из газовой фазы, основанный на самонасыщаемых реакциях адсорбции между поверхностью и прекурсорами. Данная технология, позволяет осаждать высококачественные конформные пленки с высокой однородностью и точным контролем толщины, обеспечивающие большое преимущество в прецизионной настройке границ раздела между слоями, где незначительные отклонения в толщине или составе пленки могут критически повлиять на характеристики изделия [3]. Рассматриваемый метод нанесения тонких пленок нашел свое применение во многих областях микроэлектроники, так, например, используется для производства МОП полупроводниковых приборов с подзатворным диэлектриком (high-k-диэлектрик) [4], выполненным из материала со статической диэлектрической проницаемостью большей, чем у диоксида кремния (3,9).

Так, в связи с высокой потребностью в установках ALD (как, в российской R&D-области, так и в производстве микроэлектроники, в том числе в ОПК) [5], одним из перспективных направлений является разработка и создание новейшего отечественного оборудования, обеспечивающего высокий выход годной продукции и отличное качество синтезируемых пленок обладающих низким уровнем пост процессных частиц, отличными электрическими и оптическими свойствами.

Полезным дополнением в ходе разработки оборудования ALD, является математическое моделирование изучаемых в ходе эксперимента процессов. Такое дополнение позволяет на ранних этапах исследовать и определить ряд конструктивных параметров, определить и обосновать основные требования к геометрическим и энергетическим характеристикам создаваемого устройства. В качестве иллюстрации подобного подхода в данной работе авторами изложена методика численного моделирования газодинамических процессов в разрабатываемой ими установке ALD с различной геометрией реакционной камеры (рис. 1).

Физические параметры, использующиеся для математического моделирования, являлись максимально приближенными к реальным. Так, в качестве объекта ис-

*Работа выполнена в рамках государственного контракта №13.2023.001.01.194 Шифр «Поверхность РФ» и при финансовой поддержке НИЦ «Курчатовский институт» (приказ 09.01.2025 г. №8).

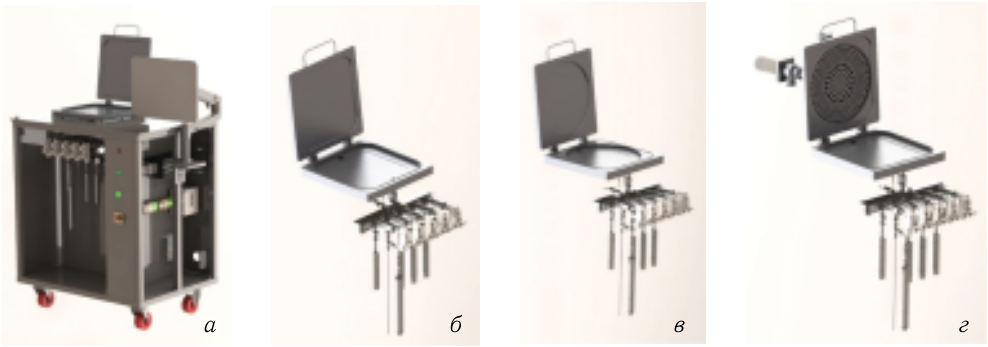


Рис. 1. Общий вид разрабатываемой установки ALD (*а*) и различные реакционные камеры для расчетов, для прямоугольной подложки (*б*), круглой (*в*), с источником емкостно-связанной плазмы (*г*)

следований использовалась кремниевая подложка с напыляемым на нее материалом метракисдиметиламидом (TDMA)-циркония, олова. В качестве исследуемой геометрической модели реакционной камеры ALD использовалась полноразмерная 3D-модель, представленная на рис. 1, *а*, позволяющая синтезировать пленки с помощью микроволновой плазмы. В расчетной модели использовался полный цикл нанесения (от 100 до 200 циклов) TDMA-Zr, и TDMA-Sn в непрерывном режиме прокачки (N_2) с различной длительностью импульса подачи прекурсора от 0,02 до 0,06 с и временем продувки от 5 до 10 с. Моделируется с температурой в камере 200–300 °C. Расчеты данной задачи выполнялись с использованием CFD-кода ANSYS Fluent 2019.

Анализ результата расчета позволил определить неоднородности температурного распределения на поверхности подложки и стола реакционной камеры для различных геометрий реакционной камеры и нагревательных элементов. Также определена траектория и давление напускаемого потока в камеру. Определены оптимальные условия охлаждения реакционной камеры.

Таким образом, например, установлено, что для реакционной камеры с источником емкостно-связанной плазмы наблюдалась высокая скорость потока в центре реактора которая, в свою очередь, приводила к повышенным значениям энергии ионной бомбардировки и, как следствие, являлась разрушительной для чувствительных поверхностей. Конструкция предложенного устройства успешно блокирует быстро движущийся вертикальный поток газа в центре с помощью небольших форсуночных отверстий в распылителе, тем самым сводя к минимуму повреждения даже для чувствительных поверхностей подложки. Стоит отметить, что полученные результаты для камеры с источником емкостно-связанной плазмы с применением распылителя коррелируются с данными, полученными в работе [6].

1. *Ding Y.*, *Zhang Y.*, *Ming Y. et al.* // Chem. Engin. Research and Design. — 2019. — V. 151. — P. 131. — DOI: 10.1016/j.cherd.2019.09.005/.
2. Special Report on Solar PV Global Supply Chains // IEA. 2022. Energy Agency. 2022.
3. Technology Roadmap: Solar Photovoltaic Energy // IEA. 2014. Archived (PDF) from the original on 1 October 2014. Retrieved 7 October 2014.
4. *Houssa.M.* High-k Gate Dielectrics. — Boca Raton: CRC Press, 2004. — 601 p.
5. *Крынин А.* // IV Международная конференция «Атомно-слоевое осаждение: Россия 2023» (АСО-Россия-2023), Махачкала, Россия, 15–18 сентября 2023 г.: сб. тез. докл. — С. 25.
6. *Zhanga Y.*, *Dinga Y.*, *Panagiotis D. et al.* // Comp. & Chem. Engin. — 2020. — V. 142. — P. 1. — DOI: 10.1016/j.compchemeng.2020.107066.

Секция Е **ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ И МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД НА РАЗНЫХ МАСШТАБНЫХ УРОВНЯХ**

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ SH-ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ/ПЬЕЗОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

***Т. И. Белянкова*[1], *Е. И. Ворович*[2], *В. В. Калинчук*[1]**

[1]*ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, Россия;* [2]*ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия*

Использование современных технологий производства широкого спектра уникальных пьезоэлектрических (ПЭ), пьезомагнитных (ПМ) и магнитоэлектроупругих (МЭУ) материалов с необходимыми эксплуатационными характеристиками открывает новые возможности создания уникальных приборов и устройств на их основе. В последнее время отмечается возросший интерес к изучению внешних и внутренних факторов, позволяющих изменять свойства МЭУ-материалов и влиять на поведение акустических поверхностных и объемных волн. Используемые в современных датчиках МЭУ композитные материалы или тонкопленочные гетероструктуры, в силу технологических особенностей производства подвергаются различного рода начальным механических, тепловым, электрическим и магнитным воздействиям. Такие воздействия способны существенно менять физические характеристики исходных материалов, что имеет особое значение для МЭУ-структур, используемых в устройствах, работающих в экстремальных условиях больших динамических нагрузок или при постоянных вибрациях. Адекватная оценка динамики МЭУ-структур, их эксплуатационных и прочностных качеств возможна только на основе решения ряда задач электромагнитоупругости. Сложность динамических задач для полуограниченных сред с изменяющимися в пространстве свойствами состоит в невозможности получения строгих аналитических решений. Часто используемое допущение о том, что все свойства материала изменяются по одной пространственной переменной с равной интенсивностью и одному закону приводит к существенному упрощению задачи, но исключает возможность качественной оценки результатов более сложного численного или численно-аналитического моделирования.

В настоящей работе предложен подход к моделированию динамических процессов в биморфных МЭУ-пластинах из преднапряженных однородных и неоднородных ПЭ- и ПМ-слоев. Предполагается, что слои выполнены из функционально градиентных материалов с немонотонным изменением свойств по толщине. В каждом из слоев присутствуют начальные деформации, наведенные действием начальных механических напряжений. Начально-деформированное состояние (НДС) слоев пластины полагается однородным, неоднородность начального напряженного состояния обусловлена неоднородностью свойств материалов. Наличие в слоях электрического и магнитного полей связано с проявлением пьезоэлектрического и пьезомагнитного эффектов и зависит от пьезоэлектрических и пьезомагнитных

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №24-29-00773). https://rscf.ru/project/24-29-00773/.

свойств материалов. В основе предложенного подхода лежит, с одной стороны, использование линеаризованных, в рамках теории наложения малых деформаций на конечные, определяющих соотношений и уравнений движения преднапряженной МЭУ-среды [1]. С другой стороны, использование гибридного численно-аналитического метода [2] сведения систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными и переменными коэффициентами к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 2-го порядка. Решение системы ОДУ с постоянными коэффициентами строится аналитически, решение систем ОДУ с переменными коэффициентами строится на основе решения системы задач Коши с начально-краевыми условиями. Использование высокоточных численных методов позволяет быстро и эффективно восстанавливать значения неизвестных функций напряжений, перемещений, электрических и магнитных потенциалов по толщине покрытия. Эффективность подобного подхода показана при решении широкого круга динамических задач электроупругости для преднапряженных как однородных, так и неоднородных структур [3–5]. В рамках предложенного подхода в квазистатическом приближении рассмотрена задача о распространении SH-ПАВ в МЭУ-пластине из преднапряженных функционально градиентных ПЭ- и ПМ-слоев. Внешние поверхности свободны от механических напряжений, электрически закорочены и магнитно- открыты. На границе раздела слоев выполнены условия жесткого сцепления. Распространение волн в пластине инициировано действием удаленного источника гармонических колебаний. Ранее в [6] показано влияние характера и локализации неоднородности ПЭ- и ПМ-слоев пластины на особенности поведения SH-ПАВ. В настоящей работе исследованы особенности трансформации поверхностного волнового поля в зависимости от вида и величины наведенных в слоях пластины начальных деформаций. Установлены закономерности влияния НДС каждого слоя пластины на скорости SH-ПАВ при различном характере и локализации неоднородности пластины в широком диапазоне частот.

1. *Белянкова Т. И.*, *Калинчук В. В.* Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоэлектроупругой среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2016. — №5. — С. 101–110.
2. *Белянкова Т. И.*, *Калинчук В. В.* Поверхностные SH- волны в преднапряженных пьезоэлектриках с функционально градиентным покрытием // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2016. — №3. — С. 7–27.
3. *Белянкова Т. И.*, *Ворович Е. И.*, *Калинчук В. В.*, *Тукодова О. М.* Особенности распространения ПАВ в пьезоэлектрических структурах с преднапряженным многокомпонентным функционально градиентным покрытием // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4–13 сентября 2021 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2021. — С. 500–501.
4. *Белянкова Т. И.*, *Ворович Е. И.* Акустические свойства сегнетоэлектрических гетероструктур с высокоградиентными поверхностными слоями // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г. — СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. — Т. 4. — С. 631–634.
5. *Белянкова Т. И.*, *Ворович Е. И.*, *Калинчук В. В.* SH-волны в предварительно напряженной составной структуре из функционально градиентных пьезо- и диэлектрического слоев // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023), 4–10 сентября 2023 г., Дивноморское, Краснодарский край. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — С. 451–452.
6. *Белянкова Т. И.*, *Ворович Е. И.*, *Калинчук В. В.* Особенности распространения SH-волн в пьезоэлектрической/пьезомагнитной пластине из функционально градиентных материалов // 14-я Всероссийская научная конференция с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», 23–25 октября 2024 г., Москва. — С. 15–24.

ПОЛНОВОЛНОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОХОЖДЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ЗАЩИТНЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ БАРЬЕРЫ*

***В. И. Голубев*[1,2], *И. С. Никитин*[1], *А. В. Шевченко*[1,2], *А. Д. Никитин*[1]**

[1]*ИАП РАН, Москва, Россия;* [2]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

В настоящее время актуальной является задача обеспечения сейсмической защиты протяженных объектов, таких как промышленные здания и взлетные полосы аэродромов. В процессе эксплуатации они могут подвергаться воздействию различных сейсмических волн, включая поверхностные волны Рэлея и Рэлея–Лэмба, эванесцентные и головные SP-волны. Одним из вариантов их защиты является установление специальных сейсмических барьеров [1], изготовленных из метаматериалов со специальными механическими свойствами и предназначенных для рассеяния волновой энергии поверхностных сейсмических волн. Физическая особенность данных гранулированных материалов заключается в их разной сопротивляемости растяжению и сжатию [2].

В настоящей работе рассматривается полноволновое решение динамической задачи нагружения гетерогенного геологического массива. Для проведения компьютерного моделирования распространения сейсмических волн в неоднородной среде и их взаимодействия с защитными барьерами используется сеточно-характеристический метод на структурированных расчетных сетках [3]. Отличительной особенностью данного метода является высокоточное воспроизведение всех типов объемных и поверхностных волн, что является критически значимым для моделирования рассматриваемых задач и процессов.

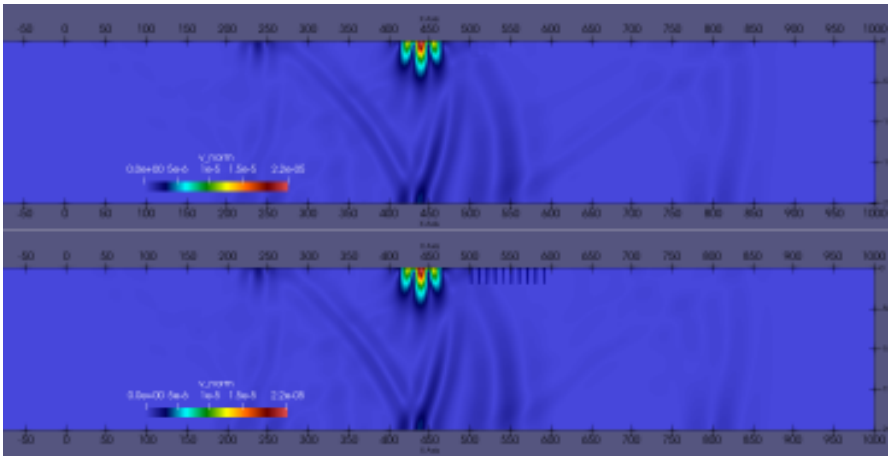


Рис. 1. Распределении модуля скорости в рассматриваемой модели до взаимодействия с изолирующей зоной. Расчеты без барьеров (сверху) и с барьерами (снизу)

Была численно решена задача прохождения волны Рэлея через набор сейсмических барьеров, состоящих из материалов с очень малым пределом прочности на растяжение. Рассматривалась двумерная постановка задачи, что позволило проводить компьютерные расчеты на обычном персональном компьютере. Расчетная

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-19-00404, https://rscf.ru/project/25-19-00404/.

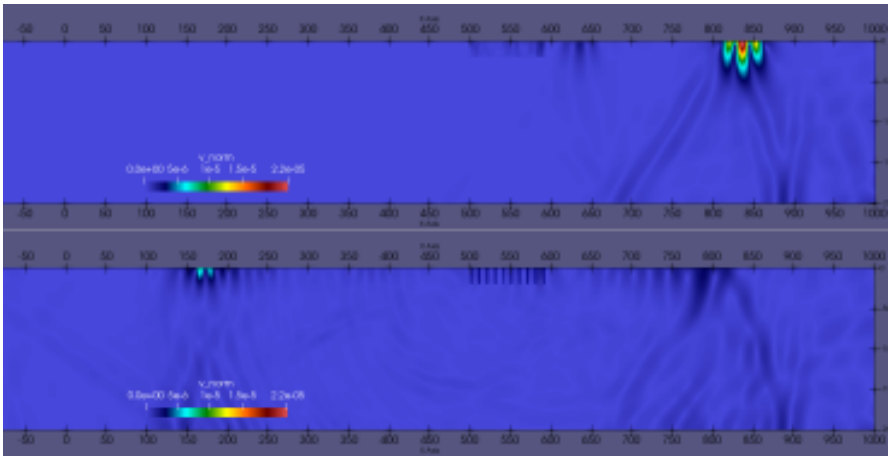


Рис. 2. Распределении модуля скорости в рассматриваемой модели после взаимодействия с изолирующей зоной. Расчеты без барьеров (сверху) и с барьерами (снизу)

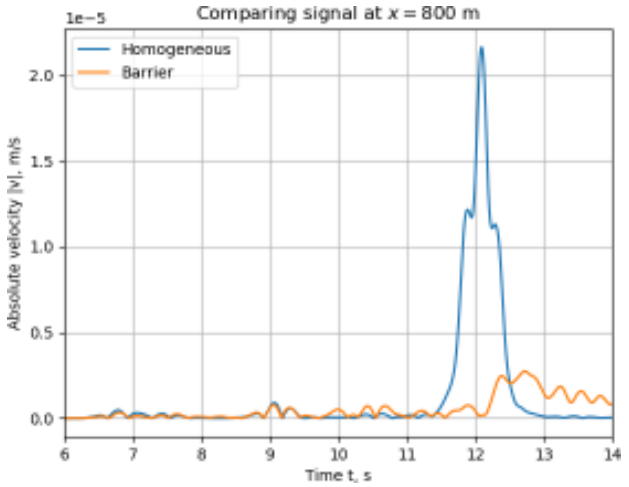


Рис. 3. Зависимость модуля скорости в точке, удаленной от источника на 800 м, при отсутствии (синий) и наличии (оранжевый) изолирующей зоны

область представляла собой прямоугольник размерами 1000×200 м, покрытый прямоугольной расчетной сеткой с шагом 10 см. Он включал в себя вмещающую грунтовую среду со следующими параметрами изотропной линейно упругой модели: плотность — 2000 кг/м^3, скорость продольных волн — 134 м/с, скорость поперечных волн — 77 м/с. На расстоянии 500 м от левого края области задавалось 10 сейсмических барьеров, описываемых в рамках изотропной линейно упругой модели с параметрами: плотность — 200 кг/м^3, скорость продольных и поперечных волн оставалась неизменной. Дополнительно выполнялась корректирование главных растягивающих напряжений на нулевой уровень после каждого упругого шага. Горизонтальный размер барьеров был равен 2 м, вертикальный размер — 20 м. Расстояние между ближайшими барьерами составляло 8 м. Для инициации поверхностной волны Рэлея задавалось граничное условие на вертикально приложенную силу давления в малой окрестности точки $(0, 0)$ на верхнюю поверхность

с временной зависимостью в виде импульса Рикера с пиковой частотой 1,5 Гц. На рис. 1 представлено распределение модуля скорости в расчетной области в момент полного формирования поверхностной волны Рэлея до взаимодействия с изолирующей зоной. Видно также образование продольных и поперечных объемных волн, однако, наибольшая интенсивность регистрируется у поверхностной волны.

На рис. 2 представлен момент после полного прохождения области установки барьеров. Наблюдается эффект повышения амплитуды отраженной обратно поверхностной волны, а также значительное снижение амплитуды прошедшей волны. На рис. 3 приведены зависимости от времени модуля скорости в точке поверхности, удаленной на 800 м от источника сигнала. Наблюдается снижение амплитуды колебаний более, чем в 5 раз, что свидетельствует о положительном влиянии рассматриваемого в работе способа сейсмической защиты.

1. *Morozov N. F.*, *Bratov V. A.*, *Kuznetsov S. V.* Seismic barriers for protection against surface and head waves. Multiple scatters and metamaterials // Mech. Solids. — M., 2021. — V. 56. — P. 911–921.
2. *Sadovskii V. M.*, *Sadovskaya O. V.*, *Petrakov I. E.* On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension // Composite Structures. — M., 2021. — V. 268. — Paper 113921.
3. *Магомедов К. М.*, *Холодов А. С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — М., 1969. — Т. 9(2). — С. 373–386.

ОБ ОДНОЙ ТЕРМОФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НИОБАТА ЛИТИЯ*

***В. В. Калинчук*[1], *И. Б. Михайлова*[1], *П. Е. Тимошенко*[2], *А. С. Турчин*[1,2], *В. Б. Широков*[1,2]**

[1]*ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, Россия;* [2]*ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия*

Одной из актуальных проблем для разработчиков микроэлектронной аппаратуры является поиск функционально ориентированных материалов с требуемыми механическими и физическими свойствами. К одному из таких востребованных в радиоэлектронной промышленности материалов относится ниобат лития, который обладает уникальными пьезоэлектрическими, электрооптическими и нелинейно-оптическими свойствами [1]. Это определяет его широкое применение в скоростных широкополосных радиочастотных фильтрах, линиях задержки, термостабильных резонаторах, оптических коммуникаторах, интегрированной микроэлектронике и фотонике, акустооптических преобразователях и других областях приложений [2]. Одним из необходимых при создании микроэлектронных устройств условий успешного использования активных элементов уже на стадии проектирования является проведение предварительных расчетов, базирующихся на достоверной информации о всем спектре материальных постоянных выбранных кристаллов. В этом плане ниобат лития представляет собой один из наиболее изученных материалов, для которого проведен широкий спектр экспериментов по определению материальных констант. Достаточно полный обзор работ, посвященных экспериментальному определению материальных констант ниобата лития представлен в [3]. Как правило, значения материальных констант определяются при комнатной температуре.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-29-00863, https://rscf.ru/project/25-29-00863.

Это позволяет хоть и успешно моделировать работу микроэлектронных устройств, проводить вычисления для различных срезов произвольной ориентации монокристалла, но лишь в диапазоне комнатных температур. Технологическое развитие микроэлектроники, определяющее повышение требований к работе устройств в сложных термомеханических условиях приводит к необходимости обладания достоверной информацией о поведении материальных констант при сложных внешних термосиловых условиях (повышенные температура и давление, наличие предварительной деформации и т. п.). Проведение экспериментальных исследований по изучению поведения материальных констант в условиях воздействия внешних физических, механических и электрических условий требует использования дорогостоящего оборудования и значительных трудовых и материальных затрата. Альтернативой экспериментальным исследованиям выступает разработка математических моделей, адекватно описывающих поведение сегнетоэлектрических материалов в сложных термосиловых условиях [4–6]. Математическое моделирование востребовано использованием в качестве активных элементов тонких пленок сегнетоэлектрических материалов, что вызвано расширением диапазона рабочих частот в сторону их повышения, миниатюризацией и переходу к планарным технологиям изготовления акустоэлектронных устройств. Отличительной особенностью пленок является высокая температура их нанесения. В условиях значительного различия коэффициентов теплового расширения материалов пленки и подложки это приводит к возникновению в пленке больших деформаций и, как следствие, к существенному изменению значений ее материальных констант. Проблемам моделирования находящихся в сложных термосиловых условиях пленок, вопросам изучения поведения их материальных констант посвящено достаточно много работ. Альтернативой пленкам выступают тонкие пластины сегнетоэлектрических кристаллов. Их появление обусловлено прогрессом в технологических методах обработки кристаллов, позволяющих изготавливать тонкие, толщиной до 200 нм пластины. Тем самым оказывается возможным их нанесение на подложки при значительно более низких температурах по сравнению с осаждением пленок. Это существенно снижает степень влияния подложки, однако оно остается достаточно большим при переходе к более высоким рабочим частотам. С другой стороны, технология изготовления позволяет производить пластины срезов монокристаллов различной ориентации. Это является существенным преимуществом пластин по сравнению с пленками, но требует построения более сложных математических моделей, учитывающих кристаллофизические свойства пластин. Их влияние на поведение материальных постоянных удобно описывать нелинейным потенциалом Ландау фазовых переходов. В [3] можно найти пример построения потенциала четвертой степени, позволяющего описывать поведение кристалла ниобата лития при комнатной температуре. Там же представлен неполный набор констант, который позволяет найти лишь ряд коэффициентов для линейных уравнений пьезоэффекта при фиксированной, комнатной температуре. Однако этого недостаточно для полноформатного описания свойств ниобата лития при внешних термосиловых воздействиях. Для более полного описания поведения кристалла в настоящей работе используется разложение термодинамического потенциала в ряд по компонентам поляризации в общем виде:

$$\Phi(J_1, J_2, J_3) + I_4\Psi(J_1, J_2, J_3), \tag{1}$$

где Φ и Ψ — являются полиномами от функций J_1, J_2, J_3, представляющих собой целый рациональный базис инвариантов поляризации. Как уже отмечалось, термодинамический потенциал четвертой степени неудовлетворительно описывает

температурное поведение кристалла. Для более адекватного описания его свойств предлагается использовать потенциал шестой степени в виде ряда по инвариантам J_1, J_2, J_3

$$Fp = a_1J_1 + a_2J_2 + a_{11}J_1^2 + a_{12}J_1J_2 + a_{22}J_2^2 + a_4I_4 + a_{122}J_1J_2^2 + a_{222}J_2^3. \qquad (2)$$

Полный термодинамический потенциал Гиббса F для ниобата лития представляется в виде суммы потенциала (2) и квадратичной части по упругим переменным:

$$F = Fp + Ft. \qquad (3)$$

Использование термодинамического потенциала в форме (3) позволило построить модель, адекватно описывающую температурную зависимость поляризации и коэффициентов теплового расширения и, тем самым. определить все коэффициенты потенциала Ландау и построить температурные зависимости всех основных материальных постоянных.

1. *Mandal D.*, *Banerjee S.* Surface Acoustic Wave (SAW) Sensors: Physics, Materials, and Applications // Sensors. — 2022. — V. 22.
2. *Wang J. L.*, *Chen F.* Ion-cut lithium niobate on insulator technology: Recent advances and perspectives // Appl. Phys. Rev. — 2021. — V. 8 011307.
3. *Zhu Y.*, *Wan Q.* Lithium niobate/lithium tantalate single crystal thin films for post moore era chip applications // Moore and More. — 2024. — V. 1, No. 6. — P. 1–17.
4. *Широков В. Б.*, *Калинчук В. В.*, *Шаховой Р. А.*, *Юзюк Ю. И.* Материальные константы тонких пленок титаната бария // ФТТ. — 2015. — Т. 57, вып. 8. — С. 1509–1514.
5. *Shirokov V.*, *Kalinchuk V.*, *Shakhovoy R.*, *Yuzyuk Yu.* Anomalies of piezoelectric coefficients in barium titanate thin films // EPL. — 2014. — V. 108. — 47008.
6. *Широков В. Б.*, *Калинчук В. В.*, *Шаховой Р.А*, *Юзюк Ю. И.* К проблеме определения упругих постоянных тонких сегнетоэлектрических пленок // ДАН. Физика. — 2015. — Т. 463, №6. — С. 655–660.

МЕХАНИКА ПРИРОДЫ ПРИ ГЛАВЕНСТВУЮЩЕЙ РОЛИ МАТЕРИИ

В. А. Левин[1,2]***, М. Я. Иванов***[1,3]***, В. В. Марков***[1,4]***, С. В. Мизин***[5]

[1]*НИИМ МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;*
[2]*ИАПУ ДВО РАН, Владивосток, Россия;* [3]*ЭнМИ МЭИ, Москва, Россия;*
[4]*МИАН, Москва, Россия;* [5]*ФИАН, Москва, Россия*

Механика природы анализируется на основе законов сохранения сплошной среды и уравнений Ньютона, Эйлера, Ломоносова, Максвелла и Прандтля при главенствующей роли материи. Продемонстрирована возможность создания объединенной теории основных силовых взаимодействий природы (электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного). Для света наряду с традиционными поперечными токами Максвелла показано наличие продольных токов, смещений и напряжений, играющих основную роль в распространении электрических импульсов в любой материальной среде. Электродинамическое взаимодействие определяет слабое на атомных масштабах, сильное — на ядерных масштабах, и гравитационное — на космологических масштабах природы. В целом, настоящее исследование возвращает науку на устойчивые материалистические позиции, доминировавшие в изучении природы с античных времен до конца XIX века.

Представим принципиальный вывод основных уравнений динамики распространения электромагнитных волн. Для любого векторного поля выполняется теорема

Гельмгольца о разложении на потенциальную и соленоидальную составляющие. Например, для вектора электрической напряженности поля пишем

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_s = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{1}$$

Следуя методологии Максвелла [1], применяем гидродинамическую аналогию для моделирования электродинамического поля. Однако вместо несжимаемой жидкости, в которой могут распространяться только поперечные возмущения (продольные волны сжимаемости распространяются с бесконечной скоростью), используем уравнения движения сжимаемой жидкости. Записываем известную систему законов сохранения:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \eta \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}. \tag{3}$$

Принципиальным положением при рассмотрении распространения возмущений будет анализ токов смещения с доминирующим направлением (обычно осевым), когда применимо приближение пограничного слоя Прандтля [2]. Вместо (3) имеем

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p - \eta \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}. \tag{4}$$

Анализируем случай распространения волн в исходной покоящейся среде и выполняем линеаризацию системы уравнений (2) и (4) относительно состояния с невозмущенными постоянными значениями плотности ρ_0 и давления p_0. Подставляя эти переменные $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$ в уравнения неразрывности и движения получаем

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\vec{V} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\operatorname{grad} p'}{\rho_0} = -\frac{\eta}{\rho_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}. \tag{6}$$

Для адиабатического процесса постоянная величина скорости распространения продольных возмущений c_p определяется как $c = \sqrt{\partial p/\partial\rho} = \sqrt{(p'/\rho')}$. Перепишем эту систему в характеристической форме, которая оставляет под знаками производных только величины с размерностью скорости [м/с], вводя для давления величину $\widehat{p} = p'/(\rho_0 c_p)$,

$$\frac{\partial\widehat{p}}{\partial t} + c_p \operatorname{div}\vec{V} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + c_p \operatorname{grad}\widehat{p} = -\frac{\eta}{\rho_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}. \tag{8}$$

Система уравнений (7) и (8) моделирует механику распространения продольных возмущений сжатия-разрежения и поперечных волн сдвига в сплошной адиабатической среде, когда сохранено действие вязких сил в приближении пограничного слоя. На основе этой системы получим расширенную систему уравнений электродинамики Максвелла, описывающую наряду с распространением традиционных поперечных возмущений и продольные возмущения. Для этого запишем систему уравнений (7) и (8) также в смещениях $\vec{u}$, учитывая, что $\vec{V} = \partial\vec{u}/\partial t$,

$$\frac{\widehat{p}}{\partial t} + c_p \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + c_p \operatorname{grad}\widehat{p} = -\frac{\eta}{\rho_0}\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{u}. \tag{10}$$

Из системы (9) и (10) при исключении величины возмущенного давления $\widehat{p}$ следует

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + c_p^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = -\frac{\mu}{\rho_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}. \tag{11}$$

В правой части уравнения (11) совершен также переход от коэффициента динамической сдвиговой вязкости η к модулю поперечной упругости — второму коэффициенту Ламе μ (в силу справедливости $\eta \operatorname{rot}\vec{V} = \mu \operatorname{rot}\vec{u}$).

Применим теперь к смещению $\vec{u}$ разложение Гельмгольца (аналогично (1)), имеем

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}_s}{\partial t^2} + c_s^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}_s - c_p^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}_p = 0. \tag{12}$$

Приходим к системе уравнений второго порядка для раздельного моделирования продольных и поперечных возмущений

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_p}{\partial t^2} - c_p^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}_p = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_s}{\partial t^2} + c_s^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}_s = 0. \tag{14}$$

Система уравнений (13) и (14) определяет линеаризованную величину продольных и поперечных пространственных смещений с размерностью [м] в анализируемой сплошной среде. В статьях [3, 4] продемонстрировано, что при переходе к напряжениям из уравнения (14) следует система уравнений типа акустики для продольных волн (потенциальных возмущений поля), из уравнения (14) следует система уравнений электродинамики Максвелла для поперечных волн (соленоидальных возмущений поля), из уравнений (13) и (14) получаем систему уравнений упругости и расширенную систему для продольно-поперечных волн. Наряду с традиционными поперечными токами Максвелла показано наличие продольных токов, смещений и напряжений, играющих основную роль в распространении электрических импульсов в любой материальной среде. Электродинамическое взаимодействие определяет слабое на атомных масштабах, сильное — на ядерных масштабах, и гравитационное — на космологических масштабах [3, 4].

Заключение. Паралич теоретической физики второй половины XX века, критически обострившийся в последнее время, обусловлен, прежде всего, отказом от главенствующей роли материи в природе. Классическая механика Ньютона сегодня представлена весьма ограниченной теорией, с широким освещением ее недостатков некомпетентными средствами массовой информации. Однако сегодня, основываясь на выдающиеся экспериментальных достижениях XX-го и текущего веков, математических основаниях Ньютона и законах сохранения механики появляется реальная возможность выйти современной теоретической физике из искусственно созданного тупика. Применить при этом моделирование природы на основе теории сплошной среды с использованием токов смещения Максвелла, приближения пограничного слоя Прандтля и экранирования сосредоточенных зарядов радиусами Дебая [3, 4].

1. *Максвелл Д. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: ГИТТЛ, 1952.
2. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. — Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 576 с.
3. *Левин В. А.*, *Иванов М. Я.*, *Марков В. В.* Механика природы // Природа. — 2025. — №3. — С. 3–16.
4. *Иванов М. Я.* Единая механика поля и вещества // Научные исследования XXI века. — 2024. — №6(32). — С. 7–23.

ЗАВИСИМОСТЬ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ СРЕДЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ФОТОНА ОТ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОСТОЯННОЙ ХАББЛА

М. Н. Машкин

МАИ, Москва, Россия

Рассматривается прохождение света в среде в виде потока порций магнитной энергии, как фотонов — объектов двумерного пространства. Исследуется зависимость показателя преломления от плотности среды для различных материалов и минералов. Получена зависимость плотности энергии среды излучения фотона от показателя преломления с учетом постоянной Хаббла. Наблюдаемое красное смещение зависит от плотности энергии трехмерного пространства в момент излучения.

Процесс прохождение света, как потока фотонов, можно рассматривать как их движение в двумерном пространстве с частотой осцилляции, соответствующей количеству магнитной энергии двумерного пространства [1, 2].

Исходя из гипотетической модели пространств [3, 4], фотон, как объект двумерного пространства, можно представить, как результат композиции двух равных по модулю зарядов, как объектов одномерного пространства, с противоположными знаками. Фотон движется в двумерном пространстве, как пространстве его существования. При этом траектория движения фотона отображается в трехмерное пространство в отношении «один-ко-многим». Процесс хода часов с ростом плотности гравитационной энергии в области трехмерного пространства замедляется [4]. Указанное замедление приводит к уменьшению периода осцилляции фотона, по часам наблюдателя.

Справочные данные имеют линейную зависимость показателя преломления от плотности вещества (рис. 1).

Показатели преломления воздуха, воды и муассонита определяются линейной зависимостью с коэффициентом $K_\rho \approx 0{,}5209$–$0{,}5351$ и смещением $K_{ns} \approx 1{,}0$–$0{,}9173$:

$$n = K_\rho \rho + K_{ns}, \tag{1}$$

где n — показатель преломления, ρ — плотность.

Полученная формула (1) позволяет вычислять абсолютный показатель преломления для заданных значений плотности среды.

Что согласуется с ранее полученными результатами и определяет плотность энергии трехмерного пространства около 1,7–1,9 г/см^3 [4]. Для последующих расчетов примем плотность энергии трехмерного пространства равной $\rho_m = 1,9$ г/см^3.

Энергия фотона [5, формула (2)], будет иметь вид:

$$E = h_m \nu c^{r_2 - 1}. \tag{2}$$

где $h_m = 2{,}20889 \cdot 10^{-42}$ кгм, ν — частота осцилляции фотона, c — скорость света, $r_2 = 2$ — размерность сингулярности двумерного пространства [6].

По часам наблюдателя вне среды:

$$E = h_m \nu_T c^{r_2 - 1}. \tag{3}$$

где ν_T — частота по часам наблюдателя вне среды.

При переходе к абсолютному показателю преломления замедление времени в среде на основе формул (2), (3) равно отношению энергии вне среды к энергии фотонов в среде:

$$K_c = \frac{h_m \nu c^{r_2 - 1}}{h_m \nu_T c^{r_2 - 1}} = \frac{\nu}{\nu_T} = n. \tag{4}$$

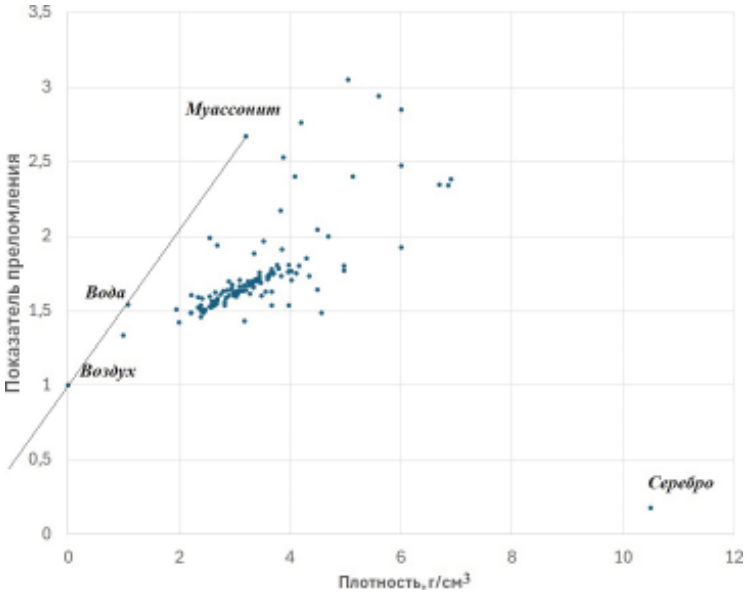


Рис. 1. Зависимость абсолютного показателя преломления от плотности вещества — 145 веществ. Воздух: плотность — 0,0012255 г/см^3, показатель преломления — 1,0003. Вода: плотность — 1 г/см^3, показатель преломления — 1,3328. Муассонит: плотность — 3,205 г/см^3, показатель преломления — 2,6695. Серебро: плотность — 10,5 г/см^3, показатель преломления — 0,18

При переходе из менее плотной среды в более плотную среду для наблюдателя в среде частота фотона уменьшается.

Для известного значения постоянной Хаббла $H_0 = (2{,}4 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-18}$ Гц [7, с. 35]. Для частоты красного цвета, $\nu_T = \nu_r = 4{,}46918 \cdot 10^{+14}$ Гц, она будет иметь результирующее значение $\nu_{rH} = \nu_r - H_0$.

При этом показатель преломления с учетом постоянной Хаббла будет равен $n_H = \nu / \nu_{rH} < 1$. Полученный результат на основе формулы (1) позволяет рассчитать плотность среды в момент излучения фотона:

$$\rho_H = \rho_m + \frac{n_H - K_{ns}}{K_\rho}. \tag{5}$$

Значение плотности среды с учетом красного смещения связано с повышением плотности энергии пространства в процессе эволюции Вселенной.

На основе данных 145 минералов и веществ получена линейная зависимость абсолютного показателя преломления от плотности среды. Получена зависимость плотности энергии среды излучения фотона от показателя преломления с учетом постоянной Хаббла. Наблюдаемое красное смещение зависит от плотности энергии трехмерного пространства в момент излучения.

1. *Машкин М. Н.* Потенциал гравитационного поля и силы взаимодействия // Вопросы науки. — 2024. — №1. — С. 53–60. — URL: `https://www.researchgate.net/publication/387297995` (дата обращения: 2025-02-19).
2. *Машкин М. Н.*, *Смирнов Ю. В.* Информационная энтропия распределения непрерывной случайной величины: энтропия сингулярности пространств // Препринт. Декабрь 2024. — URL: `https://www.researchgate.net/publication/387501760` (дата обращения: 2025-02-19).

3. *Mashkin M. N.* Matter in a Space of a Fractional Dimension. A Cosmological System of Spaces and Evolution of the Universe. V. 14. Progress in physics. — 2018. — Issue 3 (July). — P. 131–134. — URL: https://progress-in-physics.com/2018/PP-54-05.PDF (viewing date: 2023-03-16).
4. *Mashkin M. N.* Calculation of the Density of Vacuum Matter, the Speed of Time and the Space Dimension. V. 14. Progress in physics. — 2018. — Issue 3 (July). — P. 135–137. — URL: https://progress-in-physics.com/2018/PP-54-06.PDF (viewing date: 2023-03-16).
5. *Машкин М. Н.* Потенциал гравитационного поля и силы взаимодействия // Вопросы науки. — 2024. — №1. — С. 53–60. — URL: https://www.researchgate.net/publication/387297995 (дата обращения: 2025-02-19).
6. *Машкин М. Н.*, *Смирнов Ю. В.* Информационная энтропия распределения непрерывной случайной величины: энтропия сингулярности пространств // Препринт. Декабрь 2024. — URL: https://www.researchgate.net/publication/387501760 (дата обращения: 2025-02-19).
7. *Ерунов В.* Вакуум и вселенная [Электронный ресурс]. — Новосибирск, 2017. — URL: https://www.nkozyrev.ru/bd/184.php (дата обращения: 19.02.2025).

ЗНАЧЕНИЕ ЗАКРЫТОСТИ СИСТЕМЫ И МОМЕНТА ДЛЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Э. В. Прозорова

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Считается, что достоверность классической механики проверена экспериментом и кинетической теорией. Опираться на классическую кинетическую теорию, дающую те же уравнения, что и механика сплошной среды, не позволяют гипотезы, лежащие в ее основе. Теория является статистической, работает с замкнутыми системами и использует Гамильтонов формализм. В предыдущих работах показано, что классические модели не включают один из важнейших законов — закон сохранения момента количества движения, если момент не выступает как заданное силовое воздействие. Выполненный математический анализ уравнений механики сплошной среды с исходным несимметричным тензором напряжений, показал, что в плоском случае для четырех неизвестных в классической формулировке мы имеем три уравнения: два уравнения из условия равновесия напряжений и одно уравнение — условие равновесия момента. Таким образом, мы нуждаемся в замыкании задачи с помощью дополнительного условия. В классическом варианте таким условием является условие симметрии тензора напряжений.

Основным уравнением в кинетике разреженного газа является уравнение Больцмана.

Уравнение Больцмана не выполняет один из законов сохранения — закон сохранения момента количества движения. Для открытой системы нарушается «марковость» процесса.

Функция распределения зависит от времени через временную зависимость макропараметров, т. е. выполняется гипотеза Гильберта. Во всех работах, в том числе и у Н. Н. Боголюбова, эта гипотеза лежит в основе теории. Гипотеза предполагает, что значения макропараметров могут быть рассчитаны из нулевого приближения для равновесной функции распределения. Поэтому, согласно гипотезе, значения для равновесной функции распределения с макропараметрами, найденными из уравнений Эйлера и уравнений Навье–Стокса, совпадают, хотя в действительности

равенства нет. Зависимость от времени через макропараметры в дальнейшем подтвердилась. Из определения давления, как из классического уравнения Больцмана, так и модифицированного, не следует, что гидростатическое давление есть одна треть от суммы давлений на координатных площадках. Используя закон Паскаля для равновесия, выбирают давление равным одной трети давлений на координатных площадках. Однако теория остается прежней при определении разного давления на каждой из площадок, т. е. p_x, p_y, p_z. Использование одного давления возможно при равновесных условиях (закон Паскаля), но для неравновесных условий факт не очевиден. если мы рассматриваем равные давления по разным направлениям, мы теряем момент силы, а градиент момента есть сила. Нами предлагается модификация уравнения с учетом открытости системы и вклада момента.

В силу вышесказанного использовать уравнение для проверки адекватности теории не представляется возможным. В настоящее время большая часть расчетов по теории разреженного газа выполняется вероятностными методами: методом Берда или методом молекулярной динамики. В работе [1] проводится сравнение адекватности законам сохранения метода молекулярной динамики и через функцию распределения.

Сопоставляются производные для дискретного (метод молекулярной динамики) и непрерывного описания (через функцию распределения). Вначале рассмотрим процесс релаксации (по времени):

$$f = f(t, r(t), \xi(t)).$$

Функцию распределения представим в виде

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta(r_i - r)}{\sum_{i=1}^{N} \delta(r_i - r)},$$

т. е. $f = n/N$, где n — количество молекул в элементарном объеме, N — количество молекул в возмущенном объеме. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t}_{r=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta(r_i - r)}{\sum_{i=1}^{N} \delta(r_i - r)}.$$

Аналогично можно рассмотреть производные по координате. Анализ показывает, что в случае совпадения скоростей молекул со средней скоростью производная по времени в численном расчете по разностной схеме представляет собой только поток молекул по сторонам элементарного объема. При расчете методом молекулярной динамики все функционально. Точность определяется количеством частиц. В этом случае дополнительный член определяет самодиффузию. Это результат расчетов для равновесной функции распределения.

Уравнение Больцмана получают с использованием уравнения Лиувилля, которое в свою очередь строится на формализме Гамильтона. Рассматриваются закрытые системы. При выводе всегда учитывается только взаимодействие индивидуальных частиц, поэтому предполагается симметрия потенциалов сил. Рассматриваемый в теории потенциал отвечает зависимости $\Phi(r_i - r_j)$, r_i, r_j — радиусы молекул. Гамильтонов формализм можно использовать для обобщенных сил (канонические переменные). Физические переменные, как правило, к ним не относятся. Реальные силы имеют более сложные составляющие. Примером других сил является, например, потенциал Леннарда-Джонса. Его часто используют при вычислении интеграла столкновений. В таком случае можно говорить о несовпадении уравнений Больцмана, полученных из классического уравнения.

Лиувилля и широко используемого. Рассмотрение стохастических уравнений, базирующееся на сумме двух интегралов и понятии физически бесконечно малом масштабе, приводит к эффекту дополнительной диффузии. Ранее доказан векторный характер давления исследованием уравнений для потенциального течения и через функцию распределения. Полная постановка задачи связана не только с уравнениями но и с граничными условиями. Классическая постановка задач учитывает только обмены по нормали к элементарному объему. Касательные составляющие не учитываются. Для разреженного газа при неполной информации о взаимодействии газа и поверхности ставят фиктивные граничные условия (условия скольжения), соответствующие границе слоя Кнудсена. Граничные условия для скорости и температуры (при постоянной плотности) служат граничными условиями для уравнений Навье–Стокса [2–5].

1. *Прозорова Э. В.* Влияние несимметричности тензора напряжений в механике сплошной среды. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2018. — 85 с.
2. *Prozorova E.* The Law of Conservation of Momentum and the Contribution of No Potential Forces to the Equations for Continuum Mechanics and Kinetics // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2022. — V. 10. — P. 2327–4356. — URL: https://www.scirp.org/journal/jamp ISSN Online: 2327-4379.
3. *Prozorova E.* The Role of the Angular Momentum in Shaping Collective Effects // 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference: Springer Proceedings in Complexity (CHAOS 2021) / Ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — P. 347–360. — URL: https://media.springernature.com/w600/springer-static/cover-hires/book/978-3-030-96964-6: 239-253.
4. *Prozorova E.* Aalysis of the Influence of Boundary Conditions in Kinetic Problems // 15th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / Ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Springer Proceedings in Complexity (CHAOS 2022). — P. 239–253. — eBook ISBN978-3-031-27082-6.
5. *Prozorova E.* Influence of The Conservation Angular Momentum Law and the mathematical models for Continuum Mechanics and Kinetics // SCIREA Journal of Physics. — 2024 (December). — V. 9, Issue 6.

ЗНАЧЕНИЕ МОМЕНТА В ТЕОРИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Э. В. Прозорова

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Предметом настоящего исследования является изучение влияния момента количества движения в механике сплошных сред, анализ положений, лежащих в основе классических формулировок теории. Влияние момента в кинетике разреженного газа рассмотрено в другом докладе. Изменение момента влечет появление дополнительной силы, которая может играть роль малого возмущения, влияющего на устойчивость структуры. Полученные эффекты могут сказаться при критических и около критических режимах работы самолетов, при сближении самолетов, ракет, в различных устройствах, в строительных конструкциях, а также при некоторых естественных процессах. Величина дополнительной силы определяется значением градиента физических величин (плотности, скорости, количества движения) и структурой изучаемого объекта. В случае динамического формирования структуры изменяется положение центра инерции, что влечет за собой изменение момента количества движения [1–3].

В математической теории пластичности, упрочнения, разрушения за исходные данные принимаются экспериментальные данные. Более развита теория упругости, но и в диапазоне малых напряжений не удается объяснить некоторые эффекты. Физический механизм в таких теориях не исследуется. При пластическом деформировании наблюдается возникновение анизотропии, то есть приобретение различных механических свойств в разных направлениях. Идеально кристаллических решеток нет. Формирование дислокаций вблизи поверхности и в глубине материала происходит по-разному. Судя по всему, вблизи поверхности работают силы, обеспечивающие при нагрузках выход дефекта на поверхность и формирование коротких дислокаций. По экспериментальным данным длина коротких дислокаций $2 \div 5a$, a — радиус атома. Роль момента незначительна, если не рассматриваются процессы аккомодации. Экспериментально определяемые критические напряжения сдвига для чистых металлов на несколько порядков ниже теоретически определенных. Учет дефектов структур приводит к более близким теоретическим результатам. Также важна роль взаимодействия фононов различных направлений с атомами решетки. На поверхности фононов больше чем в металле и они могут взаимодействовать. Поверхностный атом в результате «танцует» вблизи центра по неправильному кругу. Модель попарного взаимодействия предсказывает смещение верхнего слоя наружу. По оценке типичное смещение положительно и приблизительно равно $+0{,}0014966$A. С другой стороны, при ударе атома поверхности внешней частицей атом смещается вниз. Далее он может вернуться в исходное состояние или даже выскочить. Все будет определяться временем релаксации, которое зависит от ранее перечисленных факторов, а также от количества молекул налетающего газа. Для плотного газа установления не происходит и слой смещается вниз. Аналогичный эффект будет наблюдаться в случае сложных молекул газа. В вакууме момент будет создаваться силами, отличающимися вдоль и поперек слоя, его величина σ/a, где σ — действующее напряжение. Поскольку в собственные частоты фононов входят размеры, отличие размеров вдоль и поперек будет сказываться на формирование фононов и их взаимодействие. Время релаксации для молекулы кислорода и алюминия при температуре 300 градусов порядка 10^{-13} с. Можно предложить следующую схему расчета равновесного процесса адсорбции на поверхности. Распределение Максвелла: на внешней границе тонкого слоя (порядка нескольких радиусов взаимодействия молекул)

$$f(t, x, \xi) = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT}(\xi - u)^2\right).$$

В этой формуле u — тепловая направленная скорость движения молекул, ξ — собственная скорость движения молекул. Условие равновесия сил (ось z направлена вверх, x — вдоль, y — вбок)

$$U(z = 0, \xi_x, \xi_y) + F_z\Delta = m\frac{\xi^2}{2}.$$

Отсюда определяется условие нулевой скорости молекулы. $z = 0$ означает точку, в которой силы отталкивания останавливают молекулу.

Поток молекул на поверхность

$$\overline{N} = \frac{1}{2}\int_0^{L/2} \xi_z f\, dx.$$

Количество случаев выполнения условий

$$\overline{N} = \frac{1}{2} \int_{L/2}^{L/2+\delta} \sqrt{2(U + F\Delta)} f \, dx,$$

рассматриваются проекции на соответствующие оси. Адсорбция соответствует $z = 0$, ξ_x, ξ_y. U отвечает соответствующим проекциям.

Без адсорбции количество вылетающих молекул

$$\overline{N}_1 = \frac{1}{2} \int_{L/2}^{L/2+\delta} \sqrt{2(U + F\Delta)} f \, dx,$$

Для Al (110) осцилляция, которая может возникнуть после останова движения первого слоя, связана с кристаллографической ориентацией поверхности и расстоянием отодвинутого первого слоя от последующих и увеличением действия сил отталкивания, увлекающих последующий слой. Здесь работают электронные оболочки атомов. Очень важной характеристикой явилось бы сравнение результатов экспериментов при растяжении образца сверху и снизу и только сверху с закрепленной нижней границей. При действии напряжения увеличивается роль дислокаций внутри образца. В литературе нет данных о напряжениях за трещиной и перед трещиной. Дислокации при сжатии не возникают, но при несимметричном нагружении с растяжением по одному направлению поведение трещины будет различным с разных сторон. Вблизи «носика» трещины возникнет момент и дополнительная сила, изменяющая направление движения трещины. Экспериментальные данные в центре стержня, соответствующие одномерному напряжению, не позволяют определить коллективные (многомерные) эффекты. Кроме того, не всегда рассматривается изменение напряжения из-за потери площади сечения после формирования трещин. В случае различной температуры молекул, которые ударяются непосредственно о молекулы поверхности с другой температурой и зеркально отражаются, должны иметь температуру, отличающуюся от температуры падающих молекул пропорционально времени останова подлетающих $\frac{(\xi - u)_T}{(\xi - u)_{T_S}}$. Таким образом, повышение температуры газа способствует увеличивает количество переданной энергии. Существующие энергетические критерии образования вакансий и начальное образование пор и трещин [4] в настоящее время не позволяет построить замкнутую теорию. Пока мы рассматриваем одиночные вакансии, что можно делать при малой их концентрации.

1. *Prozorova E.* The Role of the Angular Momentum in Shaping Collective Effects // 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference: Springer Proceedings in Complexity (CHAOS 2021) / Ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — P. 347–360. — URL: `https://media.springernature.com/w600/springer-static/cover-hires/book/978-3-030-96964-6: 239-253`.
2. *Prozorova E.* Aalysis of the Influence of Boundary Conditions in Kinetic Problems // 15th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / Ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Springer Proceedings in Complexity (CHAOS 2022). — P. 239–253. — eBook ISBN978-3-031-27082-6.
3. *Prozorova E.* Influence of The Conservation Angular Momentum Law and the mathematical models for Continuum Mechanics and Kinetics // SCIREA Journal of Physics. — 2024 (December). — V. 9, Issue 6.
4. *Колбасников Н.Г.* Теория обработки металлов давлением. — СПб.: Изл-во СПбГУ, 2000. — 314 с.

ПОСТРОЕНИЕ УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА К ОЦЕНКЕ МАСШТАБНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ

А. В. Романов

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Для решения краевых задач статики микрополярной теории упругости на основе параметра замкнутой термодинамической системы — свободной энергии Гельмгольца выполняется построение упругого потенциала, который способен учитывать масштабные и тепловые эффекты микрополярной среды. Формулируется вариационный принцип Лагранжа в обобщенных кинематических полях применительно к материалам с центром симметрии произвольной анизотропии. Используя метод Ритца краевая задача приводится к тензорно-блочной системе линейных алгебраических уравнений. Для чего искомые кинематические векторные поля перемещений и микровращений раскладываются в ряд по базисным кусочно-полиномиальными функциям лагранжева и серендипова семейства. Для улучшения аппроксимации лагранжевыми многочленами, в том числе для почти несжимаемой среды, использован обобщенный метод редуцированного и селективного интегрирования.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ МАТЕРИАЛА ПРИ АБРАЗИВНОМ ИЗНОСЕ ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ ПОТОКОМ ЧАСТИЦ*

Е. А. Строкач, А. А. Пожидаев, С. В. Добровольский, Ю. И. Глуховская

МАИ, Москва, Россия

Несмотря на обширную историю изучения эрозионного износа частицами узлов, деталей и поверхностей изделий как гражданской машиностроительной отрасли, так и перспективных образцов специальной техники [1–4], интерес как к экспериментальному физическому, так и к математическому моделированию процесса эродирования сохраняется. Заинтересованность поддерживается появлением и распространением перспективных материалов и способов пассивной защиты поверхности (например, различными системами покрытий), а также растущими возможностями методов численного моделирования, в случае CFD дающими возможность оценить свойства гетерогенного потока газа и частиц при натекании на образец [5, 6], а в случае методов явной динамики (FEA, SPH) — позволяющими на микроуровне изучить состояние поверхностного слоя [7]. Разработка надежных методик моделирования на их основе требует верификации на базе точного эксперимента.

В данной работе основное внимание уделено получению результатов верификационного эксперимента, что позволяет оценить скорость эродирования:

— по уносу массы образца

$$ER = \frac{\dot{m}_p}{\dot{m}_s},$$

(где $\dot{m}_p$ — массовый расход частиц абразива, $\dot{m}_s$ — унесенная масса образца);

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSFF-2023-0006).

— по максимальной глубине износа;

— по характерному профилю износа.

Одной из распространенных формул для связи скорости износа и скорости частиц является эмпирико-аналитическая зависимость Finnie [8]: $ER = K \cdot v^n$, где K — множительный коэффициент, v — скорость частиц, n — показатель степени. Параметры этой зависимости могут включать влияние угла натекания частиц, формы частиц, материала образца и частиц и т. д. [9]. Кроме того, исходя из малого количества параметров, задействованных для связи скорости износа и скорости частиц, предлагается применять ее также для оценки глубины износа, которая является критичной характеристикой для материалов с тонким слоем модифицированной поверхности.

В работе также приводится сравнительное исследование состояния поверхности стального образца с покрытием и титанового сплава ВТ6 после воздействия частицами окатанного песка. Показано, что полученные результаты по скорости износа и состоянию поверхности исследованных образцов составляют надежную базу для верификации FEA-модели эрозионного износа и/или двухступенчатой CFD/FEA-модели, а также для дальнейшего выстраивания методологии моделирования процесса эродирования частицами.

1. *Боркова А. Н.* Эрозионная стойкость авиационных материалов при соударении с твердыми (пылевыми) частицами: Автореф. дисс... канд. техн. наук. — М.: Всероссийский НИИ авиационных материалов, 2006. — 26 с.
2. *Клейс И. Р.* Некоторые исследования по абразивной эрозии: Дисс... докт. техн. наук. — М.: МИНХиГП им. И. М. Губкина, 1970. — 250 с.
3. *Крамченков Е. М.* Исследование эрозионного изнашивания материалов: Автореф. дисс... канд. техн. наук . — М.: ГАНГ им. И. М. Губкина, 1995. — 26 с.
4. *Khoddami A. S.*, *Salimi-Majd D.*, *Mohammadi B.* Finite element andexperimental investigation of multiple solid particle erosion on $Ti_6Al–4V$ titanium alloy coated by multilayer wear-resistant coating // Surface and Coatings Technology. — 2019. — V. 372. — P. 173–189. — DOI: 10.1016/j.surfcoat.2019.05.042.
5. *Строкач Е. А.*, *Кожевников Г. Д.*, *Пожидаев А. А.* Численное моделирование процесса эродирования твердыми частицами в газовом потоке (обзор) // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. — 2021. — № 7. — С. 56–69. — DOI: 10.15593/2224-9982/2021.67.06.
6. *Строкач Е. А.*, *Кожевников Г. Д.*, *Пожидаев А. А.*, *Добровольский С. В.* Моделирование эрозионного износа титанового сплава высокоскоростным потоком частиц // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты. — 2023. — Т. 25, №4. — С. 268–283. — DOI: 10.17212/1994-6309-2023-25.4-268-283.
7. *Строкач Е. А.*, *Пожидаев А. А.* Моделирование износа алюминиевого сплава частицами SiO_2 // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2025. — Т. 25, №1. — С. 140–150. — DOI: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-140-150.
8. *Finnie I.* Erosion of surfaces by solid particles Oberflächenerosion durch feste teilchen // Wear. — 1960. — V. 3, No. 2. — P. 87–103. — DOI: 10.1016/0043-1648(60)90055-7.
9. *Borisov S.*, *Gloukhovskaya J.*, *Dobrovolskiy S.*, *Myakochin A.*, *Podporin I.* Mechanism of heterogeneous flow–solid substrate interaction on the formation of coatings of different thicknesses using different types of spray accelerators // MATEC Web of Conferences — 2022. — V. 362. — 01004. — DOI: 10.1051/matecconf/202236201004.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ С ТОНКИМИ ПЛАСТИНАМИ ТАНТАЛАТА ЛИТИЯ*

***В. Б. Широков*[1,2], *И. Б. Михайлова*[1], *П. Е. Тимошенко*[2], *А. С. Турчин*[1,2], *В. В. Калинчук*[1]**

[1]*ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону, Россия,* [2]*ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия*

Танталат лития ($LiTaO_3$), наряду с ниобатом лития ($LiNbO_3$), широко используется в качестве активного элемента в интегральных микроэлектронных устройствах. Благодаря высоким значениям пьезоэлектрических коэффициентов и стабильным свойствам этот материал широко используется в качестве подложки для устройств на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Для наиболее эффективной генерации поверхностных волн традиционно выбираются определенные срезы кристалла и направления распространения, при которых коэффициент электромеханической связи для ПАВ максимален. Например, для объемных кристаллов танталата лития это срезы 112Y или 36Y. Миниатюризация акустоэлектронных устройств и увеличение их рабочих частот обусловливают необходимость использования тонких пленок кристаллов в качестве активных элементов. Однако традиционные методы осаждения тонких пленок не позволяют изменять их ориентацию для обеспечения наиболее эффективного возбуждения ПАВ. Кроме того, большую проблему создает различие не только размеров решеток пленки и подложки, но, в первую очередь, различие коэффициентов теплового расширения пленки и подложки. Нанесенная на подложку при высокой температуре пленка в процессе остывания до рабочих (обычно комнатных) температур приобретает другие, существенно отличные от объемных образцов, диэлектрические, пьезоэлектрические и механические свойства [1, 2]. Это существенно затрудняет проектирование акустоэлектронных приборов и устройств, выполненных с использованием тонкопленочных технологий.

Перспективной альтернативой тонкопленочным технологиям является использование тонких пластин пьезоэлектрических кристаллов, поскольку позволяет осуществить переход на низкотемпературные методы создания сегнетоэлектрических гетероструктур [3], которые дают возможность выбирать кристаллофизическую ориентацию монокристаллических слоев [4]. Так как поверхностная волна локализуется вблизи интерфейса гетероструктуры, то эффективность ее возбуждения существенно зависит от степени ее локализации в сегнетоэлектрическом слое, которая связана со скоростью ее распространения. Она, в свою очередь, определяется материалом подложки. Поэтому для успешного использования гетероструктуры с тонкой пластиной требуется анализ эффективности ее работы в зависимости от ориентации и толщины активного слоя, а также материала подложки. Детальный анализ для гетероструктуры ниобат лития/кремний был выполнен в [5]. В настоящей работе проведено математическое моделирование сегнетоэлектрической гетероструктуры, представляющей собой тонкую пластину танталата лития, прикрепленную к сапфировой подложке (Al_2O_3) с тонким буферным слоем плавленого кварца. Разработанная модель позволяет моделировать процесс возбуждения рэлеевских и сдвиговых ПАВ и анализировать его эффективность в зависимости от ориентации среза кристалла, направления распространения волны и ориентации подложки. Тем самым, модель позволяет осуществлять поиск оптимальной

*Работа выполнена в рамках реализации государственного задания ЮНЦ РАН на 2025 г., № госрегистрации 125011200151-9.

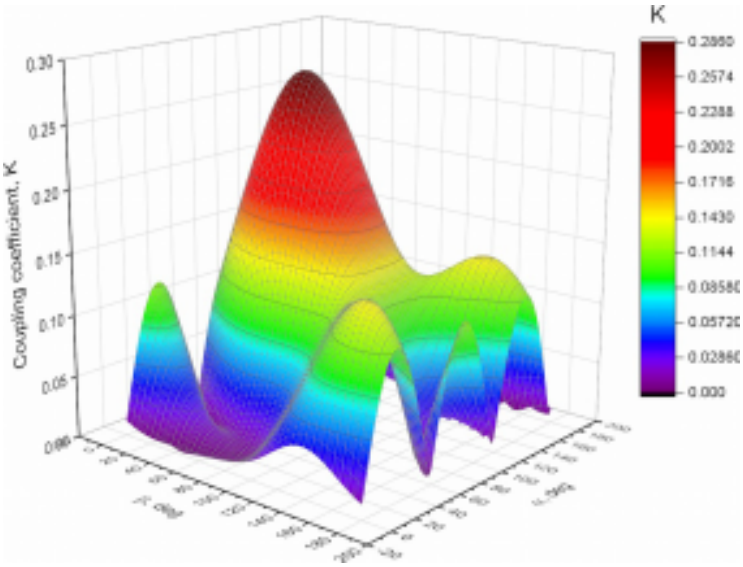


Рис. 1. Значение коэффициента электромеханической связи гетероструктуры $LiTaO_3/Al_2O_3$ в зависимости от углов Эйлера

кристаллографической ориентации пластины и направления распространения волны. В качестве примера в настоящей работе рассмотрена модель гетероструктуры с пластиной танталата лития толщиной 1 мкм. Оценка эффективности процесса возбуждения ПАВ производилась на основе расчета коэффициента электромеханической связи (КЭМС). С этой целью рассматривалась гетероструктура с различными электрическими условиями на поверхности: «электрически открытые» условия, когда нормальная компонента вектора электрической индукции равна нулю (электрически свободная поверхность), и «электрически закрытые» условия, когда поверхность гетероструктуры металлизирована и заземлена. Разные скорости распространения ПАВ для этих двух случаев позволяют вычислить КЭМС ПАВ по формуле

$$K = \sqrt{\frac{c_o^2 - c_s^2}{c_o^2}} \approx \sqrt{2\frac{c_o - c_s}{c_o}},$$

где c_o — скорость распространения ПАВ на электрически открытой поверхности, c_s — скорость распространения ПАВ на заземленной поверхности. На рис. 1 представлено распределение коэффициента электромеханической связи в зависимости от углов Эйлера, определяющих ориентацию среза пластины в виде поверхности. Как следует из рисунка, на плоскости α, β (α, β — углы Эйлера, определяющие направление нормали к поверхности пластины) наблюдается одна точка с максимальным значением КЭМС. Тем самым, существует конкретная ориентация среза кристалла танталата лития, пластина из которого обеспечивает наиболее эффективное возбуждение сдвиговых поверхностных волн.

1. *Широков В. Б.*, *Калинчук В. В.*, *Шаховой Р. А.*, *Юзюк Ю. И.* Материальные константы тонких пленок титаната бария // ФТТ. — 2015. — Т. 57, Вып. 8. — С. 1509–1514.
2. *Shirokov V.*, *Kalinchuk V.*, *Shakhovoy R.*, *Yuzyuk Yu.* Anomalies of piezoelectric coefficients in barium titanate thin films // EPL. — 2014. — V. 108. — 47008.

3. *Murakami S.*, *Watanabe K.*, *Takigawa R.* Investigation of the interface between $LiNbO_3$ and Si fabricated via room temperature bonding method using activated Si nanolayer // Japanese Journal of Applied Physics. — 2023. — V. 62. — SG1041(1-5).
4. *Gomi M.*, *Kataoka T.*, *Hayashi J.*, *Kakio S.* High-coupling leaky surface acoustic waves on $LiNbO_3$ or $LiTaO_3$ thin plate bonded to high velocity substrate // Japanese Journal of Applied Physics. — 2017. — V. 56. — 07JD13.
5. *Широков В. Б.*, *Пименов М. С.*, *Михайлова И. Б.*, *Турчин А. С.*, *Калинчук В. В.* Особенности возбуждения акустических волн на поверхности гетероструктуры $LiNbO_3$/Si // Наука Юга России. — 2024. — Т. 20, №3. — С. 7–15.

ПЕРЕХОДНЫЙ СЛОЙ ПРИ АДГЕЗИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ*

В. С. Шоркин, Л. Ю. Фроленкова, С. Н. Ромашин

ОГУ им. И. С. Тургенева, Орел, Россия

Между находящимися в состоянии адгезии твердыми телами существует слой, свойства которого являются переходными между свойствами контактирующих материалов. Исследованию свойств этого переходного слоя посвящен ряд работ (например [1, 2]). Выявление связи свойств переходного слоя со свойствами контактирующих тел может стать основой для решения проблемы управления ими. В данном сообщении рассмотрен метод расчета распределения механических характеристик материала в переходном слое между двумя линейно упругими изотропными телами. Метод опирается на представление о том, что вблизи поверхности каждого тела существует быстро убывающее поле дальнодействующих поверхностных сил [3]. Частицы каждого из тел при их адгезии попадают под действие поля, созданного частицами другого тела. Такое воздействие меняет свойства поверхностного слоя материала каждого из тел, стремясь сблизить значения их характеристик.

Известно, что упругие свойства твердого материала являются следствием нелокальных потенциальных взаимодействий их атомов и молекул [4], примером которых являются силы Ван-дер-Ваальса. Такие взаимодействия существуют как между одинаковыми, так и разными материалами. В последнем случае на их основе рассчитываются адгезионные взаимодействия (например, [5]).

Предлагаемый метод строится на основе модели деформируемого твердого тела, базирующейся на учете многочастичных потенциальных взаимодействий его бесконечно малых частиц, которые могут осуществляться на конечных расстояниях [6]. Кинематика такой среды строится на основе гипотезы Эрингена о разложении в ряд Тейлора относительного смещения частиц по степеням их относительного положения в отсчетной конфигурации [7]. Положение частицы $dB_2 \subset B$ относительно другой частицы $dB_1 \equiv dB \subset B$ в отсчетной конфигурации определяется вектором

$$\vec{l} \equiv \vec{l}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2 - \vec{r},$$

а в текущей — вектором

$$\vec{L}_{1j} \equiv \vec{L}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_1 \equiv \vec{R}_j - \vec{R} = (\vec{r}_j - \vec{r}) + (\vec{u}_j - \vec{u}) = \vec{l}_j + \Delta\vec{u}_j.$$

*Работа выполнена в ОГУ имени И. С. Тургенева в рамках государственного задания №075-01466-23-07 на 2023–2025 гг. от 24.11.2023 г., проект №FSGN-2023-002 (1023082800024-8-1.3.2).

Здесь $\Delta\vec{u}_{1j} \equiv \Delta\vec{u}_j = \vec{u}_j - \vec{u}$ — малое смещение частицы dB_j относительно частицы $dB_1 \equiv dB$. Коэффициенты разложения, пропорциональные градиентам вектора перемещения $\vec{u}$ разных порядков. Их ограниченное множество (в рассматриваемой ситуации первый $\nabla\vec{u}$ и второй $\nabla^2\vec{u}$) характеризуют деформацию частицы $dB_1 \equiv dB \subset B$.

Нелокальные взаимодействия частиц каждого материала с частицами того же материала и частицами другого материала описываются соответствующими потенциалами парных взаимодействий. Они пропорциональны объемам взаимодействующих частиц.

$$d^2 W_{ij} = \Phi^{(2)}\, dV_i\, dV_j, \tag{1}$$

Специфика такого взаимодействия отражается материальными параметрами.

Локальные взаимодействия, вызванные деформацией, характеризуются тензорами напряжений. При этом классические свойства линейно упругого материала характеризуются тензором

$$C = \int\limits_V \vec{l}(\nabla_2^2\Phi^{(2)})\vec{l}\, dV_2. \tag{2}$$

Здесь $\nabla_2 \equiv d\ldots/d\vec{l}_2 = \nabla \equiv d\ldots/d\vec{r}$.

Для тела $B = B_{(1)} \cup B_{(2)}$ занимающего область $V = V_{(1)} \cup V_{(2)}$, части которого $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ разделены поверхностью $A_{(12)}$, потенциал взаимодействий их частиц равен сумме потенциалов взаимодействия с частицами своего тела и взаимодействия с частицами второго тела. С учетом этого оказывается, что тензор C в окрестности плоскости $A_{(12)}$ является суммой двух тензоров

$$C^{(1,1)}(\vec{r}_1) = \int\limits_V \vec{l}_2\left(\frac{d^2\Phi^{(2)}}{d\vec{l}_2^{\,2}}\right)\vec{l}_2\, dV_2 = \begin{cases} C_{(11)}^{(1,1)}(\vec{r}_1) + C_{(12)}^{(1,1)}(\vec{r}_1), & \vec{r}_1 \in V_{(1)}, \\ C_{(12)}^{(1,1)}(\vec{r}_1) + C_{(22)}^{(1,1)}(\vec{r}_1), & \vec{r}_1 \in V_{(2)}. \end{cases} \tag{3}$$

Анализируя вид функции $C^{(1,1)}(\vec{r}_1)$ в зависимости от положения точки $\vec{r}_1$ по отношению к $A_{(12)}$ можно сделать следующее заключение.

Для полубесконечных тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$, когда $A_{(12)}$ — плоскость, проведен расчет зависимости величины $\widetilde{C} = (2\mu + \lambda)$ от расстояния h точки определения до поверхности контакта $A_{(12)}$, здесь λ и μ — параметры Ламе. Материал $B_{(1)}$ — алюминий. Для второго из контактирующих тел $B_{(2)}$ рассмотрены два материала. Один из них — медь, второй материал подобен бетону. Оказалось следующее. При приближении к поверхности $A_{(12)}$ значения $2\mu + \lambda$ для материала с большей величиной $(2\mu + \lambda)_\infty$ — значения $2\mu + \lambda$, определенное для $h \to \infty$, уменьшаются, а для материала с меньшей величиной $(2\mu + \lambda)_\infty$ — увеличиваются, стремясь к совпадению на поверхности $A_{(12)}$. Однако, разница между значениями $2\mu + \lambda$ при $h = 0$ не исчезает и оказывается равной разнице величин $0{,}5(2\mu + \lambda)_\infty$ контактирующих материалов. Особенностью зависимости $\widetilde{C}(h)$, характеризующей влияние алюминия на свойства бетона, является наличие «ямы». Ее можно связывать с зоной разрыхления материала, наблюдаемой в композитах на основе бетона [8, 9].

1. *Вильчевская Е. Н.*, *Филиппов Р. А.*, *Фрейдин А. Б.* О переходных слоях в композитных материалах как областях новой фазы // Механика твердого тела. — 2013. — №1. — С. 113–144.
2. *Волков–Богородский Д. Б.*, *Лурье С. А.* Решение задачи Эшелби в градиентной теории упругости для многослойных сферических включений // Механика твердого тела. — 2016. — №2. — С. 32–50.

3. *Чураев Н. В.* Поверхностные силы и физико химия поверхностных явлений // Успехи химии. — 2004. — 73(1). — С. 26–38.
4. *Каплан И. Г.* Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 312 с.
5. *Hamaker H. C.* The London — van der Waals attraction between spherical particles // Physica. — 1937. — V. 4, Iss. 10. — P. 1058–1072.
6. *Presnetsova V. Yu.*, *Romashin S. N.*, *Frolenkova L. Yu.*, *Shorkin V. S.*, *Yakushina S. I.* A variant of describing adhesion interaction in the probe sample system of an atomic-force microscope // Nanoscience and Technology: An International Journal. — 2018. — V. 9, Iss. 4. — P. 299–323.
7. *Eringen A. C.* Nonlocal Continuum Field Theories. — New York–Berlin–Heidelberg: Springer, 2002. — 376 p.
8. *Jia Z.*, *Han Y.*, *Zhang Y.*, *Qiu Ch.*, *Hu Ch.*, *Li Z.* Quantitative characterization and elastic properties of interfacial transition zone around coarse aggregate in concrete // Journal of Wuhan University of Technology — Mater. Sci. Ed. — 2017. — V. 32, Issue 4, — P. 838–844.
9. *Sharma M.*, *Bishnoi Sh.* The Interfacial Transition Zone: Microstructure, Properties, and Its Modification // Recent Advances in Structural Engineering. — 2018. — V. 2. — P. 745–754.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ, КОНЦЕНТРАЦИИ КИСЛОРОДА НА ВРЕМЯ ГОРЕНИЯ АЭРОВЗВЕСИ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ*

А. П. Шпара, Д. А. Ягодников, А. В. Сухов

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

В настоящей работе предложен подход, позволяющий выполнить анализ влияния уменьшение массовой концентрации окислителя в процессе горения аэровзвеси частиц алюминия микронного и наноразмерного диапазонов и основанный на модели горения одиночной частицы и газовзвеси частиц [1], основное положение которых заключается в том, что при изменении размера частицы при ее горении будут иметь место механизмы тепло — и массообмена, полученные либо на основе допущения сплошной среды (длина свободного пробега молекул газа l_g значительно больше диаметра частицы r_s, режим СС), либо на допущении свободно-молекулярного режима, при котором $l_g \ll r_s$ (режим СМР), либо переходного режима (ПР).

Границы r_{b1} между переходным режимом и режимом СС, а также границы r_{b2} между режимами ПР и СМР определяются с помощью числа Кнудсена (Kn). Аналогично принятому в работе [2] подходу полагается, что реализация режима СС имеет место при $\mathrm{Kn} \leq 0{,}01$ режима СМР — при $\mathrm{Kn} \geq 10$, а переходного режима при выполнении условия $0{,}01 < \mathrm{Kn} < 10$.

В соответствии с изложенным характерные времена горения для каждого режима тепломассообмена можно представить в виде:

— при $r_s \geq r_{b1}$, режим СС:

$$\tau_\text{г} = \tau_\text{г}^\text{СС}\Big|_{r_s}^{r_{b1}} + \tau_\text{г}^\text{ПР}\Big|_{r_{b1}}^{r_{b2}} + \tau_\text{г}^\text{СМР}\Big|_{r_{b2}}^{0};$$

— при $r_{b2} \leq r_s < r_{b1}$, режим ПР:

$$r_\text{г} = \tau_\text{г}^\text{ПР}\Big|_{r_{b1}}^{r_{b2}} + \tau_\text{г}^\text{СМР}\Big|_{r_{b2}}^{0};$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект №24-29-00042).

— при $r_s \le r_{b2}$, режим СМР:

$$\tau_{\text{г}} = \tau_{\text{г}}^{\text{СМР}}\Big|_{r_s}^{0}.$$

Здесь $\tau_{\text{г}}$ — полное время прогрева и горения частицы; $\tau_{\text{г}}^{\text{СС}}$, $\tau_{\text{г}}^{\text{ПР}}$, $\tau_{\text{г}}^{\text{СМР}}$ — суммы времен прогрева и горения в режимах СС, ПР и СМР соответственно.

Выведены основные расчетные соотношения, использованные в настоящей математической модели, в которой учитывалось влияние изменения давления, концентрации кислорода и размеров частиц алюминия на время их горения в составе аэровзвеси при изменении механизмов тепломассобмена, обусловленного уменьшением размера частиц при их выгорании и сопоставимого с размером и длиной свободного пробега молекул окислителя — кислорода.

Для оценки влияния изменения размеров частицы и уменьшения концентрации кислорода g_{O_2} в процессе горения был проведен расчет $\tau_{\text{г}}$ для трех вариантов. Первый вариант — $g_{\text{O}_2} = g_{\text{O}_2}^m = 0{,}23$, частица горит только в соответствии механизмами, имеющими место в режиме СС. Здесь $g_{\text{O}_2}^m$ — среднее значение массовой доли кислорода. Второй вариант — $g_{\text{O}_2} = g_{\text{O}_2}^m = 0{,}23$ с учетом смены режимов горения по мере уменьшения ее размера. Третий вариант — горение частицы в условном объеме в составе газовзвеси, где имеет место смена режимов горения и уменьшение концентрация кислорода в воздухе. Варификация разработанной модели осуществлялась при сопоставлении с результатами, рассчитанными по зависимостям работы [3] при давлении окислительной среды 0,1 МПа.

Получены зависимости времени горения от размера частицы при различных значениях начального давления и коэффициента избытка окислителя. Установлено, что во всем диапазоне изменения исходных значений коэффициента избытка окислителя (от 1,05 до 2,0) и давления среды (от 0,1 до 4 МПа) эти зависимости качественно близки, различие только количественное, и для некоторых вариантов весьма значительное. Для всех трех вариантов расчетов время горения частицы с учетом смены режимов темпо-массообмена и уменьшения концентрации кислорода (третий вариант) больше, чем по первому и второму, а время горения по второму варианту больше, чем по первому. Установлено также превалирующее влияние в области нанодиапазона уменьшения концентрации кислорода при горении частицы в составе газовзвеси при увеличении давления.

1. *Шпара А. П.*, *Ягодников Д. А.*, *Сухов А. В.* Горение газовзвеси частиц бора в воздухе // Теплофизика и аэромеханика. — 2022. — Т. 29, №5. — С. 835–848.
2. *Сандарам Д.*, *Янг В.*, *Зарко В. Е.* Горение наночастиц алюминия (обзор) // Физика горения и взрыва. — 2015. — Т. 51, №2. — С. 37–63.
3. *Бекстед М. В.* Анализ данных по временам горения частиц алюминия // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, №5. — С. 55–69.

Секция F **КЛАССИЧЕСКАЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА, МЕХАТРОНИКА, БИОМЕХАНИКА**

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАЯТНИКА КАПИЦЫ*

***А. К. Беляев*[1], *О. Р. Полякова*[2], *Т. П. Товстик*[1]**

[1]*ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия;* [2]*МАН, Подольск, Московская обл., Россия*

Уравнения динамики маятника Капицы [1, 2] входят в описание многих динамических процессов, существующих в природе и технике. Данная работа обобщает задачу Капицы на случай пространственных движений физического маятника относительно опоры, вибрирующей в вертикальном направлении по заданному закону (рис. 1). При достаточно интенсивных вибрациях опоры верхнее положение маятника становится устойчивым. Цель работы найти границы устойчивости верхнего положения маятника, а также границу области притяжения верхнего устойчивого положения равновесия маятника, т. е. максимальные начальные отклонения маятника, при которых колебания около верхнего положения будут устойчивыми. Следуя классической постановке задачи Капицы, амплитуду вибрации опоры считаем малой по отношению к размерам маятника.

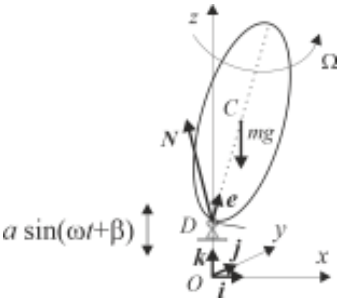


Рис. 1. Пространственный маятник Капицы

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ и за отсчетное положение тела возьмем верхнее положение равновесия. Тензор инерции тела $\mathbf{A}$ в актуальном положении и радиус-векторы точки опоры $\mathbf{r}_D$ и центра масс $\mathbf{r}_C$ и имеют вид

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{P}^T, \quad \mathbf{r}_D(t) = a\sin(\omega t+\beta)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_C(t) = \mathbf{r}_D + l\mathbf{P}\cdot\mathbf{k}, \quad a \ll l,$$

где a — амплитуда колебаний опоры, $l = |DC|$ — расстояние от опоры до центра масс тела; ω, β — частота и начальная фаза колебаний опоры; $\mathbf{A}_0$ — тензор инерции тела относительно центра масс, точки C в отсчетном положении. Поворот тела будем задавать тензором поворота $\mathbf{P}$, где

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{R} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\mathbf{R}^2, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}, \quad \theta = |\boldsymbol{\theta}|, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор второго ранга, $\boldsymbol{\theta} = \theta_1\mathbf{i} + \theta_2\mathbf{j} + \theta_3\mathbf{k}$ — вектор поворота [3, Приложение С]. Вектор правой угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\times\boldsymbol{\Omega}$ выражается через вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ по формуле

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T\cdot\left(\mathbf{E} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\mathbf{R} + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\mathbf{R}^2\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}. \tag{2}$$

*Работа выполнена в рамках госзадания ИПМаш РАН №124041100005-4.

Уравнения динамики тела в неподвижной системе координат под действием силы тяжести $-mg\mathbf{k}$ и силы реакции опоры $\mathbf{N}$ имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{N} - mg\mathbf{k}, \quad (\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Omega})^{\cdot} = (\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C)\times\mathbf{N}. \tag{3}$$

Исключаем $\mathbf{N}$ из системы (3), обозначаем за $\mathbf{A}_D$ тензор инерции тела относительно точки опоры в отсчетном положении $\mathbf{A}_D = \mathbf{A}_0 + ml^2(\mathbf{E} - \mathbf{k}\otimes\mathbf{k})$, получаем известное уравнение динамики твердого тела около неподвижной точки с дополнительным слагаемым, обусловленным вибрацией опоры. В безразмерных по времени и координате переменных $\widetilde{t} = \omega t$, $\widetilde{\Omega} = \Omega/\omega$, $\widetilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/l$, $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/ml^2$ уравнение имеет вид (знак $\sim$ опускаем)

$$\mathbf{A}_D\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A}_D\cdot\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\times\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{k}\big(\varepsilon\sin(t+\beta) - q\varepsilon^2\big), \quad \varepsilon = \frac{a}{l}, \quad q\varepsilon^2 = \frac{g}{l\omega^2}, \tag{4}$$

обозначение для q введено на основании оценки порядка величин для устойчивого движения [4]. Раскрывая векторное произведение в (4), получаем

$$\mathbf{A}_D\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A}_D\cdot\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\sin\theta}{\theta}(\theta_1\mathbf{i}+\theta_2\mathbf{j}) + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}(-\theta_2\mathbf{i}+\theta_1\mathbf{j})\theta_3\right)\big(\varepsilon\sin(t+\beta) - q\varepsilon^2\big). \tag{5}$$

Уравнение (5) является векторным дифференциальным уравнением второго порядка относительно компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$, где векторная функция $\boldsymbol{\Omega}$ находится из (2). Систему (5) можно решать как численно, так и с применением двухмасштабного асимптотического разложения Боголюбова–Митропольского [4], вводя медленное время $\tau = \varepsilon t$ и раскладывая неизвестные функции в ряд по степеням малого параметра $\varepsilon \ll 1$

$$\theta_1(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(X_n(\tau) + x_n(t,\tau)\big)\varepsilon^n, \quad \theta_2(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(Y_n(\tau) + y_n(t,\tau)\big)\varepsilon^n, \quad n = 0, 1\ldots$$
$$\theta_3(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(Z_n(\tau) + z_n(t,\tau)\big)\varepsilon^n, \quad \int_0^{2\pi} x_n(t,\tau)\,dt = \int_0^{2\pi} y_n(t,\tau)\,dt = \int_0^{2\pi} z_n(t,\tau)\,dt = 0. \tag{6}$$

И далее, подставляя разложение (6) в систему (5) и последовательно приравнивая нулю члены при степенях ε^0, ε^1, ε^2, получаем уравнение для медленно меняющихся функций времени X_0, Y_0, Z_0.

Пример. Рассмотрим осесимметричное тело с компонентами тензора инерции $\mathbf{A}_D = A(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + \mathbf{j}\otimes\mathbf{j}) + C\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$ в случае малых отклонений маятника от вертикали. Система (4) принимает вид

$$\begin{cases} A\dot{\Omega}_1 + (C-A)\Omega_2\Omega_3 = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{i}, \\ A\dot{\Omega}_2 - (C-A)\Omega_1\Omega_3 = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{j}, \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{k}\times\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{k}\big(\varepsilon\sin(t+\beta) - q\varepsilon^2\big). \\ C\dot{\Omega}_3 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

После процедуры осреднения получаем однородную систему дифференциальных уравнений без быстро меняющихся членов. Условие устойчивости малых колебаний маятника около верхнего положения равновесия для осредненной системы в безразмерных (с тильдой) и в размерных обозначениях, соответственно, имеет вид

$$\widetilde{C}^2\widetilde{\Omega}_3^2 - 4\widetilde{A}q + 2 > 0, \quad C^2\Omega_3^2 - 4Amgl + 2(mla\omega)^2 > 0. \tag{8}$$

В случае отсутствия вращательного движения, когда $\Omega_3 \equiv 0$, уравнение (8) совпадает с известным результатом для плоской задачи Капицы [4], в случае

отсутствия колебаний основания ($\omega = 0$), система (7) дает устойчивое движение для $C^2\Omega_3^2 - 4Amgl > 0$.

Для контроля правильности аналитического решения проводились расчеты и по полным нелинейным уравнениям (4). Таким образом, для задачи Капицы в пространственной постановке, начальное вращение вокруг вертикальной оси является отдельным параметром, увеличивающим устойчивость перевернутого положения тела. Тензорный аппарат, используемый для описания движения тела, позволяет рассматривать задачу как в углах Эйлера, так и в компонентах вектора поворота.

1. *Stephenson A.* On an induced stability // Phil. Mag. — 1908. — V. 15. — P. 233–236.
2. *Капица П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. — 1951. — Т. 44, №1. — С. 7–20.
3. *Жилин П. А.* Рациональная механика сплошных сред: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 584 с.
4. *Поляхов Н. Н.*, *Товстик П. Е.*, *Зегжда С. А.*, *Юшков М. П.* Теоретическая и прикладная механика. Том II. Динамика. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики: учебник / Под ред. П. Е. Товстика. — 4-е изд. — СПб.: Изд-во С-Петерб. Ун-та, 2022. — 539 с.
5. *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1958. — 408 с.

УРАВНЕНИЯ ТИПА ВЛАСОВА И ИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ И ГАМИЛЬТОН–ЯКОБИЕВЫ СЛЕДСТВИЯ

В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева, А. А. Русских, Н. Н. Фимин

ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия

В классических работах (см. [1–4]), уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия [5, 6]. Получающийся вывод уравнений типа Власова дает уравнения Власова–Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям [5, 6], как это делалось раньше уже самим А. А. Власовым [4]. В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона–Якоби, как это делалось уже в квантовой механике Е. Маделунгом, а в более общем виде В. В. Козловым [7]. Таким образом получаются в нерелятивистском случае решения Милна–Маккри, а также нерелятивистский и релятивистский анализ решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет получить факт ускоренного расширения Вселенной как релятивистский эффект [8, 9] без искусственных добавок типа лямбды Эйнштейна, темной энергии и новых полей, из классического релятивистского принципа наименьшего действия.

1. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975. — 696 с.
4. *Власов А. А.* Статистические функции распределения. — М.: Наука, 1966. — 356 с.
5. *Vedenyapin V.*, *Fimin N.*, *Chechetkin V.* The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system // European Physical Journal Plus. — 2021. — V. 136, No. 1. — P. 71.

6. *Веденяпин В. В.*, *Паренкина В.И.*, *Свирщевский С. Р.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022. — Т. 62, №6. — С. 1016–1029.
7. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. — Ижевск: Изд-во Удмуртскогого ун-та, 1998. — 239 с.
8. *Веденяпин В. В.*, *Батищева Я. Г.*, *Сафронов Ю. А.*, *Богданов Д. И.* Расширение Вселенной в случае обобщенной метрики Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2025. — 014. — 26 с.
9. *Веденяпин В. В.* Математическая теория расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2024. — Т. 64, №11. — С. 2114–2131.

ВЛИЯНИЕ СТРЕССОГЕННЫХ ФАКТОРОВ РАЗЛИЧНОЙ ЭТИОЛОГИИ НА РЕАКЦИИ ТРОМБОЦИТАРНОГО ГЕМОСТАЗА ПРИ МЕТАБОЛИЧЕСКИХ НАРУШЕНИЯХ

***М. Е. Григорьева*[1], *Т. Ю. Оберган*[1], *А. В. Коробовский*[2]**

[1]*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

Известно, что стрессогенные воздействия различной природы могут приводить к нарушению адаптационных механизмов, вызывающему дисбаланс гомеостаза в организме и развитие коморбидных заболеваний (5). В настоящее время все более значимым неблагоприятным фактором становится гипокинезия. Общее переохлаждение (гипотермию) также можно расценивать как один из существенных стрессирующих аспектов внешней среды. Под гипокинезией понимают снижение двигательной активности, под гипотермией — понижение температуры тела. Эти состояния вызывают нарушения функционирования многих систем организма, в том числе и гемостатической системы (3). Ограничение двигательной активности может приводить к значительному возрастанию риска тромбозов разной локализации (4). Одним из наиболее опасных осложнений гипотермического воздействия также являются тромботические осложнения. В частности, гипотермия сопровождается существенным изменением реологических свойств крови, что ведет к развитию выраженных сдвигов в процессах свертывания, и в первую очередь в реакциях тромбоцитарного гемостаза (1). Гипотермия способствует изменению формы тромбоцитов, снижению скорости кровотока и, в конечном итоге, к повышению агрегации тромбоцитов. При снижении температуры тела ниже 37 °C, тромбоциты становятся более восприимчивыми к активации и агрегации, что может быть защитным механизмом от кровотечений (6).

Известно, что при нарушении в организме метаболизма жиров и углеводов (метаболический синдром) также возникает гиперкоагуляция — повышение свертывания крови и угроза развития тромботического состояния (2). Метаболический синдром (МС) — одна из важнейших проблем XXI века, поскольку значительная распространенность этого синдромокомплекса во всех странах вносит существенный негативный вклад в рост числа сердечно-сосудистых заболеваний и их осложнений. Сочетание различных экстремальных факторов приводит к еще более выраженному нарушению гомеостатического баланса, в том числе и со стороны системы гемостаза (3).

Известно, что расчеты ракетных комплексов, средств ПВО, экипажи воздушных судов и космических станций, а также персонал дежурных смен на объектах, требующих его постоянного присутствия в течение длительного времени, находятся в

условиях ограниченного пространства и физической активности, т. е. иммобилизацию. Возникновение нештатных ситуаций, а также необходимость их парирования в короткие сроки, можно отнести как к физическому, так и психоэмоциональному стресс-факторам, усугубляющим малоподвижное состояние. К названным стрессогенным факторам может добавляться и фактор гипотермии, т. е. выполнение целевых задач персоналом может происходить в условиях низких температур.

Комплексное исследование реакций системы гемостаза на стрессорные воздействия различной природы является необходимым для более полного понимания механизмов возникновения стресс-индуцированных повреждений для оптимизации адаптационных возможностей организма, в том числе и у персонала при эксплуатации технических систем различного назначения.

Целью настоящего исследования явилась оценка сочетанного воздействия стрессирующих факторов на формирование наблюдаемых реакций тромбоцитарного гемостаза, а также изучение вклада отдельных используемых стрессоров в развитие гемостатического ответа организма при выраженных метаболических нарушениях.

Материалы и методы. Эксперименты проведены на лабораторных белых крысах-самцах (массой тела 350–400 г) с соблюдением этических стандартов, утвержденных правовыми актами РФ. Для оценки системы гемостаза в ответ на действие однократных стресс-факторов у животных с метаболическими нарушениями использовались следующие экспериментальные модели: иммобилизация (помещение крыс на 3 ч в тесные индивидуальные камеры при температуре +23 °C); гипотермия (охлаждение животных в течение 3 ч в воздушной среде при температуре +4 °C); сочетание иммобилизации и гипотермии (помещение крыс на 3 ч в тесные индивидуальные камеры при температуре +4 °C). Контрольную группу составили животные с метаболическими нарушениями, которые не подвергались стрессирующим факторам. Образцы крови получали из яремной вены животных сразу после окончания стрессогенного воздействия. Оценку состояния сосудисто-тромбоцитарного гемостаза проводили, используя стандартный метод определения агрегации тромбоцитов (по Борну). Полученные данные статистически обрабатывали при помощи программного обеспечения Statistica 8.0.

Результаты. Было показано, что в группе животных с метаболическими нарушениями при помещении их в несвойственные им условия среды (в тесные индивидуальные камеры) при температуре +23 °C не наблюдалось сколько-нибудь значительных изменений со стороны тромбоцитарного гемостаза. Эффект гипотермии у животных с МС проявлялся в повышении агрегационной способности тромбоцитов на 29% по сравнению с контролем (крысы с МС). Сочетанное воздействие стрессирующих факторов (гипотермия и иммобилизация) также сопровождалось существенными изменениями в изучаемой системе. Совокупность исследуемых воздействий вызывала возрастание агрегационных свойств тромбоцитов на 24% относительно контрольной группы. Оценка состояния сосудисто-тромбоцитарного гемостаза в данных условиях эксперимента позволяет сделать вывод, что основной вклад в развитие зарегистрированных сдвигов вносит гипотермическое воздействие, которое приводит к развитию предтромботического состояния.

Заключение. Таким образом, при сравнительной оценке реакций сосудисто-тромбоцитарного гемостаза в разных условиях эксперимента (применение стрессирующих симулов разной этиологии), установлено, что сочетание в организме крыс нескольких негативных факторов (а именно психоэмоционального напряжения, гипотермии, гиподинамии и нарушений метаболизма) могут приводить к увеличению риска возникновении тромбоопасных ситуаций.

1. *Лычева Н. А.*, *Макушкина Д. А.*, *Седов А. В. и др.* Состояние системы гемостаза на фоне ежедневных охлаждений до сверхглубокой степени гипотермии у крыс // Бюлл. мед. науки. — 2018. — №4. — С. 30–34.
2. *Оберган Т. Ю.*, *Григорьева М. Е.* Исследование параметров гемостаза, липидного и углеводного обмена у крыс с модифицированной моделью экспериментального метаболического синдрома // Современные технологии в медицине. — 2016. — Т. 8. №4. — С. 303–305.
3. *Шахматов И. И.*, *Момот А. П.*, *Алексеева О. В.* и др. Система гемостаза как универсальный механизм формирования ответной реакции организма на различные виды стрессорных воздействий // Тромбоз, гемостаз и реология. — 2025. — №1. — С. 34–43.
4. *Byard R. W.* Deep venous thrombosis, pulmonary embolism and long-distance flights // Forensic Sci. Med. Pathol. — 2019. — V. 15. No. 1. — P. 122–124.
5. *Eftekhari S.*, *Alipour F.*, *Aminian O.*, *Saraei M.* The association between job stress and metabolic syndrome among medical university staff // J. Diabetes Metab. Disord. — 2021. — V. 20. No. 1. — P. 321–327.
6. *Van Poucke S.*, *Stevens K.*, *Marcus A. E.*, *Lancé M.* Hypothermia: effects on platelet function and hemostasis // Thrombosis Journal. — 2014. — V. 12. — Art. no. 31.

СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

А. А. Зленко, Г. Р. Бездольный

МАДИ, Москва, Россия

Уравнение Кеплера, впервые представленное в начале XVII века Иоганном Кеплером [8], открыло новую эру в понимании небесной механики, предоставив математическую основу для описания законов движения планет. Это уравнение, устанавливая связь между средней аномалией и эксцентрической аномалией, описывает движение по эллиптическим орбитам в задаче двух тел. Высокая точность решения уравнения Кеплера — необходимое условие для его использования в астрономии, так как уравнение используется для расчета орбит искусственных спутников Земли, межпланетных станций и астероидов. Но существует сложность его решения, которая заключается в том, что данное уравнение является трансцендентным и нелинейным. Это делает конечное аналитическое решение уравнения Кеплера невозможным, из-за чего возникает потребность в поиске эффективных численных и численно-аналитических методов его решения. Получение решений в виде разложения по степеням эксцентриситета и ряда Фурье по синусам с аргументом кратным средней аномалии представлено в [3]. Обзор существующих методов решения и история их возникновения освещены в [4]. Но актуальным является исследование и получение более точных численных решений [1]. Новым аналитическим методом является применение гиперфункции Ламберта [2, 6, 7]. В данной работе этот метод решения уравнения Кеплера анализируется и сравнивается с традиционными, такими как метод касательных Ньютона, метод неподвижной точки, разложение в ряд Фурье.

Мы исследовали вышеупомянутые методы по многим параметрам, принимая во внимание и среднее время счета при вычислении эксцентрической аномалии, и среднюю точность, варьируя среднюю аномалию от нуля до 2π, и эксцентриситет от 0,1 до 0,99, а также вдаваясь в различные детали при использовании каждого метода. Это помогло понять их достоинства и недостатки. Нахождение значений гиперфункции Ламберта, т. е. эксцентрической аномалии, нами было сделано так, как предложено в работе [6]: сначала функция, обратная гиперфункции Ламберта,

аппроксимировалась приближенно полиномом Тейлора по степеням эксцентрической аномалии аномалии, затем найденный действительный корень полинома использовался как начальное значение для уточнения решения методом касательных Ньютона.

Анализируя все методы, можно сделать вывод о том, что использование гиперфункции Ламберта для решения уравнения Кеплера не является эффективным подходом. Такой численно-аналитический метод эффективнее метода с использованием ряда Фурье. Последний имеет меньшую точность при одинаковых временных затратах. Но метод с гиперфункцией Ламберта проигрывает численным методам Ньютона и неподвижной точки. Это можно объяснить тем, что для построения и нахождения корней полинома Тейлора тратится большое количество вычислительных ресурсов как при нахождении производных, так и при нахождении корней полинома Тейлора. Также в используемой библиотеке SymPy даже для вычислений с маленькой точностью используются числовые типы данных, которые менее эффективны, чем числа с плавающей точкой.

Тем менее, данное заключение не отменяет возможность использования метода решения уравнения Кеплера через гиперфункцию Ламберта в аналитических выражениях.

1. *Абубекеров М. К.*, *Гостев Н. Ю.* Решение уравнения Кеплера с машинной точностью // Астрономический журнал. — 2020. — Т. 97, №12. — С. 1022–1029. — DOI: 10.31857/S0004629920120014.
2. *Дубинов А. Е.*, *Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. — 2007. — Т. 4, №3(139). — 365–370.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная Механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1986.
4. *Colwell P.* Solving Kepler's Equation over Three Centuries. — Richmond: Willmann–Bell Inc., 1993.
5. *Corless R. M. et al.* On the Lambert W Function // Adv. Comp. Math. — 1996. — V. 5. — P. 329–359.
6. *Galidakis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation f(p)(z) = z // Complex Variables. — 2005. — V. 50, No. 13. — P. 977–997.
7. *Galidakis I. N.* On some applications of the generalized hyper-Lambert functions // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — V. 52, No. 12. — P. 1101–1119. — DOI: 10.1080/17476930701589563.
8. *Kepler J.* LX. Methodus, ex hac Physica, hoc est genuina and verissima hypothesi, extruendi utramque partem equationis, and distantias genuinas: quorum utrumque simul per vicariam fieri hactenus non potuit. argumentum false hypotheseos // Astronomia Nova Aitiologetos, Seu Physica Coelestis, tradita commentariis De Motibus Stelle Martis, Ex observationibus G. V. Tychonis Brahe. — 1609. — P. 299–300.

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ЗРЕНИЯ ДЛЯ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ УСТАНОВОК ЛАЗЕРНОЙ РЕЗКИ И МНОГОКООРДИНАТНОЙ ОБРАБОТКИ

***А. А. Молотков*[1], *Ю. А. Сальков*[2], *Д. Л. Сапрыкин*[2], *О. Н. Третьякова*[1], *Д. Н. Тужилин*[2], *А. А. Шамордин*[2]**

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*ООО «ПРОМИСЛАБ», Москва, Россия*

В современных технологических процессах многоосной лазерной резки и обработки металлов возрастает потребность в интеграции интеллектуальных систем управления, способных адаптироваться к изменяющимся условиям обработки.

В данном направлении особую актуальность приобретают алгоритмы машинного зрения, позволяющие реализовать обратную связь в режиме реального времени и существенно повысить точность и эффективность обработки.

Целью работы является разработка и внедрение алгоритмов машинного зрения в состав мехатронных комплексов, предназначенных для управления лазерными технологическими установками с многокоординатными системами обработки. Программная реализация алгоритмов машинного зрения выполнялась с применением языка C++. Основная часть модулей компьютерного зрения разработана на базе библиотеки OpenCV. Для разработки программы машинного зрения применялся фрем-ворк Qt. Программа машинного зрения включает этапы калибровки камер (в том числе с использованием шахматной сетки), коррекции искажений, адаптивной фильтрации и пороговой обработки изображений. В процессе анализа изображения проводится выделение контуров (в частности, алгоритмы Канни и Сузуки), поиск геометрических признаков и привязка координат к системе управления станком. Полученные координаты передаются в управляющую систему ЧПУ. Алгоритмы позволяют в реальном времени корректировать траекторию режущего инструмента на основе положения заготовки и отклонений, зафиксированных системой зрения. Это особенно важно при многокоординатной обработке сложных пространственных форм, где малейшие ошибки приводят к браку. Интеграция этих алгоритмов позволяет реализовать управление в мехатронных системах с пятью и более степенями свободы, что критично для многокоординатной обработки изделий сложного профиля.

Такие подходы позволяют существенно снизить влияние человеческого фактора, сократить потери материала и повысить общую производительность установки. В работе приведены результаты моделирования и экспериментальных исследований, подтверждающих эффективность предложенных решений. Разработанная система может быть масштабируема и адаптирована к различным типам мехатронных установок, применяемых в промышленности.

1. *Сальков Ю. А.*, *Третьякова О. Н.*, *Тужилин Д. Н.* Разработка и применение алгоритмов фильтрации и обработки видеопотока на программируемых логических интегральных схемах // Научная визуализация. — 2024. — Т.16, №4. — С. 102–108.
2. *Третьякова О. Н.*, *Тужилин Д. Н.*, *Шамордин А. А.* Исследование и применение алгоритмов машинного зрения для детектирования дефектов в аддитивных технологиях // Научная визуализация. — 2025. — Т. 17, №1. — С. 114–121.

РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ УСТАНОВОК ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ

***А. А. Молотков*[1], *О. Н. Третьякова*[1], *Д. Н. Тужилин*[2]**

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*ООО «ПРОМИСЛАБ», Москва, Россия*

Создан комплекс проблемно-ориентированных программ, который обеспечивает автоматизированное проектирования технологического процесса для станков российского производства. Это дает возможность цифровизации управления и поддерживает работу широкого спектра промышленных установок.

Структура реализованного и использованного программного обеспечения (ПО) технологии селективного лазерного сплавления SLM включает следующие программные блоки:

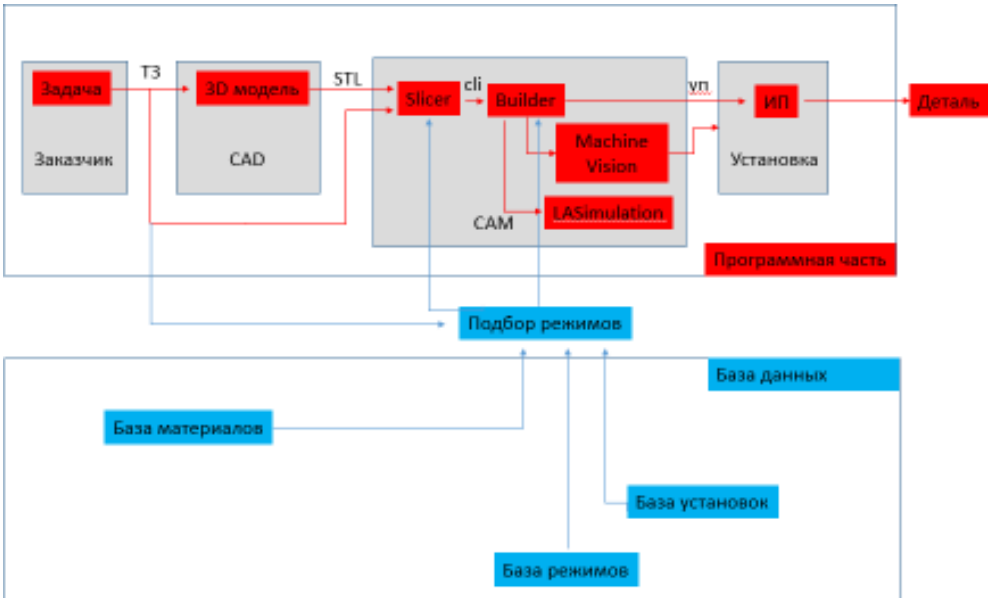


Рис. 1

1) Slicer — программа подготовки поддержек и нарезки;

2) Builder — программа подготовки технического задания станка (управляющая программа);

3) MachineVision — программная платформа машинного зрения;

4) LASimulation — программа математического моделирования теплообмена в процессе SLM;

5) УП-управляющая программа;

60 ИП-исполняющая программа, использующие файлы в формате STL и в формате cli.

Представлена программа LASlicer размещения деталей на платформе, построения поддерживающих конструкций и перевода модели в послойное представление для установки SLM. Использование программы LASlicer также позволяет инженеру-технологу формировать необходимые для обеспечения процесса послойного изготовления детали поддерживающие конструкции.

Представлена программа Builder для генерации файла технологических данных для установки SLM на основе 3D-модели изделия. Использование программы Builder позволяет инженеру-технологу формировать управляющую программу, содержащую команды для программы управления лазерным технологическим оборудованием для изготовление трехмерной детали произвольной формы на установке SLM. Во время использования программы пользователю доступна функция моделирования процесса SLM с помощью программ 3D-моделирования изделия и определения поля температур в объеме детали LASimulation на основе проводимого численного эксперимента. Это позволяет сократить время решения многопараметрической задачи подбора технологических параметром для реализации технологии SLM.

Программный комплекс используют различные установки: однопорошковые и многопорошковые, однолазерные и многолазерные, однокоординатные и многокоординатные. Применение возможностей разработанного ПО позволило создавать

полиметаллические изделия сложной геометрии, решить задачи контроля нанесения и разравнивания порошка в SLM-технологии и определения геометрии изделия. На основе распознанных контуров изделия блок ПО MachineVision позволяет сформировать карту слоев, и в комбинации с температурной картой, полученной при помощи численного эксперимента, проведенного в блоком ПО LASimulation, дает возможность определять причины геометрических искажений изделия.

Разработанный программный комплекс достаточно универсален, блочная структура ПО позволяет применять его для новых технологий, заменив лишь некоторые блоки в зависимости от специфики решаемой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Ю. Ю. Пупышева

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

В работе рассматривается следующая модель «черной дыры» нашей галактики. «Черная дыра» является большой точечной массой, создающей притягивающее центральное поле с заданным потенциалом, параметры которого подлежат определению методом наименьших квадратов. В некоторых точках траектории движения звезды известными являются координаты и скорости при ее перемещении вплоть до границы, где она поглощается черной дырой. В работе предлагается алгоритм определения шести параметров орбиты в плоскости Лапласа по следам движения звезды на основе последних опубликованных данных. Составляется МНК-функционал, зависящий от параметров, который позволяет по следам движения звезды их уточнить.

1. *Бабаджанянц Л. К.* Аналитические методы вычисления возмущений в координатах планет / Ленингр. гос. ун-т им. А. А. Жданова, канд. дисс. 1969. — 104 с.
2. *Гуревич В. Б.* Введение в сферическую астрономию / Под ред. В. В. Подобеда. — М: Наука, 1979. — 128 с.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика: Основные задачи и методы. — 3-е изд. — М: Наука, 1975. — 799 с.
4. An Improved Distance and Mass Estimate for Sgr A* from a Multistar Orbit Analysis / *Boehle A.*, *Ghez A.*, *Schödel R.*, *Meyer L.*, *Yelda S.*, *Albers S.*, *Martinez Gregory*, *Becklin E.*, *Do Tuan*, *Lu J.*, *Matthews K.*, *Morris M.*, *Sitarski B. & Witzel G.* Astrophysical Journal. — V. 830. — DOI: 10.3847/0004-637X/830/1/17.
5. *Gillessen S.* An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center // The Astrophysical J. — 2017. — V. 837, No. 1,

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ТЕЛ В ЗАДАЧЕ КЕПЛЕРА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ЧЛЕНА

Н. Н. Фимин

ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия

Движение двух материальных точек, подчиняющихся модифицированному закону гравитации Ньютона, является одномерным лишь в простейшем случае ($U = U_{GN}(r) = -\gamma M/r - c^2\Lambda r^2/6$). Для движения в центральном поле следует рассматривать дополнительную переменную, связанную с вращением, и вво-

дить эффективный потенциал $U \to U_{eff} \equiv U_{GN}(r) + p_\varphi^2/(2mr^2)$ (p_φ — компонента импульса движущейся в обобщенном гравитационном потенциале частицы m, связанная с ее угловым моментом относительно «центра»). В зависимости от величины p_φ движение частицы m будет либо иметь две точки либрации и одну точку остановки (ТО), либо просто одну ТО. Можно установить критическую величину центробежного импульса $p_\varphi = p_\varphi^{(crit)}$, соответствующую исчезновению связанного состояния $U'_{GN}(r) = U''_{GN}(r) = 0$: $p_\varphi^{(crit)} = \sqrt{(3/4)\gamma M m r_c^*}$, $r_c^*(>0)$ — корень уравнения $U'_{eff} \equiv (\Lambda c^2 m) r^4 - (3\gamma M m) r + 3(p_\varphi^{(crit)})^2 = 0$. Полученная система алгебраических уравнений для неизвестных $(r_c^*, p_\varphi^{(crit)})$ при выполнении предположений «два вещественных корня уравнения экстремума, только один корень > 0» однозначно определяет момент слияния точек поворота либрационного движения в одну (точку перегиба эффективного потенциала).

Явный вид зависимости времени от координат:

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{(2/m)(E - U_{eff}(r'))}} = \pm I_3^*(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)\big|_{r_0}^{r},$$

$$a_0 = \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{E}{3m}, \quad a_3 = \frac{GM}{2}, \quad a_4 = -\frac{p_\varphi^2}{m^2},$$

где $I_3^*(\dots)$ — эллиптический интеграл 3-го рода (вырожденный) в форме Лежандра; при $p_\varphi \equiv= 0$ решение получается также в аналогичном виде, либо в форме линейной комбинации эллиптических интегралов I_2, J_1 (3-го рода) в форме Вейерштрасса. Определение $\varphi = \varphi(\rho)$ таково: введем промежуточную переменную $u = 1/r$, тогда можно для траектории записать следующую зависимость:

$$\varphi_0 - \varphi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{p_\varphi^2 u^{-2}}{m u^{-2} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + GMu + \frac{1}{6}\Lambda c^2 u^{-2} \frac{p_\varphi^2 u^2}{2m}\right)}} =$$

$$= \left(2p_\varphi^2 \sqrt{3}(\xi_4 + \xi_1)\right) \sqrt{\frac{(\xi_4 - \xi_2)(u - \xi_1)}{(\xi_4 - \xi_1)(u - \xi_2)}} (u - \xi_2)^2 \sqrt{\frac{(\xi_2 - \xi_1)(u - \xi_3)}{(\xi_3 - \xi_1)(u - \xi_2)}} \sqrt{\frac{(\xi_2 - \xi_1)(u - \xi_4)}{(\xi_4 - \xi_1)(u - \xi_2)}} \times$$

$$\times (\xi_2) E_1\left(\sqrt{\frac{(\xi_4 - \xi_2)(u - \xi_1)}{(\xi_4 - \xi_1)(u - \xi_2)}}, \sqrt{\frac{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_4 + \xi_1)}{(\xi_3 + \xi_1)(\xi_4 + \xi_2)}}\right) +$$

$$+ (\xi_2 + \xi_1) E_3\left(\sqrt{\frac{(\xi_4 - \xi_2)(u - \xi_1)}{(\xi_4 - \xi_1)(u - \xi_2)}}, \frac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_4 - \xi_2}, \sqrt{\frac{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_4 + \xi_1)}{(\xi_3 + \xi_1)(\xi_4 + \xi_2)}}\right) \left((\xi_4 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1)\right) \sqrt{-\Xi(u)},$$

$$\Xi(u) \equiv -6\gamma u^3 + 3p_\varphi^2 u^4 - 6Emu^2 - \Lambda c^2 m,$$

где $\xi_i|_{i=1,\dots,4}$ — корни уравнения $\Xi(u) = 0$.

Предполагая, что величина $\Lambda \ll 1$, можно получить влияние возмущения $\Lambda c^2 r^2/6$ на кеплеровские орбиты, отвечающие случаю чистого притяжения. Перейдем к переменным «действие–угол» $\{J_r, J_\varphi, J_\theta; \chi_r, \chi_\varphi, \chi_\theta\}$:

$$2\pi J_r = -p_\sigma \oint \sqrt{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2)}\, \varrho^{-2} d\varrho, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2Mm^2\kappa/p_\sigma, \quad \varrho_1 \varrho_2 = -2mE/p_\sigma^2,$$

где ϱ_1, ϱ_2 — соответственно наибольшее и наименьшее значение ϱ,

$$\varrho_1 = (a - a\epsilon)^{-1}, \quad \varrho_1 = (a + a\epsilon)^{-1}, \quad p_\sigma = m\sqrt{\kappa M(a - a\epsilon^2)} = J_\varphi + J_\theta, \quad E = -\kappa M m/(2a).$$

Далее перейдем к каноническим элементам кеплеровой орбиты w, v_1, v_2, J, u_1, u_2, выражающимися через переменные Делонэ (w', v_1', v_2', J', u_1', u_2') и величины a, ϵ, m, M; их можно связать со сферическими координатами Непера, получая в результате

$$r = a\big(1 + u_1/J - (2u_1/J)^{1/2}\cos(w + v_1) - (u_1/J)\cos(2w + 2v)\big), \quad a = J^2/(\kappa m^2 M).$$

Для центральной возмущающей силы $\Lambda\mathcal{V}(r) = \Lambda c^2 r^2/6$ имеем:

$$\mathcal{V}(r) = \mathfrak{V}(w_1, v_1, J, u_1) = \mathcal{V}(a) + \delta r\mathcal{V}'(a) + \frac{1}{2}(\delta r)^2\mathcal{V}''(a),$$

$$\delta r = \big(au_1/J - a(2u_1/J)^{1/2}\cos(w + v_1) - a(u_1/J)\cos(2w + 2v_1)\big)_{a=J^2/(m^M\kappa)}.$$

Вековая часть $\mathfrak{V}(J, u_1)$ возмущающей функции $\mathfrak{V}(w_1, v_1, J, u_1)$ имеем

$$\mathfrak{V}(J, u_1) = \mathcal{V}(a) + (au_1/J)\big(\mathcal{V}'(a) + (a/2)\mathcal{V}''(a)\big),$$

дифференциальные уравнения для вековых возмущений переменных v_1, u_1:

$$dv_1/dt = \Lambda\partial\mathfrak{V}(J, u_1)/\partial u_1 = \Lambda(a/J)\big(\mathcal{V}'(a) + (a/2)\mathcal{V}''(a)\big), \quad du_1/dt = 0.$$

При возмущении центральной силой $\sim \Lambda r^2$ кеплеров эллипс сохраняет в среднем за период свою величину и форму. Он испытывает как целое лишь векоаве медленные изменения движения: $v_1 = v_1^{(0)} + \omega t$, $\omega = \omega_0 \equiv \Lambda(a/J)\big(\mathcal{V}'(a) + (a/2)\mathcal{V}''(a)\big)$. В соответствии с значением переменной Делонэ $\Pi = -v_1$, что означает, что линия апсид эллипса Кеплера (направление на перигелий) претерпевает медленные вращения с угловой скоростью ω, при этом $u_2 = \mathrm{const}_1$, $v_2 = \mathrm{const}_2$. Так как последние величины связаны с наклонением орбиты, то это означает, что центральная возмущающая сила оставляет движение плоским (в плоскости Лапласа). Энергия возмущенного движения $E(J, u) = -\kappa^2 M^2 m^2/(2J^2) + \omega u$ ($\omega \equiv \omega_0$).

Рассмотрим вопрос о движении пробного тела P (массы m) в гравитационном поле двух неподвижных центров K, K' массы $M(\gg m)$: $|KP| = r$, $|K'P| = r'$. В этом случае целесообразно начало координат поместить между тт. K, K' ($|KO| = |OK'| = c$), и ввести эллиптические координаты $\lambda = (r + r')/2$, $\mu = (r - r')/2$. Интеграл живых сил приобретает тогда форму

$$T = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\Big(\frac{(\dot\lambda)^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{(\dot\mu)^2}{c^2 - \mu^2}\Big),$$

а потенциал (силовая функция):

$$U = -\gamma M\Big(\frac{1}{\lambda + \mu} - \frac{1}{\lambda - \mu}\Big) - \frac{\Lambda c^2}{6}(\lambda^2 + \mu^2) = -2\gamma M\frac{\lambda - \mu}{\lambda^2 - \mu^2} - \frac{c^2\Lambda(\lambda^4 - \mu^4)}{6(\lambda^2 - \mu^2)}.$$

Условия теоремы Лиувилля выполняется, поскольку интеграл живых сил по форме соответствует условиям теоремы: $2T = (\sum_{1,2}\phi_i)(\sum_j A_j(q_j)\dot q_j^2)$, а потенциал, который должен иметь форму $U(q_1, q_2) = (\psi_1(q_1) + \psi_2(q_2))/(\phi_1(q_1) + \phi_2(q_2)$, представим в виде:

$$U(\lambda, \mu) = \frac{-2M\gamma(\lambda - \mu) - (c^2\Lambda/6)(\lambda^4 - \mu^4)}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{-2M\gamma\lambda - (c^2\Lambda/6)\lambda^4 + 2M\gamma\mu + (c^2\Lambda/6)\mu^4}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения Лагранжа в этом случае интегрируются в квадратурах, имея при этом форму

$$\int\sqrt{A_1/F_1}dq_1 + \beta_1 = \int\sqrt{A_2/F_2}dq_2 + \beta_2, \quad \int\sqrt{A_1/F_1}\phi_1 dq_1 + \int\sqrt{A_2/F_2}\phi_2 dq_2 = \sqrt{2}t + C,$$

где $F_j = \psi_j(q_j) + h\phi_j(q_j) + \alpha_j$; β_j, h, α_j — постоянные. В нашем случае получаем

$$\frac{d\lambda}{(\lambda^2 - c^2)(-2M\gamma\lambda - c^2\Lambda\lambda^4/6 + h\lambda^2 + \alpha)} - \frac{d\mu}{(c^2 - \mu^2)(2M\gamma\mu + c^2\Lambda\mu^4/6 + h^2\mu + \alpha)} = 0,$$

$$\frac{\lambda^2 d\lambda}{(\lambda^2 - c^2)(-2M\gamma\lambda - c^2\Lambda\lambda^4/6 + h\lambda^2 + \alpha)} - \frac{\mu^2 d\mu}{(c^2 - \mu^2)(2M\gamma\mu + c^2\Lambda\mu^4/6 + h^2\mu + \alpha)} = \sqrt{2}t,$$

при этом, как получается, что λ, μ могут быть представлены как четырехпериодические функции двух аргументов. Интегрирование до квадратур этих уравнений может, например, уточнить поведение малых галактик Магеллановых Облаков в гравитационных полях нашей Галактики и Туманности Андромеды.

1. *Fimin N. N.*, *Chechetkin V. M.* The modified Newton attraction law and its connection with cosmological Λ-term // Europ. Phys. J. Plus. — 2021. — V.136, No.1. — Art. no. 71.

ОБЛАСТЬ ДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ ПОКОЯ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УГЛОВЫЕ СКОРОСТИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИИ

В. В. Аветисян

ИМ НАН РА, Ереван, Армения

Рассматривается задача построения областей достижимости плоского двузвенного манипулятора, второе звено которого статически уравновешено, при управлении, оптимальном по быстродействию, с ограничениями на угловые скорости звеньев. Оптимальные управления являются релейными и содержат минимально необходимое число переключений, обеспечивающее выполнение граничных условий покоя системы в начальный и конечный моменты времени. Разработан метод определения областей в конфигурационной плоскости манипулятора, достижимых при использовании указанных управлений, удовлетворяющих ограничениям на угловые скорости.

Манипулятор моделируется как система двух абсолютно твердых тел, соединенных цилиндрическим шарниром O_2. Один из концов двузвенника соединен с неподвижным основанием посредством цилиндрического шарнира O_1, а на другом закреплен схват с грузом. Управление осуществляется с помощью моментов сил M_1 и M_2, приложенных относительно осей шарниров O_1 и O_2 соответственно. В случае, когда центр масс второго звена расположен на оси второго шарнира (т. е. звено статически уравновешено), уравнения движения системы принимают следующий вид [1, 2]:

$$(I_1 + m_2 L_1^2)\ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2. \tag{1}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — углы поворота звеньев относительно неподвижной системы координат; I_1 и I_2 — моменты инерции первого и второго звеньев относительно осей шарниров O_1 и O_2 соответственно; m_2 — масса второго звена (включая схват и груз); L_1 — длина первого звена.

Необходимо определить законы изменения управляющих моментов $M_i(t)$, $i = 1, 2$, ограниченных по модулю $|M_i(t)| \le M_i^0$, $i = 1, 2$, и построить области достижимых конечных состояний покоя манипулятора, при которых обеспечивается перевод системы (1) из начального состояния покоя в произвольное конечное состояние покоя внутри построенной области за минимальное время T. При этом должны соблюдаться ограничения на угловые скорости звеньев манипулятора:

$$|\dot{\varphi}_i(t)| \le \mathrm{a}_i, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Сначала на основе принципа максимума [2] определяются релейные программные законы управления для двухточечной задачи по критерию быстродействия без учета ограничений на угловые скорости (2). В зависимости от конечной конфигурации двузвенного манипулятора, управляющий момент M_1 имеет одну точку

переключения $t_0(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(\alpha)}$, $\alpha = 0,1$, а M_2 — две точки переключения $t_1 = t_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ и $t_2 = t_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(\alpha)}$, $\alpha = 0,1$, и наоборот; либо оба момента имеют по одной точке переключения (на прямых между областями $\Phi_1^{(\alpha)}$ и $\Phi_2^{(\alpha)}$) [3].

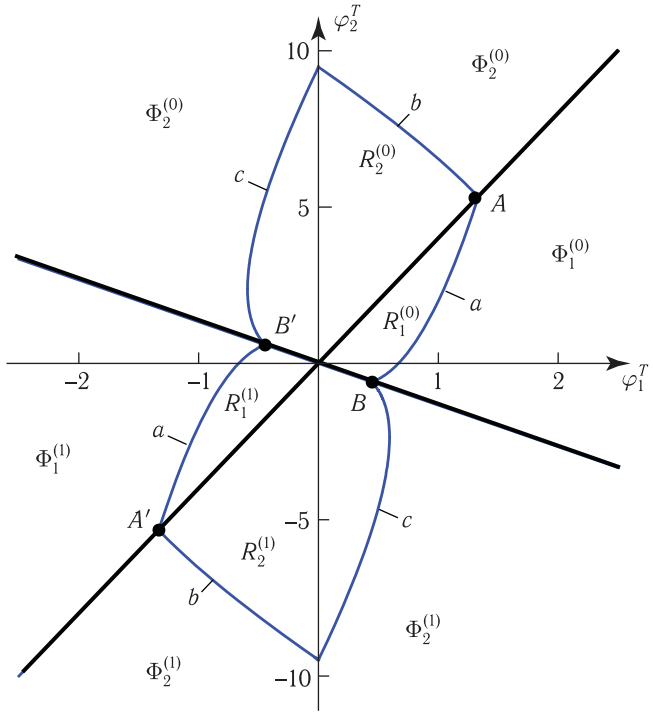


Рис. 1. Области конечных конфигураций, достижимых при оптимальных режимах без нарушения ограничений на угловые скорости

Далее на конфигурационной плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ строятся области, в пределах которых при реализации оптимальных режимов соблюдаются ограничения на угловые скорости (2). При этом условия (2) соблюдаются, если выполняются следующие соотношения:

$$\max_{t\in[0,T]} |\dot\varphi_i(t)| = |\dot\varphi_i(t_j)| \le a_i, \quad i = 1,2, \quad j = 0,1,2, \quad 0 < t_1 \le t_0 \le t_2. \tag{3}$$

После подстановки зависимостей $t_i = t_i(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, $i = 0,1,2$ в условия (3) получаются два неравенства относительно переменных φ_1^T и φ_2^T, которым соответствуют области:

$$\begin{aligned} D_i^{(0)}(a_1) &= \{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_i^{(0)} \colon |\dot\varphi_1| \le a_1\}, \\ D_i^{(0)}(a_2) &= \{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_i^{(0)} \colon |\dot\varphi_2| \le a_2\}, \end{aligned} \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Тогда искомая область достижимости определяется следующим образом:

$$R = \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{\alpha=0}^{1} R_i^{(\alpha)}, \quad R_i^{(\alpha)} = D_i^{(\alpha)}(a_1) \cap D_i^{(\alpha)}(a_2). \tag{5}$$

На рис. 1 представлена область (5) для случая, когда, в отличие от [4], диапазон изменения углов φ_1 и φ_2 не ограничен. Буквами a, b, c помечена граница области (5), построенной для случая, когда угловая скорость $\dot{\varphi}_1$ достигает своего максимального по модулю значения раньше, чем $\dot{\varphi}_2$: $|\dot{\varphi}_1| = a_1$, $|\dot{\varphi}_2| < a_2$.

1. *Avetisyan V. V.*, *Bolotnik N. N.*, *Chernousko F. L.* Optimal Programmed Motions of a Two-Link Manipulator // Soviet J. Comput. Syst. Sci. — 1985. — V. 23, No. 5. — P. 65–73.
2. *Лейтман Дж.* Введение в оптимальное управление. — М.: Наука, 1968. — 192 с.
3. *Avetisyan V. V.* Time-Optimal Control of Gripper Motion in a Two-Link Manipulator with Allowance for the Terminal Configuration // Autom. Remote Control. — 2021. — V. 82, Issue 2. — P. 189–199.
4. *Avetisyan V. V.*, *Hovakimyan N. V.* Constructing the Regions of Admissible States of Positioning for a Two-Link Manipulator with Account of Speed Constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. — 1997. — V. 36, Issue 4. — P. 638–646.

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И МЕТОД ОПОРНЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАНТИЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. Н. Акмаева

МАИ, Москва, Россия

Задачи стохастического программирования с квантильным критерием — это оптимизационные задачи, в которых осуществляется поиск точки минимума квантили функции потерь. Функция квантили описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной вероятностью, и зависит от стратегии оптимизации и случайных параметров. Доверительный метод [1] сводит задачу к минимаксной (максимум целевой функции на доверительном множестве значений случайных параметров как функция стратегии оптимизации и минимум полученной функции по стратегии оптимизации на доверительном множестве). При правильно подобранном фиксированном доверительном множестве можно получить достаточно точную верхнюю оценку функции квантили. Для стандартного гауссовского распределения случайных параметров при больших значениях уровня надежности достаточно высокую точность получаемой оценки обеспечивает выбор доверительного множества в форме шара. В [2] рассмотрена задача квантильной оптимизации с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии оптимизации функцией потерь, для которой оптимальным доверительным множеством является многогранник, параметризованный радиусом вписанного шара.

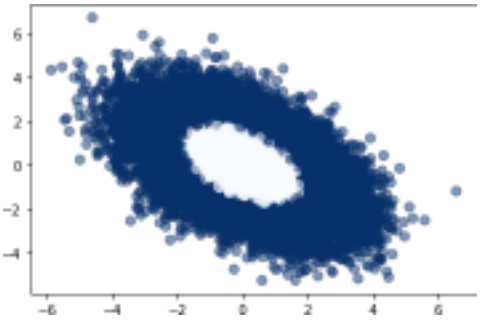


Рис. 1. Размеченная выборка из двумерного нормального распределения

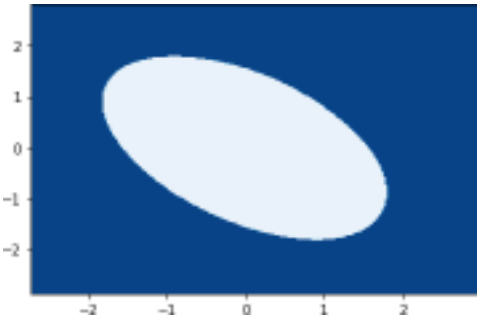


Рис. 2. Ядро вероятностного распределения

В данной работе предлагается обобщение алгоритма [2] на случай произвольного распределения случайных факторов. В основу положен метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки и метод опорных векторов [3] для

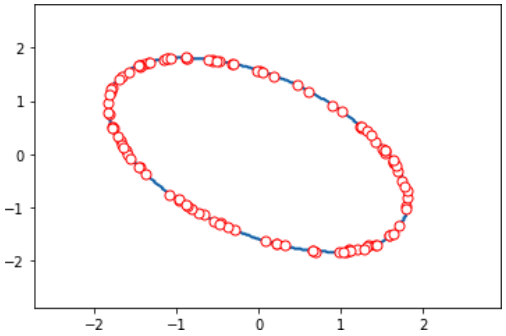


Рис. 3. Граница ядра (сплошная кривая) и опорные векторы (маркеры)

построения границ ядра вероятностной меры и доверительного множества, ограниченного поверхностью уровня плотности вероятности случайной величины.

1. *Кибзун А. И.*, *Кан Ю. С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
2. *Иванов С. В.*, *Кибзун А. И.*, *Акмаева В. Н.* Параметрический алгоритм поиска гарантирующего решения задачи квантильной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2023. — №8. — С. 73–78.
3. *Мэрфи К. П.* Вероятностное машинное обучение: введение. — М.: ДМК Пресс, 2022.

О РЕКУРРЕНТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И СКАЛЯРНЫМ l_1-УПРАВЛЕНИЕМ

Д. А. Козорез, А. Н. Сиротин, К. И. Сыпало

МАИ, Москва, Россия

Обсуждается решение одной задачи выпуклого программирования. Пусть $\mathcal{B} = \{b^1, \ldots, b^N\}$, $b^i, x^0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\mathcal{B}\backslash\{b^i\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Лемма 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:
(i) $x^0 \in \operatorname{conv}\mathcal{B}$;
(ii) *для каждого произвольного* $k \in \{1, \ldots, N\}$ *имеются числа* $t_k \in [0, 1]$ *такие, что*

$$x^0 - t_k b^k \in (1 - t_k)\operatorname{conv}\mathcal{B}\backslash\{b^k\};$$

(iii) *для каждого произвольного* $k \in \{1, \ldots, N\}$ *имеются числа* $t_k \in [0, 1]$ *такие, что*

$$x^0 - t_k b^k \in (1 - t_k)\operatorname{Lin}\{x^0, b^k\} \cap \operatorname{conv}\mathcal{B}\backslash\{b^k\}$$

и, следовательно

$$\dim\mathcal{D} \leq 2, \quad \mathcal{D} := \operatorname{Lin}\{x^0, b^k\} \cap \operatorname{conv}\mathcal{B}\backslash\{b^k\}.$$

Следствие 1. *Утверждения* (ii), (iii) *выполняются для всех* $k \in \{1, \ldots, N\}$ *одновременно*.

Следствие 2. *Включение* (iii) *выполняется тогда и только тогда, когда найдется матрица* $F \in \mathbb{R}^{2\times n}$, *для которой верно включение*

$$Fx^0 - t_k F b^k \in (1-t_k)F\mathcal{D}, \quad F\operatorname{Lin}\{x^0, b^k\} = \mathbb{R}^2.$$

В силу (iii) задача выпуклого программирования (i) произвольной размерности $\mathbb{R}^n$ теперь может быть решена для двумерного пространства $\mathbb{R}^2$. Это позволяет получить соответствующие конструктивные результаты.

Пусть $\mathcal{D}(K) = \{d^1, \ldots, d^K\}$, тогда поскольку $0 \in \operatorname{intconv}\mathcal{D}(K)\backslash\{d^i\}$, то найдется $d^i \in \mathcal{D}(K)$ такое, что $d^i \cdot x^0 \equiv (d^i)^T x^0 > 0$. Для удобства после соответствующей перестановки векторов считаем, что $d^1 \cdot x^0 > 0$. Подберем матрицу F так, что $Fd^1 = \beta e^1$, $\beta > 0$. Поэтому

$$x^0 \in \operatorname{conv}\mathcal{D}(K) \quad \Leftrightarrow \quad Fx^0 \in \operatorname{conv}F\mathcal{D}(K).$$

Для удобства введем обозначения

$$x^0 := Fx^0, \quad d^i := Fd^i, \quad i = 1, \ldots, K, \quad d^1 := \beta e^1; \quad d^i, x^0 \in \mathbb{R}^2.$$

Лемма 2. *При сделанных допущениях справедливы эквивалентные утверждения*

(i) $x^0 \in \operatorname{conv}\mathcal{D}(K)$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$, $d^i = (d_1^i, d_2^i)^T$;

(ii) *справедливо неравенство*

$$x_1^0 - \left(1 - \frac{x_2^0}{d_2^*(K)}\right)\beta \le d_1^*(K),$$

где

$$d_2^*(K) = \begin{cases} \max_{2\le i\le K} d_2^i (>0), & x_2^0 \ge 0, \\ \min_{2\le i\le K} d_2^i (<0), & x_2^0 \le 0, \end{cases}$$

$$i^*(K) = \operatorname*{argmin}_{\substack{2\le i\le K,\\ d_2^i = d_2^*}} |x_1^0 - d_1^i| \quad d_1^*(K) := d_1^{i^*(K)}.$$

Следствие 1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$d_2^*(K+1) = \begin{cases} \max\{d_2^{K+1}, d_2^*(K)\}, & x_2^0 \ge 0, \\ \min\{d_2^{K+1}, d_2^*(K)\}, & x_2^0 \le 0, \end{cases}$$

$$i^*(K+1) = \begin{cases} d_1^{K+1}, & |d_2^{K+1}| > |d_2^*(K)|, \\ \min\{|x_1^0 - d_1^{i^*(K)}|, |x_1^0 - d_1^{K+1}|\}, & d_2^{K+1} = d_2^*(K). \end{cases} \quad d_1^*(K+1) := d_1^{i^*(K+1)}.$$

Следствие 2. *Задача быстродействия* $x^0 \in \operatorname{conv}\mathcal{D}(K_{\min})$ *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$K_{\min} = \min\left\{K : x_1^0 - \left(1 - \frac{x_2^0}{d_2^*(K)}\right)\beta \le d_1^*(K)\right\}.$$

Утверждения непосредственно применимы к решению задачи 0-управляемости для линейной системы с дискретным временем и скалярным l_1-управлением [1, 2]

$$x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$x(k) = Ax(k-1) + bu_k, \quad k = \overline{1,K},$$

$$\sum_{k=1}^{K} u_k \le 1, \quad x(K) = 0,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния в момент времени k (на k-м шаге); $u_k \in \mathbb{R}$ — управление в момент времени k; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ — соответствующие матрицы системы. Положим

$$\det A \neq 0, \quad b^i = -A^{-i}bu_i, \quad \mathcal{B}(K) = \{\pm b^1, \dots \pm b^K\}.$$

Тогда задача 0-управляемости есть

$$x^0 = -\sum_{i=1}^{K} A^{-i}bu_i, \quad \sum_{i=1}^{K} |u_i| \leq 1,$$

или

$$x^0 \in \operatorname{conv} \mathcal{B}(K).$$

Следовательно, решения задач 0-управляемости и быстродействия могут быть решены в силу утверждений лемм 1 и 2.

1. *Сиротин А. Н.*, *Сыпало К. И.* О некоторых свойствах задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем и l_1-ограниченными управлениями // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (ММАА'2022), 4–13 сентября 2022 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2022. — С. 442–444.
2. *Осокин А. В.*, *Сиротин А. Н.*, *Сыпало К. И.* О некоторых оценках числа шагов в задаче быстродействия для линейных систем с дискретным временем и l_1-ограниченными управлениями // Материалы XXIII Международной конференции по вычисленной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023), 4–10 сентября 2023 г., Дивноморское, Краснодарский край. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — С. 537.

ПРИМЕНЕНИЕ КУБАТУРНОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ВЕРТОЛЕТОМ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

И. А. Кудрявцева, К. С. Петров

МАИ, Москва, Россия

В работе рассматривается решение задачи управления движением вертолета при наличии случайных возмущений. Динамика вертолета описывается нелинейной системой уравнений [1, 2]. Данная система уравнений дополняется уравнением измерений. Кроме того, предполагается, что влияние случайных возмущений описывается посредством введения в уравнения динамики и в уравнение измерений аддитивного шума. Целью управления является достижение заданной траектории. Для этого предлагается использование подхода, основанного на применении нелинейной прогнозирующей модели с последовательной линеаризацией (Nonlinear Model Predictive Control with Successive Linearization, NMPC-SL) [3]. Данный метод позволяет найти последовательность управляющих сигналов, обеспечивающих достижение целевой траектории. Для этого производится линеаризация нелинейной системы уравнений [1]. Далее вводятся в рассмотрение два временных интервала: горизонт прогнозирования и горизонт управления. В течение горизонта управления строится управление с целью достижения заданной траектории. В течение горизонта прогнозирования ожидается достижение заданной траектории. В силу наличия случайных компонент в уравнениях состояния и измерения сначала решается задачи фильтрации. Полученные в резуль-

тате оценки состояния используются для построения прогнозных оценок состояния на протяжении горизонта прогнозирования с помощью прогнозирующей модели. Управление находится как минимум функционала качества, отражающего меру близости прогнозируемой траектории к целевой, а также влияние интенсивности управляющих воздействий [3–5]. Благодаря произведенной линеаризации функционал качества оказывается квадратичным, что гарантирует существование решения.

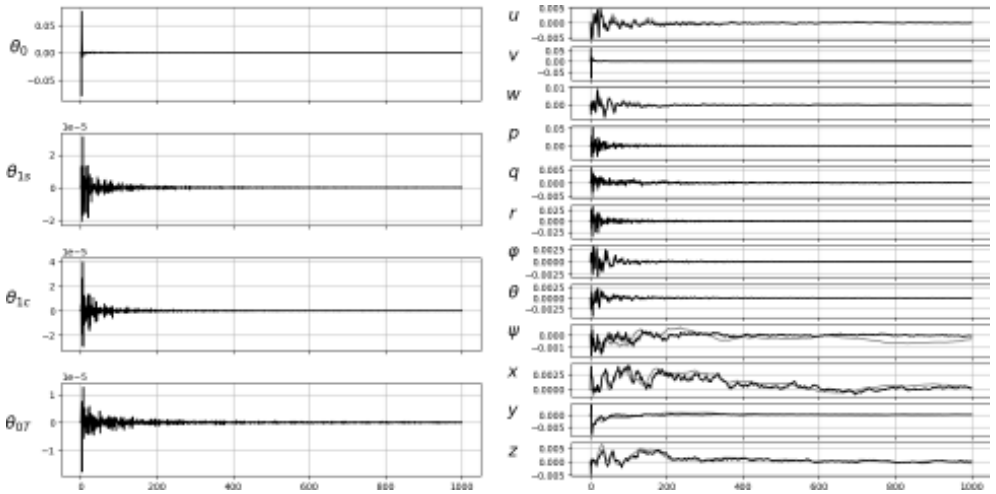


Рис. 1. Траектории вектора управления (слева), измерения (справа серым цветом) и оценки состояния (справа черным цветом)

Оценки состояния системы на каждом временном шаге строятся с применением кубатурного фильтра (Cubature Kalman Filter, CKF). Для этого каждый раз формируется набор кубатурных точек таким образом, что их среднее значение совпадает с текущей оценкой состояния, а их ковариационная матрица совпадает с текущей ковариационной матрицей ошибки оценки состояния. Таким образом, данный набор характеризует распределение состояния на текущем шаге. Значит, преобразования, производимые над этим набором, характеризуют изменение распределения состояния. Поэтому каждая кубатурная точка из набора подвергается нелинейному преобразованию, соответствующему системе уравнений динамики. Среднее значение полученного преобразованного набора является прогнозным значение состояния. Ковариационная матрица данного набора суммируется с ковариационной матрицей шумов модели. Полученная матрица является ковариационной матрицей ошибки прогноза состояния. Далее строится новый набор кубатурных точек на основе полученного прогноза состояния и ковариационной матрицы ошибки прогноза. Этот набор подвергается преобразованию, соответствующему уравнениям измерений. Полученный набор характеризует распределение измерения. Среднее значение данного набора является прогнозом измерения. Ковариационная матрица этого набора суммируется с ковариационной матрицей шумов измерений. Полученная матрица является ковариационной матрицей ошибки прогноза измерения. Все найденные матрицы и прогнозные значения используются для выполнения коррекции прогноза, т. е. получения оценки состояния на следующем шаге, а также для вычисления ковариационной матрицы ошибки оценки состояния на следующем шаге [6].

В работе проводилось исследование эффективности кубатурного фильтра на примере многоцелевого вертолета Westland Lynx. На рис. 1 представлен пример траекторий вектора управления измерения и оценки состояния. Было изучено влияние таких параметров, как значения ковариационных матриц шумов модели и измерений, а также размеры горизонтов прогнозирования и управления. Для сравнения был также рассмотрен расширенный фильтр Калмана (Extended Kalman Filter, EKF) [7].

1. *Padfield G. D.* Helicopter flight dynamic. The theory and application of flying qualities and simulation modelling. — Oxford: Blackwell Publishing, 2007.
2. *Abbeel P.*, *Coates A.*, *Ng A. Y.* Autonomous Helicopter Aerobatics through Apprenticeship Learning // The International Journal of Robotics Research. — 2010. — V. 29(13). — P. 1–31.
3. Gr*üne L.*, *Pannek J.* Nonlinear Model Predictive Control. Theory and Algorithms. — London: Springer-Verlag, 2011.
4. *Wang L.* Model predictive control system design and implementation using MATLAB. — Melbourne: Springer-Verlag, 2009.
5. *Kudryavtseva I. A.*, *Petrov K. S.* // MATEC Web of Conferences. — 2022. — V. 362. — 01012. — DOI: 10.1051/matecconf/202236201012.
6. *Arasaratnam I.*, *Haykin S.* Cubature Kalman Filters // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2009. — V. 54(6). — P. 1254–1269.
7. *Zhou W.*, *Liu L.* Adaptive Cubature Kalman Filter Based on the Expectation–Maximization Algorithm // IEEE Access. — 2019. — V. 7. — P. 158198–158206.
8. *Кудрявцева И. А.* Анализ эффективности расширенного фильтра Калмана, сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц // Научный вестник МГТУ ГА. — 2016. — Т. 224(2).

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

А. А. Лунева, С. Ю. Лунева

МАИ, Москва, Россия

На сегодняшний день развитие современной теории управления характеризуется активным внедрением методов, связанных с применением искусственного интеллекта, а также нечеткой логики. Нечеткая логика применяется для синтеза нечетких регуляторов, позволяющих с достаточной точностью аппроксимировать любые другие типы регуляторов.

Работа посвящена решению задачи параметрического синтеза оптимальной нечеткой системы управления с нечетким регулятором, представленным системой типа Такаги–Сугено. На вход системе поступают сведения о состоянии объекта управления и возможных внешних воздействиях и шумах, а выходом системы является управляющее воздействие. В работе предлагается в качестве выходных функций правил нечеткой системы использовать известные оптимальные линейные регуляторы.

Формализация и постановка задачи. Нечеткую систему типа Такаги–Сугено можно охарактеризовать расширенным блочным вектор-столбцом параметров $\gamma = \left[N_i, a_i^j, b_i^j, c_i^j | [p]\right]^T$, где N_i — количество функций принадлежности для каждой входной переменной системы, $a_i^j \le b_i^j \le c_i^j$ — координаты вершин и точек, лежащих в основании всех треугольных функций принадлежности, $p \in \mathbb{Z}$ — целочисленные значения, характеризующие номер выбранной выходной функции каждого правила.

Пусть известна математическая модель объекта управления и модель измерительной системы. Тогда можно вычислить значение функционала $I(x_0)$, характеризующего качество управления на отдельной траектории. Если предположить,

что множество начальных состояний представляет собой n-мерный параллелепипед, который можно разбить на элементарные n-мерные параллелепипеды, то критерий качества управления системой можно вычислить приблизительно: $J \cong \sum_i I(x_0^i)/\widetilde{M} \to \min_\gamma$, где $\widetilde{M}$ — количество элементарных параллелепипедов.

Требуется найти глобальный условный минимум целевой функции на множестве допустимых решений D, т. е. вектор параметров нечеткой системы $\gamma^* \in D$, обеспечивающий минимальное значение функционала J на всей области определения.

Помимо ограничений, накладываемых на модель объекта управления и модель измерительной системы, множество допустимых решений D содержит в себе ограничения, накладываемые на параметры нечеткой системы.

Для решения поставленной задачи в работе предлагается использовать модифицированный метод дифференциальной эволюции. Основные модификации алгоритма метода дифференциальной эволюции связаны с обработкой целочисленных значений, дополнительными проверками полученных в ходе мутации и кроссинговера генами особей, а также с методами обработки целочисленных значений.

Общий алгоритм решения задачи оптимизации параметров нечеткой системы, использующей линейные регуляторы.

1. Задать множество начальных состояний в виде n-мерного параллелепипеда и разбить его на элементарные n-мерные параллелепипеды.

2. Получить параметры выбранных оптимальных линейных регуляторов.

3. Применить модифицированный метод дифференциальной эволюции для минимизации функционала J по параметрам нечеткой системы γ. При вычислении значений функционала J для вектора-образца и вектора-мишени:

3.1. Для каждого элементарного n-мерного параллелепипеда вычислить критерий I для траектории, выпущенной из его центра. Траектории находятся при помощи моделирования полученной в результате применения метода дифференциальной эволюции нечеткой системы с параметрами вектора-образца и вектора-мишени.

3.2. Вычислить значение функционала J для полученных в п. 3.1 значений I.

4. Получить оптимальный вектор γ.

Применение алгоритма. Рассмотрим применение алгоритма для решения задачи стабилизации подводного аппарата. В качестве объекта управления рассматривается подводный аппарат, движущийся в вертикальной плоскости с постоянной продольной скоростью хода.

Математическая модель объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = a_{11} \cdot \omega + a_{12} \cdot \psi + b \cdot \delta + h \cdot d(t), \\ \dot{\psi} = \omega, \\ \dot{\delta} = u, \end{cases}$$

где $a_{11} = -0{,}1253$, $a_{12} = -0{,}004637$, $b = -0{,}002195$,

$$d(t) = \begin{cases} 10 \cdot (1 - \cos(2\pi(t)/20), & t \le 20, \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

— внешнее воздействие, $h = 0{,}01$ — интенсивность внешнего воздействия.

Модель объекта измерений задана линейным уравнением: $y(t) = \psi(t)$, заданы начальные условия. Требуется найти управление $u(t, x)$ и соответствующие ему траектории $x(t) = (\omega(t), \psi(t), \delta(t))^T$ движения подводного аппарата, обеспечивающие его приведение в горизонтальное положение для любых начальных условий из некоторого множества начальных состояний.

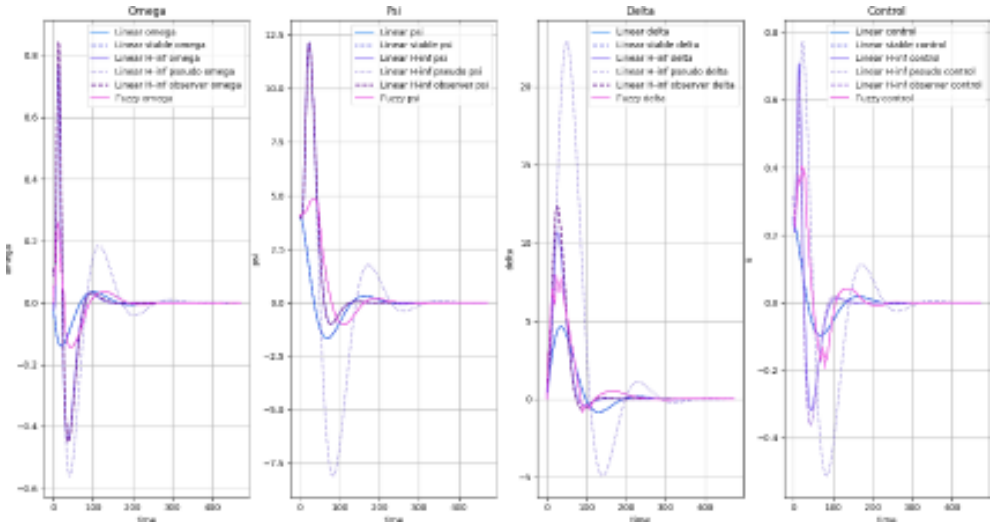


Рис. 1. Результаты моделирования для начальных условий $\omega(0) = 0$, $\psi(0) = 4$, $\delta(0) = 0$

Решение задачи с помощью нечеткого регулятора. Рассмотрим решение задачи для траекторий с начальными условиями $\omega(0) \in [-2; 2]$, $\psi(0) \in [-5; 5]$, $\delta(0) \in [-5; 5]$. После серии тестов, проведенных при помощи программной реализации алгоритма, для начальных условий $\omega(0) = 0$, $\psi(0) = 4$, $\delta(0) = 0$ с помощью полученной нечеткой системы, были получены результаты моделирования, приведенные на рис. 1.

Сравнение результатов моделирования показало, что полученная нечеткая система решает задачу о приведении подводного аппарата в горизонтальное положение, а траектории, полученные в результате моделирования оптимальной нечеткой системы, обладают достаточной гладкостью.

1. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / Пер. с англ. — 3-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 798 с.
2. *Lampinen J.*, *Zelinka I.* Mixed integer-discrete-continuous optimization by differential evolution // Proceedings of MENDEL'99, Brno, Czech Republic, 1999. — P. 71–76.
3. *Пантелеев А. В.*, *Скавинская Д. В.* Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. — М.: Вузовская книга, 2019. — С. 104–109.
4. *Пантелеев А. В.*, *Бортаковский А. С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2003. — 584 с.
5. *Веремей Е. И.* Линейные системы с обратной связью: Учеб. пособ. — СПб: Лань, 2013.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3D-КООРДИНАТ ДЛЯ СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННОГО МНОЖЕСТВА ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ СУПЕРПИКСЕЛЬ СЕГМЕНТАЦИИ И СТЕРЕОМЭТЧИНГА

М. Г. Мозеров, В. Н. Карнаухов

ИППИ РАН, Москва, Россия

Важным элементом движения роботизированных систем является определение позиции объекта в координатах, связанных со сценой, а также вектор собственного

движения автономного устройства в этой системе координат (матрица поворота и вектор смещения). Все эти параметры можно определить, если оценить значения 3D-координат облака точек сцены, связанных с координатной системой бортовой видео камеры автономного устройства. Проблема, как оценить значения 3D-координат облака точек сцены. Мы предлагаем определять искомые координаты точек с помощью стереомэтчинга и сегментации изображения на небольшие области называемые суперпикселями.

Стерео мэтчинг используется во многих приложениях и остается одной из самых сложных открытых проблем в компьютерном зрении [1, 2]. Самый распространенный способ решения проблемы стереосогласования: минимизация энергии. Решение должно сходиться к максимальной апостериорной вероятности (MAB) или к минимуму энергии функционала условного случайного поля, определенного над графом изображения, где пиксели или участки изображения (суперпиксели) являются вершинами, а попарные отношения между пикселями обычно кодируются ребрами графа [3]. Позднее стали применять глобальную модель связанности [4]. Прогресс в задаче плотного стереомэтчинга достиг небывалых результатов с применением нейросетевых технологий и глубокого обучения [5]. Такая технология требует специального оборудования и серьезных вычислительных возможностей. Кроме того, в нашей задаче не требуется плотного стереомэтчинга, а предложенная в этой статье схема вычислений достигает тех же результатов, что и state-of-the-art методы глубокого обучения.

В этой работе мы используем один из самых популярных локальных признаков мэтчинга на изображениях: сенсус-признак. Когда окрестности точки на изображении 8×8 ставится в соответствие некоторый 64-битный бинарный вектор. Вычислительные преимущества такого признака очевидны: вместо сравнения двух окрестностей на разных изображениях, нам достаточно сравнить два битовых слова по метрике Хемминга. По сравнению с прямым мэтчингом двух окрестностей сенсус-признак не зависит от изменения освещенности на правом и левом изображениях стереопары. Также сенсус-признак более робастен по сравнению с полным значением сигнала и на границах областей с разными диспатностями.

Тем не менее, результат стереомэтчинга, основанный на поточечной функции рассогласования очень неточный. Поэтому предлагается находить значение диспаратности на основе интегральной функции рассогласования, когда поточечные функции рассогласования суммируются в окрестности сегмента суперпикселя [6]

$$C(\mathbf{P}(s), d) = \sum_{\mathbf{p} \in s} c(\mathbf{p}, d). \tag{1}$$

И тогда значение диспаратности в точке центра сегмента $\mathbf{P_s}$ вычисляется как:

$$d(\mathbf{P}_s) = \underset{d}{\operatorname{argmin}}\{C(\mathbf{P}(s), d)\}. \tag{2}$$

Использование интегральной функции рассогласования значительно улучшает точность оценки диспаратности (а значит и вычисления значения глубины 3D-точек облака). Однако результаты сравнения с самыми лучшими методами не позволяют говорить об state-of-the-art уровне нашего метода.

Относительно плохие результаты можно объяснить наличием «выбросов» — точек, где по причине окклюзий или слабой текстуры определить точное значение диспаратности просто невозможно. Так как для получения вектора собственного движения системы, связанной с камерой, не столь важно, сколько точек в облаке —

1000 или 300, но более важна точность определения координат, то имеет смысл исключить из множества точек облака те, для которых определение диспаратности недостоверно. В этой работе нами предложен критерий выбраковки недостоверных точек из числа центров суперпиксель-сегментов, основанный на функции рассогласования между пикселями одного и того же изображения (обычно левого в стереопаре). Если минимум функции интегрального рассогласования в точке $\min_d\{C(\mathbf{p}^{I_L} \to \mathbf{q}^{I_R}, d)\} > C(\mathbf{p}^{I_L} \to \mathbf{q}^{I_L}, 1)$, то такая точка считается недостоверной. Подобный подход позволяет значительно увеличить точность оценки для всего облака в целом. Что и будет показано ниже в экспериментальной части.

Наш алгоритм и нейросетевой метод [5] решают разные проблемы. Однако наш достаточно простой и быстрый достигает таких же результатов, хотя нейросетевые технологии требуют гораздо больших вычислительных затрат и специального оборудования.

Таблица 1

Изображения	ArtL	Motorcycle	Piano	Pipes
MoCha [5]	**0,421**	**0,754**	0,570	1,02
Наш базовый	10,22	4,925	5,035	9,354
+ Фильтр	0,506	0,843	**0,524**	**0,945**
MoCha [5]	1,162	3,071	4,085	6,426
Наш базовый	27,83	19,08	22,81	25,83
+ Фильтр	**1,118**	**3,045**	**3,238**	**2,931**

В табл. 1 выше даны численные результаты сравнения реконструкции карты диспаратности различных методов с истинными значениями по критерию MAE (верхняя часть таблицы) и критерию превышения порога неточности 2 пикселей в процентах (нижняя часть таблицы). Анализируя результат, можно сказать, что предложенный в статье алгоритм в варианте выбраковки недостоверных значений + Фильтр значительно превосходит базовый и сравним с лучшим алгоритмом [5].

1. *Scharstein D.*, *Szeliski R.* A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms // International journal of computer vision. — 2002. — V. 47. — P. 7–42.
2. *Ershov E.*, *Karnaukhov V.*, *Mozerov M.* Probabilistic choice between symmetric disparities in motion stereo matching for a lateral navigation system // Optical Engineering. — 2016. — V. 55(2). — P. 023101–023101.
3. *Kolmogorov V.*, *Zabin R.* What energy functions can be minimized via graph cuts? // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. — 2004. — V. 26(2). — P. 147–159.
4. *Mozerov M. G.*, *Van De Weijer J.* One-view occlusion detection for stereo matching with a fully connected CRF model // IEEE Transactions on Image Processing. — 2019. — V. 28(6). — P. 2936–2947.
5. *Chen Z.*, *Long W.*, *Yao H.*, *Zhang Y.*, *Wang B.*, *Qin Y.*, *Wu J.* Mocha-stereo: Motif channel attention network for stereo matching // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 2024. — P. 27768–27777.
6. *Mozerov M. G.*, *Karnaukhov V. N.*, *Kober V. I.*, *Zimina L. V.* Accurate and Fast Geodesic Distance Calculation Algorithm for Superpixel Segmentation // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2023. — V. 68(Suppl. 2). — P. S254–S262.

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КУСОЧНО-ПРЯМОЛИНЕЙНОГО МАРШРУТА С n ПОВОРОТАМИ

В. Н. Нефедов, Г. К. Наседкин

МАИ, Москва, Россия

Рассматривается задача нахождения оптимального кусочно-прямолинейного маршрута, соединяющего заданные две точки $A, B \in \mathbb{R}^2$ с возможностью совершения $n \geq 1$ поворотов в некоторых точках $B^{(1)}, \ldots, B^{(n)} \in \mathbb{R}^2$ (угол каждого из которых ограничен по модулю сверху заданным числом $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$).

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A \neq B$, $\varphi \in (0, \pi)$. Введем в рассмотрение множество (здесь и всюду далее используем обозначения из [1])

$$\boldsymbol{S}(A, B, \varphi) = \big\{C \in \mathbb{R}^2 \backslash \{A, B\} \,|\, \angle(B - C, C - A) \in (-\varphi, \varphi)\big\}.$$

Если $\varphi \geq \pi$, то для удобства полагаем $\boldsymbol{S}(A, B, \varphi) = \mathbb{R}^2 \backslash \{A, B\}$. Кроме того, для любого $E \in \mathbb{R}^2$, где $E \neq (0, 0)$, в случае $\varphi \in (0, \pi/2)$ обозначим

$$\boldsymbol{C}(E, \varphi) = \{C \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \,|\, \angle(C, E) \in [-\varphi, \varphi]\}$$

— выпуклый конус.

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in (0, \pi)$, $n \geq 1$, $A = B^{(0)}$, $B = B^{(n+1)}$, $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}$, $B^{(n+1)}$ — последовательность точек из $\mathbb{R}^2$, $B^{(i)} \neq B^{(i+1)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$\boldsymbol{L} = [B^{(0)}, B^{(1)}] \cup [B^{(1)}, B^{(2)}] \cup \ldots \cup [B^{(n)}, B^{(n+1)}]$$

— ломаная, и при этом $\angle(B^{(i+1)} - B^{(i)}, B^{(i)} - B^{(i-1)}) \in [-\varphi, \varphi]$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда выполняется $B^{(1)}, \ldots, B^{(n)} \in \boldsymbol{S}(A, B, n\varphi)$.

Замечание 1. Пусть мы находимся в условиях утверждения 1. Тогда ломаная $\boldsymbol{L}$ существует $\forall B^{(1)} \in \boldsymbol{S}(A, B, n\varphi)$.

Обозначим $\boldsymbol{S}^{(n)}(A, B, \varphi)$ — множество всех возможных последовательностей $(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)})$ внутренних точек ломаной $\boldsymbol{L}$, удовлетворяющих условиям утверждения 1. Следствием утверждения 1, а также замечания 1 является

Утверждение 2. Пусть выполняются условия утверждения 1 и $\varphi \in (0, \pi/2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{(n)}(A, B, \varphi) = \boldsymbol{S}(A, B, n\varphi) \times \big\{\boldsymbol{S}(B^{(1)}, B, (n-1)\varphi) \cap [B^{(1)} + \boldsymbol{C}(B^{(1)} - A, \varphi)]\big\} \times \\ \times \big\{\boldsymbol{S}(B^{(2)}, B, (n-2)\varphi) \cap [B^{(2)} + \boldsymbol{C}(B^{(2)} - B^{(1)}, \varphi)]\big\} \times \cdots \times \\ \times \big\{\boldsymbol{S}(B^{(i)}, B, (n-i)\varphi) \cap [B^{(i)} + \boldsymbol{C}(B^{(i)} - B^{(i-1)}, \varphi)]\big\} \times \cdots \times \\ \times \big\{\boldsymbol{S}(B^{(n-1)}, B, \varphi) \cap [B^{(n-1)} + \boldsymbol{C}(B^{(n-1)} - B^{(n-2)}, \varphi)]\big\}. \quad (1)\end{aligned}$$

Отметим, что в приведенных рассуждениях не накладывалось никаких ограничений на точки $A, B, B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}$, определяющие ломаную $\boldsymbol{L}$. Между тем, возможны дополнительные ограничения и их может быть несколько. Одним из возможных ограничений является принадлежность точек $A, B, B^{(1)} \ldots, B^{(n)}$ некоторому допустимому множеству $\boldsymbol{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$. Желательно, чтобы это было множество с простой структурой, например, координатный параллелепипед вида

$$\boldsymbol{Q} = \{C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \alpha_i \leq c_i \leq \beta_i, i = 1, 2\}, \quad \alpha_i < \beta_i, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Кроме того, возможен дискретный случай, например,

$$\boldsymbol{Q} = \mathbb{Z}(N) = \{C = (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, i,\ j = 0, 1, \ldots, N\}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Многие дискретные множества простым линейным преобразованием приводятся к виду (3). Очевидно, что при наличии ограничения вида $A, B, B^{(1)}, \ldots, B^{(n)} \in \boldsymbol{Q}$ оно должно быть учитано в каждом члене прямого произведения (1), т. е. используем $\boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi) = \boldsymbol{S}^{(n)}(A, B, \varphi) \cap \boldsymbol{Q}^n$ вместо $\boldsymbol{S}^{(n)}(A, B, \varphi)$.

С учетом сказанного в случае конечного множества $\boldsymbol{Q}$ (например, при $\boldsymbol{Q} = \mathbb{Z}(N)$) при перечислении элементов множества $\boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$ понадобятся алгоритмы, позволяющие перечислять элементы конечных множеств вида

$$\boldsymbol{S}^{(n)}(B^{(i)}, B, \varphi) \cap [B^{(i)} + \boldsymbol{C}(B^{(i)} - B^{(i-1)}, \varphi)] \cap \boldsymbol{Q}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В непрерывном случае, например, в случае (2) для решения задачи оптимизации некоторой целевой функции на множестве $\boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$ понадобится его дискретизация, т. е. рассмотрение конечной аппроксимации $\boldsymbol{S}^{(\tau,n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$ этого множества, удовлетворяющей для некоторого достаточно малого $\tau > 0$ условиям

$$\boldsymbol{S}^{(\tau,n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi) \subset \boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi), h_m\big(\boldsymbol{S}^{(\tau,n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi), \boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)\big) \le \tau. \quad (4)$$

Следует отметить, что построение множества $\boldsymbol{S}^{(\tau,n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$, удовлетворяющего (4) является очень непростой задачей, трудность решения которой значительно возрастает при каждом увеличении на 1 числа n.

Используя конечные множества $\boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$ (в случае дискретного $\boldsymbol{Q}$) или $\boldsymbol{S}^{(\tau,n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$, можно далее рассматривать задачи оптимизации вида:

$$f(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}) \to \min; \quad (B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}) \in \boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi) \quad (5)$$

или

$$f(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}) \to \min; \quad (B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}) \in \boldsymbol{S}^{(\tau,n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi), \quad (6)$$

где $f(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)})$ — целевая функция, учитывающая затраты на движение вдоль ломаной $\boldsymbol{L}$, а также на совершение поворотов в точках $B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}$ (по аналогии с целевой функцией f в [1]). При этом в случае (5) получаем точное решение, а в случае (6) — приближенное.

Пусть выбраны две точки $A, B \in \boldsymbol{Q}$, $A \ne B$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, $\boldsymbol{Q}$ — конечное множество. Используя утверждение 2, опишем алгоритм перебора всех вохможных последовательностей точек $(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}) \in \boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$.

Ш а г 1. Положим $i = 1$ — номер поворота. Перебираем все точки

$$B^{(1)} \in \boldsymbol{S}(A, B, n\varphi) \cap \boldsymbol{Q}.$$

Ш а г 2. Если $i = n$, то конец работы алгоритма. Иначе присвоим $i := i + 1$. Для каждой выбранной точки на предыдущем шаге действуем следующим образом. Перебираем все точки $B^{(i)} \in \boldsymbol{S}(B^{(i-1)}, B, (n - i + 1)\varphi) \cap [B^{(i-1)} + \boldsymbol{C}(B^{(i-1)} - B^{(i-2)}, \varphi)] \cap \boldsymbol{Q}$ и переходим к началу шага 2.

Замечание 2. В ходе работы алгоритма осуществляется обход $\boldsymbol{S}^{(n)}(\boldsymbol{Q}, A, B, \varphi)$, в процессе которого очевидным образом может быть найдено значение глобального минимума в задаче (5), например, при $\boldsymbol{Q} = \mathbb{Z}(N)$. Определив это значение, можно, при вторичном обходе, найти множество всех оптимальных решений задачи (5).

1. *Нефедов В. Н., Свойкин Ф. В., Гарибян Б. А., Ряпухин А. В., Королько Н. С.* Методы аппроксимации двумерных множеств конечными множествами и их приложение к некоторым геометрическим задачам оптимизации // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. — 2025. — Т. 29, №1. — С. 129–157.

О МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ДЕКОМПОЗЦИИ

В. М. Подгорная

МАИ, Москва, Россия

Известно, что процедура построения множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных систем сводится к двум операциям: линейное преобразование множества ограничений и сумма по Минковскому [1]. Если изначально в задаче ограничения линейны, то построение множеств 0-управляемости сводится к вычислению суммы по Минковскому многогранников. Данная операция обладает значительной вычислительной сложностью, связанной со скоростью роста вершин исследуемых многогранников [2], с одной стороны, и со сложностью построения точного множества вершин, а не его оценки, с другой стороны [3]. Тем не менее, такая проблематика характерна только для задач высокой размерности. Если декомпозировать исходную систему на двумерные подсистемы, то для них соответствующие задачи могут быть решены значительно проще. Таким образом, целью данной работы является построение алгоритма сложения многогранников на плоскости, который может быть использован для моделирования множеств достижимости и 0-управляемости многомерных дискретных систем за счет декомпозиции.

Через $\operatorname{Ext}\mathcal{X}$ для произвольного выпуклого компакта $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n$ обозначено множество его крайних точек. Если $\mathcal{X}$ является многогранником, то согласно теореме Минковского множество вершин в точности совпадает с $\operatorname{Ext}\mathcal{X}$. Нормальным конусом $\mathcal{N}(x,\mathcal{X})\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ выпуклого и компактного множества $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n$ в точке $x\in\mathcal{X}$ называется множество всех векторов, опорных к $\mathcal{X}$ в x:

$$\mathbb{N}(x,\mathcal{X})=\{p\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\colon\langle p,x\rangle=\max_{\widetilde{x}\in\mathcal{X}}\langle p,\widetilde{x}\rangle\}.$$

Через $\operatorname{Arg}\colon\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to[0;2\pi)$ обозначено отображение, сопоставляющее любому $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ его аргумент в полярных координатах. Через $i_M\colon\mathbb{Z}\to\{1,\ldots,M\}$ обозначено для некоторого $M\in\mathbb{N}$ отображение $i_M=\min\{j\in\mathbb{N}\colon\exists k\in\mathbb{Z}\colon j=i+k\cdot M\}$.

Предполагается, что вершины рассматриваемых многогранников упорядочены по их аргументу. Для выпуклого многогранника $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^2$ выполнены условия

$$\operatorname{Ext}\mathcal{X}=\{x^1,\ldots,x^M\},\quad M\geq 2,\quad 0\in\mathcal{X}\backslash\operatorname{Ext}\mathcal{X},\quad \operatorname{Arg}(x^1)<\ldots<\operatorname{Arg}(x^M).\qquad(1)$$

Для многогранника $\mathcal{X}$, удовлетворяющего условиям (1), вводятся внешние нормали к граням следующим образом:

$$p^i=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}(x^{(i+1)_M}-x^i)=\begin{pmatrix}x_2^{(i+1)_M}-x_2^i\\x_1^i-x_1^{(i+1)_M}\end{pmatrix}.\qquad(2)$$

Лемма. *Пусть $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^2$ — выпуклый многогранник, удовлетворяющий условиям* (1). *Тогда*

1) *существует $i_0=\overline{1,M}$ такой, что $\operatorname{Arg}(p^{i_0})<\ldots<\operatorname{Arg}(p^{(i_0+M-1)_M})$;*

2) *для всех $i=\overline{1,M}$*

$$\mathbb{N}(x^i,\mathcal{X})=\begin{cases}\operatorname{cone}\{p^i,p^{(i-1)_M}\}\backslash\{0\}, & M>2,\\ \{p\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\colon\langle p,x^i\rangle\geq 0\}, & M=2.\end{cases}$$

Рассматриваются выпуклые многогранники $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию (1) и допускающие представление

$$\operatorname{Ext}\mathcal{X} = \{x^1, \ldots, x^M\}, \quad \operatorname{Ext}\mathcal{Y} = \{y^1, \ldots, y^N\}. \tag{3}$$

Решается задача алгоритмического построения $\operatorname{Ext}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})$.

Вводятся обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_j &= \left\{x \in \operatorname{Ext}\mathcal{X} \colon \operatorname{int}\left(\mathbb{N}(x, \mathcal{X}) \cap \mathbb{N}(y^j, \mathcal{Y})\right) \neq \varnothing\right\}, \quad j = \overline{1, N}, \\ \mathcal{Y}_i &= \left\{y \in \operatorname{Ext}\mathcal{Y} \colon \operatorname{int}\left(\mathbb{N}(y, \mathcal{Y}) \cap \mathbb{N}(x^i, \mathcal{X})\right) \neq \varnothing\right\}, \quad i = 1, M. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема. *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые многогранники, удовлетворяющие условиям* (1) *и* (3), *множества $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_M$ построены в соответствии с* (4), *$p^1_{\mathcal{X}}, \ldots, p^M_{\mathcal{X}}$ и $p^1_{\mathcal{Y}}, \ldots, p^N_{\mathcal{Y}}$ определены согласно* (2) *для $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. Тогда*

1) *верно представление* $\operatorname{Ext}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \cup_{i=1}^{M}(\mathcal{Y}_i + x^i)$;

2) *для всех $i = \overline{1, M}$ найдутся $j(i) = \overline{1, N}$ $l(i) = \overline{0, N-1}$ такие, что*

$$\mathcal{Y}_i = \left\{y^{j(i)}, \ldots, y^{(j(i)+l(i))_N}\right\};$$

3) *при этом*

$$j((i+1)_M) = \begin{cases} (j(i) + l(i) + 1)_N, & \operatorname{Arg}(p^i_{\mathcal{X}}) = \operatorname{Arg}\left(p^{(j(i)+l(i))_N}_{\mathcal{Y}}\right), \\ (j(i) + l(i))_N, & \operatorname{Arg}(p^i_{\mathcal{X}}) \neq \operatorname{Arg}(p^{(j(i)+l(i))_N}_{\mathcal{Y}}). \end{cases}$$

Сформулированная теорема позволяет построить следующий алгоритм вычисления $\operatorname{Ext}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})$:

Алгоритм.

1. Вычислить согласно (2) векторы $p^1_{\mathcal{X}}, \ldots, p^M_{\mathcal{X}}$, $p^1_{\mathcal{Y}}, \ldots, p^N_{\mathcal{Y}}$ и их аргументы $\operatorname{Arg}(p^i_{\mathcal{X}}), \ldots \operatorname{Arg}(p^M_{\mathcal{X}})$, $\operatorname{Arg}(p^i_{\mathcal{Y}}), \ldots \operatorname{Arg}(p^N_{\mathcal{Y}})$.
2. Положить $i = 1$, $\mathcal{V} = \varnothing$.
3. Путем перебора определить j_0 такой, что $y^{j_0} \in \mathcal{Y}_1$.
4. Присвоить j значение j_0.
5. Добавить $y^j + x^i$ в $\mathcal{V}$.
6. Если $y^{(j+1)_N} \in \mathcal{Y}_i$, то присвоить j значение $(j+1)_N$ и перейти к шагу 9.
7. Если $y^j \in \mathcal{Y}_{(j+1)_N}$, то присвоить i значение $(i+1)_M$ и перейти к шагу 9.
8. Иначе j присвоить значение $(j+1)_N$, i присвоить значение $(i+1)_M$ и перейти к шагу 9.
9. Если $j = j_0$ и $i = 1$, то завершить алгоритм. Иначе перейти к шагу 5.

Полученный алгоритм обладает линейной сложностью по количеству вершин складываемых многогранников. С другой стороны, его корректность обосновывается леммой и теоремой. Это позволяет данный алгоритм эффективно использовать на практике.

1. *Ibragimov D. N.*, *Novozhilin N. M.*, *Portseva E. Yu.* On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. — 2021. — V. 82, No. 12. — P. 2076–2096.
2. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. — Lausanne: EPFL, 2007.
3. *Ангелов Т. А.* Нахождение крайних точек суммы двух политопов // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1. Мат. Физ. — 2016. — Т. 37, №6. — С. 7–17.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А. М. Романенков[1,2]

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение смешанного типа. Пусть $u \in W^{2.2n}(\Omega)$, где $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ и

$$L_1^{2n_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_2^{2n_2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial u}{\partial t} + L_3^{2n_3}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u = F(x,t), \tag{1}$$

где операторы $L_j^{2n_j}(\partial/\partial x)$ — линейные дифференциальные операторы порядка $2n$, где $n = \max\limits_{j=1,2,3} n_j$, которые определяются соотношениями:

$$L_j^{2n}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \sum_{k=0}^{2n} p_{j,k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}, \quad p_{j,k} \in R.$$

На решение уравнения (1) поставлены краевые условия (2):

$${}^n\alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = \beta_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=l} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1, \tag{2}$$

и начальные условия (3):

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x). \tag{3}$$

При этом числа α_k, β_k не все равны нулю, и выполняются условия согласования на краях, а именно, условиям (2) удовлетворяют производные по переменной t от функции u и функции из начальных условий (3). Стоит отметить, что уравнение (1) можно рассматривать, как обобщенную математическую модель колебательных процессов самой различной природы, таких как колебания струны, упругой и двутавровой балок [1–3], фильтрация жидкости с конечной скоростью [4, 5], колебания движущихся материалов [6]). Пусть операторы $L_j^{2n}(\partial/\partial x)$ — симметричные, положительно определенные при $j = 1, 3$. Пусть оператор $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$ определяется константами

$$p_{1,r} = \begin{cases} 0, & r = 2k+1, \\ (-1)^k p_{2k}^2, & r = 2k. \end{cases}$$

Далее, введем на пространстве $W^{2.2n}(\Omega)$ новое скалярнot произведение:

$$[u, v] = \Big(L_1^{2n}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u, v\Big). \tag{4}$$

Показано, что норма, индуцированная скалярным произведением (4) мажарирует стандартную среднеквадратичную норму, т. е. $\|w\|_2^2 \le \sigma_l \|w\|_{L_1^{2n}}^2$, где $\|w\|_{L_1^{2n}}^2 = [w, w]$, $\sigma_l > 0$. Далее, поставим задачу оптимального управления. Имеем в распоряжении функцию $F(x,t)$, которая является правой частью уравнения (1). Пусть

$$\Phi := \big\{F(x,t) |\, \|F\|_2^2 < \infty\big\}.$$

Необходимо подобрать функцию $f \in \Phi$, которая доставляет минимум функционалу:

$$J(f) = \|u(x,T,f) - y_0(xc)\|_2^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(xc)\right\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{[0,l]\times[0,T]} f^2(x,t)\,dt\,dx, \quad (5)$$

где $y_0(xc)$, $y_1(xc)$ — заданные функции; ε, T — заданные положительные числа [1]. Другими словами, необходимо определить f такую, что к заданному моменту T решение задачи (1)–(3) приблизится к функции $y_0(xc)$, а производная решения по t приблизиться к $y_1(xc)$ в среднеквадратичной норме. Будем рассматривать другой функционал:

$$J_{L_1^{2n}}(f) = \|u(x,T,f) - y_0(xc)\|_{L_1^{2n}}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(xc)\right\|_{L_1^{2n}}^2 + C_\varepsilon \iint\limits_{[0,l]\times[0,T]} f^2(x,t)\,dt\,dx, \quad (6)$$

где C_ε — положительная постоянная, зависящая от ε. Установлено, что имеет место неравенство $J(f) \le \sigma_l J_{L_1^{2n}}(f)$. Отметим, что, если определим минимизирующую последовательность функций $f_m \in \Phi$: $\lim\limits_{m\to\infty} J_{L_1^{2n}}(f_m) = J_{L_1^{2n}}(f^*)$, то будет найден так называемый квазиоптимальный режим, так как минимизируется не исходный, а мажорирующий функционал (6). Пусть $\delta u = u(x,T,f+h) - u(x,T,f)$. Эта функция удовлетворяет уравнению (1) с правой частью $F(x,t) = h(x,t)$, с краевыми условиями (2) и нулевыми начальными условиями (3). Далее введем сопряженную задачу:

$$\delta u(x,t)\left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t) + L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)\right) + \psi(x,t)\cdot L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

где $\psi(x,t)$ — сопряженная функция, которая удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям при $t = T$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T) = -2\big(u(x,T,f) - y_0(xc)\big), \quad \psi(x,T) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(xc)\right). \quad (8)$$

Тогда выражение первой вариации функционала имеет вид

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \iint\limits_{[0,l]\times[0,T]} \big(\psi(x,t) + 2C_\varepsilon f(x,t)\big)h(x,t)\,dt\,dx + O\Big(\iint\limits_{[0,l]\times[0,T]} h^2(x,t)\,dt\,dx\Big). \quad (9)$$

1. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации: в 2-ч кн. Кн. 2. — Новое изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011. — 433 с.
2. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. — 562 с.
3. *Рудаков И. А.* Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2019. — №3(84).
4. *Кумыкова С. К.*, *Езаова А. Г.*, *Гучаева З. Х.* Задача со смещением для уравнения влагопереноса А. В. Лыкова // Современные наукоемкие технологии. — 2016. — №9-2. — С. 237–243.
5. *Геккиева С. Х.* Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова // Вест. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — №4(24).
6. *Banichuk N.*, *Jeronen J.*, *Neittaanm¨aki P.*, *Saksa T.*, *Tuovinen T.* Mechanics of Moving Materials // In Ser.: Solid Mechanics and its Applications. — Springer, 2014. — V. 207.

О РАСЧЕТЕ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ ОПТИЧЕСКОГО ПОТОКА В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО НАКЛОНА ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ КАМЕРЫ

К. В. Степанян, А. К. Попов, Б. М. Миллер, А. Б. Миллер

ИППИ РАН, Москва, Россия

При использовании дешевых средств ИНС возникают большие погрешности при решении задачи навигации. Кроме того, сигнал от спутниковых средств навигации может пропадать. В этих условиях получение информации о движении аппарата на основе видеоизображения с бортовой камеры является одним из наиболее перспективных средств навигации и управления беспилотными аппаратами [1].

В математической модели предполагается, что БПЛА летит над плоской поверхностью по известной траектории. На борту имеется жестко связанная с аппаратом камера, ориентированная в надир. Распределение освещенности на подстилающей поверхности считается известным и стационарным. Построение системы координат описано в работах [2–6].

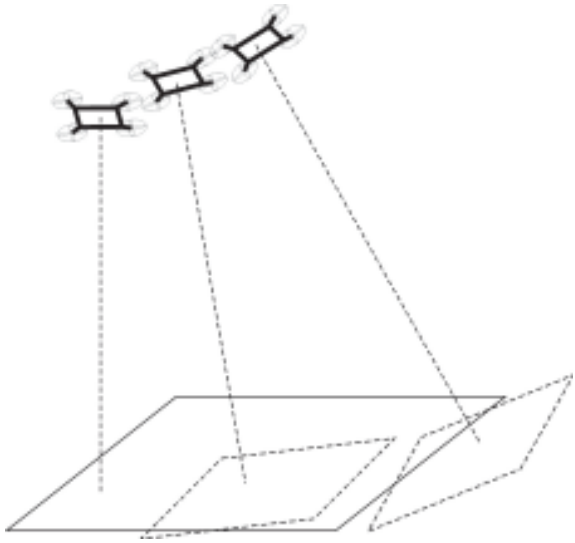


Рис. 1. Схематичное изображение коптера в трех разных положениях: параллельно подстилающей поверхности, с небольшим углом наклона оптической оси и с сильным наклоном. Для двух последних положений кроме направления оптической оси изображены воображаемые плоскости, для которых эти оси являются нормалями

Для БПЛА самолетного типа при высоте полета в десятки и сотни метров, предположение об ориентировании камеры в надир являются обоснованными, и ошибка в угле ориентации камеры не столь критична. Разницу между центром масс БПЛА и точкой крепления камеры также можно не учитывать без потери точности оценки. Для малых и микро-БПЛА эти предположения выполняются плохо. Так, например, квадрокоптер при движении в некотором направлении имеет сильный наклон продольной оси аппарата вдоль выбранного направления. Угол тангажа за время полета может изменяться в диапазоне десятков градусов (рис. 1). Для того, чтобы корректно учитывать такие большие отклонения углов, необходимо скорректировать модель.

Считаем известными текущее положение БПЛА и его ориентацию в пространстве. Камера жестко связана с аппаратом, а значит ориентация аппарата дает направление оптической оси, которая, в свою очередь, формирует матрицу поворота, зависящую от этих углов. Зная текущее положение аппарата и матрицу поворота, пересчитываем координаты центра каждого пикселя P' и используем измененный аналитический вид координат точки поверхности земли P, регистрируемой в точке изображения P' как координаты точки пересечения с плоскостью $z = 0$ оптического луча, проходящего через главную точку объектива.

По-прежнему справедлива связь для локальных скоростей смещения V_ξ, V_η в точке (ξ, η), находящейся в плоскости изображения:

$$\begin{pmatrix} V_\xi \\ V_\eta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x(\xi,\eta,t), \\ y=y(\xi,\eta,t)}},$$

где (x, y) — координаты точки на поверхности Земли, оптически сопряженной точке изображения (ξ, η), а зависимость от времени соответствует движению БПЛА и изменению его ориентации в пространстве. Формат материалов конференции не позволяет привести полные формулы в тексте. Примеры приводились в [3–6].

Очевидно, появляются дополнительные ограничения при углах близких к 90° или для крайних пикселей широкоугольных камер при значительно меньших углах. Разница между главной точкой объектива и центром масс аппарата сильно зависит от конкретного аппарата. На данный момент этот факт игнорируется, хотя механизм учета также приведен в цитируемых работах.

В докладе приводится сравнительный анализ результатов расчетов оценок скоростей на основе оптического потока (скоростей сдвига изображения (V_ξ, V_η)) при горизонтальном полете аппарата и при значительных углах тангажа, что характерно для коптеров.

1. *Степанян К. В.*, *Попов А. К.*, *Миллер А. Б.*, *Миллер Б. М.* Оптический поток в задачах навигации и управления беспилотными автономными средствами // Информационные процессы. — 2023. — Т. 23, №4. — С. 526–544.
2. *Миллер Б. М.*, *Степанян К. В.*, *Попов А. К.*, *Миллер А. Б.* Навигация БПЛА на основе последовательностей изображений, регистрируемых бортовой видеокамерой // Автоматика и телемеханика. — 2017. — Т. 12. — С. 141–153.
3. *Popov A.*, *Miller B.*, *Miller A.*, *Stepanyan K.* Optical Flow as a Navigation Means for UAVs with Opto-electronic Cameras // Proc. 56 Israel Annual Conf. Aerospace Sciences. Tel-Aviv and Haifa, Israel. March 9–10, 2016. — ThL2T5.2.
4. *Попов А. К.*, *Миллер Б. М.*, *Миллер А. Б.*, *Степанян К. В.* Application of the Optical Flow as a Navigation Sensor for UAV // Труды 39-й междисциплинарной школы-конференции «Информационные технологии и системы 2015», 7–11 сентября, Олимпийская деревня, Сочи, Россия. — С. 390–398.
5. *Popov A.*, *Miller A.*, *Miller B.*, *Stepanyan K.* Optical flow and inertial navigation system fusion in the UAV navigation // Conference on Unmanned/Unattended Sensors and Sensor Networks XII, September 26–29, Edinburgh, United Kingdom, 2016. Proceedings of SPIE (October 21, 2016). — V. 9986. — P. 998606-(1-16). — DOI: 10.1117/12.2241204.
6. *Popov A.*, *Miller A.*, *Miller B.*, *Stepanyan K.* Estimation of velocities via Optical Flow // Proc. SPIE 2016 10253, International Conference on Robotics and Machine Vision. Moscow, Russia, September 14, 2016. — P. 1025303.

ПРОГРАММНЫЙ КОНТРОЛЛЕР ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ РАБОТОЙ ВЭУ

С. В. Стрижак

ИСП РАН, Москва, Россия

За последние пять лет на территории России было введено в эксплуатацию более 20 новых ветропарков. Было запущено в работу более 500 ветроэлектрических установок (ВЭУ) разной мощности от 2,5 до 4,2 МВт. Одним из важных элементов ВЭУ является аппаратный контроллер, основанный в своей работе на нечеткой логике. Подобный контроллер обеспечивает необходимую реакцию на требуемые условия регулирования, независимо от метеорологических условий. Нечеткий контроллер является примером интеллектуальной системы, которая производит регулирующие действия, используя встроенные правила. Системы, основанные на нечеткой логике, оценивают пункты каждого правила, используя булеву логику. Итоговые правила представляют собой детерминистические действия, которые должны быть выполнены в процессе работы ВЭУ. В некоторых случаях требуется использовать несколько нечетких контроллеров для обеспечения регулирования различных параметров (ориентация гондолы, угол поворота лопасти, угловая скорость вращения ветроколеса, нагрузка на валу генератора — регулирование частоты и напряжения, длина лопасти). Таким образом, нужно согласовывать работу нескольких контроллеров [1].

В настоящее время в связи с решением задачи локализации компонентов ВЭУ одной из актуальных задач является разработка российских аппаратных контроллеров и необходимого программного обеспечения. Также одной из актуальных задач в области развития ветроэнергетики является разработка программных контроллеров. Это необходимо для оптимального управления работой ВЭУ и изучения различных режимов работы. Управление необходимо для поддержания нужной вырабатываемой мощности в зависимости от изменения скорости и направления ветра.

В современных ВЭУ используются два основных метода управления работой турбины: аэродинамическое регулирование и регулирование скорости ротора с помощью изменения момента генератора. С целью увеличения количества захватываемой энергии ветра и снижения системных нагрузок применяются такие методы, как изменение угла поворота лопасти, изменение скорости вращения ветроколеса и использование гибких лопастей.

Различные функциональные возможности управления работой ВЭУ, такие как отслеживание коэффициента скорости вращения генератора, управление крутящим моментом генератора, задание минимального шага перемещения лопасти, модель для оценки скорости ветра, алгоритм сглаживания при работе, близкой к номинальной, должны быть реализованы в программном контроллере для обеспечения современных функций работы.

В открытом программном контроллере ROSCO, реализованном на языках программирования Fortran и Python, доступны четыре метода управления крутящим моментом генератора с переменной скоростью [2, 3]. Для работы ниже номинала доступны два метода оптимальной выработки электроэнергии, а для работы выше номинала доступны два метода поддержания выходной мощности вблизи номинального значения турбины. При работе ниже номинала цель контроллера крутящего момента генератора — максимизировать выработку мощности. Модель оценки скорости ветра используется в подпрограммах контроллера крутящего момента генератора слежения и насыщения тона. Используемый модуль оценки скорости ветра основан на непрерывно-дискретном расширенном фильтре Калмана [4].

В контроллере ROSCO используются четыре фильтра нижних частот первого и второго порядка, фильтр верхних частот первого порядка и полосно-заграждающий фильтр.

Для разработки системы управления реализована модель первого порядка для ВЭУ [5]. Исследуемая система уравнений включает в себя уравнения для расчета угловой скорости вращения генератора, величины аэродинамического момента, значений коэффициентов усиления регулятора крутящего момента и шага поворота лопасти, уравнение для пропорционально-интегрально-дифференцирующего регулятора — PID (устройство в управляющем контуре с обратной связью). Регулятор PID изменяет крутящий момент генератора для поддержания определенной минимальной скорости вращения ротора и лопасти настраиваются на минимально допустимый угол поворота лопасти или угол атаки (рис. 1).

Рис. 1. Блок-схема замкнутой системы, используемой для настройки контроллера ROSCO в режиме работы выше номинала. Блоки $C(s)$ и $G(s)$ представляют передаточные функции регулятора

Также в общей модели ROSCO используется математическая модель линеаризации для нелинейной системы в некоторой номинальной рабочей точки с устойчивым состоянием. Специальный тематический решатель CCBlade, основанный на теории импульса элемента лопасти, используется для расчета необходимых коэффициентов мощности, тяги, момента C_p, C_t, C_q.

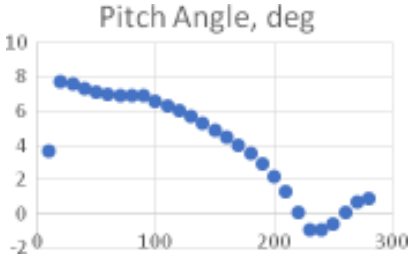


Рис. 2. Угол поворота лопасти ВЭУ

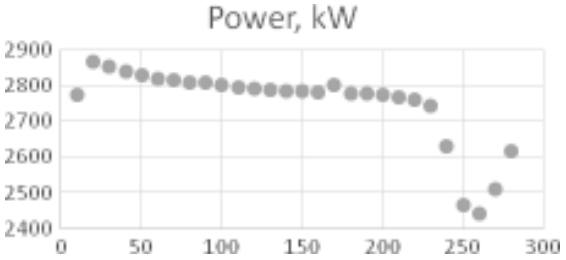


Рис. 3. Значение мощности ВЭУ в кВт

В данной работе в качестве примера была рассмотрена задача управления работой ВЭУ с мощностью $P = 2{,}8$ МВт. Для этого были использованы технические данные для модели ВЭУ NREL-2p8-127 для настройки конфигурационного файла в формате YAML. В результате работы программного контролера были получены графики для изменения угла поворота лопасти (рис. 2), угловой скорости вращения ротора, предсказанной скорости ветра и вырабатываемой мощности ВЭУ (рис. 3) для интервала времени в 300 с. В дальнейшем планируется провести работу по настройке программного контроллера ROSCO для работающих ВЭУ в составе действующих российских ветропарков на территории Ростовской области по имеющимся данным АСУТП.

1. *Удалов С. Н.* Возобновляемые источники энергии: учебное пособие. — 3-е изд. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014 — 459 с.

2. *Abbas N. J.*, *Zalkind D. S.*, *Pao L.*, *Wright A.* A reference open-source controller for fixed and floating offshore wind turbines // Wind Energ. Sci. — 2022. — V. 7. — P. 53–73. — DOI: 10.5194/wes-7-53-2022.
3. NREL: ROSCO, Version 2.9.7, GitHub [code]. — URL: `https://github.com/NREL/ROSCO` (last access: 16 May 2025), 2025.
4. *Брантон С. Л.*, *Куц Дж. Н.* Анализ данных в науке и технике. — М.: ДМК Пресс, 2021. — 542 с.
5. *Pao L. Y.*, *Johnson K. E.* Control of wind turbines // IEEE Contr. Syst. Mag. — 2011. — V. 31. — P. 44–62.

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ, С УЧЕТОМ ВЫБОРА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ

***В. Ю. Строганов*[1], *И. С. Белашова*[2]**

[1]*МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

Достаточно актуальной проблемой при реализации имитационных экспериментов на имитационных моделях сложных динамических систем является получение оценок средних значений стационарного процесса, задаваемого моделью с учетом переходного режима случайного процесса при фиксации начальных условий моделирования. При этом необходимо проводить исследования по: влиянию выбранных начальных условий; выбору интервала моделирования; интервала сброса статистики для снижения смещения среднеинтегральной оценки. Данные задачи решаются по отдельности в работах [1, 4], где формируются аналитические модели непосредственно статистических оценок. В данной статье данная задача решается на основе формирования аналитической модели нестационарного процесса с последующим исследованием его среднеинтегральных оценок при различных условиях моделирования.

В качестве базовой модели таких случайных процессов в статье предлагается использовать нормальные стационарные процессы [2, 3], или гауссовские. Естественно, что при фиксированных начальных условиях данный процесс уже не будет стационарным. Однако, он будет представлять достаточно адекватную модель условно-нестационарного процесса, который остаточно часто встречается в практике имитационного моделирования.

Предположим, что вектор $S = (S_0, S_{-1}, \ldots, S_{-m})^T$ задает фиксированные значения процесса $\xi(t)$ в заданные моменты времени $\mathrm{St} = \langle t_0, t_{-1}, \ldots, t_{-m}\rangle$, $(t_0 > t_{-1} > > \ldots > t_{-m})$. Представим фрагмент процесса, заданный на заданном наборе значений St в виде некоторого другого процесса θ. Корреляционные характеристики выборочных значений данного процесса можно получить с помощью теоремы нормальной корреляции. В данной ситуации математическое ожидание этого нового условно нестационарного процесса будет определяться соотношением

$$M\{\xi \mid S\}(t) = M\xi + D_{\xi\theta}(t) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot (S - MS) = y + D_{\xi\theta}(t) D_{\theta\theta}^{-1} \cdot (S - yE), \qquad (1)$$

где y — среднее значение исходного процесса; E — вектор, состоящий из $(m+1)$ единиц.

Ковариационная функция нестационарного процесса в данной ситуации будет определяется как

$$R(t,u) = r(|t-u|) - D_{\xi\theta}(t) \cdot D_{\theta\theta}^{-1} \cdot D_{\xi\theta}^{T}(u) \quad (t \geq t_1, u \geq t_1), \qquad (2)$$

где $D_{\xi\theta}(t) = (r(t-t_0), r(t-t_{-1}), \ldots, r(t-t_{-m}))$, определяет вектор ковариаций предыстории процесса и будущего, $D_{\theta\theta} = ||\mathrm{cov}(\xi(t_i), \xi(t_j))|| = ||r(t_i - t_j)||$, $i, j = 0 \ldots -m$, соответствует ковариациям предыстории исходного процесса в соответствующие моменты времени, а $r(t)$ представляет автокорреляцию исходного процесса.

Для параметров автоковариационной функции процесса будем использовать свертку ковариации к двум параметрам $\mathrm{Cv} = (c_1, c_2)$, в результате чего для малых значений $|c_1 - c_2|$ будем получать процессы с запаздыванием, для больших $|c_1 - c_2|$ — без запаздывания, если $\min(c_1, c_2)$ — мало ($< 0{,}2$), то сильнокоррелированные процессы и при значительном $\min(c_1, c_2)$ ($> 0{,}5$) — слабокоррелированные.

Как математическое ожидание, так и дисперсия условного процесса существенно зависит от коррелированности исходного процесса (стационарного), а также начальных условий моделирования (рис. 1).

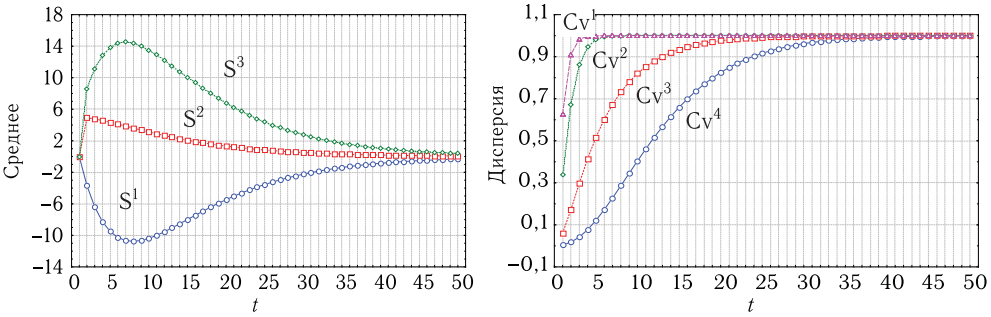


Рис. 1. Тренд и дисперсия условно нестационарного случайного процесса

В результате анализа зависимостей получено, что дисперсия условно нестационарного процесса в общем случае совсем не зависит от начального состояния процесса, а характеризуется лишь коррелированностью основного процесса. Чем выше коррелированность, тем медленнее сходимость. Начальные условия моделирования или начальное состояние случайного процесса сильно влияют на тренд условно нестационарного процесса. Чем больше различие начальных условий и стационарного значения, тем более длительно восстановление процесса.

В общем случае, среднеинтегральная оценка представляет стохастический интеграл случайного процесса $\zeta(T) = (1/T)\int_0^T \xi(t)\,dt$, который, естественно, имеет среднее значение, равное $M\zeta(T) = M(1/T)\int_0^T \xi(t)\,dt = (1/T)\int_0^T M\xi(t)\,dt$. Дисперсия данной среднеинтегральной оценки рассчитывается на основе интеграла ковариации процесса по заданной области исследования процесса, т. е. $D\zeta(T) = (1/T^2)\int_0^T \int_0^T R(t,u)\cdot dt\,du$. Подставляя значение ковариации нестационарного процесса в данный интеграл, получим

$$D\zeta(T) = \frac{1}{T^2}\cdot \int_0^T\int_0^T \left(r(|t-u|) - D_{\xi\theta}(t)\cdot D_{\theta\theta}^{-1}\cdot D_{\xi\theta}^{T}(u)\right)\cdot dt\,du. \qquad (3)$$

Далее в статье проведено исследование полученных интегральных зависимостей, как от значений коррелированности основного процесса, так и начальных условий моделирования для получения среднеинтегральной оценки стационарного процесса, а именно, тренда и дисперсии

$$M\zeta(T) = M_\zeta(T \mid \mathrm{St}, S, \mathrm{Cv}), \quad D\zeta(T) = D_\zeta(T \mid \mathrm{St}, \mathrm{Cv}). \qquad (4)$$

Получены зависимости дисперсии оценки стационарного процесса (DY_S) и условно нестационарного процесса DY для различных параметров автокорреляции основного процесса. Следует отметить явно немонотонный характер дисперсии условно нестационарного процесса. На ранней стадии дисперсия мала, что объясняется незначительными вариациями процесса на коротком интервале. Далее дисперсия возрастает до некоторого максимума, после чего в силу эргодических свойств она сходится к нулю. Тренды условно нестационарных процессов также имеют немонотонный характер. Однако, кроме коррелированности основного процесса на него достаточно сильно влияют начальные условия моделирования.

Полученная модель нестационарного процесса позволяет также оценить необходимость сброса начального периода моделирования, который приводит к ее смещению. Можно выполнить расчет вероятности принятия оценкой значений из интервала в окрестности ее среднего значения, который близок к доверительному интервалу, а также получить другие свойства среднеинтегральной оценки нестационарного процесса, полезные при формировании планов экспериментов на имитационных моделях сложных динамических систем.

1. *Белашова И. С.*, *Строганов В. Ю.* Оценка показателей функционирования управляемой имитационной модели оптимизации параметров динамической системы // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023), 4–10 сентября 2023 г., Дивноморское, Краснодарский край. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — С. 547–549.
2. *Босов А. Д.*, *Кальметьев Р. Ш.*, *Орлов Ю. Н.* Моделирование нестационарного временного ряда с заданными свойствами выборочного распределения // Математическое моделирование. — 2014. — №3. — С. 97–107.
3. *Ганцева Е. А.*, *Каладзе В. А.*, *Каладзе Г. А.* Динамические модели нестационарных случайных процессов // Вестник ВГТУ. — 2006. — Т. 2, №5. — С. 4–8.
4. *Строганов В. Ю.*, *Черненький В. М.* Анализ поведения алгоритмов поисковой оптимизации на моделях регенерирующих процессов сложных динамических систем // Динамика сложных систем XXI ВЕК — 2020. — №4. — С. 55–64.

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ВРАЩАТЕЛЬНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ*

Д. В. Шиманчук, А. С. Шмыров, В. А. Шмыров

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Перелеты в межпланетном пространстве Земли и полеты в окрестность коллинеарных точек либрации системы Солнце–Земля уже давно имеют практическое значение в связи с проектами (ISEE-3, SOHO, WIND, ACE, Genesis и т.д.). При этом используются различные системы движителей для коррекции траектории и реализации управляемого движения. В работе рассматривается движение космического аппарата под действием сил светового давления.

Идея, использования солнечного паруса в окрестности точки либрации, была сформулирована в работе [1], а для его удержания в окрестности точки либрации — в работе [2]. В работе [1] было использовано линейное приближение уравнений круговой ограниченной задачи трех тел, в работе [2] исследованы возможности

*Исследование выполнено за счет проекта Санкт-Петербургского государственного университета, шифр проекта 121061000159-6.

использования изменения эффективной площади и ориентации солнечного паруса для задачи поддержания движения солнечного паруса на квази-периодической орбите. В работах [3–7] были рассмотрены проблемы маневрирования и удержания космического аппарата в окрестности инвариантного многообразия вблизи точки либрации, проведен анализ уравнений вращательно-поступательного движения космического аппарата. В этих работах были исследованы вопросы управляемого движения солнечного паруса и предложены законы управления орбитальным движением в форме обратных связей, которые обеспечивают удержание солнечного паруса в окрестности точки либрации.

Данное исследование связано с развитием подходов, изложенных в работах [3–7], в области управляемого поступательно-вращательного движения солнечного паруса. Строятся законы управления вращательным движением солнечного паруса для длительного пребывания вблизи точки либрации.

1. *Лукьянов С. С.* Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации круговой задачи трех тел с помощью светового давления // Космич. исслед. — 1981. — Т. 19, №4. — С. 518–527.
2. *Bookless J., McInnes C.* Control of lagrange point orbits using solar sail propulsion // Acta Astronautica. — 2008. — V. 62. — P. 159–170.
3. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // Письма в астрономический журнал. — 2020. — Т. 46, №3. — С. 193–200.
4. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Орбитальное маневрирование в окрестностях коллинеарных точек либрации с использованием сил светового давления // Письма в астрономический журнал. — 2021. — Т. 47, №10. — С. 733–742.
5. *Шиманчук Д. В.* Моделирование управляемого поступательно-вращательного движения небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. — 2017. — Т. 13, №2. — С. 147–167.
6. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Стабилизация орбитального движения солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации за счет изменения отражательной способности // Письма в астрономический журнал. — 2022. — Т. 48, №8. — С. 592–600.
7. *Шмыров А. С., Шмыров В. А., Шиманчук Д. В.* Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2025. — Т. 20(2). — С. 298–306.

УПРАВЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА*

Д. В. Шиманчук, А. С. Шмыров, В. А. Шмыров

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

За прошедшие десятилетия специалисты по небесной механике и теории управления разработали значительное количество исследовательских проектов, связанных с использованием коллинеарных точек либрации (точек Лагранжа) системы

*Работа выполнена при поддержке СПбГУ (шифр проекта 121061000159-6).

Солнце–Земля и системы Земля–Луна в задачах космической навигации. Также, уже в последние годы получены успехи в практическом применении технологий использования солнечного давления для космических маневров. Тем не менее, существует ряд трудностей технического характера, связанных с размещением и эксплуатацией солнечного паруса в космосе. Требуется разработка простых и эффективных методов контроля ориентации паруса. Этому вопросу посвящены монографии [1, 2]. Ряд публикаций затрагивает тему полетов космических аппаратов с использованием солнечного паруса вблизи точек либрации. Так, в статье [3] представлены исследования, основанные на линейном приближении уравнений круговой ограниченной задачи трех тел. Работа [4] посвящена использованию светового давления для регулировки расстояния между спутниками группы возле точки либрации L_2. В работе [5] рассмотрена проблема варьирования размеров паруса и его ориентации для удержания спутника вблизи условнопериодической орбиты вокруг точки либрации. В наших публикациях [6–8] рассматривается проблема коррекции траектории движения, спецификой которой является использование специальной функции фазовых переменных, рост модуля которой соответствует удалению от точки либрации.

Это исследование опирается на публикацию [9] и развивает идею использования отражательной способности солнечного паруса при фиксированной ориентации для длительного пребывания вблизи точки либрации. Предлагается закон изменения отражательной способности, обеспечивающий стабилизацию орбитального движения и как следствие, длительное пребывание вблизи точки либрации. Обсуждаются и используются возможности машинного обучения в реализации такого подхода к управлению солнечным парусом.

1. *Поляхова Е. Н.* Космический полет с солнечным парусом. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 320 с.
2. *McInnes C. R.* Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications. Springer–Praxis Series in Space Science and Technology. — Berlin; London; Springer Publ., 1999. — 296 p.
3. *Лукьянов С. С.* Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации круговой задачи трех тел с помощью сил светового давления // Космические исследования. — 1981. — Т. 19, №4. — С. 518–527.
4. *Назиров Р. Р., Эйсмонт Н. А., Чумаченко Е. Н., Данхэм Д. У., Логашина И. В., Федоренко А. Н.* Управление группировкой космических аппаратов в окрестности Солнечно-Земных коллинеарных точек либрации с помощью солнечного паруса // Вестник машиностроения. — 2013. — №2. — С. 43–46.
5. *Bookless J., McInnes C.* Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion // Acta Astronautica. — 2008. — V. 62. — P. 159–176.
6. *Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A.* Controlled motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point // Astronomy Letters. — 2020. — V. 46, No. 3. — P. 185–192.
7. *Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A.* Orbital maneuvering in the vicinity of collinear libration points using light pressure forces // Astronomy Letters. — 2021. — V. 47, No. 10. — P. 710–719.
8. *Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A.* Stabilization of the orbital motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point through a change in reflectivity // Astronomy Letters. — 2022. — V. 48, No. 8. — P. 469–477.
9. *Шмыров А. С., Шмыров В. А., Шиманчук Д. В.* Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2025. — Т. 20(2). — С. 298–306.

Секция Н **АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ПРОБЛЕМЫ СОЗДАНИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИИ АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ**

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ УВОДА ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА ПЛАЗМЕННЫМИ ПОТОКАМИ

***В. К. Абгарян*[1], *М. В. Абгарян*[2], *А. В. Мельников*[1], *А. И. Могулкин*[1], *В. В. Свотина*[1]**

[1]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Россия, Москва*

Засорение околоземного космического пространства отработавшими объектами космической техники представляет собой техногенную угрозу осуществления космической деятельности. Поэтому актуальными являются разработки технологий очистки коммерческих орбит от объектов космического мусора (ОКМ). Наиболее реализуемые технологии предполагают использование сервисного космического аппарата (СКА), который сближается с ОКМ и осуществляет какое-либо воздействие на него. Технология Ion Shepherd (ионный пастух) [1] предполагает применение плазменного пучка, генерируемого ионным источником (ИИ), установленным на СКА. Оценки показывают, что для увода ОКМ с массой от 0,5 до 5 тонн с геостационарной орбиты (ГСО), используемой в коммерческих целях, на орбиту захоронения (+300 км по высоте орбиты) достаточно одного ИИ мощностью около 3 кВт с диаметром ионного пучка 15 см и энергией ионов 3 кэВ при работе на ксеноне. Увод с орбиты ОКМ массой до 5 тонн будет осуществляться за приемлемое время порядка десятка суток при его непрерывном облучении пучком. Применение ИИ обусловлено возможностью получения удельного импульса более 3000 с, при малой начальной расходимости пучка. Такого импульса достаточно для сообщения ОКМ характеристической скорости более 11 м/с, необходимой для перевода на орбиту захоронения за указанное время облучения.

Основная проблема в данной технологии связана с расширением плазменного пучка из-за амбиполярной диффузии. За счет этого происходит значительное увеличение угла расходимости пучка вдоль оси его распространения (вторая производная угла расходимости по длине положительная). Отметим, что безопасное расстояние между СКА и ОКМ составляет более 20 м, в то время как миделевое сечение ОКМ указанного диапазона масс составляет порядка 3–5 м. То есть необходимо обеспечить расходимость пучка на уровне не более 10°, чтобы эффективно облучать уводимый объект.

Повышение эффективности данной технологии предлагается обеспечить применением перезарядной камеры, устанавливаемой за выходным сечением ИИ с низкой начальной расходимостью пучка (рис. 1). Такая технология давно применяется в инжекторах высококоллимированных пучков легких нейтральных атомов, используемых в реакциях управляемого термоядерного синтеза.

В перезарядной камере пучок ионов преобразуется в поток нейтральных атомов вследствие известного процесса резонансной перезарядки ионов пучка на нейтральных атомах того же газа. Получаемой поток нейтральных атомов не подвержен амбиполярной диффузии, и поэтому будет сохранять исходную расходимость

пучка. Использование перезарядной камеры для технологии увода ОКМ было впервые предложено в НИИ ПМЭ МАИ [2].

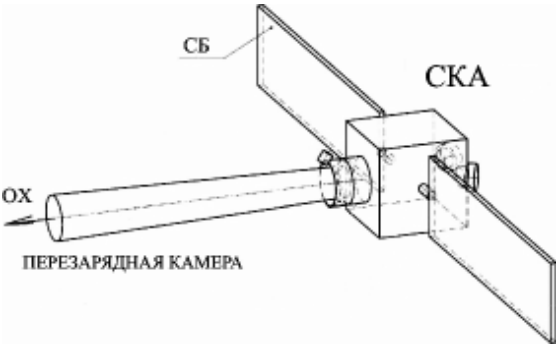


Рис. 1. Сервисный космический аппарат

Приведем оценочный расчет плотности нейтральных атомов n_a в перезарядной камере и температуры стенок камеры при использовании в качестве ИИ экспериментального образца высокочастотного источника ионов ВЧИИ-16 разработки НИИ ПМЭ МАИ [3]. Основные характеристики ВЧИИ-16 на рабочем режиме следующие: диаметр ионного пучка -16 см, ток пучка ионов — $I_0 = 0{,}3$ А, энергия ионов $E_0 = 3000$ эВ, массовый расход ксенона $m_{\text{Xe}} = 0{,}75$ мг/с.

При прохождении перезарядной камеры ионный ток пучка вследствие процесса перезарядки уменьшается с расстоянием x от среза источника следующим образом:

$$I_i = I_{i0} e^{-n_a \sigma_{\text{п}} x}, \tag{1}$$

где $\sigma_{\text{п}}$ — сечение резонансной перезарядки. Для ионов Xe^+ с энергиями $E_0 = 3000$ эВ сечение $\sigma_{\text{п}} \simeq 4 \cdot 10^{-19}$ м^2.

Положим, что при прохождении перезарядной камеры длиной L требуется, чтобы половина ионов пучка преобразовывалась в нейтральные атомы. Тогда, из (1) получаем, что требуемая плотность n_a равна:

$$n_a = \frac{\ln 2}{L\sigma_{\text{п}}}. \tag{2}$$

При длине перезарядной камеры $L = 1$ м необходимо, чтобы $n_a \simeq 1{,}7 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$. Отметим, что в разрядной камере ВЧИИ-16 характерное значение выше, $n_a \simeq 10^{19}$ м$^{-3}$.

Плотность n_a в значительной мере определяется температурой стенки перезарядной камеры T_w. Требуемое T_w можно оценить из баланса нейтральных атомов в перезарядной камере. На выходе из ВЧИИ-16 поток частиц включает в себя ионную компоненту пучка с $\dot{m}_i = 0{,}4$ мг/с и поток не ионизировавшихся в разрядной камере атомов ксенона с расходом $\dot{m}_a = 0{,}35$ мг/с. Атомы истекают через перезарядную камеру с площадью сечения F с тепловой скоростью V_{T}, которая определяется температурой ее стенки T_w. Балансовое уравнение нейтральных атомов в перезарядной камере можно записать следующим образом:

$$\frac{\dot{m}_a}{M_{\text{Xe}}} = \frac{n_a V}{4} F, \tag{3}$$

где M_{Xe} — масса атома ксенона, V — средняя по максвелловскому распределению тепловая скорость нейтральных атомов:

$$V = \sqrt{\frac{8kT_w}{\pi M_{\text{Xe}}}}. \tag{4}$$

В случае использования перезарядной камеры с внутренним диаметром 20 см, т. е. $F \simeq 0{,}03$ м^2 обеспечить перезарядку половины ионов пучка в атомы согласно уравнениям (3) и (4) можно только при температуре ее стенки не более $T_w \simeq 90$ К, что обеспечить в СКА орбите на крайне сложно. Решением данной проблемы может быть применение системы подачи дополнительного расхода рабочего газа в перезарядную камеру. Оценки показывают, что для рассматриваемой конфигурации ВЧИИ дополнительная подача в перезарядную камеру ксенона с расходом порядка 0,3 мг/с позволит получить требуемое указанное выше значение концентрации n_a уже при температуре стенки перезарядной камеры $T_w \simeq 300$ К, что вполне приемлемо для реализации в техническом плане.

1. *Bombardelli C.*, *Peláez J.* Ion Beam Shepherd for Contactless Space Debris Removal // Journal of Guidance, Control and Dynamics. — December 2010. — 9 p. — URL: `https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.51832`,
2. *Мельников А. В.*, *Могулкин А. И.*, *Обухов В. А.*, *Пейсахович О. Д.*, *Свотина В. В.*, *Покрышкин А. И.* Патент на изобретение №2784740. Космический аппарат для очистки околоземного пространства от космического мусора. Заявитель Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). №2022107213. Заявка 18.03.2022. Опубликован 29.11.22. Бюл. №34.
3. *Melnikov A. V.*, *Bogachev E. A.*, *Elakov A. B.*, *Mogulkin A. I.*, *Obukhov V. A.*, *Perminova Yu. S.*, *Peysakhovich O. D.*, *Pokrishkin A. I.*, *Svotina V. V.*, *Cherkasova M. V.* Computational and experimental study of an ion injector of a weakly divergent ion beam for implementing a method for removing space debris objects by an ion beam // Acta Astronautica. — 2023. — V. 204. — P. 815–825. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2022.12.026.

ВЧ-ИОННЫЙ ИСТОЧНИК ДЛЯ ТЕХНОЛОГИИ НАНЕСЕНИЯ ПОКРЫТИЙ

В. К. Абгарян, Р. В. Ахметжанов, Д. С. Демченко, А. В. Мельников, А. И. Могулкин, О. Д. Пейсахович

НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия

ВЧ-ионный источник с диаметром ионного пучка 200 мм с ВЧ-нейтрализатором разработан в НИИ ПМЭ МАИ и может быть использован для создания плазменных потоков с энергиями ионов до 1,5 кэВ. Ионные пучки используются для производства тяги в электроракетных двигателях малой тяги в космических аппаратах. В основном с помощью ионно-плазменных двигателей в настоящее время решаются задачи, связанные со стабилизацией и коррекцией орбит искусственных спутников Земли различного назначения. Также можно отметить уже имеющийся опыт использования плазменных двигателей в качестве элементов маршевых установок в известных миссиях в дальний космос, при полетах к астероидам и малым планетам.

В наземных технологиях ионно-плазменные потоки используются в промышленных установках по нанесению покрытий в том числе и многослойных. Можно отметить зарубежные установки по нанесению покрытий на оптические поверхности, предназначенные для применения в лазерных интерференционных зеркалах.

Особенности технологического процесса нанесения оксидных покрытий на подложки требует применения схемы индуктивного ВЧ-разряда плазмы как для собственно ионного источника, так и катода нейтрализатора, необходимого устройства, работающего в паре с собственно с ионным источником. Катод-нейтрализатор является необходимым элементом и используется в качестве источника электро-

нов, которые подаются в струю рабочего газа для компенсации положительного заряда ионов.

Выбор индуктивного ВЧ-разряда плазмы как для ионного источника и для ВЧ-нейтрализатора, используемого для компенсации положительного заряда ионного пучка, обусловлен также и невысокими требованиями к выбору и чистоте рабочего газа, а также возможностью работать в присутствии кислорода при нанесении окисных пленок [1].

Другой областью планируемого применения разрабатываемой связки ВЧ-ионный источник с ВЧ-нейтрализатором является микроэлектронная промышленность, а именно технологические процессы очистки и модификации поверхности изделий, ионно-лучевое и реактивное ионно-лучевое травление микроструктур.

Источники плазмы достаточно давно применяются в различных отраслях науки и техники [2, 3]. Они позволяют получать потоки высокоэнергичных частиц, которые можно использовать для создания или модификации функциональных слоев на поверхностях изделий [4–6]. Самыми распространенными способами нанесения тонких пленок являются ионно-ассистированное осаждение (IAD) и ионно-лучевое осаждение (IBD) [7–9]. В России в настоящее время функционируют несколько зарубежных промышленных установок, реализующих указанные технологические процессы.

В разработанном ВЧ-ионном источнике энергия ионов варьируется в диапазоне от 100 до 1500 эВ. Данный диапазон энергий ионов позволяет использовать данный ВЧ-ионный источник в технологии IBD, поскольку именно такие энергии ионов используются в данной технологии. В технологии IBD плазменный пучок бомбардирует поверхности мишени, при этом распыленный материал осаждается на подложку для формирования покрытий необходимого состава и толщины.

При нанесении оксидных покрытий попутно на подложку подается кислород в активированном состоянии, производимый дополнительным ассистирующим устройством, в котором также организуется плазменный разряд, как правило, того же индуктивного типа.

Ток ионного пучка ВЧ-ионного источника составляет около 1 А при энергии ионов 1000 эВ. Максимальная ВЧ-мощность, подаваемая ВЧ-генератором на индуктор, оставляет 1,5 кВт. Частота тока на индукторе варьируется от 0,8 до 2 МГц. Индуктор имеет водяное охлаждение. Суммарная потребляемая мощность ВЧ-ионного источника не превышает 3 кВт.

Потребляемая мощность в ВЧ-нейтрализаторе не превышает 1,5 кВт. Максимальная ВЧ-мощность, подаваемая ВЧ-генератором на индуктор ВЧ-нейтрализатора, составляет 0,5 кВт. Максимальный ток электронов из катода-нейтрализатора составляет 1,5 А, что вполне достаточно для компенсации положительных ионов основного пучка.

В ВЧ-ионном источнике и в ВЧ-нейтрализаторе для основного вида работ планируется использование ксенона, хотя в настоящее время разрабатываются модификации ионно-оптической системы ВЧ-ионного источника, позволяющие использовать качестве рабочего газа также аргон и криптон.

1. *Абгарян В. К.*, *Леб Х. В.*, *Обухов В. А.*, *Шкарбан И. И.* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2012. — Т. 8. — С. 70.
2. *Габович М. Д.* Физика и техника плазменных источников ионов. — М.: Атомиздат, 1972. — 304 с.
3. *Плешивцев Н. В.* Катодное распыление. — М.: Атомиздат, 1968. — 343 с.
4. *Ильин А. А.*, *Плихунов В. В.*, *Петров Л. М.*, *Спектор В. С.* Вакуумная ионно-плазменная обработка: Учеб. пособ. — М.: Альфа-М: ИНФРА-М, 2016. — 160 с.

5. *Kaufman H. R.* Technology of ion beam sources used in sputtering // J. of Vacuum Science and Technology. — 1978. — V. 15. — P. 2–7. — DOI: 10.1116/1.569569.
6. *Loeb H. W.*, *Freisinger J.*, *Groh K. H.*, *Scharmann A.* State-of-the-Art of the RF-Ion Thrusters and Their Applications, IAC-88-258 // 39 th IAF Congress, Bangalore, 1988.
7. *Bhumbra B. S.* Improvements in the wavelength stability of evaporated TiO_2/SiO_2 anti-reflection coatings by ion assistance // Journal of Vacuum Science & Technology B Microelectronics Processing and Phenomena. — 1995. — V. 13(3). — P. 881. — DOI: 10.1116/1.588200.
8. *Hu H.*, *Krupanidhi S. B.* Enhanced electrical properties of ferroelectric Pb(Zr0.5, Ti0.5)O_3 thin films grown with low-energy oxygen ion assistance // Journal of Applied Physics. — 1993. — V. 74(5). — P. 3373–3382. — DOI: 10.1063/1.354563.
9. *Martin P. J.*, *Bendavid A.*, *Swain M. V. et.al.* Mechanical and Optical Properties of The Films of Tantalum Oxide Deposited by Ion-Assisted Deposition // MRS Proceedings. — 1993. — V. 308. — DOI: 10.1557/proc-308-583.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ВИБРОУСКОРЕНИЙ ПРИ ТРЕКОВЫХ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ НОВЫХ ОБРАЗЦОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

***С. А. Астахов*[1,2], *В. И. Бирюков*[2,3], *И. А. Киселев*[2], *М. В. Бирюкова*[3]**

[1]*РАРАН, Москва, Россия;* [2]*ГкНИПАС имени Л. К. Сафронова, п. Белозерский, Московская обл., Россия;* [3]*МАИ, Москва, Россия*

При трековых испытаниях со скоростями применения новых изделий, превышающими 2–3 М, кроме аэродинамических сил на объект воздействуют случайные переменные ударные и периодические нагрузки, возникающие от контактных взаимодействий опор скольжения подвижного испытательного снаряжения, называемого кареткой, с рельсами. Каретки для монорельсовых испытаний состоят обычно из двух кронштейнов с приваренными опорами скольжения (башмаками) и, размещенных на них узлов крепления, связывающими их с ракетным двигателем твердого топлива. К переднему кронштейну крепится испытуемое изделие. Оно выносится вперед и закрепляется консольно для исключения воздействий на него при сверхзвуковых скоростях отраженных от рельсовой дорожки вторичных ударных волн. По мере разгона трековых кареток амплитуды виброускорений по направлениям осей X, Y, Z увеличиваются с различной закономерностью. Здесь подвижная координата X совпадает с направлением движения, а ось Y направлена вертикально вверх и координата Z отображает боковые перемещения. В статье рассматриваются основы анализа случайных сигналов, полученных автономными датчиками виброускорений — регистраторами, размещенными в башмаках каретки и в имитаторе объекта испытаний. Показано, что распределения случайных сигналов виброускорений всех датчиков подчиняются нормальному закону. Случайный процесс переменный по времени может быть представлен ансамблем идентичных случайных воздействий при фиксированных условиях. Для этого ансамбля могут быть определены вероятностные характеристики, например, вычислены относительные частоты, которые сходятся с вероятностью близкой к единице к соответствующим вероятностям из ансамбля, т. е. можно определить одномерную функцию распределения одномерной плотности вероятности $p(X, t)$. Для нестационарных процессов экспериментально наблюдаемые распределения вероятностей, определяющие случайный процесс характеризуют через математическое ожидание — $m[x(t)]$. Центральный момент второго порядка, характеризующий ансамбль

распределений нестационарных случайных величин, является дисперсией. Корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ также является центральным моментом и характеризует корреляцию между центрированными случайными величинами. Обозначим разность $\tau = t_2 - t_1$, тогда усреднение реализаций ансамбля имеет вид [1, 2]

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt. \tag{1}$$

Статистическая связь случайных величин $x(t)$ и $y(t)$ характеризуются совместной плотностью вероятности через корреляционную функцию ρ_{xy} [1, 2].

Преобразование Фурье для корреляционной функции в квазистационарном приближении позволяет получить спектральную плотность

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \tag{2}$$

Величина $S_x(\omega)\, d\omega$ представляет собой среднеквадратическое значение в бесконечно малой полосе комплексных экспонент, на которые может быть разложена случайная функция или спектральную плотность мощности $R_x(0)$. При испытаниях элементы трековых кареток подвергаются внешним воздействиям, имеющим случайный характер. Реакция конструкции на случайные импульсы, распределения которых подчиняются нормальному закону, для линейных систем имеет также нормальное распределение [1–6]. Определение корреляционной функции, а соответственно и спектральной плотности реакции элементов конструкции, по записям сигналов виброускорений датчиками, является достаточным для описания случайного процесса с нормальным распределением. Для линейных систем соблюдается принцип суперпозиции, т. е. сложения реакций большого числа независимых процессов, имеющих распределение значений близкое к гауссовой зависимости. Одномерная плотность вероятности сигнала линейной системы, подчиняющейся нормальному закону распределения, может быть представлена в следующем виде:

$$P(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1} e^{\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}. \tag{3}$$

Здесь $x_1 = x(t_1)$ — одномерное распределение значений; $m_1 = E[x_1]$ — математическое ожидание ансамбля; $\sigma_1^2 = E[x_1^2] - m_1^2$ — квадрат дисперсии распределения.

При ударных воздействиях конструктивные элементы каретки подвергаются линейным деформациям в пределах действия закона Гука, т. е. механическая линейная система является формирующим фильтром для спектральной плотности выхода сигналов в узкой полосе частот. Колебательные механические системы, не имеющие демпферов являются, как правило, слабо демпфируемыми. Реакции на внешние случайные воздействия таких конструкций являются узкополосными случайными гауссовыми процессами с нулевым средним значением. Такая реализация случайных сигналов, отображается синусоидальными колебаниями со случайно изменяющимися амплитудой и фазой. Средние по времени значения квадрата реакции для спектральной плотности сигналов слабо демпфированной системы, обладающей свойством фильтра, можно представить зависимостью

$$S_0 = \frac{2}{\pi} \varsigma \omega_n^3 E[x_1^2], \tag{4}$$

где ω_n — собственная частота недемпфированной колебательной системы, ς — коэффициент демпфирования системы, $E[x_1^2]$ — среднее значение квадрата реакции элемента конструкции (замеренных датчиками) на.внешние воздействия.

Учитывая, что среднее значение квадрата реакции слабо демпфированного фильтра определяется диапазоном частоты сигналов на входе попадающих внутрь спектра частоты фильтра

$$\omega_n(1-\varsigma) < \omega < \omega_n(1+\varsigma), \tag{5}$$

то спектральная плотность $S_0 = S_{\text{ср}}(\omega)$ равна среднему значению в полосе пропускания фильтра [2, 5]. В измерительной схеме датчиков размещаются аналоговые фильтры с определенной шириной пропускания сигналов. Чем выше добротность фильтра, а она обратно пропорциональна коэффициенту суммарного демпфирования $Q = 1/(2\varsigma)$, тем более точны измерения и вычисления спектральной плотности с одновременным увеличением временной реализации T [4, 5].

Для оценки реакции дискретной линейной инвариантной во времени (стационарной) динамической системы на нестационарные случайные входные воздействия применяются описание процессов заданием поведения их средних значений и корреляционной функции. Вероятностные свойства сигнала вибрации нельзя оценить по его среднему значению и корреляционной функции, если только форма закона его распределения не является заранее известной. Если случайная величина имеет нормальное распределение, то по ее среднему значению и корреляционной функции можно полностью вычислить закон распределения. Плотность вероятности $p(x)$ для процесса $x(t)$ определяется в интервале от x до $x + dx$ в момент времени t так [1–5]

$$p(x)\,d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)} \exp\left\{-\frac{(x - m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}\right\} dx. \tag{6}$$

Для анализа динамического состояния систем, обладающих более одной степени свободы, для координат и скоростей вводятся обобщенные координаты, а коэффициенты уравнений состояния представляются матрицами жесткости и коэффициентов демпфирования [1, 3, 6]. На основе Фурье преобразований для измеренных сигналов датчиков высокоскоростной установки получены спектральные характеристики: частотные спектры мощности (СМ), спектры плотности мощности (СПМ). Вейвлетным анализом с базисной функцией Морлет получены мгновенные амплитудно- частотные характеристики сигналов виброускорений измеренных датчиками для каждого момента времени движения каретки. Показано различие мгновенных максимальных амплитуд виброударных воздействий и частот резонансных откликов от осредненных значений определенных по фурье-преобразованиям.

1. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1962. — 879 с.
2. *Мирский Г. Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. — М.: Энергия, 1975. — 200 с.
3. *Бендат Дж.*, *Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 540 с.
4. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. — М.: Наука, 1989. — 175 с.
5. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.); Под ред. В. В. Болотина. — Т. 1. Колебания линейных систем. — 2-е изд. — М.: Машиностроение, 1990. — 504 с.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая динамика. — М.: Физматгиз, 1961.

СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ СМЕСИ ВОЗДУХА С ГЕЛИЕМ НА ДИНАМИКУ ДВИЖЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ТРЕКОВЫХ ИСПЫТАНИЯХ

С. А. Астахов[1,2]***, В. И. Бирюков***[2,3]***, И. А. Киселев***[2]***, М. В. Бирюкова***[3]

[1]*РАРАН, Москва, Россия;* [2]*ГкНИПАС имени Л. К. Сафронова, п. Белозерский, Московская обл., Россия;* [3]*МАИ, Москва, Россия*

Высокоскоростные трековые испытания современных летательных аппаратов различного типа и их элементов на скоростях применения и в условиях близких к натурным является альтернативой летным испытаниям. Трековые испытания более информативны и менее затратны [1, 2]. Испытуемое изделие при испытаниях с сверхвысокими скоростями компонуется в экспериментальную установку, содержащую один или несколько ракетных двигателей твердого топлива жестко связанными с опорами скольжения (башмаками) через передний и задний силовые кронштейны. Объект испытания размещается вынесенным вперед экспериментальной трековой установки (ЭУ) и закрепляется консольно [2, 3]. Одной из проблем, препятствующей достижению более высоких скоростей разгона ЭУ, является вибрация элементов конструкции иногда достигаемая недопустимых значений и возникающая динамическая неустойчивость движения установки. Причинами являются нестационарные аэродинамические воздействия при обтекании потоком воздуха элементов конструкции ЭУ и контактные взаимодействия башмаков с рельсами, имеющие виброударный характер. Дополнительным резервом для повышения скорости испытания некоторых изделий является способ изменения свойств окружающей среды путем создания смесей гелия с воздухом в специальном тоннеле. В данной работе приведены результаты теоретических исследований влияния различных концентраций гелия в смесях с воздухом на аэродинамические характеристики ЭУ, включая виброускорения элементов подвижного трекового снаряжения. На основе численного моделирования определена минимальная длина закрытого трекового тоннеля для достижения эффекта заметного прироста скорости ЭУ в измененной среде [4]. Учитывая высокую стоимость необходимых материалов, был создан закрытый коридор для монорельсовых испытаний ЭУ длиной 600 м. Реализован натурный эксперимент с измерением виброускорений датчиками, размещенными в башмаках и имитаторе объектов испытания. Обработка данных регистраторов накопителей, сохраненных после пуска, позволила установить, что:

— получен прирост скорости при разгоне ЭУ на ограниченном участке трека длиной 600 м за счет уменьшение плотности среды с измененными свойствами при сравнительно не высокой концентрации гелия;

— уровень максимальных амплитуд по направлению продольной оси X датчика виброускорений, размещенного в имитаторе объекта испытания, при разгоне трековой каретки в тоннеле не превышал $600g$ и в целом уменьшился на $100g$ по сравнению с движением ЭУ в воздухе;

— отмечено снижение вертикальной вибрации имитатора объекта испытаний при разгоне в тоннеле, влияние сказывается интегрально с учетом вязкости, плотности, скорости звука;

— влияние по данным боковых вибраций датчика имитатора значимо в снижении уровней амплитуд при росте скорости каретки на участке разгона, что важно в обеспечении траекторной устойчивости движения ЭУ.

1. *Vikrant Satya*, *Sandeep Malik*, *Subhash Chander*, *Sonu Devi*, *AC Sharma*. Rocket Sled Based High Speed Rail Track Test Facilities: A Review Shilpa Walia // Defence Science Journal. — March 2022. — V. 72, No. 2. — P. 182–194. — DOI: 10.14429/dsj.72.17014.
2. *Astakhov S. A.*, *Biryukov V. I.*, *Kiselev I. A.* Vibrational Dynamics of Rocket-Powered Vehicle in High-Speed Monorail Tests of Aircraft Components // Russian Engineering Research. — 2024. — V. 44, No. 8. — P. 1196–1201. — DOI: 10.3103/S1068798X24701776.
3. *Astakhov S. A.*, *Biryukov V. I.* Experimental Researches on the Conductivity of shock Impacts From Track Sled Supports to Products During Supersonic Test // Russian Engineering Research. — 2024. — V. 44, No. 5. — P. 691–696.
4. Flow Vision. Rukovodstvo polzovatelya [FlowVision. User manual]. — Moscow: OOO «TESIS». 1999–2021.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ РАКЕТНЫЕ ДВИГАТЕЛИ ДЛЯ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ, СОЗДАВАЕМЫЕ НИИ ПМЭ МАИ

Р. В. Ахметжанов, А. В. Богатый, Г. А. Дьяконов, В. Ким, Г. А. Попов, Е. А. Шилов

НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия

В НИИ ПМЭ МАИ активно ведутся работы по созданию электроракетных двигателей (ЭРД) и электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) для использования в составе систем управления движением космических аппаратов. Разработана линейка ЭРДУ на базе абляционных импульсных плазменных двигателей (АИПД) в диапазоне мощностей от 20 до 180 Вт. Также в НИИ ПМЭ МАИ ведутся работы по созданию ЭРДУ на базе высокочастотных ионных двигателей (ВЧИД), способных работать в широком диапазоне регулирования тяги, и холловских двигателей (ХД) мощностью от 150 до 1000 Вт.

На современном этапе развития космической техники для решения многих научных и прикладных задач в космосе предполагается использование малых космических аппаратов (МКА) массой от нескольких десятков до нескольких сотен килограммов. При этом, в целом ряде случаев, для управления их движением, возникает необходимость в применении двигательной установки (ДУ), сочетающей малую массу и потребляемую мощность с большим ресурсом и суммарным импульсом тяги. Этим требованиям в наибольшей степени соответствует ЭРДУ [1].

Для уровня мощности до 100 Вт одной из перспективных к применению является ЭРДУ на базе АИПД. Они достаточно просты по конструкции и надежны, эффективно работают при уровне мощности от единиц Вт до сотен Вт. Удельные характеристики данных двигателей в основном определяются энергией разряда и не зависят от потребляемой мощности [2]. НИИ ПМЭ МАИ ведет работы по исследованию и созданию АИПД с конца 80-х годов с учетом предыдущего накопленного опыта их изучения в МАИ в течение более 20 лет. Основное внимание уделяется совершенствованию рабочих процессов в разрядной камере двигателя и повышению его удельных характеристик. В НИИ ПМЭ МАИ в инициативном порядке, а также в кооперации с другими организациями космической отрасли разрабатывается линейка ЭРДУ на базе АИПД мощностью от 8 до 180 Вт [3], в том числе и ЭРДУ размерностью 1,5U и 4U для применения на МКА формата CubeSat.

В НИИ ПМЭ МАИ в последние годы ведутся работы по разработке, созданию и исследованию ВЧИД. В 2010 г. в МАИ при поддержке Министерства образования

и науки РФ была создана Лаборатория высокочастотных ионных двигателей [4]. За последующие годы был накоплен значительный опыт в области исследования ВЧИД с различными потребляемыми мощностями. В соответствии с постановлением Правительства РФ №218 в 2015 г. в НИИ ПМЭ МАИ совместно с АО КБХА был разработан, создан и испытан ВЧИД с номинальной мощностью 300 Вт, тягой 9 мН и удельным импульсом тяги 3800 с [5]. В 2017 г. в НИИ ПМЭ МАИ начались работы по созданию высокочастотного ионного двигателя ВЧИД-11 мощностью $\approx$ 400 Вт. Данный двигатель может использоваться для решения задач управления орбитальным движением МКА, включая коррекцию орбиты, довыведение и межорбитальные перелеты [6].

В настоящее время наблюдается рост интереса к использованию ЭРДУ на базе холловских двигателей (ХД) (также известных в России как стационарные плазменные двигатели) на МКА, функционирующих в том числе в составе многоспутниковых орбитальных группировок [1]. Работы по созданию стационарных плазменных двигателей ведутся в МАИ и в НИИ ПМЭ МАИ на протяжении десятилетий. Двигатели СПД, производимые АО «ОКБ «Факел», созданы при участии и под научным руководством НИИ ПМЭ МАИ [7]. Начиная с 2022 г. НИИ ПМЭ МАИ совместно с индустриальным партнером — ООО «Орбитек» — ведет работы по созданию холловского двигателя нового поколения с повышенным ресурсом НТ-1000 мощностью до 1000 Вт, способном использовать в качестве рабочего тела как ксенон, так и криптон [8]. Конструкция НТ-1000 адаптирована под серийное производство, не требующее высокой квалификации производственного персонала. Серийное производство двигателей НТ-1000 будет развернуто на мощностях ООО «Орбитек». Также НИИ ПМЭ МАИ в рамках Программы создания и развития центра НТИ на базе МФТИ, Физтех, по направлению («сквозной» технологии) Национальной технологической инициативы «Перспективные технологии для космических систем и сервисов» ведет работы по созданию ЭРДУ на базе холловского двигателя НТ-450 мощностью от 150 до 450 Вт.

В докладе представлены основные результаты НИИ ПМЭ МАИ в части создания АИПД, ВЧИД и ХД, а также ЭРДУ на их базе.

1. *Akhmetzhanov R.*, *Bogatyi A.*, *Derkachev A.*, *Dyakonov G.*, *Kim V.*, *Lyubinskaya N.*, *Merkuryev D.*, *Obukhov V.*, *Popov G.*, *Semenikhin S.* Development of electric propulsion thrusters for small spacecraft in RIAME MAI // Proceedings of the 69th International Astronautical Congress (IAC). — 2018.
2. *Дронь Н. М.*, *Кондратьев А. И.*, *Хитько А. В.*, *Хорольский П. Г.* Концепция использования электроракетных двигателей на микроспутниках // Авиационно-космическая техника и технология. — 2008. — №9(56).
3. *Антропов Н. Н.*, *Богатый А. В.*, *Дьяконов Г. А.*, *Любинская Н. В.*, *Попов Г. А.*, *Семенихин С. А.*, *Тютин В. К.*, *Хрусталев М. М.*, *Яковлев В. Н.* Новый этап развития абляционных импульсных плазменных двигателей в НИИ ПМЭ // Вестник ФГУП «НПО им. С. А. Лавочкина». — 2011. — №5. — С. 30–40.
4. *Леб Х. В.*, *Обухов В. А.*, *Попов Г. А.* Лаборатория высокочастотных двигателей Московского авиационного института — новая форма Российско-Германского сотрудничества // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. — Вып. 60.
5. *Antropov N. N.*, *Akhmetzhanov R. V.*, *Bogatyy A. V.*, *Grishin R. A.*, *Kozhevnikov V. V.*, *Plokhikh A. P.*, *Popov G. A.*, *Khartov S. A.* Experimental Research of Radio-Frequency Ion Thruster // Thermal Engineering. — December 2016. — V. 63, No. 13(1). — P. 957–963.
6. *Ахметжанов Р. В.*, *Деркачев А. Б.*, *Ельников Р. В.*, *Петухов В. Г.*, *Попов Г. А.* Применение электроракетной двигательной установки на базе высокочастотного ионного двигателя мощностью до 600 Вт для межпланетных космических аппаратов // Известия академии наук. Энергетика. — 2019. — №3. — С. 14–25.

7. *Ким В. П.*, *Попов Г. А.*, *Шилов Е. А.*, *Козубский К. Н.*, *Приданников С. Ю.* Разработка физико-технических основ повышения ресурса стационарных плазменных двигателей второго поколения // Космическая техника и технологии. — 2023. — №4(43). — С. 56–74.
8. Официальный сайт ООО «Орбитек» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https://orbitechnologies.com`.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ УСПЕШНОСТИ ПРОЦЕССА ПОСАДКИ ЛУННОГО ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНОГО КОМПЛЕКСА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ЛУННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Н. Бакулин[1,2]***, С. В. Борзых***[3]***, Р. С. Бычков***[3]

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия;*
[3]*РКК «Энергия», Королев, Московская обл., Россия*

Проведение исследований по освоению Луны предусмотрены в Федеральной космической программе РФ 2016–2025 гг. [1] и проекте Федеральной программы на 2026–2035 гг. исследование Луны занимает важное место. Посадка на поверхность Луны и движение по ней до полной остановки — это одна из ключевых операций, моделированию и экспериментальной отработке которой должно быть уделено должное внимание [1, 2].

Наземная экспериментальная отработка процесса посадки лунного взлетно-посадочного комплекса (ЛВПК) встречает ряд существенных трудностей — значительное отличие земной и лунной гравитации, необходимость адекватного воспроизведения освещенности и т. д. Важным фактором также является то, что при осуществлении посадки количество ситуаций, которые могут реализоваться, крайне велико. Это связано с разбросом кинематических параметров (углов ориентации ЛВПК в момент первого контакта с лунной поверхностью, компонент угловой скорости, вертикальной и боковой скорости центра масс ЛВПК), что обусловлено погрешностями системы управления спуском. Инерционные характеристики самого ЛВПК (масса, компоненты тензора инерции) также могут находиться в определенном диапазоне значений. Механические свойства грунта также могут отличаться в разных областях лунной поверхности. Экспериментальное воспроизведение такого числа ситуаций посадки нереалистично, в связи с чем подтвердить успешность посадки чисто экспериментальными методами представляется нереальной задачей. Поэтому основным методом подтверждения успешности процесса посадки являются расчетные исследования на базе математической моделей динамики процесса посадки и созданных на ее основе программных реализаций.

Моделированию процессов механической трансформации ракетно-космических конструкций, в том числе и процессу мягкой посадки, посвящен ряд работ авторов [3–9]. В рамках предложенного в этих работах подхода ЛВПК рассматривается как структурно сложная механическая система с внутренними связями, характер которых отражает конкретную возможную кинематическую схему посадочного устройства (ПУ).

Успешность процесса посадки определяется выполнением ряда ключевых критериев: непревышение перегрузкой предельных значений, устойчивости движения по поверхности до полной остановки (отсутствие опрокидывания), достаточности энергетики и рабочих ходов обжатия энергопоглотителей, входящих в состав ПУ, минимально необходимого клиренса. При одновременном выполнении указанных

критериев посадка считается успешной, при невыполнении хотя бы одного конкретный вариант посадки считается неуспешным.

В анализе успешности ключевым является способ задания начальных условий для расчета. Опыт показывает, что попытка априорно задать самое неблагоприятное сочетание начальных условий и выбирать необходимые параметры ПУ на основании расчета по такому варианту непродуктивна. Во-первых, сам такой выбор проблематичен, так как для разных критериев успешности наиболее неблагоприятными могут быть разные случаи. Во-вторых, вероятность реализации «самого неблагоприятного» случая исчезающе мала, и ПУ, созданное на основании расчета по такому варианту, будет неоптимально по массе. В связи с этим при анализе успешности процесса мягкой посадки используется вероятностный подход, заключающийся в следующем.

Решается статистическая задача, в которой в качестве случайного дискретного события рассматривался факт неблагоприятного исхода посадки, который может иметь место с некоторой постоянной вероятностью при осуществлении n независимых испытаний. В данном случае таким n испытаниям соответствует количество отдельных расчетов процесса посадки, при которых значения исходных параметров, имеющих отклонение случайного характера, задаются независимо датчиками случайных чисел, а остальные параметры неизменны. Для каждого параметра (скорости, ориентации и т. д.) задавался равномерный закон распределения в диапазоне штатных начальных условий.

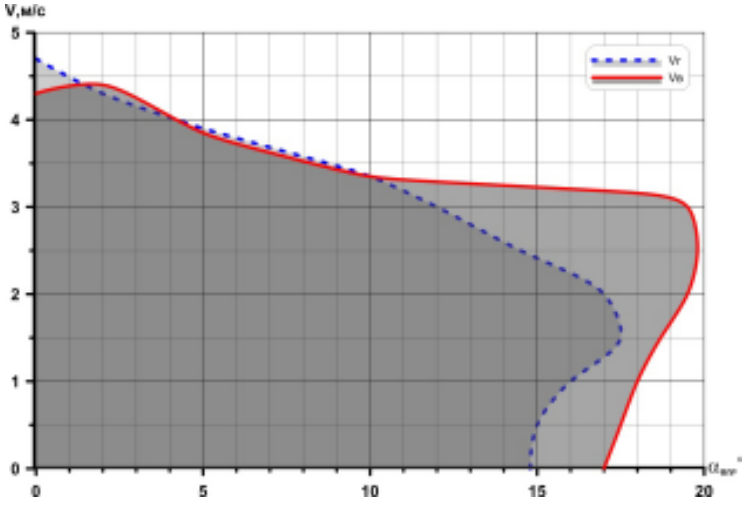


Рис. 1. Области устойчивости лунного взлетно-посадочного комплекса

В качестве иллюстрации возможностей подхода на рис. 1 представлены области устойчивости посадки в параметрах вертикальной и горизонтальной компонент скорости центра масс ЛВПК и угла уклона посадочной поверхности.

1. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.*, *Bychkov R. S.* Simulating the Process of Transforming the Supports of the Mechanical Landing Device of the Lunar Lander during the Contact Phase with the Surface // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2025. — V. 54, No. 3. — P. 223–230. — DOI: 10.1134/S1052618825700086.
2. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.*, *Voronin V. V.* Space vehicle landing dynamics at failure of landing gear. Flight Dynamics and Control of Flight Vehicles // Russian Aeronautics. — 2016. — V. 59, No. 1. — P. 23–28.

3. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* An Approach for Building Dynamic Models of the Process of Disclosure of Transformable Space Structures // Doklady Physics. — 2021. — V. 66, No. 8. — P. 243–248.
4. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Analytical Estimates of The Movement and Elastic Vibrations of The Structures of Separated Fairings Doors of Rocket and Space Systems // Doklady Physics. — 2021. — V. 66, No. 5. — P. 134–138.
5. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Development of an Approach to the Formation of Dynamic Models of the Process Of Disclosure of Transformable Space Structures // Russian Aeronautics. — 2022. — V. 65, No. 1. — P. 49–56.
6. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Dynamic Model of the Separation of Large-Sized Elastic Structures // Doklady Physics. — 2023. — V. 68, No. 6. — P. 190–194. — DOI: 10.1134/S1028335823050026.
7. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.* Modeling of the Deployment Process Dynamics for Large-Sized Transformable Space Structures // Russian Aeronautics. — 2020. — V. 63, No. 4. — P. 610–617.
8. *Bakulin V. N.*, *Borzykh S. V.*, *Tereshina K. V.* Analytical Estimates of the Fairing Flaps Separation Dynamics of the Rocket and Space Systems // Russian Aeronautics. — 2021. — V. 64, No. 3. — P. 376–384.
9. *Bakulin V. N.*, *Bogomolov N. V.*, *Borzykh S. V.* Separation Algorithm of the Soyuz MS Spacecraft from Nonstabilized International Space Station // Russian Aeronautics. — 2019. — V. 62, No. 4. — P. 577–584.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НАПРАВЛЯЮЩЕЙ РАКЕТНОГО ТРЕКА

***С. И. Герасимов*[1,2], *П. Н. Калмыков*[1], *С. А. Астахов*[2], *И. А. Киселев*[2]**

[1]*РФЯЦ–ВНИИЭФ, Саров, Россия;* [2]*ГкНИПАС имени Л. К. Сафронова, п. Белозерский, Московская обл., Россия*

Рассмотрено влияние волновых процессов на динамическое поведение системы движущийся объект — рельсовая направляющая. Отмечено влияние закритических скоростей движения, резонанса, неоднородностей направляющей и процессов неустойчивости. Применительно к ракетному треку показано превышение критических скоростей для изгибно-крутильных колебаний и объяснен аварийный опыт с остаточными волнообразными деформациями направляющей в горизонтальной плоскости. Оценены зоны неустойчивости из анализа комплекснозначной динамической жесткости направляющей.

ЭЛЕКТРОРАКЕТНАЯ ДВИГАТЕЛЬНАЯ УСТАНОВКА МАЛОЙ МОЩНОСТИ РАЗМЕРНОСТЬЮ 1,5 U НА БАЗЕ АБЛЯЦИОННОГО ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ

С. В. Гордеев, А. Ю. Гостев, Г. А. Дьяконов, Е. Э. Королев

НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия

В последние несколько лет космические аппараты формата CubeSat (далее — МКА) стали лидерами по относительной доле аппаратов, выводимых на орбиту. Востребованность спутников такого формата обусловлена следующими факторами:

относительная дешевизна изготовления и выведения (в качестве попутной нагрузки); возможность развертывания значительного количества аппаратов на орбите и решения задач с использованием всей развернутой группировки; потенциал повышения функциональности КА за счет развития технологий и миниатюризации комплектующих [1]. При этом, большая часть подобных аппаратов обладают «пассивной» платформой, т. е. аппараты не имеют в свой конструкции двигательной установки [2].

Оснащение CubeSat двигательными установками является актуальной задачей, так как такое решение позволит значительно изменить сценарии использования аппаратов, а именно: продлить срок активного существования МКА на орбите; реализовывать разведение МКА по разным плоскостям в случае вывода многоспутниковой орбитальной группировки; увод МКА с рабочей орбиты на орбиту захоронения после окончания срока активного существования, во избежание загрязнения околоземных орбит [3].

Для решения указанных задач НИИ ПМЭ МАИ ведет работы по созданию двигательной установки (ЭРДУ) малой мощности на базе абляционного плазменного двигателя размерностью 1,5 U (далее АИПД-110). Конструктивно ЭРДУ АИПД-110 выполнена в виде моноблока, имеющего присоединительные интерфейсы для крепления на МКА. В состав ЭРДУ АИПД-110 входят: двигательный блок с блоком накопителя энергии и механизмом подачи рабочего тела; блок питания и инициирования разряда; комплект шашек рабочего тела (тефлон); система питания и управления (СПУ). СПУ выполнена по принципу однотактной обратноходовой схемы.

В докладе представлены результаты испытаний инженерной модели АИПД-110:

Таким образом, в настоящее время ЭРДУ АИПД-110 находится на уровне зрелости технологии УГТ 6 — Модель системы/подсистемы или прототип продемонстрированы в окружении, близком к реальному [4].

Суммарный импульс тяги ЭРДУ АИПД-110 составляет 700 Н · с. В докладе показано, что такой величины суммарного импульса тяги достаточно для поддержания МКА массой 15 кг и миделевым сечением 0,1 м^2 в течение полугода на круговой орбите высотой 350 км, а для поддержания такого МКА на круговой орбите высотой 400 км — в течение примерно одного года. Летная квалификация ЭРДУ АИПД-110 планируется до конца 2025 г. на МКА формата CubeSat размерностью 6 U. Программа летных испытаний будет состоять из 390 последовательных циклов включения/выключения ЭРДУ АИПД-110, что позволит изменить большую полуось орбиты на ~ 15 км. По завершению миссии планируется увод МКА с орбиты при помощи ЭРДУ АИПД-110.

Исходя из вышесказанного, ЭРДУ АИПД-110 достигнет уровня готовности технологии УГТ-9 — Реальная система подтверждена путем успешной эксплуатации (достижения цели) к концу 2025 г.

1. *Гордеев С. В.*, *Муратаева Д. А.*, *Попов И. А. и др.* Двигательная установка на базе абляционного импульсного плазменного двигателя для наноспутника // Вестник Московского авиационного института. — 2024. — Т. 31, №4. — С. 177–184.
2. Nanosats Datatabase [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https:/www.nanosats.eu` (дата обращения 15.04.2025).
3. *Пичхадзе К. М.*, *Сысоев В. К. Фирсюк С. О. Юдин А. Д.* Анализ конструкции устройства аэродинамического торможения спутников CubeSat для увода с низких околоземных орбит // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2020. — №5 (101).
4. ГОСТ 58048-2017 ТРАНСФЕР ТЕХНОЛОГИЙ Методические указания, по оценке уровня зрелости технологий. — М., 2018. — 41 с.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНОГО КЛАПАНА ГАЗОВОГО ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ*

С. В. Гордеев[1,2]***, Г. А. Дьяконов***[1]***, И. А. Попов***[1]

[1]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

Критически важным узлом газового импульсного плазменного двигателя является импульсный клапан. Оценка параметров такого клапана в процессе проектирования двигательной установки позволит существенно сократить трудоемкость этого процесса. Авторами работы предложена аналитическая модель для расчета параметров импульсного клапана.

На сегодняшний день в мире ведутся работы в области создания абляционных импульсных плазменных двигателей для космических аппаратов (КА) сверхмалого класса [1, 2], которые обладают рядом очевидных преимуществ по сравнению с другими видами двигателей, такими как простота и дешевизна конструкции, удобство испытаний и эксплуатации, отсутствие дефицитных материалов в составе двигательной установки (ДУ) [3]. Однако такие двигатели применительно к КА сверхмалого класса имеют некоторые недостатки, осложняющие их повсеместное введение в эксплуатацию на борту сверхмалых КА, в частности:

— рабочее тело (РТ) в твердом состоянии неудобно компоновать при ограниченном объеме ДУ;

— в конструкции ДУ присутствует массивный и объемный блок накопителя энергии (БНЭ).

Возможна работа импульсных плазменных двигателей (ИПД) с использованием газообразных РТ, что в случае использования легкокипящих жидкостей позволило бы повысить удобство компоновки конструкции ДУ по сравнению с абляционными ИПД, в которых форма твердого РТ жестко связана с формой и размерами разрядного канала. Кроме того, в этом случае возможен подбор параметров разрядного канала, обеспечивающих снижение протекающих разрядных токов, что позволит снизить массу БНЭ.

Одним из наиболее сложных и критически важных конструктивных узлов ИПД с газообразным РТ является импульсный газовый клапан. Сложность создания такого клапана заключается не только в достижении необходимого быстродействия, но и в определении расхода РТ через него за одно срабатывание.

Авторами предложена математическая модель, позволяющая оценить расход РТ через импульсный клапан в зависимости от давления РТ перед проходным сечением, хода запорного органа, быстродействия и геометрических параметров клапана.

В основу предложенной аналитической модели легло предположение, что проходное сечение клапана можно, в первом приближении, считать кольцевым «соплом», через которое РТ под давлением истекает из резервуара в объем выходного канала, в котором давление меньше чем в магистрали подачи рабочего тела.

Таким образом, при постоянном давлении в резервуаре возможно использовать формулу (1) для определения расхода через сопло [4], а момент открытия клапана

*Результаты исследования были получены при финансовой поддержке Российской Федерацией в лице Минобрнауки России (грант на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития, соглашение №075-15-2024-558).

считать моментом мгновенного возникновения давления p_1

$$G(t) = F\sqrt{\frac{2kp1(t)}{v1(t)(k-1)}\left[\left(\frac{p1(t)}{p2(t)}\right)^{2/k} - \left(\frac{p1(t)}{p2(t)}\right)^{(k+1)/k}\right]}, \qquad (1)$$

где k — показатель адиабаты для рассматриваемого газообразного РТ, $p_1(t)$ — давление перед проходным сечением клапана, $p_2(t)$ — давление в выходном канале клапана вблизи проходного сечения, $v_1(t)$ — удельный объем рабочего тела до проходного сечения, F — площадь проходного сечения.

В реальности же давление перед проходным сечением клапана изменяется по некоему неизвестному заранее закону. Поэтому закон изменения расхода для этого случая определяется системой уравнений (2)

$$G(t) = F\sqrt{\frac{2kp1(t)}{v1(t)(k-1)}\left[\left(\frac{p1(t)}{p2(t)}\right)^{2/k} - \left(\frac{p1(t)}{p2(t)}\right)^{(k+1)/k}\right]}, \quad G(t) = \frac{V1}{RT}\frac{dp1(t)}{dt}, \qquad (2)$$

где V_1 — объем РТ до проходного сечения, R — газовая постоянная РТ, T — температура РТ.

Разработанная аналитическая модель может быть использована как для качественного анализа процессов, происходящих при срабатывании импульсного газового клапана, так и для предварительных расчетов, вновь разрабатываемых импульсных газовых клапанов.

1. *Spanjers G.*, *Bromaghim D.*, *Lake J.*, *Dulligan M.*, *White D.*, *Schilling J.*, *Bushman S.* AFRL MicroPPT Development for the TechSat 21 Flight // Proc. of 27th Int. Electric Propulsion Conf. — Pasadena CA, 2001, IEPC-01-166.
2. *Schäfer F.*, *Herdrich G.*, *Zhang Zhe*, *Montag C.*, *Laufer R.*, *Santoni F.*, *Piergentili F.*, *Marzioli P.*, *Amadio D.*, *Frezza L.* In-Orbit Testing of the PETRUS Pulsed Plasma Thruster on the GREENCUBE 3U Cubesat // Conference: 8th Edition of the Space Propulsion Conference (SPC) At: Estoril, Portugal.
3. *Антропов Н. Н.*, *Богатый А. В.*, *Дьяконов Г. А.*, *Любинская Н. В.*, *Попов Г. А.*, *Семенихин С. А.*, *Тютин В. К.*, *Хрусталев М. М.*, *Яковлев В. Н.* Новый этап развития абляционных импульсных плазменных двигателей в НИИ ПМЭ // Вестник ФГУП «НПО им. С. А. Лавочкина». Космонавтика и ракетостроение. — 2011. — №5. — С. 30–40.
4. Техническая термодинамика / Под ред. В. И. Крутова. — М.: Высшая школа, 1981. — 472 с.

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРЯДА В КАНАЛЕ ГАЗОВОГО ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ*

***С. В. Гордеев*[1,2], *Г. А. Дьяконов*[1], *И. А. Попов*[1]**

[1]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

В настоящей работе представлены результаты разработки инженерной математической модели разряда в канале газового импульсного плазменного двигателя. Данная модель позволяет оценивать эффективность нагрева рабочего тела в канале

*Результаты исследования были получены при финансовой поддержке Российской Федерацией в лице Минобрнауки России (грант на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития, соглашение №075-15-2024-558).

и другие интегральные характеристики двигателя и может быть для предварительных расчетов применена при проектировании импульсных плазменных двигателей с газообразным рабочим телом.

На сегодняшний день наблюдается заметное увеличение количества выводимых на орбиту малых и сверхмалых космических аппаратов (КА). При этом, наблюдается рост интереса к использованию реактивных двигателей в составе таких КА [1, 2].

Одним из перспективных с точки зрения использования в составе космических аппаратов сверхмалого класса видов реактивных двигателей являются импульсные плазменные двигатели. На сегодняшний день в мире проводится значительное количество исследований импульсных плазменных двигателей с различными рабочими телами. При этом, большинство из них направлено на изучение абляционных плазменных двигателей и лишь незначительное количество исследований связано с импульсными плазменными двигателями с газообразным рабочим телом. Использование газообразных рабочих тел (РТ) позволяет повысить удобство компоновки конструкции ДУ. Кроме того, в этом случае возможен подбор параметров разрядного канала, обеспечивающих снижение протекающих разрядных токов, что позволит снизить массу блока накопителя энергии (БНЭ).

В настоящей работе представлены результаты разработки инженерной математической модели разряда в разрядном канале газового импульсного плазменного двигателя (ГИПД).

Разрядный канал состоит из цилиндрического участка, выполненного из диэлектрического материала. На концах этого участка расположены цилиндрические электроды, между которыми при достижении давлением в канале некоего значения происходит электрический пробой и энергия, запасенная в БНЭ передается рабочему телу нагревая его. На выходе из разрядного канала располагается сверхзвуковое сопло.

Эквивалентная электрическая схема ГИПД представляет собой RLC-цепь, которая описывается уравнением (1) [3]

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0, \tag{1}$$

где L — индуктивность; I — ток; R — активное сопротивление; C — емкость.

Зная решение уравнения (1) и приняв в первом приближении, что ток в разряде переносится только электронами (т. е. плазма в разрядном канале слабоионизованная) [4] можно определить закон, по которому изменяется концентрация электронов в разрядном канале:

$$n_e(t) = \frac{I(t)}{e\upsilon_e S_{\text{кан}}}, \tag{2}$$

где n_e — концентрация электронов в разрядном канале; e — заряд электрона; υ_e — скорость электронов, $S_{\text{кан}}$ — площадь поперечного сечения канала.

Тогда зависимость концентрации нейтральных частиц в разрядном канале и сопротивления плазмы от времени можно найти, используя уравнения (3) и (4):

$$V_{\text{кан}}\frac{dn}{dt} = \frac{G}{M} - n\upsilon S_{\text{кр}} - n_e\upsilon_B S_{\text{кр}}, \tag{3}$$

$$R_{\text{пл}}(t) = \frac{m\upsilon_e n(t) S_{ea} L_{\text{кан}}}{e^2 n_e S_{\text{кан}}}, \tag{4}$$

где $V_{\text{кан}}$ — объем разрядного канала; $n(t)$ — концентрация атомов в разрядном канале; G — расход РТ; M — масса атома РТ; υ — скорость звука; $S_{\text{кр}}$ — площадь

критического сечения сопла; $R_{пл}(t)$ — сопротивление плазмы; v_B — скорость Бома; m — масса электрона; S_{ea} — сечение столкновений электронов с нейтральными частицами; $L_{кан}$ — длина разрядного канала.

Тогда энергия, выделившаяся в результате Джоулева нагрева плазмы:

$$Q = \int_0^t I^2 R_{пл}\, dt, \tag{5}$$

Эффективность нагрева РТ двигателя равна:

$$\eta = \frac{2Q}{CU_0^2}, \tag{6}$$

где U_0 — начальное напряжение на конденсаторе БНЭ.

Разработанная инженерная математическая модель позволяет оценить эффективность нагрева РТ в разрядном канале ГИПД в зависимости от его геометрических параметров и может быть использована как для качественного анализа процессов, происходящих в разрядном канале, так и для предварительных расчетов, вновь разрабатываемых разрядных каналов ГИПД.

1. Nanosats Datatabase [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https:/www.nanosats.eu` (дата обращения 10.12.2023).
2. *Mueller J.* Thruster Options for Microspacecraft: A Review and Evaluation of State-of-the-Art and Emerging Technologies Micropropulsion for Small Spacecraft // Progress in Astronautics and Aeronautics. — 2000. — V. 187. — AIAA 97-3058.
3. *Пономаренко В. К.* Электротехника: учеб. пособ. — СПб.: СПбГТУРП, 2011. Ч. III. — 91 с.
4. *Райзер Ю. П.* Физика газового разряда. — 3-е изд. — Долгопрудный: Интеллект, 2009. — 734 с.

ЭЛЕКТРОРАКЕТНАЯ ДВИГАТЕЛЬНАЯ УСТАНОВКА НА БАЗЕ ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ГАЗООБРАЗНЫМ РАБОЧИМ ТЕЛОМ: СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ*

***С. В. Гордеев*[1,2], *Г. А. Дьяконов*[1], *И. А. Попов*[1], *Е. В. Светличная*[1]**

[1]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

В работе рассматриваются перспективы использования импульсных плазменных двигателей с газообразным рабочим телом для наноспутников. Рассмотрены преимущества таких двигателей перед другими типами электроракетных двигателей. Проведен сравнительный анализ характеристик различных типов двигательных установок, пригодных для малых космических аппаратов. Особое внимание уделено потенциалу импульсных плазменных двигателе с газовым рабочим телом в задачах коррекции орбиты, увода с орбиты и групповых полетов, а также возможностям их интеграции в существующие системы ориентации и стабилизации КА.

*Результаты исследования были получены при финансовой поддержке Российской Федерацией в лице Минобрнауки России (грант на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития, соглашение №075-15-2024-558).

В последние годы наблюдается стремительное развитие рынка малых космических аппаратов (МКА), особенно наноспутников форматов CubeSat [1]. Однако одним из ключевых ограничений наноспутников остается отсутствие эффективных и компактных двигательных установок (ДУ), способных обеспечить коррекцию орбиты, увод с орбиты по окончании миссии (в соответствии с требованиями по снижению космического мусора) и поддержание групповых полетов. В мире активно ведутся исследования и разработки реактивных двигательных установок, основанных на различных принципах ускорения рабочего тела, для МКА.

Электроракетные двигатели (ЭРД) рассматриваются как наиболее перспективное решение для наноспутников благодаря высокой удельной тяге и умеренному энергопотреблению. Однако, при относительно малой мощности энергосистемы МКА (в пределах 50–100 Вт) традиционные ЭРД, включая стационарные плазменные двигатели (СПД) [2] и ионные двигатели (ИД) [3], демонстрируют значительно более низкие показатели эффективности по сравнению с их работой при более высоком уровне потребляемой мощности. Это касается как энергетической составляющей (снижение КПД преобразования электрической энергии в тягу), так и эксплуатационных характеристик (ухудшение параметров расхода рабочего тела).

Импульсные плазменные двигатели (ИПД) демонстрируют значительный потенциал в качестве двигательных установок для космических аппаратов сверхмалого класса. Импульсный режим работы обеспечивает достижение высоких значений скорости истечения рабочего тела (порядка 3–10 км/с) при относительно низком уровне потребляемой электрической мощности ($\sim$ 10–20 Вт). Принципиальным преимуществом ИПД является упрощенная конструктивная реализация и возможность применения экономически выгодных и широкодоступных рабочих тел (РТ), что особенно актуально в условиях снижения стоимости МКА.

Наиболее изученным типом ИПД на сегодняшний день являются абляционные импульсные плазменные двигатели (АИПД), использующие твердое РТ, как с преимущественно газодинамическим, так и с преимущественно электромагнитным ускорением РТ [4]. В ИПД электромагнитное ускорение РТ за счет силы Ампера обеспечивает, как правило, более высокую скорость истечения по сравнению с газодинамическим ускорением. Однако электромагнитное ускорение сопряжено с протеканием значительных токов в двигателе, что влечет за собой увеличение массы и габаритов блока накопления энергии. В условиях ограничений, обусловленных не только массой, но и объемом двигательной установки, схема с газодинамическим ускорением может оказаться более оптимальной с точки зрения минимизации массогабаритных характеристик при заданном суммарном импульсе тяги.

В то же время конфигурация абляционных ИПД с преимущественно газодинамическим ускорением накладывает ограничения на объем запаса РТ, поскольку он ограничен геометрией и размерами разрядного канала. ИПД,использующие газообразное РТ с преимущественно газодинамическим ускорением, изучены в меньшей степени по сравнению с абляционными ИПД, однако обладают рядом потенциальных преимуществ, в частности:

— меньший объем и масса конденсаторов накопления энергии (из-за меньших значений токов в разрядном канале);

— большой потенциал унификации (независимость запаса рабочего тела от параметров разрядного канала);

— улучшенные возможности управления и регулирования параметров двигателя.

Целью данного доклада является обзор современных разработок в области ИПД с газообразным рабочим телом, сравнение их характеристик с другими типами ЭРД, пригодными для наноспутников, и оценка перспектив их практического применения.

Следует отметить, что для систем ориентации и стабилизации космических аппаратов большей массы в настоящее время широко применяются двигатели на холодном газе, электронагревательные и термокаталитические двигатели. Указанные системы уступают по скорости истечения расчетным характеристикам ИПД с газообразным рабочим телом, однако обеспечивают значительно более высокую силу тяги. В ситуациях, когда допускается снижение тяги, возможна замена двигательного блока указанных систем на конструкцию, рассматриваемую в настоящей работе, что потенциально позволит существенно увеличить суммарную мощность ДУ, предназначенных для применения в составе малых космических аппаратов.

1. Nanosatellite & Cubesat Database [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https://www.nanosats.eu` (дата обращения: 01.04.2025).
2. *Lee D.*, *Kim H.*, *Lee S.*, *Doh G.*, *Choe W.* Development and Performance Test of a 50 W-class Hall Thruster // Presented at the 36th International Electric Propulsion Conference. University of Vienna, Austria, September 15–20, 2019. — IEPC-2019-599.
3. *Pham Tr. D. Q.*, *Nguyen H. T. T.*, *Shin J.* Development of 50 W class RF gridded ion thruster // Presented at the 36th International Electric Propulsion Conference. University of Vienna, Austria, September 15–20, 2019. — IEPC-2019-811. — IEPC-2019-383.
4. *Богатый А. В.*, *Дьяконов Г. А.*, *Любинская Н. В.*, *Нечаев И. Л.*, *Попов Г. А.*, *Семенихин С. А.*, *Тютин В. К.*, *Яковлев В. Н.* Современное состояние работ по созданию ЭРДУ с АИПД в НИИ ПМЭ МАИ // Известия Российской академии наук. Энергетика. — 2019. — №3. — С. 96–109.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТРОЙСТВ ДЕМОНСТРАТОРА ПАЭРД ДЛЯ СВЕРХНИЗКООРБИТАЛЬНЫХ КА (150–200 КМ) НА СТЕНДЕ ВАТ-103 ЦАГИ

В. Ю. Гранич, А. И. Ерофеев, А. П. Никифоров, И. А. Ширковский

ЦАГИ, Жуковский, Московская обл., Россия

Исследования по созданию двигательных энергоустановок, не требующих запасов рабочего тела на борту КА, длительно существующих на сверхнизких орбитах (150–200 км), активно ведутся в последние десятилетия как в России, так и за рубежом [1–7].

На основе исследований физико-математической модели процессов, происходящих в каналах прямоточного атмосферного электрореактивного двигателя (ПАЭРД), и экспериментальных данных по изучению устройств забора атмосферных газов (УЗАГ) в вакуумной аэродинамической установке ВАТ-103 в ЦАГИ, полученных ранее [4, 5] была сформулирована концепция демонстратора ПАЭРД и определены направления экспериментальной проверки основных узлов демонстратора:

— забор потока и накопление газа от ионного источника ПИД-70 с помощью большеразмерного УЗАГ, созданного с помощью 3D-печати;

— изучение условий зажигания и устойчивого горения разряда в зависимости от давления газа в ионизационной камере ПИД-70;

— определение параметров ПИД в условиях, моделирующих процессы в ПАЭРД в натурных условиях на различных высотах орбиты КА.

Проведены исследования возможности зажигания и устойчивого горения разряда при низких давлениях в ионизационной камере. Получены параметры концентрации ионов и скорости, обеспечивающие повышение давления в накопителе устройства забора атмосферных газов (УЗАГ) до уровня, соответствующего условиям натурного полета.

При использовании рабочей камеры вакуумного аэродинамического стенда ВАТ-103 в качестве большого накопителя для зажигания разряда получено значение давления, соответствующее теоретическим оценкам возможности применения прямоточного атмосферного электрореактивного двигателя (ПАЭРД) для создания тяги на высотах не выше 170 км.

Разработана методика исследования ПАЭРД в условиях, моделирующих натурные уровни давления газа в накопителе на различных высотах орбиты КА. Проведенные исследования показали, что для устойчивого горения разряда необходимо давление газа, которое соответствует теоретическим величинам плотности газа в накопителе на высотах порядка 160 км.

Экспериментально показано, что в условиях ионного потока УЗАГ эффективно работает и возможно его применение в демонстраторе ПАЭРД. Для моделирования натурных условий в УЗАГ можно ограничиться получением необходимой величины плотности потока набегающих частиц, а не точным раздельным соответствием концентраций и скоростей частиц в моделируемом потоке демонстратора и в атмосфере.

Проведенные исследования показали, что по условиям зажигания и устойчивого горения разряда при низких давлениях, возможно применение ПАЭРД в силовой установке для сверхнизких орбит, использующей плазменно-ионный двигатель (ПИД), работающий на атмосферном газе для создания тяги.

1. *Ерофеев А. И.*, *Никифоров А. П.*, *Ширковский И. А. и др.* Испытания на стенде ВАТ-103 ЦАГИ нового большеразмерного УЗАГ в плазменно-ионном потоке азота, сформированном на базе ПИД-70 // НТО ФАУ «ЦАГИ». — 2025. — №11786.
2. *Чернышев С. Л.*, *Ширковский И. А.*, *Голиков А. А.*, *Ерофеев А. И.*, *Скворцов В. В.* Аэрокосмические технологии для длительного поддержания космических аппаратов на сверхнизких орбитах // Материалы «Международного Конгресса по аэронавтике», Москва, 2023 г.
3. *Filatyev A. S.*, *Golikov A. A.*, *Erofeev A. I.*, *Khartov S. A.*, *Lovtsov A. S.*, *Padalitsa D. I.*, *Skvortsov V. V.*, *Yanova O. V.* Research and development of aerospace vehicles with air breathing electric propulsion: Yesterday, today, and tomorrow // Progress in Aerospace Sciences. — 2023. — V. 136. No. 100877.
4. *Ерофеев А. И.*, *Никифоров А. П.*, *Плугин В. В.* Экспериментальные исследования воздухозаборника в свободномолекулярном потоке газа // Ученые записки ЦАГИ. — 2017. — Т. XLVIII, №3. — С. 56–69.
5. *Ерофеев А. И.*, *Никифоров А. П.*, *Попов Г. А.*, *Суворов М. О.*, *Сырин С. А.*, *Хартов С. А.* Разработка воздушного прямоточного электрореактивного двигателя для компенсации аэродинамического торможения низкоорбитальных космических аппаратов // Вестник «НПО им. С. А. Лавочкина. — 2016. — Вып. 3. — С. 101–110.
6. *White C.*, *Colombo C.*, *Scanlon T. J.*, *McInnes C. R.*, *Reese J. M.* Rarefied gas effects on the aerodynamics of high area-to-mass ratio spacecraft in orbit // Advances in Space Research. — 2013. — V. 51, No. 11. — P. 2112–2124.
7. *Скворцов В. В.* Аэродинамические исследования при участии потоков синтезированной и низкотемпературной плазмы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 224 с.

РАЗРАБОТКА НЕЙТРАЛИЗАТОРА НА БАЗЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА ДЛЯ ИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ И ИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

***Д. С. Демченко*[1], *А. В. Мельников*[1], *С. А. Хартов*[2]**

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия*

Высокочастотный нейтрализатор (ВЧН) — это устройство, необходимое для компенсации заряда ускоренного ионного пучка высокочастотных источников ионов и ионных двигателей. Нейтрализатор может работать в двух режимах, которые можно отличить по соединению между анодом и коллектором. Если ток, поглощаемый коллектором, зависит от напряжения, подаваемого на анод, то это называется дуговым режимом. Если это не так, то рабочий режим называется диффузионным режимом. Для моделирования рабочих процессов в ВЧН была доработана физико-математическая модель индуктивного ВЧ-разряда, представленная в [2].

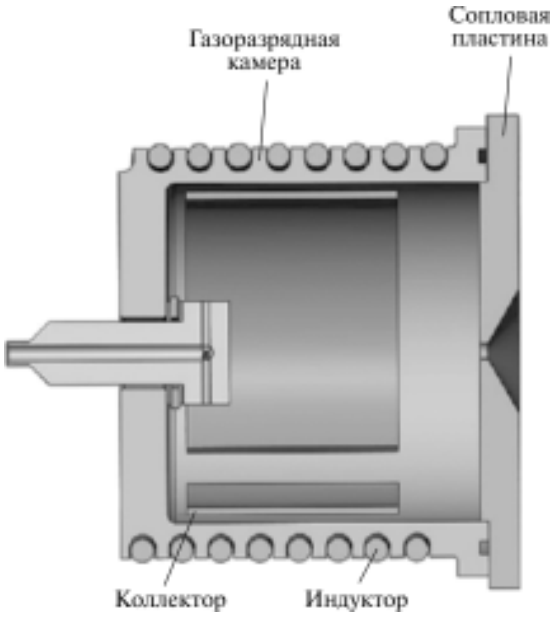


Рис. 1. Конструктивная схема ВЧН [1]

Высокочастотный нейтрализатор — устройство необходимое для компенсации положительного заряда ускоренного пучка ионов высокочастотных ионных источников (ВЧИИ) и ионных двигателей (ВЧИД). Схема плазменного ВЧ-нейтрализатора приведена на рис. 1. Разрядная камера (РК) выполнена из керамики, как и сопловая пластина, которая закрывает камеру, поддерживая в ней необходимое давление рабочего тела. Для эмиссии электронов в этой пластине предусмотрена выходная апертура. При подаче переменного высокочастотного тока в медный индуктор в полости РК, вокруг которой он намотан, индуцируется переменное магнитное поле высокой частоты. Магнитное поле генерирует вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны. Для запуска работы нейтрализатора необходима генерация первичных электронов. Соударение ускоренных электронов с атомами рабочего тела приводит к ионизации атомов, созданию и поддерживанию плазменного образования внутри РК. В камере вдоль ее стенок расположен коллек-

тор ионов, необходимый для поддержания квазинейтральности плазмы в устройстве. Коллектор имеет форму тонкостенной обечайки с разрезом, параллельным оси нейтрализатора, что позволяет избежать протекания в нем вихревых токов. В качестве материала для коллекторов могут использоваться как металлы, так и углеродосодержащие материалы. Выбор материала влияет на потери вкладываемой в разряд мощности, расходуемой на вихревые токи. Ресурс нейтрализаторов определяется ионным распылением поверхностей, контактирующих с плазменным разрядом. В случае использования в качестве рабочего газа химически активных газов ресурс нейтрализаторов уменьшается ввиду дополнительной коррозии коллектора. Рабочее тело подается через газораспределитель, расположенный в левой части РК на рис. 1.

Для стабильной работы ВЧИИ в технологических установках нанесения покрытий или какой-либо обработки поверхности изделий необходимо, чтобы была обеспечена полная нейтрализация объемного заряда ионного пучка. Ввиду того, что высокочастотные источники ионов среднего типоразмера (с диаметром пучка до 200 мм) должны работать с величиной извлекаемого ионного тока до 1,2 А, ток эмиссии электронов из ВЧ-нейтрализатора должен быть не менее данной величины. С целью оценки параметров ожидаемых характеристик разрабатываемого ВЧ-нейтрализатора был проведен ряд физико-математических расчетов.

Для моделирования рабочих процессов в ВЧН была произведена доработка представленной в [2] физико-математической модели индуктивного ВЧ-разряда. Необходимо было учесть, что для извлечения электронов из объема плазмы потребуется возникновение избытка электронов в объеме разрядной камеры. Это обеспечивается за счет наличия внутри РК-коллектора ионов, находящегося под отрицательным потенциалом относительно «земли». Это смещение потенциала на коллекторе ионов приводит к возникновению двойного электрического слоя (слоя объемного заряда), толщина которого будет определять собирающую площадь поверхности, с которой происходит выпадение электронного и ионного тока на коллектор.

Для расчета использовалась осесимметричная двумерная постановка задачи, которая решалась в программном пакете COMSOL Multiphysics. Процесс моделирования можно при этом условно разделить на следующие этапы:

1. Построение упрощенной геометрии основных элементов высокочастотного нейтрализатора.

2. Внесение с учетом принятых допущений расчетных соотношений, описывающих рассматриваемые процессы в плазме.

3. Построение расчетной адаптивной сетки конечных элементов.

4. Проведение расчетов и формулирование выводов по результатам моделирования.

Начальными условиями, необходимыми для расчета, являлись: частота и сила тока в индукторе, температура поверхности внутренней стенки РК и коллектора и массовый расход РТ.

Расчеты проводились для режима работы ВЧН с частотой тока на индукторе 13,56 МГц, массовым расходом ксенона 0,22 мг/с и вкладываемой в ВЧ-разряд мощности 40 Вт.

1. *Кожевников В.В.*, *Смирнов П.Е.*, *Хартов С.А.* Исследование катода-нейтрализатора с геликонным разрядом // Известия РАН. Энергетика. — 2019. — №3. — С. 131–139.
2. *Kanev S.*, *Melnikov A.*, *Nazarenko I.*, *Khartov S.* Mathematical model of radio-frequency ion thruster with an additional magnetostatic field // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 18th International Conference «Aviation and Cosmonautics», AviaSpace 2019. — 2020. — P. 012010. — DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/01 2010.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ЖРД

***А. В. Иванов*[1], *А. Л. Павлевич*[2]**

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*Уральский завод гражданской авиации, Москва, Россия*

Жидкостный ракетный двигатель (ЖРД) — сложная система агрегатов, в которых происходят разнообразные физические процессы. Процесс разработки ЖРД сопряжен с рядом сложностей, прежде всего обусловленных отсутствием универсальных подходов и математических моделей, требующих большого объема экспериментальной отработки — автономных испытаний агрегатов и огневых испытаниях каждого из экземпляров двигателя. Накопленный статистически значимый объем экспериментальных данных позволяет скорректировать существующие математические модели с учетом специфики конкретной модели и конкретного образца ЖРД и его агрегатов. Полученные модели определяют как расчетно-экспериментальные. Такие модели позволяют оценивать статические и динамические характеристики ЖРД с высокой степенью достоверности. Они имеют свой жизненный цикл и развиваются попутно с ЖРД, становясь основой для создания цифрового двойника как для типа двигателя, так и для каждого его конкретного экземпляра. Такой подход требует комплексного применения автоматизации проектирования — внедрения автоматизированных систем управления жизненным циклом изделий (АСУ ЖЦИ), которые должны строиться с использованием современных программных продуктов, в том числе PLM, CAD/CAM/CAE-систем. При таком подходе АСУ ЖЦИ становится не цифровым архивом конструкторской документации и набором предопределенных рабочих процессов, как это часто бывает на отечественных и зарубежных предприятиях при ее внедрении, а единым информационным пространством – базой знаний, в рамках которой обрабатываются проектные, расчетные, экспериментальные данные, результаты измерений и контроля, формируются двунаправленные цифровые двойники и постоянно пополняемые электронные паспорта выпускаемых изделий. Кроме того, АСУ ЖЦИ является инструментом управления данными, организации процессов согласования и совместной работы конструкторов, расчетчиков, технологов, производственных и испытательных подразделений при проектировании, экспериментальной отработке, доводке и эксплуатации ЖРД. Особенно это важно для двигателей многоразовых космических систем.

Ключевым показателем успешности АСУ ЖЦИ как единой системы является применение полностью аннотированных 3D-моделей, что дает не просто доступ к 3D-представлению, но и обеспечивает производство, испытания, метрологическое обеспечение единым универсальным источником информации с постепенным исключением дублирования в виде 2D-чертежей. Статистика применения такой концепции в оборонной промышленности и авиастроительном комплексе США показывает снижение затрат на инженерные работы, включая конструкторские работы и технологическую подготовку производства, при значительном повышении общего качества технологических решений, обеспеченного выходом на более высокий уровень автоматизации и надежности обмена данными, что уменьшает долю влияния человеческого фактора и соответствующие риски появления ошибок.

Расчетные исследования являются неотъемлемой частью разработки любого изделия [1, 2]. Можно определить несколько типов расчетных работ, проводимых на разных этапах разработки — проектировочные и поверочные.

Проектировочные расчеты выполняются на ранних этапах проектирования в условиях высокой неопределенности по исходным данным и, как правило, основываются на выполнении несложных вычислений с использованием аналитических зависимостей, позволяющие инженерам-конструкторам формировать первичный образ проектируемого изделия. Подобные расчеты не требуют серьезных вычислительных ресурсов и могут проводиться даже без участия ЭВМ. Однако, потребность в большом количестве подобных расчетов из-за итерационной природы процесса проектирования приводит к тому, что на каждом предприятии существуют авторские и часто разрозненные расчетные программы, созданные с использованием высокоуровневых языков программирования или просто таблиц Microsoft Excel, в общем виде представляющие из себя автоматизированные расчетные методики. Наиболее распространенной проблемой подобных программ является то, что с точки зрения их автора они не рассматриваются как «программный продукт». Поэтому довольно часто у таких программ отсутствует документация, не ведется отслеживание изменений, нет возможности использовать в задачах многодисциплинарной оптимизации и нет поддержки для обеспечения работоспособности на развивающихся ЭВМ и операционных системах. Эти особенности формируют серьезные риски для пользователя, которые могут перерасти в серьезные просчеты при принятии конструкторских решений, цена которых на ранних этапах проектирования бывает очень высока. Одной из задач АСУ ЖЦИ является агрегация разрозненных авторских расчетных программ, формирование базы знаний заложенных в них методик и алгоритмов, руководств пользователя, отслеживание изменений и версий, обеспечение трассировки исходных данных и результатов расчета как технических требований.

Для расчетных подразделений занимающихся поверочными расчетами спроектированных конструкций и увязкой агрегатов на эксплуатационных режимах работы изделий, существуют другие расчетные инструменты, математические модели которых в основном описывают физические процессы. Трехмерное моделирование с использованием методов конечных и контрольных элементов, методов конечных разностей используется в аэрокосмической отрасли не один десяток лет. Накопленный за это время опыт, а также стремительный рост производительности многопроцессорных вычислительных ресурсов позволяет решать задачи механики деформируемого твердого тела и течения жидкостей и газов не только для отдельных агрегатов, но и для всего ЖРД в сборе [3]. Среди таких инструментов можно выделить коммерческое программное обеспечение мировых лидеров — компаний ANSYS Inc. и Siemens AG, отечественные продукты FlowVision, CAE Fidesys, Логос. В то же время среди академического сообщества особой популярностью пользуются свободно распространяемые программы с открытым исходным кодом, такие как OpenFOAM, CalculiX и другие. Конечно-элементное моделирование ЖРД в сборе очень ресурсозатратно и требует высокопроизводительной кластерной системы ЭВМ, поэтому для выполнения расчетной увязки агрегатов в единое изделие по-прежнему используются инструменты одномерного моделирования на уровне системы, компоненты которой часто описываются суррогатными моделями — зависимостями, полученными экспериментальными методами и/или методами трехмерного моделирования. Наиболее распространенными инструментами для моделирования на уровне системы являются коммерческие Matlab/Simulink и Amesim, отечественные SimInTech и некоторые другие аналоги, в том числе и с открытым исходным кодом — Octave, OpenModelica и другие.

Такое богатство инструментариев и методов сформировало новый подход к проектированию изделий — SPDP (Simulation Driven Product Development), суть кото-

рого заключается в том, что конструкторская разработка должна производиться исключительно на основании многодисциплинарного моделирования на всех этапах проектирования. Особенно актуален данный подход в случае наличия на производстве современных станков с ЧПУ и аддитивных технологий, так как SDPD заключается не только в обязательном моделировании, но и подразумевает многокритериальную многодисциплинарную оптимизацию, в том числе и топологическую [4]. В последние годы, наблюдается некоторая стагнация в росте производительности центральных процессоров, что подогрело интерес к вычислениям на графических процессорах видеокарт. Стал появляться новый класс расчетных инструментов для конструкторов — инструменты, встроенные в системы твердотельного моделирования, позволяющие проводить многодисциплинарное численное моделирование по принципу «что, если...», т. е. для проведения качественного расчетного анализа, не требующего высокой точности результата расчета в угоду простоте использования инструмента и минимизации времени моделирования. В такой концепции SDPD граница между инженером-конструктором и инженером-расчетчиком практически исчезает, что в конечном итоге приводит к проектному подходу к работе внутри конструкторского бюро в рамках АСУ ЖЦИ, взамен функционального подхода.

Разработка ЖРД может идти как «снизу–вверх», так и «сверху–вниз». Первый случай характерен для относительно незначительной модификации какого-либо агрегата с учетом изменения характеристик которого вносятся изменения в параметры и характеристик и двигателя. Второй случай характерен для новой разработки или новой серьезной модификации двигателя. Расчетные работы при проектировании ЖРД тоже можно ранжировать по такому же принципу — «снизу–вверх» и «сверху–вниз». В первом случае сначала проводятся расчеты агрегатов, исходя из условий работы в существующем ЖРД, а затем производится их увязка в рамках единой целостной системы. Во втором случае сначала формируются требования к агрегатам в виде исходных данных компонентов системной модели ЖРД, обеспечивающих ее увязку для достижения требуемых характеристик ЖРД. Затем проводятся проектировочные расчеты агрегатов, проектирование агрегатов и их поверочное моделирование, по итогам которого производится новая увязка с целью подтверждения достижения требуемых характеристик ЖРД.

1. Перспективные технологии для авиационной промышленности: Аналитический обзор. — М.: Наука, 2017. — 517 с.
2. *Чванов В. К.*, *Киселев А. С.*, *Попов Е. Н.*, *Скибин С. А.*, *Стернин Л. Е.*, *Ткач В. В.*, *Челькис Ф. Ю.* Многодисциплинарное исследование одноступенчатой околозвуковой турбины ЖРД (часть I) // Труды «НПО Энергомаш». — 2006. — №24. — С. 4–68.
3. *Прохоров А.*, *Лысачев М.* Цифровой двойник. Анализ, тренды, мировой опыт. — М.: ООО «АльянсПринт», 2020. — 401 с.
4. Цифровое производство. Методы, экосистемы, технологи. Рабочий доклад департамента корпоративного обучения Московской школы управления Сколково. Март 2018. — 108 с.

МИНИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ ОБЛЕТА ЛОКАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ГРУППОЙ ЛЕГКИХ БЕСПИЛОТНИКОВ

А. И. Калашников, Д. В. Моисеев

МАИ, Москва, Россия

Предложена методика составления маршрутов полета группы легких беспилотников (БЛА) известного численного состава, обеспечивающая наискорейший однократный облет множества заданных своим местоположением локальных объ-

ектов с учетом воздействия ветра. Аппараты стартуют из одной и той же точки с известным местоположением практически одновременно и движутся по замкнутым маршрутам. Тактико-технические характеристики, в частности, воздушная скорость аппаратов, входящих в группу, одинакова и известна. Предполагается, что направление и скорость ветра известны и постоянны для всей зоны и времени полета БЛА группы. Такие допущения вполне справедливы для легких БЛА [1].

Задача рассматривается в предположении о том, что объекты настолько удалены друг от друга, что для легкого БЛА с учетом характерных для него скоростей и маневренности при расчете времени его перелета между локальными объектами криволинейными участками траектории, связанными с изменением направления полета, можно пренебречь. При этом время полета по маршруту равно сумме времен наискорейшего с учетом действия ветра перелета между парами точек, образующих этот маршрут. Таким образом, при расчетах критерия целевой эффективности используется нижняя оценка времени полета «time of flight estimate» (TOFE) каждого БЛА по маршруту [2].

При математической формализации задачи используем аппарат булева линейного программирования, который успешно применялся при формировании различных постановок задач маршрутизации полета [3]. В качестве неизвестного будем использовать булеву переменную x_{ijk}. Если такая переменная равна 1, то беспилотник с номером k имеет в своем маршруте перелет из точки i в точку j. Если эта переменная равна 0, то перелет между точками i и j в маршрут k-го БЛА не входит. Решение задачи будет определено множеством значений неизвестных

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,m}; \quad i \neq j, \tag{1}$$

где n — количество точек, включая точку старта с номером 1, m — количество БЛА.

Решение должно удовлетворять следующим условиям.

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1jk} = 1, \quad k = \overline{1,m}; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} \leq 1, \quad i = \overline{2,n}, \quad i \sim\neq j; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} - \sum_{i=1}^{n} x_{jik} = 0, \quad j = \overline{2,n}, \quad k = \overline{1,m}, \quad i \sim\neq j; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ijk} \leq T, \quad k = \overline{1,m}, \quad i \sim\neq j. \tag{5}$$

Условие (2) обеспечивает включение в маршрут любого БЛА стартовой точки. Условие (3) обеспечивает включение любой точки в маршрут не более одного раза. Равенство (4) является условием связности маршрутов, а совместно с (3) обеспечивает замкнутость маршрутов. Коэффициент t_{ij} — минимальное время перелета из точки с номером i в точку с номером j с учетом действия ветра.

Особенностью задачи является то, что такой критерий как время выполнения миссии, т. е. облета всех точек, не удается записать как функцию множества неизвестных (1) используя формализм линейного булева программирования.

Выходом из положения является прием, суть которого сводится к организации итеративной процедуры, а именно нахождения допустимого множества неизвест-

ных (1), которые максимизируют количество точек, включенных в маршруты, т. е.

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \to \max, \quad i \sim\neq j, \tag{6}$$

при выполнении условий (2)–(5), а также дополнительных условий, исключающих подциклы и вводимых по мере необходимости в процессе реализации вычислительной процедуры решения задачи согласно известной процедуре [4]. На каждой итерации начальное значение T в условиях (5) уменьшается, а итерации продолжаются до достижения минимального значения $T = T_{\min}$, при котором критерий (6) будет равен n, т. е. все заданные точки будут включены в маршруты. Определенные сложности при реализации процедуры, связаны с тем, что время миссии является дискретной функцией времени T.

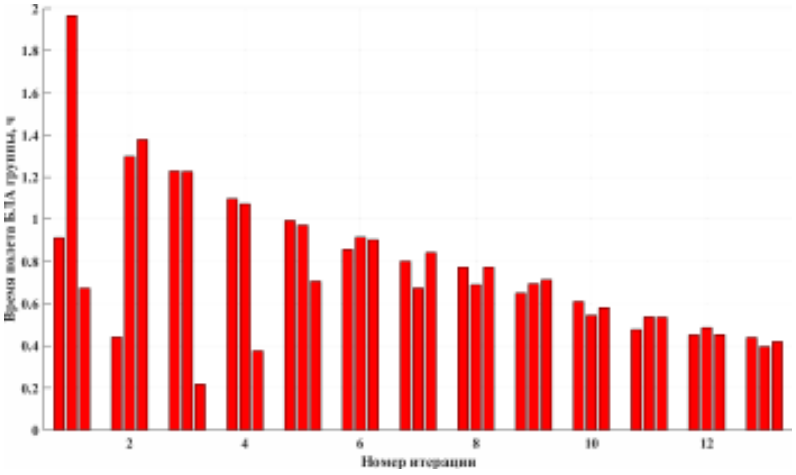


Рис. 1. Процесс нахождения минимального времени полета группы

Программный комплекс, реализованный в среде MATLAB, подтвердил работоспособность предложенной процедуры. На рисунке показаны результаты расчетов на 13 итерациях, которые потребовались для решения задачи оптимальной маршрутизации полета трех БЛА при наблюдении 15 точек. От итерации к итерации наблюдается уменьшение времени выполнения миссии, которое соответствует максимальному из длительностей полета БЛА группы. Характерным является уменьшение различия времени полета БЛА, входящих в группу.

1. *Фам С. К.* Методика планирования полета легкого беспилотного летательного аппарата: дисс. ... канд. техн. наук: 5.13.01. — М., 2013. — 155 с.
2. *Калашников А. И.*, *Моисеев Д. В.* О рациональном формировании маршрута полета легкого беспилотника с учетом его динамических характеристик // Тезисы докладов 26-ой Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», с 3 июля по 10 июля 2022 г., Евпатория, Крым, Россия. — М.: Изд-во МАИ, 2022. — С. 84–86.
3. *Toth P.*, *Vigo D.* The Vehicle Routing Problem. Society for Industrial and Applied Mathematics. — Philadelphia, PA, USA, 2002.
4. *Моисеев Д. В.*, *Чинь В. М.* Вычислительные аспекты и прикладное программное обеспечение оптимальной маршрутизации полета легкого беспилотного летательного аппарата в поле постоянного ветра // Интернет-журнал «Науковедение». — 2017. — Т. 9, №3. — URL: `http://naukovedenie.ru/PDF/102TVN317.pdf`.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ДОКУМЕНТАЦИИ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ БЕЗОПАСНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

А. В. Коробовский, Е. Р. Шевченко

МАИ, Москва, Россия

Актуальность темы обусловлена высокими рисками эксплуатации технических устройств. Только за 2024 г. количество несчастных случаев на производстве превысило отметку в 5 тысяч, 4187 — тяжелые, 1285 — со смертельным исходом и 420 — групповые.

В работе проведен анализ международных и национальных стандартов, таких как ISO 9001 и ГОСТ Р 8.568-2017, который выявил необходимость в более детализированных рекомендациях для эффективного управления безопасностью при эксплуатации испытательного оборудования.

В рамках исследования был проведен анализ рисков, связанных с безопасностью персонала, целостностью оборудования и экологическим состоянием при эксплуатации испытательного оборудования в космической отрасли.

Для обеспечения безопасности эксплуатации испытательного оборудования была разработана многоуровневая система мер, которая включила в себя технические, организационные и документационные аспекты.

Рис. 1. Схема комплексной системы мер по обеспечению безопасности эксплуатации испытательного оборудования

Разработанная многоуровневая система мер по обеспечению безопасности эксплуатации испытательного оборудования также включает в себя программу обеспечения безопасности, аттестацию и сертификацию оборудования для подтверждения его исправности, подготовку персонала с теоретическими знаниями и практическими навыками работы с оборудованием, а также регулярный контроль процесса эксплуатации, который позволяет выявлять потенциальные проблемы на ранних стадиях работ и снижать риск аварийных ситуаций (рис. 1).

Программа обеспечения безопасности эксплуатации испытательного оборудования — плановый организационно-методический документ, устанавливающий комплекс взаимосвязанных основных требований и мероприятий, направленных на выполнение, заданных в ТЗ, требований безопасности на всех этапах испытания космических средств (КСр).

Данная программа должна охватывать все ключевые этапы жизненного цикла оборудования и включать разработку инструкций, которые помогут контролировать выполнение всех предусмотренных мероприятий. Такой подход позволит систематизировать процессы и повысить уровень безопасности на всех стадиях работы с оборудованием.

Описанный в работе план аттестации испытательного оборудования включает определение нормированных точностных характеристик и их соответствия нормативно-технической документации, а также установление пригодности к эксплуатации.

Была разработана программа обучения для персонала, работающего с испытательным оборудованием, с акцентом на безопасность и соблюдение регламента процедуры эксплуатации. Программа включает ознакомление сотрудников с правилами безопасности, правилами пользования средствами индивидуальной защиты, специфическими рисками, связанными с испытательным оборудованием, а также пожарной безопасностью. Она охватывает описание правильных процедур эксплуатации, включая подготовку к испытаниям, калибровку датчиков, выполнение и документирование вибрационных испытаний, а также завершение работы с оборудованием. Практические занятия предполагают демонстрацию работы с оборудованием и участие работников в испытаниях. Форматы обучения варьируются от лекций до воркшопов, а общая продолжительность программы составляет 2–3 дня в зависимости от уровня подготовки работников.

В работе представлены различные типы испытаний на влияние внешних факторов, включая механические и термические воздействия. Отмечено, что при составлении руководства по эксплуатации необходимо соблюдать ряд рекомендаций, включая контроль за процессом испытаний (вибрация, температура, вакуум), организацию рабочего пространства с обозначением безопасных зон и установкой систем вентиляции, обеспечение работников средствами индивидуальной защиты (защитные очки, термостойкие перчатки), разработку планов действий в нештатных и аварийных ситуациях с регулярными тренировками, а также проверку герметичности вакуумных систем. Следуя этим рекомендациям и государственным стандартам, можно существенно повысить уровень безопасности и минимизировать риски для персонала и оборудования.

Таким образом, данное исследование позволило разработать многоуровневую систему мер для повышения уровня безопасности эксплуатации испытательного оборудования космических средств. На данную систему предлагается составить государственный стандарт.

1. *Александровская Л. Н. и др.* Теоретические основы испытаний и экспериментальная отработка сложных технических систем: Учеб. пособ. — М.: Логос, 2003. — 736 с.
2. Испытательная техника. Справочник в 2-х кн. / Под ред. В. В. Клюева. — М.: Машиностроение, 1982. — 1118 с.
3. *Галеев А. Г.*, *Захаров Ю. В.*, *Макаров В. П.*, *Родченко В. В.* Проектирование испытательных стендов для экспериментальной отработки объектов ракетно-космической техники. — М.: Изд-во МАИ, 2014. — 283 с.

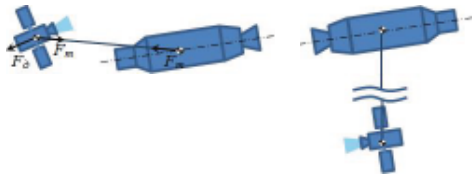
ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРНОГО ДВИЖЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ УВОДЕ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ОРБИТЫ*

***В. М. Кульков*[1], *Ю. Г. Егоров*[1], *С. О. Фирсюк*[2], *И. В. Кравченко*[1,2]**

[1]*НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

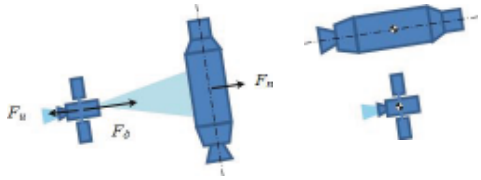
Рассматривается задача управления траекторным движением космических объектов (КО) при их уводе с орбиты с использованием контактных и бесконтактных методов. Режимы управления движением космических аппаратов основаны на регулировании силового воздействия на КО [1, 2].

На рис. 1 показана схема увода КО с орбиты контактной буксировкой, включающая этапы захвата и буксировки КО (рис. 1, *а*) и отделения КО (рис. 1, *б*). На рис. 2 показана схема увода КО с орбиты бесконтактной буксировкой, включающая этапы захвата и буксировки КО (рис. 2, *а*) и ухода от КО (рис. 2, *б*).



а *б*

Рис. 1. Схема увода КО с орбиты контактной буксировкой



а *б*

Рис. 2. Схема увода КО с орбиты бесконтактной буксировкой

При контактной транспортировке на КА действуют сила тяги двигателя $\mathbf{F}_д$ и сила натяжения троса $\mathbf{F}_т$, на КО — сила натяжения троса $\mathbf{F}_т$. При контактном способе увода КО с орбиты путем его буксировки с помощью троса, направление силы $\mathbf{F}_т$ определяется положением подвеса троса, натянутого между КА и КО. При бесконтактной транспортировке с помощью плазменного пучка движение сервисного КА осуществляется силой тяги двигателя КА $\mathbf{F}_д$ с учетом реакции источника ионного пучка (ИИП) $\mathbf{F}_и$, а движение пассивного КО — воздействием пучка $\mathbf{F}_п$.

Перевод системы «КА–КО» в транспортное положение, обеспечивающее эффективную и безопасную буксировку, достигается за счет управления относительным траекторным движением путем регулирования натяжения троса или силы тяги двигателя.

Уравнения относительного движения системы «КА–КО» в орбитальной декартовой системе координат:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 2\omega v_y + a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -2\omega v_x + 3\omega^2 y + a_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = -\omega^2 z + a_z.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ по мероприятию «Проведение исследований научными лабораториями мирового уровня в рамках реализации приоритетов научно-технологического развития Российской Федерации» (проект №25-79-30009 «Развитие теоретических основ и методов проектирования траекторий и управления орбитальным движением космических аппаратов»).

где x, y, z — координаты КА (КО); v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости КА (КО); $\omega = \sqrt{\mu/R_0^3}$ — угловая скорость орбитального движения системы «КА–КО» (здесь μ — гравитационный параметр Земли; R_0 — радиус орбиты).

Компоненты вектора ускорения составляют:

$$a_x = \frac{F}{m}\cos\upsilon\cos\psi, \quad a_y = \frac{F}{m}\sin\upsilon, \quad a_z = \frac{F}{m}\cos\upsilon\sin\psi,$$

где F — управляющая сила, m — масса КА (КО), υ и ψ — углы тангажа и рыскания силы $\mathbf{F}$.

Управление натяжением троса при его развертывании (свертывании) осуществляется приложением к нему силы $F = m(\omega^2 al + \omega b\dot{l} + \omega^2 cL)$, где l, $\dot{l}$, L — длина и скорость выпущенного троса и полная длина троса; a, b, c — коэффициенты усиления.

Целью оптимизации активного участка траектории является определение вектора тяги $\mathbf{F}$, обеспечивающего минимальный суммарный импульс: $J = \int_{t_0}^{t_f} \delta F\, dt$, где $\delta = (1 + \operatorname{sign} S)/2$ (здесь S — функция переключения).

Применяя принцип максимума Понтрягина, можно записать:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_{opt}}{\partial p_x} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H_{opt}}{\partial p_y} = v_y,$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial H_{opt}}{\partial p_{vx}} = 2\omega v_y + \delta F\frac{\partial S}{\partial p_{vx}}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial H_{opt}}{\partial p_{vy}} = -2\omega v_x + 3\omega^2 y + \delta F\frac{\partial S}{\partial p_{vy}},$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H_{opt}}{\partial x} = -3\omega^2 p_{vx}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H_{opt}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{dp_{vx}}{dt} = -\frac{\partial H_{opt}}{\partial v_x} = -p_x + 2\omega p_{vy}, \quad \frac{dp_{vy}}{dt} = -\frac{\partial H_{opt}}{\partial v_y} = -p_y - 2\omega p_{vx},$$

где оптимальный гамильтониан

$$H_{opt} = p_x v_x + p_y v_y + p_{vx}\cdot(2\omega v_y) + p_{vy}\cdot(-2\omega v_x + 3\omega^2 y) + \delta FS.$$

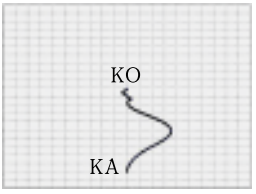
Краевые условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad v_x(t_0) = v_{x0}, \quad v_y(t_0) = v_{y0},$$
$$x(t_f) = x_f, \quad y(t_f) = y_f, \quad v_x(t_f) = v_{xf}, \quad v_y(t_f) = v_{yf}.$$

Оптимальное управление:

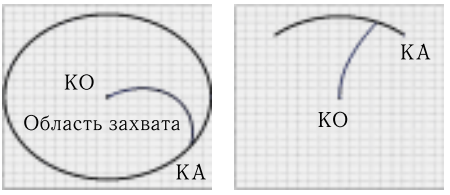
— функция переключения: $S = p_v - 1$;

— направление вектора $\mathbf{F}$: $\cos\upsilon = p_{vx}/p_v$, $\sin\upsilon = p_{vy}/p_v$, $p_v = |\mathbf{p}_v| = \sqrt{p_{v_x}^2 + p_{v_y}^2}$.



а *б*

Рис. 3. Траектория движения при уводе КО с орбиты контактной буксировкой



а *б*

Рис. 4. Траектория движения при уводе КО с орбиты бесконтактной буксировкой

Выполнено численное моделирование динамики движения связки «КА–КО», соединенных тросом при контактной буксировке и при помощи двигателя при бесконтактной буксировке для КА массой $m_1 = 200$ кг и КО массой $m_2 = 2000$ кг, уво-

димого с орбиты высотой $h = 200$ км. На рис. 3 показана траектория движения КА относительно КО в процессе свертывания троса на этапе захвата КО (рис. 3, *а*) и развертывания троса при переводе в транспортное положение (рис. 3, *б*). На рис. 4 показана траектория движения КА относительно КО в процессе активного сближения с КО на этапах захвата КО (рис. 4, *а*) и приведения в транспортное положение (рис. 4, *б*).

1. *Кульков В. М.*, *Егоров Ю. Г.*, *Юн Сон Ук*, *Кравченко И. В.*, *Булаева М. Н.* Исследования динамики движения при уводе космических объектов с орбиты тросовой буксировкой. // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023), 4–10 сентября 2023 г., Дивноморское, Краснодарский край. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — С. 586–588.
2. *Kulkov V. M.*, *Markin N. N.*, *Egorov Yu. G.* Issues of controlling the motion of a space object by the impact of the ion beam // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2020. — V. 927. — id. 012051. — P. 1–7. — DOI: 10.1088/1757-899X/927/1/012051.

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

П. В. Рубцов, И. К. Романова–Большакова

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

В ходе проектирования сложных аэрокосмических систем, особенно когда речь идет о комплексных системах управления (КСУ) воздушных судов, появляется необходимость выполнить передачу требований с верхнего (системного) уровня на более низкие уровни. Требования верхнего уровня могут быть представлены как в качественной, так и в количественной форме. Дополнительно, уже на ранних этапах проекта имеется одна или несколько потенциальных компоновок системы.

Наличие несогласованности или даже противоречивости требований, предъявляемых к отдельным компонентам системы на первом этапе проектирования, часто порождает необходимость многократно повтора проектных процедур.

С одной стороны, это закономерная реализация одного из основополагающих принципов — итерационного характера проектирования. С другой стороны, по завершению тапа проектирования, на этапе изготовления опытного образца, могут быть выявлены недостатки проектных решений, связанные, в частности, с неточными формулировками требований к частям системы. Внесение изменений в конструкцию, с учетом пересмотра и дополнений начальных требованиям к компонентам системы связано с существенными временными и ресурсными затратами и иногда невозможно. Опыт разработки КСУ демонстрирует необходимость более гибкой и тщательной проработки компоновок системы, а также повышения глубины анализа поведения системы на ранних этапах разработки.

Для решения данной задачи имеется ряд подходов. Во-первых, проводятся расчеты, позволяющие установить связь между параметрами, структурой и выходными характеристиками, используемыми при проектировании узлов системы. Помимо этого, часто прибегают к использованию унаследованного опыта из аналогичных проектов [1]. В случае использования математических расчетов (расчетного метода) выполняется силовой, скоростной, прочностной и прочие расчеты, исходя из текущий конфигурации разрабатываемой системы. Силовые расчеты выявляют возможные крутящие моменты (а также усилия) на большинстве режимах работы

системы, скоростные расчеты аналогичным образом определяют появляющиеся скорости элементов системы. Требования в части прочности изделий определяются с помощью предварительных прочностных расчетов. Аналогичным образом проводятся и иные расчеты для формирования необходимых требований к каждому из аспектов системы (будь то требования в части теплоотвода, надежности и прочего). Совокупность расчетов формирует необходимый набор значений для дальнейшей разработки технических заданий на агрегаты системы.

Но такой подход сложен в случае неустановившегося облика системы. Потребность в многовариантном анализе компоновок системы создает необходимость в проверке соответствия каждого нового облика системы требованиям технического задания верхнего уровня. Зачастую приходится принимать решение о необходимости перепроектирования системы. Особенность объектов авиационной отрасли связана с высокой степенью сложности, большим объемом задач и малыми сроками для тщательной проработки вопросов. Помимо этого, ряд требований, таких как требований в части усталости, должен учитывать временные характеристики работы системы, что является затруднительным при использовании стандартного расчетного подхода [2]. Похожим образов происходит и с требованиями к программному обеспечению электронных блоков КСУ. Для постановки требований к программному обеспечению (в особенности численных требований) необходимо учитывать динамические аспекты системы и ее функционирования, что в случае стандартного расчетного подхода сделать довольно сложно. Однако в случае использования математического моделирования данная задача становится куда более тривиальной. Это достигается за счет возможности наглядного изучения динамических особенностей работы системы, а также за счет возможности быстрого изменения параметров компонентов системы (или логики работы электронных блоков в случае проработки требований к последним).

Развитие вычислительной техники позволило проводить подобные симуляции работы системы в динамике без особых временных затрат, немалую роль также сыграла возможность использования готовых пакетов для моделирования. При этом должно быть выполнено требование эффективности вычислительных экспериментов [3]. В связи с вышеизложенное математическое моделирование может быть использовано в качестве альтернативы стандартному расчетному методу [4, 5]. Использования методов математического моделирования на ранних этапах разработки КСУ для определения производных требований к компонентам системы позволит сократить срок разработки и уменьшит количество перепроектирований и доработок системы. Важным при этом представляется возможность изучения динамики работы системы при анализе ее компоновок и установление причинно-следственных связей в сложной системе [6].

Актуальной задачей для авиационной отрасли на текущий момент является разработка методик, формализирующих подходы к определению производных требований к агрегатам достаточно сложных авиационных систем (КСУ в частности) путем математического моделирования. Формирование подхода к использованию аппарата математического моделирования позволит обеспечить внедрение новых возможностей в процесс проектирования КСУ.

1. *Аникейчик Н. Д.*, *Кинжагулов И. Ю.*, *Федоров А. В.* Планирование и управление НИР и ОКР: Учеб. пособ. — СПб: НИУ ИТМО, 2016. — 192 с.
2. *Рубцов П. В.*, *Шинкарев О. А.* // Прорывные научные исследования: проблемы, пределы и возможности: сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции, Омск, 9 февраля 2025 г. — Стерлитамак: Агентство международных исследований, 2025. — С. 107–110.

3. *Romanova-Bolshakova I. K.* Developing new strategies for modelling complex systems based on modern information technologies // AIP Conference Proceedings. — 2023. — V. 2833. — P. 020013-1–020013-9. — DOI: 10.1063/5.0151971.
4. *Маликов С. Н.* Модельно-ориентированное проектирование интеллектуальных технических систем в среде MatLab // Образовательные ресурсы и технологии. — 2018. — №2(23).
5. *Шушканова С. Г., Кропачева Д. Д., Долгачев М. В.* Применение методов математического моделирования при проектировании и строительстве зданий и сооружений // Вестник науки. — 2024. — №6(75).
6. *Романова–Большакова И. К.* Установление причинно-следственных связей в задаче выявления отказов управляемых объектов // Технологии разработки и отладки сложных технических систем: IX Всероссийская научно-практическая конференция. Т. 1 — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2024.

МАЛЫЕ КОСМИЧЕСКИЕ АППАРАТЫ. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НА ОКОЛОЗЕМНОЕ КОСМИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО*

В. В. Свотина, А. Ю. Гостев, Р. В. Ельников

НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия

Принятая классификация космических аппаратов (КА) подразумевает, что: КА массой свыше 1000 кг называют большими; КА массой в диапазоне 500–1000 кг именуют средними; КА массой 100–500 кг называют МКА (TacSat-3, NigeriaSat-2, EROS-B); КА массой 10–100 кг носят название микро — КА (SpruteSat, Astrid-1, -2); КА с массой 1–10 кг называют нано-КА (ASUSat1, SNAP-1, BEVO 1); КА с массой до 1 кг носят название пико-КА (MEMS, ANDESITE Sensor Node); КА с массой до 100 г (KickSat, Sprites) называются фемто-КА. Области возможного использования МКА довольно широки: от систематической глобальной съемки поверхности Земли (SkySat, Flock, RapidEye), интернета вещей (Starlink, OneWeb, SpaceBEE, Kepler), связи (ISARA, TUBSAT-N), метеорологии (Lemur-2), биологических экспериментов (Genesat 1) до отработки различных технологий (PTD-3, -4), в том числе отработки технологии обслуживания и ремонта других КА (XSS-11 (USA-165)) и в военных целях (Solrad-8, -9, -10; Cosmos-2535, -2536). Первые запущенные Человечеством КА были малыми (советский Sputnik-1 (PS-1) массой 83,6 кг (дата запуска 4.10.1957 г.) и американский Explorer-1 массой 8,3 кг (дата запуска 01.02.1958 г.)) и просуществовали на орбите несколько месяцев, а затем сгорели в плотных слоях атмосферы Земли, то современные КА, в том числе и МКА, запускаемые на существенно более высокие орбиты, обладают сроками существования уже в десятки и сотни лет. Наблюдаемый в последние годы бум с запуском малых космических аппаратов (МКА) (рис. 1) оказывает существенное влияние на безопасность осуществления космической деятельности.

Проведена оценка техногенного засорения низких околоземных орбит при развертывании большого числа МКА. Достоверность и полнота сведений о количестве и размерах, а также пространственном распределении КО определяются техническим уровнем используемых средств диагностики и наблюдения. Для получения данных по плотности потока частиц известны следующие способы: наземные радиолокационные и фотографические наблюдения; автоматические датчики/детекторы регистрации ударов метеоров/космического мусора на КА; прямые из-

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (соглашение №25-79-30009).

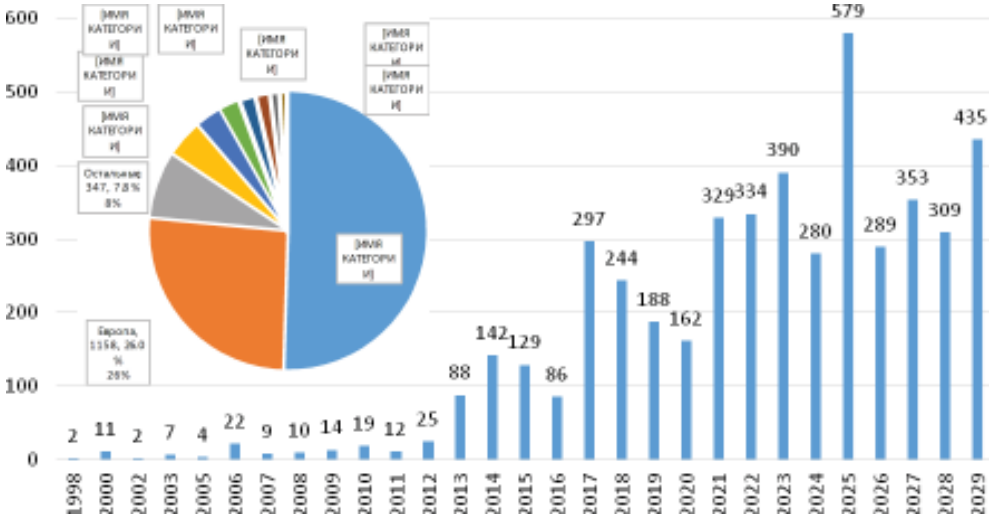


Рис. 1. Динамика числа выведенных и планируемых к запуску МКА, а также вклад в запуск различных стран на конец 2024 г.

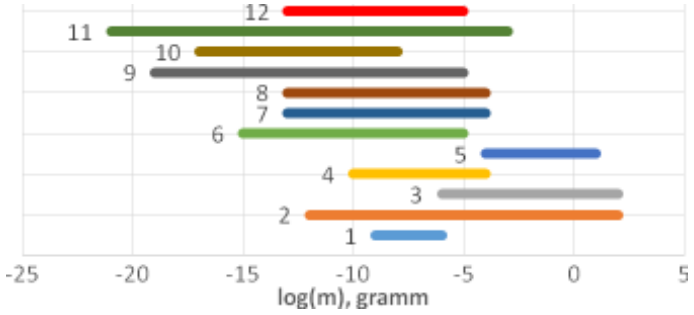


Рис. 2. Диапазоны применимости методов измерений плотности потока метеорных тел и других космических объектов: 1 — измерения на спутниках и ракетах; 2 — радарные измерения; 3 — фотометрические и визуальные методы; 4 — оценка повреждений (эрозия, каверны); 5 — оценка повреждений (пробой); 6 — атмосферный отбор; 7 — зодиакальный свет; 8 — тепловое излучение; 9 — ударная ионизация; 10 — прямые измерения; 11 — лунные микрократеры; 12 — акустические методы

мерения — непосредственное наблюдение следов соударений после экспонирования пластин и ловушек на КА и многие другие. Очевидно, что различные методы применимы для частиц различных масс (рис. 2) и имеют свои особенности.

Показано, что в долговременной перспективе до 2110 г. вывод МКА приведет к двукратному росту числа объектов космического мусора размером порядка 10 см на низких (до 2000 км высотой) орбитах по отношению к сценарию без вывода многоспутниковых орбитальных группировок. Оценочное число столкновений на высотах 400–600 км увеличится в 2 раза. Наиболее критичная обстановка в перспективе сложится на средних по высоте орбитах (900–1400 км). Общее число космических объектов на высоте около 1200 км по оценкам может увеличиться в 6 раз даже с учетом того, что 90% выведенных аппаратов в конце срока активного существования будут уведены с рабочей орбиты. Прогнозируемое число столкновений на средних орбитах потенциально возрастет на 20%. По результатам

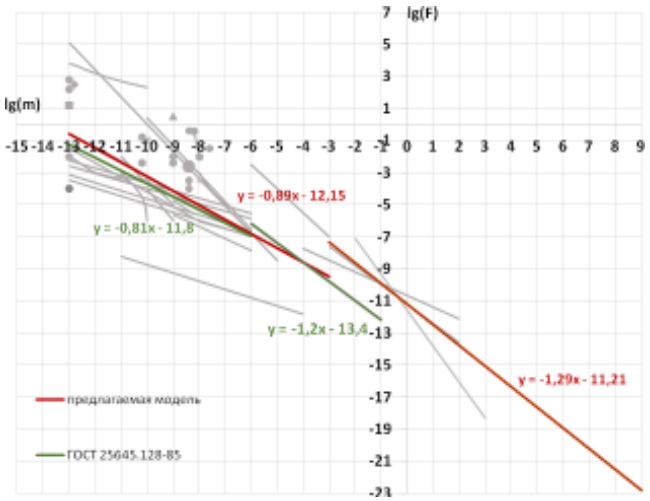


Рис. 3. Сравнительная оценка плотности потока частиц, наблюдаемых в экспериментах, согласно ГОСТ 25645.128-85 и в предлагаемой модели (серые маркеры и линии — экспериментальные данные)

оценки экспериментальных данных, а также с учетом роста концентрации числа объектов на околоземных орбитах за счет вывода многоспутниковых группировок и большого числа МКА предлагается уточнить плотность потока частиц на околоземных орбитах на основе следующих соотношений (рис. 3): для частиц массой $m = 10^{-9}$–10^{-6} г на удалении 200–1000 км — $\lg F = -12{,}15 - 0{,}89 \lg m$; для частиц массой $m = 10^{-6}$–10^{2} г на удалении до 10^{6} км — $\lg F = -11{,}21 - 1{,}29 \lg m$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА ИОНОВ, ИНЖЕКТИРУЕМЫХ ДВИГАТЕЛЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

М.В. Черкасова

НИИПМЭ МАИ, Москва, Россия

МКС предоставляет большие возможности для испытания различных космических систем и проведения научных экспериментов. В настоящее время в стадии разработки находится комплексный научный проект по экспериментальному изучению особенностей работы ионного двигателя в условиях космоса, а также изучению распространения компенсированного ионного пучка в ионосферной плазме с учетом влияния магнитного поля Земли.

Применение ионных двигателей на борту космических аппаратов ставит, наряду с другими, задачу изучения движения потока заряженных частиц, впрыскиваемых с космического аппарата в магнитное поле Земли. Движение заряженных частиц в магнитном поле происходит под действием электромагнитной силы Лоренца, вызывающей равномерное вращение по окружности или спирали в зависимости от угла между вектором скорости частицы и направлением линий магнитного поля. В таком периодическом движении частицы могут достигать конструктивных элементов космического аппарата, оказывая негативное воздействие на их поверхность. В рамках космического эксперимента будут изучены особенности движения ионов в ионосферной плазме путем обнаружения ионов бортовым детектором.

Для того чтобы сделать возможным обнаружение возвращающихся ионов пучка в ходе эксперимента, необходимо определить условия в углах инжекции ионов и соответствующих углах возвращения ионов к космическому аппарату с учетом жестких ограничений, предусматривающих недопустимость контакта ионов с отдельными конструктивными элементами МКС (солнечные батареи, посторонние модули и др.). Набор таких требований может быть выполнен на определенных участках траектории МКС и в определенные моменты времени. Целью моделирования является определение допустимых участков траектории МКС для осуществления экспериментальных измерений.

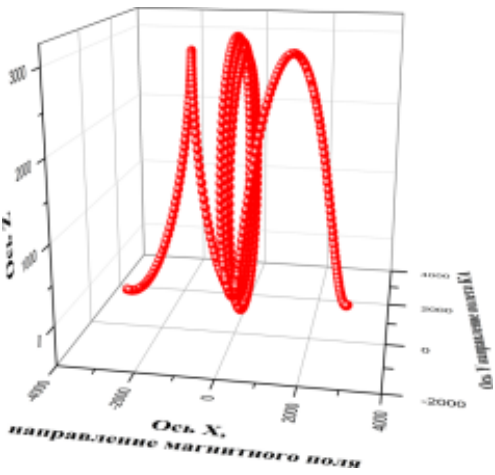


Рис. 1. Формирование спиральной траектории ионов в магнитном поле

Для анализа сближения потока ионов с МКС был разработан программный блок, который по заданному вектору магнитного поля и вектору скорости КА просматривает варианты движения пучка ионов и отбирает значения углов инжекции, обеспечивающие сближение пучка с МКС на расстояние менее заданного. Поскольку, при инжекции ионов полуугол расходимости пучка составляет примерно 15°, ионы двигается по спиралям постоянного радиуса. При этом, период обращения ионов одинаков, так как не зависит от скорости и угла.

При движении в пространстве поперечное сечение потока ионов имеет вид эллипса. Периодичность вращения приводит к тому, что поток то расширяется, то сужается. В области шага спирали происходит фокусировка пучка, т. е. имеет место минимальная площадь эллипса сечения и максимальная плотность тока ионного пучка. Правилом отбора точек проведения эксперимента также является время сближения: время должно лежать в пределах первого витка спирали, поскольку далее поток начинает рассеиваться за счет упругих столкновений с ионосферными атомами, и его будет труднее детектировать.

Таблица 1

Параметры ионного пучка при встрече с МКС

Широта, град	Тангаж ОСК, град	Курс ОСК, град	φ, град	λ, град	Min дистанция до КА, м	Площадь пучка на min дистанции, км^2	Плотность тока в пучке, мА/м^2	Радиус спирали, м
			Углы подлета к КА					
Широта 19°	−23,7	229,4	37,56	258,72	17	2,3	0,05	1998
	−15,2	221,7	47,81	264,0	68	3,1	0,04	2039
	−17,1	220,1	47,65	265,14	29	2,8	0,04	2030
Широта 35°	−26,2	202,4	61,76	264,77	15	2,1	0,06	1715
	−28,9	207,7	58,14	256,01	50	11	0,01	1700

Было выполнено моделирование движения инжектируемых ионов в магнитном поле Земли на различных широтах для определения оптимальных условий проведения эксперимента. Магнитное поле Земли рассчитывалось на основании данных программы GEO. Выявлено, что встреча пучка ионов с МКС не происходит, если курс вектора индукции магнитного поля в орбитальной системе координат (ОСК) более 90°. Для острых углов курса пересечение траектории пучка ионов и КА возможно практически на любой широте траектории МКС в северном полушарии. Причем формируются группы близких углов инжекции центрального иона, при которых поток попадает на поверхность КА. В табл. 1 приведены примеры выбранных широт для проведения эксперимента.

С учетом дискретности моделирования можно сделать вывод о наличии диапазона подходящих углов инжекции в размере 5°–10° для широт северного полушария. Таким образом, расчеты показали, что, несмотря на полуугол расходимости инжектируемого пучка ионов 15° и нестабильность курса МКС (погрешность порядка 10°), а также изменение магнитного поля Земли, возможно детектирование попадания ионов, испущенных с аппарата на поверхность самого аппарата.

1. *Пушкин Н. М.*, *Мельников Б. А.*, *Гомилка Л. А.*, *Лапшинова О. В.*, *Машков А. С.*, *Антропов Н. Н.* Динамика электрических полей в приповерхностной области космического аппарата во время выброса плазмы с орбитальной станции «Мир» // Космические исследования. — 1997. — Т. 35, №4. — С. 442–444.
2. *Корсун А. Г.*, *Твердохлебова Е. М.*, *Габдуллин Ф. Ф.* Динамика искусственных плазменных образований в космосе // В сб.: Модель космоса. Т. II. Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов. — М.: Книжный дом Университет (КДУ), 2007. — С. 918–945.
3. *Akhmetzhanov V.*, *Bogatiy A.*, *Obukhov V.*, *Plokhikh A.*, *Popov G.*, *Cherkasova M.*, *Zhilchenko K.*, *Shemukhin A.*, *Konoshenko V.*, *Lapshinova O.* Preparation of Space Experiment with Electric Propulsion System Based on Radio-Frequency Ion Thruster aboard the International Space Station // Proc. 36 Int. Electric Prop. Conf. Austria, Vienna, 2019, 15–20 Sept. — IEPC-2019-238. — URL: `https://electricrocket.org/2019/238.pdf`.

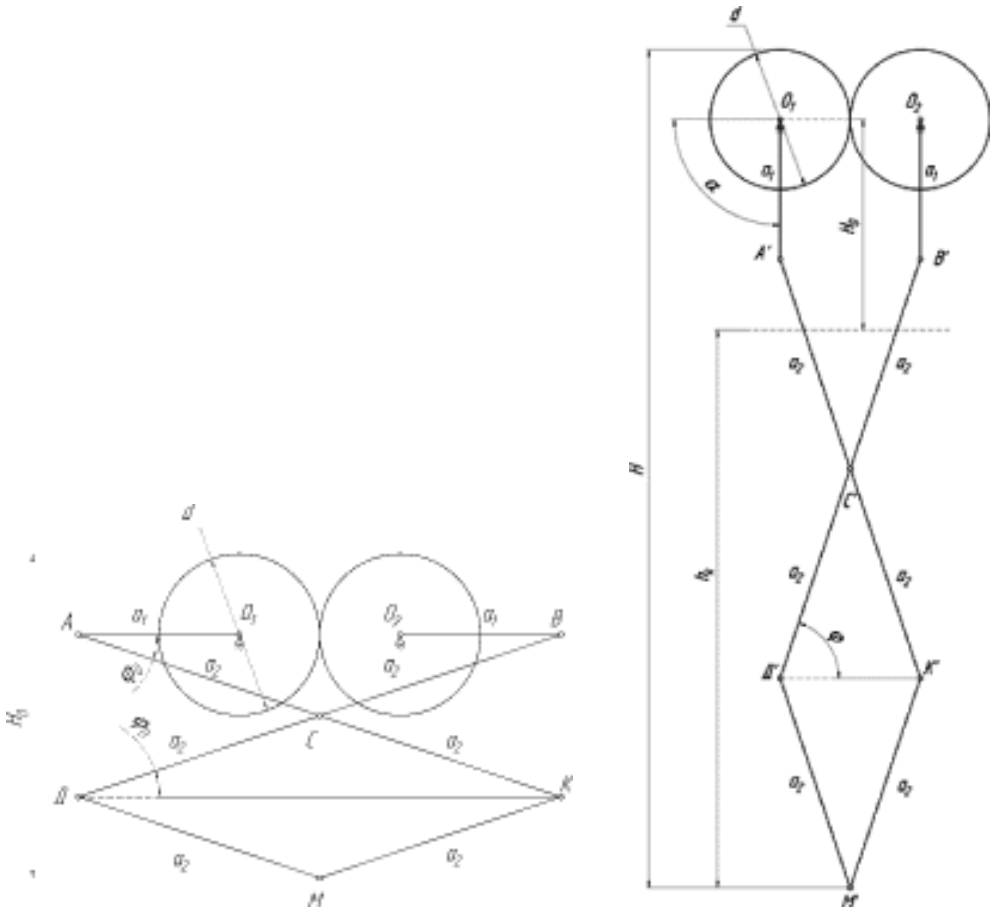
СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕЕЧНО-ЗУБЧАТОГО НОЖНИЧНО-РОМБИЧЕСКОГО ТОЛКАТЕЛЯ

В. Н. Чубиков, К. М. Тихонов, В. В. Тишков, И. С. Купченко

МАИ, Москва, Россия

В докладе представлена математическая модель для расчета (синтеза) оптимальных геометрических параметров реечно-зубчатого ножнично-ромбического толкателя (РЗРНТ) [1], являющегося основным элементом механизма катапультирования (МК) для принудительного отделения ракеты от самолета-носителя (СН) в составе авиационных катапультных устройств (АКУ).

АКУ служат для размещения, закрепления, а главное — надежного принудительного отделения управляемых ракет от СН на определенное контактное расстояние h_k с некоторой дополнительной скоростью V_h без запуска двигателей. Кроме пиротехнических приводов, бортовых электроразъемов связи с ракетой, устройств сигнализации наличия ракеты и т. д., основными элементами АКУ являются принципиально различные конструкции МК, выполненные либо в виде «толкателей», либо в виде «системы выводных рычагов» [2].



а *б*

Рис. 1. Кинематическая схема РЗНРТ: *а* — в исходном (стартовом) состоянии; *б* — при полном ходе катапультирования

В АКУ, где механизмы катапультирования выполнены в виде поршневых толкателей, сила давления на ракету действует строго по нормали к ее продольной оси, что должно увеличивать точность отделения груза. Однако в связи с тем, что строительная высота h_0 корпуса АКУ ограничена (в пределах 200 мм), ход контактного расстояния h_k катапультирования таких установок не превышает 100 мм [2]. Вследствие этого для достижения необходимой скорости отделения ракеты V_h необходимо отталкивать ее с большой перегрузкой n (до 10), что негативно сказывается на точности отделения ракеты и на надежности работы ее электромеханических элементов.

В АКУ рычажного типа МК выполнены в виде поворотных рычагов. Согласно источнику [2] вертикальная составляющая скорости ракеты при отделении с помощью таких установок должна составлять $V_h \geq 5$ м/с при времени движения ракеты на АКУ $t = 0{,}15$ с. Следовательно, можно сделать вывод о том, что ход контактного отделения при этом может достигать величины $h_k \approx 400$ мм. Достоинством МК такого типа является более низкая перегрузка n, действующая на отделяемую ракету, по сравнению с АКУ поршневого типа. Однако, вектор полной силы давления,

действующей на ракету, вследствие поворота рычагов движется по окружности, изменяя свое направление. Поэтому в процессе катапультирования нормальная составляющая полной силы, отвечающая за вертикальное движение отделяемого груза будет уменьшаться, а продольная (тангенциальная) сила, движущая ракету вдоль его продольной оси — будет увеличиваться, что также негативно скажется на точности отделения ракеты от СН [3].

Таким образом, возникла задача о создании механизма принудительного отделения АКУ, одновременно обеспечивающего как постоянство направления полной силы давления по нормали к продольной оси ракеты в течение всего процесса катапультирования (аналогично АКУ поршневого типа), так и ход катапультирования, близкий по величине к ходу катапультирования АКУ рычажного типа. При этом строительная высота h_0 корпуса АКУ, в котором данный механизм будет использован, должна быть сравнима со строительной высотой существующих моделей катапультных устройств.

Таким условиям удовлетворяет РЗРНТ, сочетающий преимущества механизмов катапультирования рычажного и поршневого типа.

После разработки общей концепции РЗРНТ и проектировочного расчета реечно-зубчатой передачи возникла задача синтеза его рычажных элементов. Обязательными условиями синтеза являются:

1) высота механизма в сложенном состоянии $H_0 \le h_0 = 200$ мм (рис. 1, *а*);

2) ход катапультирования $h_k = 400$ мм (рис. 1, *б*);

3) делительный диаметр зубчатых колес $d = 100$ мм (значение выбрано из соображений прочности).

Желательным условием синтеза является максимально возможное значение начального угла между звеньями φ_0 (угла давления), при котором механизм толкателя удовлетворяет обязательным условиям синтеза.

На рис. 1 обозначены: a_1 — рычаги зубчатых колес; a_2 — рычаги ромбического толкателя; d — делительный диаметр зубчатых колес; H_0 — высота механизма в сложенном состоянии; h_k — ход катапультирования; φ, φ_0 — угол давления в открытом и сложенном положениях; H — общая высота механизма в сработанном состоянии.

Система уравнений, описывающая условия синтеза, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 3a_2\sqrt{1-\left(\dfrac{d/2+a_1}{a_2}\right)^2}+\dfrac{d}{2}\le 200; \\ 3a_2\sqrt{1-\left(\dfrac{d/2+a_1}{a_2}\right)^2}+a_1\sin(\alpha)-3a_2\sqrt{1-\left(\dfrac{d/2+a_1}{a_2}\right)^2}=400; \\ \max\left(\arccos\left(\dfrac{d/2+a_1}{a_2}\right)\right). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений было проведено при помощи программного кода, записанного в системе математического моделирования MATLAB (в данной статье не приводится). В результате вычислений получено: $a_1 = 99{,}96$ мм, $a_2 = 158{,}05$ мм, $\varphi_0 = 18{,}41°$, $H_0 = 199{,}75$ мм.

1. *Чубиков В. Н.*, *Тихонов К. М.*, *Тишков В. В.*, *Купченко И. С.* Авиационное катапультное устройство. Заявка на изобретение №2024110850 от 19.04.2024.
2. Агрегаты подвески авиационных средств поражения, применяемых на самолете Су-30М: Учеб. пособ. / Под ред. А. И. Данеко. — М.: Эдитус, 2019. — 90 с.
3. *Щербаков Б. Ф.* Авиационные ракетные комплексы: Учеб. пособ. — СПб: БГТУ, 2012. — 64 с.

Секция I **ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ KANBAN-МЕТОДА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

М. В. Бахиркин

МАИ, Москва, Россия

Введение. В условиях постоянного развития цифровых технологий и гибких подходов к управлению проектами возникает необходимость адаптации этих методов к образовательной среде. Одним из таких эффективных инструментов является Kanban — визуальный метод управления процессами. Изначально разработанный для промышленного производства, Kanban успешно интегрировался в сферу информационных технологий (ИТ), а сегодня находит применение и в образовательных технологиях, особенно при организации командной работы студентов. Сейчас, как никогда, существует потребность в современных методах координации совместной деятельности учащихся, повышения их вовлеченности и самостоятельности, особенно в условиях дистанционного и гибридного обучения. Использование Kanban помогает студентам развивать навыки самоуправления, приоритезации задач и взаимной ответственности — качества, которые высоко востребованные в современном профессиональном мире.

История Kanban. Kanban разработан в середине XX века инженером Тайити Оно как часть системы бережливого производства Toyota. Изначально целью Kanban было устранение избыточных запасов и повышение эффективности производственных процессов. Система опиралась на принципы «точно в срок», где каждая стадия процесса инициируется по мере необходимости, а не на основе планирования [1]. Ключевая идея Kanban заключалась в визуализации потока работ: каждая задача представлялась в виде карточки, перемещающейся по доске между стадиями «Запланировано», «В работе» и «Готово». Это позволяло участникам производственного процесса мгновенно видеть текущее состояние дел и оперативно устранять узкие места. С начала века Kanban получил широкое распространение в сфере ИТ. Такой успех объясняется способностью Kanban адаптироваться к изменяющимся условиям и эффективно управлять потоком. В отличие от более строгих моделей управления Kanban предлагает инкрементальный и визуально понятный способ организации работы. Постепенно система Kanban вышла за рамки производственной сферы. Благодаря своей универсальности и наглядности, она стала основой для многих Agile-методологий. Впоследствии этот подход начал применяться и в образовательных технологиях — в качестве инструмента организации учебного процесса и командной проектной деятельности студентов [2]. Визуальная модель Kanban-доски обеспечивает прозрачность процесса: все члены команды могут видеть текущий статус задач, оценивать приоритеты и распределять усилия.

Основа Kanban, принципы, практики, ценности. Фундаментальные положения Kanban сформулированы Дэвидом Андерсоном. Kanban основывается на трех ключевых принципах. Во-первых, внедрение Kanban начинается с анализа текущей

ситуации — важно «начать с того, что есть», не нарушая существующие процессы. Во-вторых, изменения должны происходить постепенно. В-третьих, метод поощряет лидерство на всех уровнях. Практическое применение Kanban опирается на шесть основных элементов. Ключевым среди них является визуализация процесса, которая достигается через использование Kanban-досок. Ограничение незавершенной работы позволяет избежать перегрузки, тогда как управление потоком помогает команде отслеживать темпы выполнения задач и устранять задержки. Ценностный каркас метода включает девять составляющих: прозрачность, сотрудничество, фокус, баланс, лидерство, эмпатию, уважение, поток и стремление к совершенствованию.

Применения Kanban подхода при обучении студентов. Современное образование требует от преподавателей и студентов высокой степени самоорганизации, особенно в рамках проектного и дистанционного обучения. В этих условиях Kanban демонстрирует свою эффективность как инструмент, способствующий формированию у студентов навыков командной работы, визуального мышления, приоритезации задач и гибкого управления временем. Он предоставляет студентам простую, но мощную структуру для распределения ответственности и отслеживания прогресса. Преподаватель, выступающий в роли фасилитатора, помогает студентам организовать Kanban-доску. Такой подход позволяет каждому участнику видеть, на какой стадии находится проект, какие задачи выполнены, а какие требуют внимания. В условиях цифрового взаимодействия визуальные инструменты становятся особенно важными. Kanban-доска обеспечивает «прозрачность процессов», позволяя каждому студенту ощущать свою значимость и вклад в общее дело. Кроме того, применение Kanban благотворно влияет на формирование навыков коллективного принятия решений и распределенного лидерства. Методики сотрудничества с применением информационно-коммуникационных технологий формируют у студентов умение конструктивного взаимодействия, взаимной помощи и оценки собственной эффективности [3]. Таким образом, внедрение Kanban в образовательный процесс способствует не только повышению эффективности учебных проектов, но и формированию у студентов метапредметных компетенций, востребованных в настоящее время. Среди возможных инструментов, подходящих для внедрения Kanban, можно выделить следующие: Jira, Notion, Kanboard, ClickUp, Kaiten. Использование этих платформ позволяет преподавателям и студентам без лишних затрат внедрить Kanban в учебную деятельность и повысить ее результативность.

Заключение. Kanban зародился как инструмент организации производственного процесса, но за последние десятилетия превратился в универсальный метод управления, нашедший свое место в самых разных сферах, включая информационные технологии и образование. Его философия, основанная на прозрачности, сотрудничестве и постоянном совершенствовании, делает его особенно ценным в условиях современной образовательной среды, где акцент смещается в сторону гибкости, командной работы и цифровой грамотности. Применение Kanban в обучении студентов, особенно в рамках групповых проектов, способствует не только повышению эффективности выполнения учебных заданий, но и развитию навыков коммуникации, распределения ответственности, приоритезации задач и саморефлексии. Такой подход делает обучение более осмысленным и ориентированным на практику. Доступность множества бесплатных цифровых инструментов для реализации Kanban подхода делает его внедрение практически беспрепятственным. Все это позволяет утверждать, что Kanban — не просто метод, а мощный образовательный ресурс, который способен существенно повысить качество командной работы студентов и эффективность всего учебного процесса.

1. *Гаязова Е. Э.*, *Стригунов В. В.* О применении доски Kanban в разработке программного обеспечения // Дневник науки. — 2019. — №6(30).
2. *Васева Е. С.*, *Терегулов Д. Ф.*, *Бужинская Н. В.* Применение подходов Scrum и Kanban при дистанционном обучении будущих ИТ-специалистов // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. — 2021. — №2(45).
3. *Хмаренко Н. И.* Алгоритм обучения студентов иноязычной письменной речи на основе педагогической технологии «Обучение в сотрудничестве» с применением ИКТ // Вестник Тамбовского университета. — 2022. — Т. 27, №3.

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

О. Л. Демидова

МАИ, Москва, Россия

Предлагается базовый курс для изучения численных методов для студентов математических факультетов МАИ. Традиционно курс «Численные методы» объединяет большинство разделов высшей математики: общей алгебры, математического анализа, линейной алгебры и дифференциальных уравнений. Фактически курс «Численные методы» переводит исследование из области теоретических вопросов в сферу прикладного применения. Курс численных методов также можно трактовать как своеобразное связующее звено между высшей математикой и информационными технологиями, которое позволяет моделировать практически любые физические процессы в рамках виртуальной реальности.

Классические основные темы курса «Численные методы» подразумевают изучение методов решения нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, методов приближения функций, а также решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Классический курс может быть также дополнен задачами оптимизации или задачами решения уравнений в частных производных [1]. Помимо теоретических выкладок и обоснований курс должен содержать практическое наполнение. Часто предусматривается либо серия практических заданий, либо лабораторные работы, в которых нужно реализовать предложенные методы и показать конечные ответы в представленных задачах. Поэтому, часто практические занятия по численным методам проводятся с привлечением среды MATLAB или различных сайтов-калькуляторов. При этом формируются только исходные данные, а сама процедура построения алгоритма прячется за хорошо отлаженными процедурами MATLAB или в готовых программных продуктах сайтов-калькуляторов, что не способствует развитию навыков отладки алгоритма. Несомненно, что все задачи численных методов можно программировать, но для этого необходима не только соответствующая материальная база, но также знание языков программирования (Python, C++, Fortran), которые можно расширять и специальными библиотеками алгоритмов и графическими модулями.

Отличительной особенностью предлагаемого курса численных методов является подбор задач для практических занятий или лабораторных работ, дополненных комментариями к их решению. Всего сформировано 16 блоков заданий. Каждое задание имеет 48 индивидуальных вариантов, которые рассчитаны на работу в нескольких студенческих группах, а также наборов альтернативных методов для решения поставленной задачи [2, 3]. Так, например, систему линейных алгебраиче-

ских уравнений можно решить четырмя способами (метод Гаусса, метод Жордана–Гаусса, метод LU-разложения, методом итераций), корни нелинейного уравнения определяются пятью способами (метод Ньютона, метод секущих, метод хорд, метод парабол, метод итераций), а для решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно показать до 50 явных и неявных методов фиксированных порядков точности. Такой подход к формированию курса позволяет строить индивидуальные задания для каждого студента в группе с учетом особенностей техники программирования, сформированной индивидуальной библиотеки пользователя, а также отдельных возможностей графической поддержки. Большое разнообразие альтернативных методов способствует и построению определенного рейтинга в студенческой группе, поскольку можно выбирать трудоемкие и быстрые алгоритмы или пользоваться более слабыми альтернативными методами с очевидным проигрышем во времени исполнения. Такой курс Численных методов с индивидуальными практическими заданиями был опробован в 2024/2025 учебном году. Предложенный курс готов к публикации.

1. *Пирумов У. Г.* Численные методы: Учеб. пособ. — 3-е изд. — М.: Дрофа, 2004. — 224 с.
2. *Демидова О. Л.*, *Малинина Н. Л.* Решение систем линейных алгебраических уравнений, алгебраических и трансцендентных уравнений в электронных таблицах. — М.: Изд-во МАИ, 2017. — 48 с.
3. *Демидова О. Л.*, *Малинина Н. Л.* Нелинейные системы. Теория приближений функций. Практика вычислений в электронных таблицах. — М.: Изд-во МАИ, 2021. — 48 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЗИЦИОННОЙ И ПРОГРАММНОЙ СТРАТЕГИЙ ПРОХОЖДЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПО ВРЕМЕНИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ТЕСТА

С. В. Иванов, Я. Г. Мартюшова, А. В. Наумов, А. Е. Степанов

МАИ, Москва, Россия

Рассматриваются различные постановки задачи построения стратегии прохождения ограниченного по времени теста. Вектором случайных параметров задачи является вектор $Z = \mathrm{col}(X^{\mathrm{T}}, Y^{\mathrm{T}})$, состоящий из двух подвекторов X и T. Координаты вектора X моделируют правильность решения тестируемым i-го задания теста, состоящего из n заданий. Предполагается, что X_i, $i = \overline{1, n}$, являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение Бернулли, с параметрами p_i, $i = \overline{1, n}$, оцениваемыми частотой правильных ответов тестируемого на аналогичные задания i-го типа в ходе подготовки к тестированию или в процессе обучения. Равенство 1 случайной величины X_i моделирует правильность решения тестируемым i-го задания, а равенство 0 — противоположное событие. Координаты вектора T моделируют время ответа пользователя на соответствующее задание теста. Случайные величины T_i, $i = \overline{1, n}$, также предполагаются независимыми. Однако предполагать независимость между величинами X и T было бы опрометчиво, поэтому для каждого значения X_i (0 или 1) оценивается свое условное распределение случайной величины T_i также на базе статистики решения тестируемым заданий аналогичного типа. За каждое i-е задание теста начисляется b_i баллов. Время выполнения теста ограничено величиной $\overline{T}$. Пусть $\alpha \in (0; 1)$ — величина доверительной вероятности, $\mathrm{M}[\cdot]$ — математическое ожидание, $\mathrm{P}\{\cdot\}$ — вероятность. Программная стратегия тестируемого определяется вектором булевых переменных

$u \in \{0;1\}^n$, где $u_i = 1$, если тестируемый пытается решить i-е задание теста, и $u_i = 0$, если тестируемый не пытается решить i-е задание теста.

Проводится сравнительный анализ поиска программной стратегии в следующих постановках:

1) по критерию максимизации среднего числа набранных за тест баллов [1]:

$$\mathrm{M}\Big[\sum_{i=1}^{n} u_i X_i b_i\Big] \to \max_{u\in\{0,1\}^n} \tag{1}$$

при ограничении:

$$\mathrm{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n} u_i T_i \le \overline{T}\Big\} \ge \alpha. \tag{2}$$

2) по критерию максимизации вероятности преодоления необходимого порога баллов [2]:

$$P_{\varphi,\overline{T}(u)} \to \max_{u\in\{0,1\}^n}, \tag{3}$$

$$P_{\varphi,\overline{T}(u)} = \mathrm{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n} u_i X_i b_i \ge \varphi, \sum_{i=1}^{n} u_i T_i \le \overline{T}\Big\}, \tag{4}$$

где φ — необходимое количество баллов для прохождения теста;

3) по квантильному критерию [3]:

$$\varphi \to \max_{\varphi\in R, u\in\{0,1\}^n} \tag{5}$$

при ограничении

$$P_{\varphi,\overline{T}}(u) \ge \alpha. \tag{6}$$

Кроме того, рассматривается динамическая задача поиска позиционной стратегии тестируемого [4]. Шагом в динамической системе является рассмотрение очередного задания теста. Пусть тестируемому последовательно предлагаются задания теста от первого до n-го, τ_k — время, затраченное на выполнение первых k заданий, а $s_k x$ — балл, набранный за это время. Тогда динамика системы описывается уравнениями

$$\tau_k = \tau_{k-1} + T_k u_k(\tau_{k-1}, s_{k-1}), \tag{7}$$

$$s_k = s_{k-1} + b_k X_k I\{T_k \le \overline{T}\} u_k(\tau_{k-1}, s_{k-1}), \tag{8}$$

$$\tau_0 = 0, \quad s_0 = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где $I\{\cdot\}$ — индикатор события, стоящего в скобках, равный 1, если условие выполнено, и равный 0 в противном случае. Здесь в роли позиционного управления выступает вектор-функция $U = \big(u_1(\tau_0, s_0), u_2(\tau_1, s_1), \ldots, u_n(\tau_{n-1}, s_{n-1})\big)$, каждая координата которой может принимать значения 0 или 1 в зависимости от текущего состояния системы. Обозначим через $S(U)$ случайную сумму баллов s_n. Тогда задача поиска позиционной стратегии тестируемого по вероятностному критерию может быть записана следующим образом:

$$P^1_{\varphi,\overline{T}}(u) = \mathrm{P}\{S(U) \ge \varphi\} \to \max_{U\in\mathbf{U}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{U}$ — класс позиционных стратегий, описанный выше.

Обсуждаются алгоритмы решения задач в рассмотренных постановках. Проводится сравнительный анализ полученных оптимальных стратегий.

1. *Степанов А. Е.* Максимизация среднего числа набранных баллов в ограниченном по времени теста // Моделирование и анализ данных. — 2025. — Т. 15, №1.
2. *Наумов А. В.*, *Устинов А. Э.*, *Степанов А. Е.* О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста // Автоматика и телемеханика. — 2024. — №1. — С. 97–108.
3. *Наумов А. В.*, *Мартюшова Я. Г.*, *Степанов А. Е.* Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию // Информатика и ее применения. — 2024. — Т. 18, Вып. 4. — С. 44–51.
4. *Иванов С. В.*, *Степанов А. Е.* Оптимизация по вероятностному критерию в динамической модели прохождения теста // Автоматика и телемеханика. — 2025 (принята к публикации).

СИСТЕМА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОНЛАЙН-СОРЕВНОВАНИЙ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

С. В. Кузнецова, А. В. Крючков

МАИ, Москва, Россия

Современные тенденции развития информационных технологий и цифровизации образования обусловили растущий интерес к онлайн-соревнованиям по программированию как эффективной форме подготовки IT-специалистов и развития алгоритмического мышления.

Актуальность разработки специализированных web-платформ для проведения соревнований обусловлена необходимостью преодоления ограничений традиционных форм организации. Цифровые платформы позволяют унифицировать процессы тестирования, автоматизировать проверку решений и обеспечить равный доступ к участию независимо от расположения конкурсантов. Переход в онлайн-среду также снижает зависимость от ресурсоемких организационных процедур, таких как аренда помещений или привлечение большого числа персонала для организации мероприятия.

С точки зрения образования, такие платформы способствуют интеграции соревновательных механизмов в учебный процесс, предоставляя обучающимся возможность применять теоретические знания на практике в режиме реального времени. Это особенно значимо в условиях роста популярности дистанционных форм обучения, где требуется минимизация временных задержек и оперативная обратная связь.

Современные платформы должны обеспечивать поддержку множества языков программирования, безопасное выполнение кода в изолированных средах, защиту от несанкционированного доступа и плагиата, а также генерацию аналитических данных для участников и организаторов. При этом важным фактором является масштабируемость решений, позволяющая обслуживать одновременно тысячи пользователей без снижения производительности.

Проблемы существующих решений (Codeforces, LeetCode, Яндекс.Контест):

1. Закрытый исходный код (непрозрачность, ограниченная адаптация).

2. Зависимость от проприетарных технологий.

Разработана и реализована web-платформа для проведения соревнований по программированию, объединяющая безопасную среду выполнения кода, гибкую

систему управления соревнованиями, автоматизацию проверки решений и интуитивный интерфейс для пользователей.

Решение обеспечивает преимущества открытого исходного кода, масштабируемость и защиту данных, что делает его эффективным инструментом для внедрения в образовательные процессы. Прозрачность реализации позволяет адаптировать платформу под различные сценарии использования, а модульная архитектура гарантирует гибкость в управлении и независимость от коммерческих провайдеров.

Разработанная платформа отличается от Codeforces современным интерфейсом и открытым исходным кодом, что обеспечивает прозрачность, гибкость настройки и независимость от коммерческих и геополитических факторов. В отличие от закрытой архитектуры Codeforces, система позволяет адаптировать функционал под любые задачи, гарантируя безопасность через контейнеризацию и масштабируемость микросервисов.

Приведем основные характеристики разработанной web-платформы для проведения соревнований по программированию.

Ключевые требования:

1. Функциональные: Управление соревнованиями, автоматическая проверка решений, динамические рейтинги, аналитика.

2. Нефункциональные: Безопасность (Docker-песочницы), масштабируемость (Kafka, микросервисы).

Технологический стек:

1. Бэкенд: Node.js, TypeScript, NestJS, PostgreSQL, Redis.

2. Фронтенд: Next.js, TypeScript, React.

3. Инфраструктура: Docker, Apache Kafka для асинхронной обработки задач.

4. Безопасность: JWT-аутентификация, изоляция кода в контейнерах.

Архитектура:

1. Core API (NestJS) — бизнес-логика и REST API.

2. Judge Service — проверка решений в Docker-контейнерах с ограничениями ресурсов.

3. Frontend (Next.js) — интерфейс для управления соревнованиями и мониторинга.

4. Kafka — распределенные очереди для обработки задач.

5. СУБД: PostgreSQL (структурированные данные), Redis (токены, кэширование).

Особенности реализации:

1. Блокировка сетевых запросов и доступа к файловой системе в контейнерах.

2. Горизонтальное масштабирование через микросервисы и контейнеризацию.

Результаты:

1. Разработана платформа с открытым исходным кодом, устраняющая зависимость от закрытых решений.

2. Обеспечена безопасность через изоляцию кода и защиту данных.

3. Возможна ее интеграция в университеты и IT-компании для оценки навыков разработчиков.

Практическая ценность:

1. Использование в образовательных процессах для автоматизации проверки знаний.

2. Корпоративные соревнования для отбора кандидатов.

3. Адаптация под локальные требования за счет открытого кода.

Вывод. Решение предлагает альтернативу существующим платформам, сочетая прозрачность, безопасность и масштабируемость для цифровизации образования и рынка труда. Платформа может быть интегрирована в деятельность высших учеб-

ных заведений, в качестве инструмента для проведения олимпиад, контрольных работ и практических заданий. Ее модульная архитектура позволяет адаптировать функционал под специфические требования образовательных программ.

С другой стороны, актуальность разработки связана с запросами IT-индустрии, где работодатели заинтересованы в объективной оценке навыков разработчиков. Системы онлайн-соревнований могут выступать инструментом для отбора кандидатов, предоставляя стандартизированные метрики оценки, такие как эффективность алгоритмов, корректность кода и скорость выполнения задач. Это способствует сокращению времени на адаптацию новых сотрудников и повышению качества кадрового резерва.

1. *Кузнецова С. В.* Разработка web-сервисов и приложений // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023), 4–10 сентября 2023 г., Дивноморское, Краснодарский край. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — С. 624–626.
2. Чекеры [Электронный ресурс]. — URL: `https://codeforces.com/blog/entry/1292`.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ

М. Е. Кули-заде

МАИ, Москва, Россия

Авиационная промышленность относится к ряду приоритетных направлений. В настоящее время разработана государственная программа Российской Федерации «Развитие авиационной промышленности». В рамках указанной программы плановыми показателями развития авиационной промышленности к 2035 г. являются: увеличение объема производства промышленных предприятий отрасли; увеличение доли гражданской продукции в общем объеме выпуска продукции отрасли авиастроения; увеличение доли самолетов и вертолетов российского производства в парке российских авиаперевозчиков; увеличение производительности труда в промышленных предприятиях отрасли авиастроения и др.

МАИ является одним из ведущих вузов среди высших учебных заведений России в области авиации, ракетостроения и космоса.

Подготовка инженерных кадров в аэрокосмической отрасли требует большого объема практик, лабораторных занятий на сложном оборудовании и индивидуальной подготовки студентов.

Образование должно включать совокупность достаточных, и взаимосвязанных элементов как фундаментальной направленности, так и элементов, ориентированных на условия меняющихся задач на рынке труда [1]. Для этого необходимо построение образовательных программ (далее ООП) на основе глобальных типовых образовательных решений с использованием инновационных педагогических технологий.

Основные задачи, которые решаются в процессе создания образовательных программ: проектирование и запуск новых программ бакалавриата, магистратуры и специалитета; трансформация и пересмотр существующих образовательных программ.

При проектировании ООП необходимо учитывать принцип интеграции науки, производства и образования, а также использование в учебном процессе уникального оборудования, адаптацию специалистов к конкретному предприятию.

В настоящее время вузам разрешено использовать оборудование чисто научных учреждений. Однако для вузов оборонной направленности, в том числе аэрокос-

мических, ведущими партнерами являются ОКБ и серийные предприятия [2]. Они обладают уникальным оборудованием. Проведение занятий на таком оборудовании, несомненно, повышает качество подготовки. Кроме того, подготовка студентов непосредственно на предприятиях позволит провести адаптацию молодых специалистов к конкретной организации еще в процессе учебы.

Ценность любой образовательной программы:

1. *Комплексность.* Должен быть охвачен весь цикл вузовских программ и ключевые аспекты их подготовки и реализации: содержательные, дидактические, организационные, экономические, нормативные и иные. Подход к проектированию ООП подготовки инженерных кадров должен ориентироваться на использование информационно-аналитической системы вуза и обеспечивать согласованную нормативную политику в области учебно-методической деятельности на современном этапе развития образования. В работе [3] рассмотрены два варианта проектирования программ нескольких квалификаций: программы двух квалификаций с получением одного диплома или программы получения двух дипломов высшего и дополнительного образования. Программы двух квалификаций станут «точкой роста» развития российского образования, помогут формировать профессиональные квалификации с привязкой к современным цифровым и предпринимательским компетенциям, так необходимым сегодня молодым специалистам.

2. *Учет специфики высшего образования.* Мультидисциплинарность, наукоемкость, задача постановки одного или нескольких типов мышления; связь с исследовательским и инновационным процессами. Введение понятия «модуля», объединяющего несколько дисциплин в один междисциплинарный блок, направленный на освоение комплекса взаимосвязанных компетенций. Так, например, некоторые из передовых технологий, используемых в программах бакалавриата по аэрокосмической технике, включают аэродинамику, аэроструктуры, авионику, двигательную установку, материаловедение и вычислительное моделирование.

3. *Четыре главные составляющие*: *ВУЗ*, *рынок*, *исследования*, *образовательный продукт.* Образовательная программа рассматривается как инструмент достижения стратегических целей вуза, конкурентоспособный рыночный продукт, элемент системы производства нового знания и инструмент воздействия на научную область, способ достижения образовательных результатов.

4. *Результат.* Работа над реальной конкретной задачей. Разрабатывается новая конструкция, план запуска и реализации образовательной программы.

В результате проектируется принципиально новая или усовершенствуется существующая образовательная программа.

В целом, создание образовательной программы требует тщательной работы и учета потребностей и особенностей обучающихся, а также применения соответствующих технологий, чтобы обеспечить качественный и эффективный образовательный процесс. В работе [4] проведены исследования, заключающиеся в определении проблемы конкретизации образовательных результатов освоения выпускниками вузов основных профессиональных образовательных программ. Решение проблемы объективной оценки качества образования непосредственно связано с проблемой конкретизации образовательных результатов освоения выпускниками вузов основных профессиональных образовательных программ.

1. *Кули-заде М. Е.* О подготовке инженерных кадров для аэрокосмической отрасли // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ'2024), 1–8 сентября 2024 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2024. — С. 351–353.

2. *Галиновский А. Л.*, *Данилаев Д. П.*, *Ефремов А. В. и др.* Опыт реализации компетентностных учебно-методических комплексов на примере отдельных современных направлений науки и техники в учебных заведениях профессионального образования. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, НМЦ «Инженерное образование», 2009.
3. *Вишняков С. В.*, *Рогалев А. Н.*, *Шиндина Т. А.* Проектирование основных профессиональных образовательных программ высшего образования нескольких квалификаций // Открытое образование. — 2024. — Т. 28(1). — С. 44–53.
4. *Шитякова Н. П.*, *Верховых И. В.* Определение образовательных результатов основной профессиональной образовательной программы как условие объективной оценки качества образования // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Образование. Педагогические науки. — 2018. — Т. 10. — №3. — С. 15–23.

ТРЕНАЖЕР ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»

В. Н. Лукин[1,2]***, Л. Н. Чернышов***[3]

[1]*МАИ, Москва, Россия;* [2]*МГППУ, Москва, Россия;*
[3]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия*

Дисциплина «Теория алгоритмов» входит в образовательные программы по специальностям 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах» и 09.03.01 «Программная инженерия и компьютерные науки». Цель дисциплины — формирование основных знаний о теории алгоритмов, развитие логической и алгоритмической интуиции в математике и в информатике, формирование у студентов понимания строгости математической модели. Ключевая математическая модель, которая рассматривается здесь — это машина Тьюринга.

Конкретная машина Тьюринга задается перечислением символов алфавита, множеством состояний и набором правил перехода [1]. Диаграмму состояний можно задать в виде графа, на дугах которого отмечаются действия машины: перемещение по ленте и запись символа на ленту. Подобные диаграммы могут быть построены и для других моделей вычислений.

Существует множество различных инструментов для построения диаграмм состояний, графов [3], машин Тьюринга [4]. Однако не все они удобны для демонстрации: как правило, нет возможности анимации действий машин и конечных автоматов. Кроме того, они обычно предназначены для решения ограниченного набора задач для конкретных моделей и имеют сложный интерфейс.

Для учебного процесса построен удобный инструмент построения диаграмм, допускающий расширения для разных моделей и разных задач. Его основа — построитель графов, на элементы которых налагаются ограничения, соответствующие выбранной модели.

Преподавателям он может быть полезным простотой и удобством подготовки демонстрационных примеров для лекций (презентаций), разработки заданий для лабораторных и контрольных работ. Студенты смогут им пользоваться при изучении соответствующих дисциплин, решать задачи с подготовкой отчетов.

Возможности предлагаемого инструментального средства:

— построение диаграмм конечных автоматов, машин Тьюринга;

— генерация по диаграммам формальных определений конечных автоматов, машин Тьюринга, регулярных грамматик с проверкой корректности диаграмм;

— определение детерминированности автоматов;

— нахождение пустых и недостижимых состояний;

— сохранение рабочей диаграммы с комментариями локальной памяти;

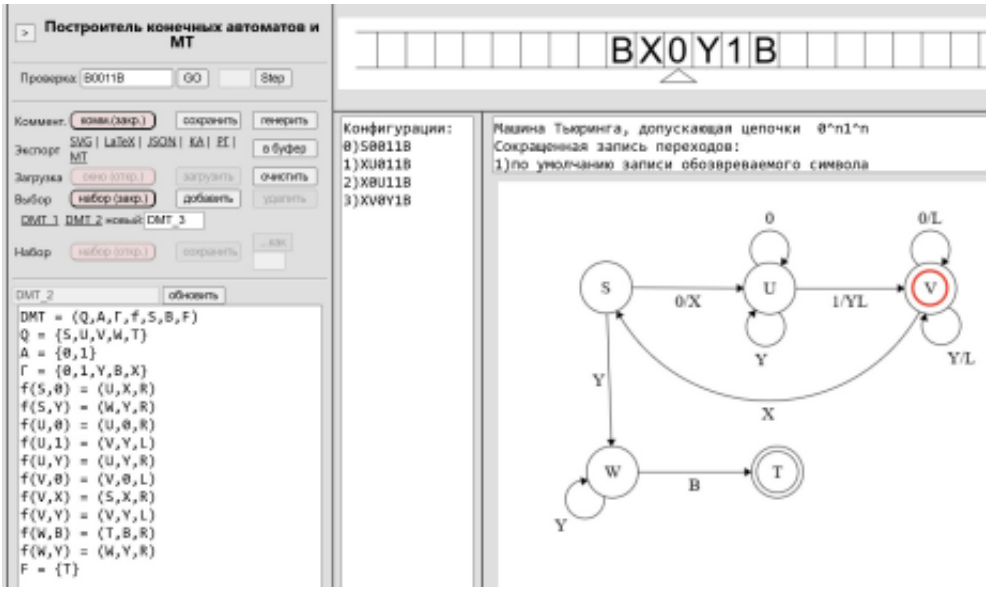


Рис. 1. Пример моделирования работы машины Тьюринга

— формирование наборов диаграмм и хранение их в локальном хранилище;

— демонстрация пошаговой работы автомата с визуализацией рабочей ленты и конфигураций;

— демонстрация вывода цепочек в регулярной грамматике;

— генерация случайных диаграмм.

Для лучшего понимания работы автоматов созданы демонстрационные наборы диаграмм, в том числе примеры из книги [1] и учебного пособия [2].

Графическое представление построенных конечных автоматов может быть преобразовано в форматы, которые позволят встраивать изображение в документы разных форматов: SVG — в HTML-документы, LaTeX — в офисные документы, JSON — в JavaScript-программы. Предусмотрено преобразование графов в представления, которые удобно использовать в программах на разных языках (в частности, в Python).

Перспективы разработки:

— генерация случайных диаграмм с заданными характеристиками;

— задание и сохранение набора тестовых цепочек для автоматов;

— реализация возможности задать на дуге несколько символов;

— решение задачи построения детерминированного автомата по недетерминированному;

— решения задачи построения регулярного выражения по конечному автомату;

— автоматизация удаления пустых и недостижимых состояний;

— решение задачи удаления e-переходов;

— реализация возможности генерации отчета.

1. *Хопкрофт Д. Э.*, *Мотвани Р. У.*, *Джеффри Д.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. — 2-е изд. / Пер. с англ. — М.: ИЛ «Вильямс», 2002. — 528 с.
2. Применение конечных автоматов для поиска и распознавания подстрок: методические рекомендации к лабораторной работе / Юго–Зап. гос. ун-т; сост.: И. Е. Чернецкая. — Курск, 2022.

3. Граф-online — создание и визуализация графа. — URL: `https://graphonline.ru` (дата обращения 30.04.2025).
4. Эмулятор машины Тьюринга. — URL: `https://programforyou.ru/calculators/turing-machine-emulator` (дата обращения 30.04.2025).

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЛИЧНОСТНЫХ КАЧЕСТВ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ НА ПРОФЕССИОНАЛЬНУЮ СОЦИАЛИЗАЦИЮ

***Г. А. Неклюдова*[1], *Т. А. Булавкина*[2]**

[1]*БГТУ, Брянск, Россия;* [2]*БГИТУ, Брянск, Россия*

Сущность профессиональной самооценки имеет большое значение в реальной жизни и подвергается исследованию со стороны большого ряда авторов. Часто профессиональная самооценка рассматривается в совокупности с профессиональной социализацией в техническом вузе. Однако профессиональная социализация не может рассматриваться отдельно от личностной социализации. Естественным является тесная взаимосвязь личностной и профессиональной самооценки в той или иной степени у каждого человека.

В статье отражены результаты исследования самооценки личностных качеств у студентов старших курсов (уровень подготовки — бакалавриат). Выявлены наиболее значимые личностные характеристики для студентов старших курсов (как юношей, так и девушек). Проведена сравнительная характеристика значимых личностных качеств для юношей и девушек.

В результате проведенного исследования выявлены те компоненты личностных качеств, которые студенты выделяют как значимые. Личностные характеристики, выбираемые студентами, позволяют судить об их ценностных предпочтениях, а также какие качества ценятся среди молодежи, а, какие нет.

Организация исследования. Исследование проводилось в 2024–2025 учебном году на базе двух технических вузов (БГИТУ и БГТУ) г. Брянска со студентами 3-го курса различных специальностей. В исследовании приняли участие 78 студентов. В качестве рабочей гипотезы было принято предположение, что значимые личностные характеристики девушек — студенток и юношей — студентов имеют различия.

Методики исследования. Количественное исследование самооценки личности проводилось по методике С. А. Будасси, в основе которой лежит способ ранжирования. Первоначально студентам был предложен перечень из 48 личностных качеств, из которого они выбирали 20 наиболее значимых, а потом их ранжировали для идеального человека и для себя реального.

Цель исследования. Выявить характер корреляционных взаимосвязей личностных характеристик студентов на уровень профессиональной подготовки при обучении в вузе.

Задачи исследования: 1). Определить наиболее и наименее значимые личностные качества для юношей и девушек. 2). Выявить статистически достоверные уровни самооценки юношей и девушек на основании выбранных личностных качеств.

Результаты исследования показали: выявлена общая достоверная корреляционная связь в оценке значимости всех 48 личностных качеств у юношей и девушек ($R = 0{,}96$). Среди 10 наиболее значимых для личности качеств, как для юношей, так и девушек, такая связь еще более значительна и составляет ($R = 0{,}98$). Но при этом одинаковых качеств, встречающихся у юношей и девушек среди 10 самых

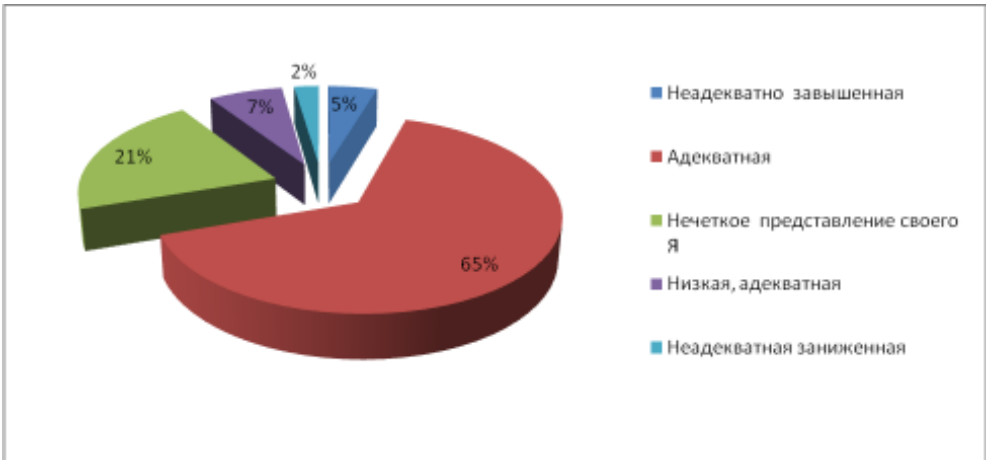


Рис. 1. Самооценка студентов (юношей) 3 курса по 20 индивидуально выбранным качествам

значимых, всего 7 (это такие качества, как: доброта, жизнерадостность, заботливость, искренность, надежность, трудолюбие, отзывчивость). Однако ранговая корреляция этих качеств дает гораздо более низкие показатели ($R = 0{,}51$). Для 10 качеств такая корреляция является незначимой, на 5% -уровне значимости. Распределение результатов самооценки по 20 выбранным качествам у юношей показаны на рис. 1.

Заметим, что для 10 качеств, имеющих самые низкие ранги среди 48 предлагаемых, корреляция является слабо отрицательной, т. е. на отрицательные качества девушки и юноши смотрят совершенно по разному ($R = -0{,}14$). Совпадения выбранных качеств наблюдаются в 4 случаях — это такие качества, как: медлительность, развязность, легковерие, мстительность.

Выводы.

• Выявлено, что среди 10 наиболее значимых личностных качеств для студентов (юношей и девушек) 7 качеств совпадают. При этом коэффициент корреляции между выбранными качествами составляет $R = 0{,}98$. Однако значимость этих качеств для девушек и юношей по рангам определяется коэффициентом корреляции только на $R = 0{,}51$ (незначимая корреляция на 5% уровне значимости).

• Уровни самооценки студентов юношей и девушек на основании личностных качеств значительно отличаются по критерию нечетко выраженной оценкой своего я-реального и я-идеального (среди девушек таких на 14% меньше, чем среди юношей). Но девушек с неадекватно низкой самооценкой встречается в 5 раз больше, чем юношей.

• Полученные результаты позволяют продолжить исследование процесса формирования личностью своего отношения к профессиональной деятельности в науке и технике.

1. *Жилин С. В.* Особенности Я-концепции личности спортсменов (на материале детско-юношеского спорта): автореф. дис. ... канд. психол. наук. — СПб., 2003.
2. *Плашко Р. В.* Динамика изменений некоторых личностных особенностей у студентов ГАФК // Психологические основы педагогической деятельности. — СПб., 2001.
3. *Старостина Н. Н.* Профессиональное самоопределение как важная составляющая профессиональной социализации личности // Научное обозрение. Педагогические науки. — 2017. — №5. — С. 174–177.
4. *Столин В. В.* Самосознание личности. — М.: Просвещение, 1983.

СОЗДАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ НА БАЗЕ КОНТЕЙНЕРНОЙ АРХИТЕКТУРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ БЛОКЧЕЙН В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Г. Ш. Сабырханова, О. З. Сембиев

ЮКГУ им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Аннотация. На сегодняшний день автоматизация процесса тестирования является одной из актуальных проблем в сфере образования. В настоящей работе рассматриваются подходы к разработке платформы тестирования, построенной на основе контейнерной архитектуры. Внутри системы задача каждого студента выполняется в отдельном контейнере и обеспечивается достоверность и безопасность результатов с помощью технологии блокчейн. Платформа использует архитектуру микросервисов, данные хранятся в базе данных PostgreSQL. Кроме того, проверка задач и регистрация результатов автоматизированы с помощью смарт-контрактов (smart contracts). Используемые технологии-Golang, Docker, Ethereum. Ключевые показатели: время отклика, нагрузка на систему, вероятность ошибки и скорость транзакции блокчейна. Эта система направлена на повышение справедливости и доверия в процессе университетского образования.

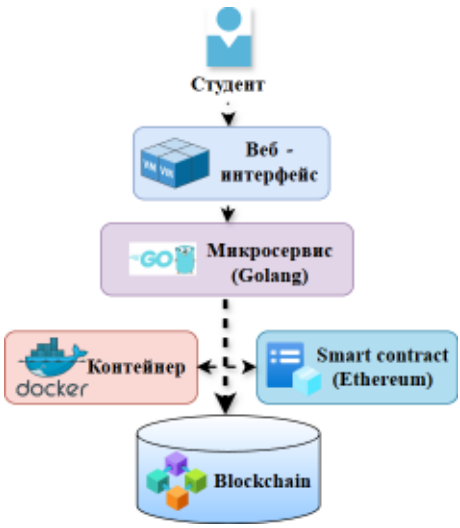


Рис. 1. Контейнерно-блокчейнная архитектура образовательной платформы

Введение. Традиционные системы тестирования, используемые в университетах, часто сталкиваются с рядом ограничений: ограниченная проверяемость результатов, возможность манипуляций и недостаточная гибкость при масштабировании. Решением данных проблем может стать интеграция технологий контейнеризации и блокчейна, обеспечивающих высокую степень модульности, независимость процессов и сохранность данных. Предлагаемая система ориентирована на автоматическую проверку тестовых заданий студентов с фиксацией всех этапов взаимодействия в распределенной среде.

Структура предлагаемой системы. Автоматизированная система тестирования включает в себя:

Рис. 2. Диаграмма сравнительного анализа производительности автоматизированной контейнерной системы

— веб-интерфейс, разработанный на языке Go (Golang), доступный для студентов и преподавателей на казахском и русском языках;

— контейнеризированную среду (Docker), в которой каждое тестовое задание запускается независимо от других, обеспечивая безопасность и изолированность исполнения;

— микросервисную архитектуру, позволяющую масштабировать отдельные компоненты системы и гибко управлять ресурсами;

— смарт-контракты, написанные на платформе Ethereum, регистрирующие результаты выполнения тестов и предотвращающие возможность их изменения задним числом;

— базу данных PostgreSQL для хранения метаинформации о тестах, пользователях и результатах.

Систему мониторинга и визуализации (например, Grafana) для анализа метрик, таких как задержка, загрузка системы, скорость проверки и частота ошибок.

Преимущества модели.

Прозрачность. Результаты тестирования фиксируются в блокчейне, исключая возможность их фальсификации.

Масштабируемость. Контейнеры позволяют обслуживать большое количество пользователей одновременно.

Безопасность. Изоляция заданий и запись в блокчейн минимизируют возможность несанкционированного вмешательства.

Автоматизация. Исключение человеческого фактора из процесса проверки повышает объективность.

Оценка эффективности системы В ходе моделирования на базе 10 типовых тестовых заданий были получены следующие показатели:

— среднее время исполнения: 2,3 с;

— задержка (latency): 0,8 с;

— частота ошибок: 0,3%;

— время обработки транзакции в блокчейне: 6,5 с;

— загрузка CPU при пиковой нагрузке: 60%.

Заключение. Интеграция технологии блокчейн и контейнерной архитектуры позволяет существенно повысить качество цифровых образовательных сервисов. Предлагаемая модель может быть адаптирована не только для университетских тестов, но и для проведения национальных и международных экзаменов с высокими требованиями к прозрачности и надежности. В перспективе рассматривается возможность внедрения элементов машинного обучения для анализа типичных ошибок студентов и адаптации заданий.

1. *Buterin V.* Ethereum White Paper, 2013.
2. Docker Inc. Docker Documentation, 2023.
3. Golang.org. Go Language Specification, 2023.
4. PostgreSQL Global Development Group. PostgreSQL Docs, 2023.
5. Grafana Labs. Monitoring with Grafana, 2022.
6. *Wood G.* Ethereum: A Secure Decentralised Generalised Transaction Ledger, 2014.
7. IEEE. Standards for Blockchain in Education, 2020.
8. ISO/IEC 25010:2011. Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE).

СОВМЕСТНЫЕ С КИТАЕМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

А. С. Савельев

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

В условиях быстро меняющейся международной обстановки, действующих ограничений, политических и экономических войн и нестабильности особую роль играет возможность качественной подготовки специалистов в критически важных областях знаний. При этом возможности для академического обмена существенно ограничены и особый интерес представляют иные формы взаимодействия.

Одним из наиболее популярных вариантов решения данной проблемы в предыдущие годы являлся сценарий с открытием филиала вуза в целевом регионе и реализацией полного цикла обучения на территории принимающей стороны. С одной стороны, подобный подход обеспечивает максимальную преемственность образовательных программ организации, с другой стороны требует огромных человеческих ресурсов для организации обучения и администрирования такого проекта. При этом студенты оказываются в своеобразном вакууме иных правил на родной территории.

В последние годы набирает популярность другой вариант решения данной проблемы: создание совместных образовательных программ между различными университетами и странами. Отличительной особенностью данного подхода является обучение на территории организации-инициатора. Студенты находятся на своей территории, общеобразовательные предметы реализуются по правилам базового университета, а фундаментальная часть реализуется с привлечением преподавательского состава вуза партнера. Подобная схема позволяет существенно снизить административную нагрузку и уровень стресса обучающихся, но таит и существенное множество скрытых нюансов.

В докладе будут представлены результаты двух лет преподавания и координации вопросов учебных планов совместного с Китаем образовательного проекта по специальности «Математика и Прикладная математика», реализуемого на базе одного из университетов Китая. Будут рассмотрены вопросы взаимодействия, организации учебного процесса и взаимодействия со студентами. Отдельная часть до-

клада будет посвящена влиянию цифровизации на организацию обучения и новым требованиям, предъявляемым к организации обучения и аттестации, связанным с распространением систем искусственного интеллекта, оказывающих существенное влияние на возможности качественного обучения математическим дисциплинам.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «ФЛОРЕС» ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ХИМИЧЕСКИ-РЕАГИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ*

Н. С. Северина

МАИ, Москва, Россия

В настоящей работе описываются варианты применения в учебном процессе программного комплекса ФлореС, разработанного на кафедре «Вычислительная математика и программирование» МАИ, предназначенного для численного моделирования течений газа с физико-химическими превращениями [1]. В первую очередь, специфика комплекса подходит для обучения бакалавров, магистров и специалистов в рамках курсов, таких как «Численные методы», «Газовая динамика», «Инженерная физика», «Численные методы в механике сплошных сред», «Численные методы решения прикладных задач» и др., а также аспирантам, обучающимся по научным специальностям:

- 1.1.6. «Вычислительная математика»;
- 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы»;
- 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»;
- 1.3.17. «Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества».

Особенностью разработанного программного комплекса является методика моделирования квазиодномерных нестационарных течений реагирующего газа [2], использующая в своей основе послойный метод характеристик, существенно нерегулярную подвижную разностную сетку, где расчетные узлы являются траекториями сильных и слабых разрывов, а параметры в них определяются с помощью сеточно-характеристических алгоритмов. Это позволяет с высокой точностью моделировать сложные газодинамические явления и разрешать тонкую структуру ударных и детонационных волн.

Разработанный программный комплекс ФлореС позволяет проводить полный цикл исследования конкретных прикладных задач физической газовой динамики. С учетом особенностей предметной области был реализован унифицированный стандарт обмена и обработки данных. Самой высокоуровневой частью комплекса является модуль управления, с которого начинается любой тип работы с расчетами. Данный модуль согласует работу других модулей: генератора газовых смесей, генератора кинетических механизмов, редактора базы данных термодинамических свойств веществ, редактора базы данных химических реакций, генератора начальных данных, расчетного модуля и модуля визуализации. Генераторы газовых смесей и кинетических механизмов взаимодействуют с базами данных термодинамических свойств веществ и химических реакций и позволяют на основе имеющихся данных создавать и редактировать смеси и механизмы, которые используются в

*Работа выполнена при поддержке Государственного задания №FSFF-2023-0008.

исследуемом физико-химическом процессе. Редакторы баз данных термодинамических свойств веществ [3] и химических реакций позволяют создавать новые и вносить изменения в существующие вещества и реакции в базах данных. Генератор начальных данных позволяет на основе информации о газовых смесях настраивать конфигурацию расчетного ядра.

Модуль визуализации использует данные результатов, полученные от расчетного модуля, для построения графиков на любой стадии выполнения расчета. Архитектура вышеописанного комплекса программ была разработана с использованием модульного подхода. Данное решение позволяет пользователю внедрять в систему собственные задачи путем добавления нового расчетного модуля и генератора начальных данных.

Текущая версия ФлореС 1.1 позволяет решать следующие задачи:

1. Моделирование химически реагирующего течения в квазиодномерной нестационарной постановке [4, 5] с использованием сеточно-характеристического метода с явным выделением произвольного числа взаимодействующих разрывов:

1.1. Моделирование классических задач идеальной газовой динамики (задача о поршне, задача о снаряде с учетом и без учета противодавления, задача Римана и др).

1.2. Задачи об инициировании и распространении детонации за падающими и отраженными ударными волнами (в рамках модели многокомпонентного совершенного газа с многостадийными кинетическими механизмами).

1.3. Моделирование экспериментов на ударных трубах [6].

2. Расчет термодинамических свойств веществ и скоростей химических реакций.

3. Расчеты химически равновесных процессов [7] (при заданных парах термодинамических величин; ударных, дефлаграционных и детонационных адиабат; течения в сопле.

4. Расчеты химически неравновесных процессов (при заданных парах термодинамических величин; химически-неравновесные течения в канале, за ударной волной и в сопле).

Перечисленные задачи используются в качестве лабораторных и курсовых работ в рамках обучения бакалавров, магистров, специалистов и аспирантов.

1. *Gidaspov V. Yu.*, *Golubev V. K.*, *Severina N. S.* A software package for simulation of unsteady flows of the reacting gas in the channel // Bulletin of the south ural state university. Series: mathematical modelling, programming and computer software. — 2016. — V. 9, No. 3. — P. 94–104.
2. *Гидаспов В. Ю.*, *Пирумов У. Г.*, *Северина Н. С.* Математическое моделирование квазиодномерных нестационарных течений реагирующего газа с произвольным числом взаимодействующих разрывов // Вестник МАИ. — 2008. — Т. 15, №5. — С. 83–94.
3. *Гурвич Л. В.*, *Вейц И. В.*, *Медведев В. А. и др.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ: справочное издание в 4-х т. — М.: Наука, 1982. — 344 с.
4. *Гидаспов В. Ю.*, *Северина Н. С.* Элементарные модели и вычислительные алгоритмы физической газовой динамики. Одномерные нестационарные течения: Учеб. пособ. — М.: Факториал, 2015.
5. *Гидаспов В. Ю.*, *Кононов Д. С.*, *Северина Н. С.* Моделирование воспламенения и детонации метано-воздушных смесей за отраженной ударной волной // Теплофизика высоких температур. — 2020. — Т. 58, №6. — С. 909–914.
6. *Гидаспов В. Ю.*, *Северина Н. С.* Численное моделирование экспериментов по определению времени задержки воспламенения за падающими ударными волнами // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, №4. — С. 31–40.
7. *Гидаспов В. Ю.*, *Северина Н. С.* Элементарные модели и вычислительные алгоритмы физической газовой динамики. Ударные и детонационные волны: Учеб. пособ. — М.: Факториал, 2016.

МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ И ПРИМЕНЕНИЯ УЧЕБНЫХ ДИСЦИПЛИН ЦИКЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРОВ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРОЕКТИРОВАНИЕ АВИАЦИОННЫХ И РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ»

Д. А. Ягодников, М. Ю. Кабальнова, Т. Ю. Соколова

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

В образовательных программах подготовки инженеров для ракетно-космической отрасли традиционно большое внимание уделяется дисциплинам, позволяющим будущим инженерам овладеть знаниями и навыками в области математического моделирования и автоматизированного проектирования. Следует отметить диалектическое единство дисциплин циклов и блоков федеральных образовательных стандартов второго и третьего поколений, включающих последовательно специальные разделы математики, основы систем автоматизированного проектирования, математическое моделирование, прикладную газодинамику и автоматизированное проектирование ракетных и реактивных двигателей. Причем переход от одной из названных дисциплин к другой методически связан с общетехническими и профессиональными дисциплинами, которые заканчиваются курсовым и дипломным проектами, в которых соединяются и реализуются приобретенные обучающимися знания, умения и владения как в проектно-расчетной, так и конструкторской деятельности, включая компетенции в области технологии изготовления ракетных и реактивных двигателей, которая также нарастающими темпами использует современные информационные технологии.

В данной работе на примере учебного плана подготовки инженеров по специальности «Проектирование жидкостных ракетных двигателей», разработанного и реализуемого на кафедре «Ракетные двигатели» МГТУ им. Н. Э. Баумана, рассмотрены образовательные технологии, позволяющие обучающимся овладеть следующими компетенциями в ИТ-области.

Способен разрабатывать физические и математические модели исследуемых процессов, явлений и объектов, относящихся к профессиональной сфере деятельности.

Способен использовать современные информационные технологии для решения инженерных задач профессиональной деятельности.

Способен реализовывать на практике технологии полного жизненного цикла ракетных и реактивных двигателей с использованием пакетов САПР.

Показателями достижения результата обучения (дискрипторами), которые студент может, продемонстрировать являются следующие.

Знать: конструкцию, характеристики топлив и рабочего процесса в камерах ЖРД.

Уметь: применять методы математического моделирования; выполнять расчеты характеристик жидкостных ракетных двигателей, их узлов и агрегатов; проводить экспериментальные исследования с использованием автоматизированных систем регистрации и обработки информации.

Владеть: методиками расчета гидрогазодинамических процессов в ЖРД; навыками использования вычислительной техники и методиками аналитических и численных решений; навыками использования пакетов CAD, CAE.

Необходимо также отметить, что в различные виды деятельности интенсивно внедряются и эффективно применяются технологии искусственного интеллекта (ИИ), которые применительно к авиационной и ракетно-космической отрасли позволяют расширить возможности для разработки новых видов техники, повышения ее качества, обеспечить сокращение трудоемкости разработки [1]. В связи

с этим представляется актуальным внедрение в высших учебных заведениях в образовательные программы инженерных специальностей соответствующих дисциплин по ИИ, а также создание системы подготовки квалифицированных кадров в области разработки и использования технологий ИИ [2]. Учитывая накопленный опыт можно утверждать, что эффективность внедрения методологии обучения и образовательных программ по ИИ будет в определенной и, вероятно, в немалой степени их интегрированностью в общепрофессиональную и специализированную подготовку будущих инженеров.

1. ИИ за две недели с нуля спроектировал ракетный двигатель и он прошел огневые испытания с первой попытки. — URL: https://dzen.ru/a/ZnpsruFfEimNcKy1 (последнее обращение: 19.05.2025).
2. Указ Президента Российской Федерации от 15.02.2024 №124 “О внесении изменений в Указ Президента Российской Федерации от 10 октября 2019 г. №490 «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации»". — URL: http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202402150063/ (последнее обращение: 19.05.2025).

ПАМЯТИ АКАДЕМИКА И.Ф. ОБРАЗЦОВА (1920–2005)

В.Н. Бакулин[1,2]

[1]*ИПриМ РАН, Москва, Россия;* [2]*МАИ, Москва, Россия*

28 июля.2025 г. исполнилось 105 лет со дня рождения Ивана Филипповича Образцова, лауреата Ленинской и Государственной премий, премии Совета Министров СССР и двух премий Правительства РФ, четырех премий им. 25-летия МАИ, чл.-корр. с 01.07.1966 г., академика с 26.11.1974 г. (отделение механики и процессов управления (механика) (авиация) соответственно), советника Президиума РАН (1996–2005). И.Ф. Образцов был председателем Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (1982—1992), председателем НС АН СССР и РАН по механике конструкций из композиционных материалов (1986–2004), президентом (1995–2001), почетным президентом Академии наук авиации и воздухоплавания (2001–2005), председателем правления общества «Знание» РСФСР (1967–1992), президентом (1992–1999) и почетным президентом (1999–2005) общества «Знание» России, президентом общенациональной академии «Знание» (1995–2005), главным редактором журналов «Известия РАН. МТТ», «Механика композиционных материалов и конструкций». Член КПСС с 1944 г., кандидат в члены ЦК КПСС (1981–1990). Депутат Верховного Совета РСФСР (1967–1989), народный депутат СССР (1989–1991).

Иван Филиппович Образцов родился в деревне Быки Максатихинского района Тверской области в крестьянской семье. Окончив школу, И.Ф. Образцов поступил в Ленинградский автодорожный (преобразованный в 1941 г. в авиационный) институт (ныне — ГУАП).

В июне 1941 г. он добровольно вступил в 68-й истребительный батальон и участвовал в боях под ст. Чудово Ленинградской области. По решению Государственного комитета обороны в сентябре 1941 г. всех студентов институтов, обеспечивающих подготовку кадров для оборонных отраслей, отозвали с фронта для продолжения обучения. Вернувшегося с фронта И.Ф. Образцова в начале 1942 г. направили в МАИ, который в это время был эвакуирован в Алма-Ату. После успешного окончания МАИ в 1944 г. И.Ф. Образцов остался работать в институте. Там он прошел все ступени преподавательской работы: ассистент, старший преподаватель, доцент, профессор, заведующий кафедрой (1959–2005). которым оставался до конца своих дней. И.Ф. Образцов с 1949 г. — кандидат наук, с 1957 г. — д.т.н., с 1958 г. получил звание профессора. В 1956 г. И.Ф. Образцов в 36 лет стал деканом самолетостроительного факультета, где его предшественниками на этом посту были известные авиаконструкторы Н.Н. Поликарпов, П.Д. Грушин, А.С. Яковлев, В.М. Мясищев. В 1958 г. он назначается директором (с 1961 г. — ректором) МАИ и на этом посту работает до 1972 г. За это время под руководством И.Ф. Образцова МАИ получил статус не только авиационного, но и ракетно-кос-

мического вуза, готовящего специалистов по всему спектру специальностей этих отраслей. В эти годы И. Ф. Образцовым была впервые провозглашена задача превращения МАИ в технический университет, сделаны первые значительные шаги в этом направлении. 18.02.1972 г. с учетом успешной и плодотворной работы в качестве ректора МАИ И. Ф. Образцов назначен министром высшего и среднего специального образования РСФСР, которым оставался до 1990 г.

Иван Филиппович был продолжателем научной школы чл.-корр. АН СССР В. З. Власова и внес значительный вклад в развитие его идей и методов, во внедрение их в учебный процесс и инженерную и авиационную практику. Научные работы И. Ф. Образцова охватывают широкий диапазон актуальных проблем прочности, устойчивости, колебаний, термоупругости и живучести летательных аппаратов (ЛА). Им разработаны бимоментная теория депланации и общие методы расчета тонкостенных оболочек типа крыла, фюзеляжа и корпуса летательного аппарата. И. Ф. Образцов впервые создал математическую модель и описал в общем виде напряженно-деформированное состояние корпуса ЛА, стреловидных и треугольных крыльев, имеющих разнообразные силовые схемы на основе разработанного им вариационного метода. Он решил ряд сложных краевых задач прочности дискретно-континуальных пространственных систем многозамкнутого очертания. Важным вкладом в теорию оболочек явилась разработка И. Ф. Образцова и его учеников общей технической теории скошенных тонкостенных пространственных конструкций и методов решения нового класса сложных задач [1].

По инициативе академика И. Ф. Образцова в 1989 г. был учрежден Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН). И. Ф. Образцов стал директором-организатором института и руководил им до 1998 г. С 1998 г. — научный руководитель ИПРИМ РАН, которым оставался до конца жизни. И. Ф. Образцов был инициатором и организатором работ по проекту создания космоплана — гиперзвукового многоразового транспортного воздушно-космического аппарата универсального применения (МТВКА-У). Разработка проекта велась в ИПРИМ РАН [1]. Итогом творческой деятельности академика Образцова являются более 300 научно-технических трудов, 11 авторских свидетельств и два открытия. Им подготовлено 15 докторов наук и 25 кандидатов наук. Его называли «ИВАН СТРОИТЕЛЬ»: корпуса МАИ, Оздоровительно-учебный центр МАИ «Алушта» в Республике Крым, база отдыха МАИ « Ярополец». За большие заслуги И. Ф. Образцов был награжден тремя орденами Ленина 1961 г., 1976 г., 1980 г., орденами Трудового Красного Знамени 1967 г., «Знак Почета» 1970 г., Отечественной войны II степени 1985 г., Октябрьской Революции 1986 г., «За заслуги перед Отечеством» III степени (1995 г.) и 17 медалями.

И. Ф. Образцов умер 28.02.2005 г. в Москве. Похоронен на Троекуровском кладбище.

Советом Межрегиональной общественной организации «Общество Знание Санкт-Петербурга и Ленинградской области» в 2007 г. были учреждены золотая и серебряная медали «За вклад в российское просветительство» им. академика И. Ф. Образцова.

14 октября 2009 г. у входа в главный административный корпус МАИ состоялось открытие мемориальной доски памяти академика И.Ф. Образцова.

Некоторые из основных трудов академика И. Ф. Образцова:

• *Образцов И. Ф.* Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. — М.: Машиностроение, 1966.

• *Образцов И. Ф.*, *Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. — М.: Машиностроение, 1973.

• *Образцов И. Ф.*, *Васильев В. В.*, *Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.

• *Образцов И. Ф.*, *Савельев Л. М.*, *Хазанов Х. С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. — М.: Высшая школа, 1985. — 392 с.

• *Образцов И. Ф.*, *Булычев Л. А.*, *Васильев В. В. и др.* Строительная механика летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1986. — 536 с.

• *Образцов И. Ф.*, *Нерубайло Б. В.*, *Андрианов И. В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1991. — 416 с.

• *Бакулин В. Н.*, *Образцов И. Ф.*, *Потопахин В. А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек. Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. — М.: Наука. Физматлит, 1998. — 464 с.

• Гиперзвуковой космоплан: гиперпроект столетия // Мир транспорта. — 2004. — №1.

1. *Бакулин В. Н.* Академик И. Ф. Образцов — ученый, ректор МАИ, министр ВиССО РСФСР, директор-организатор, научный руководитель ИПРИМ РАН. Столетию со дня рождения Ивана Филипповича Образцова (1920–2005) // Сборник трудов 10-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского. Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Москва, 17–19 ноября 2020 г. — М.: ООО Сам Полиграфист, 2020. — С. 11–28. — DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2020.011_027.01.

СПИСОК ОРГАНИЗАЦИЙ

АО "«Корпорация «Московский институт теплотехники»" (АО "Корпорация «МИТ»"), Москва, Россия

АО «Опытное конструкторское бюро машиностроения им. И. И. Африкантова» (АО «ОКБМ Африкантов»), Нижний Новгород, Россия

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова (БГТУ «Военмех»), Санкт-Петербург, Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (БелГУ), Белгород, Россия

Брестский государственный технический университет (БрГТУ), Брест, Республика Беларусь

Брянский государственный инженерно-технологический университет (БГИТУ), Брянск, Россия

Брянский государственный технический университет (БГТУ), Брянск, Россия

Волгоградский государственный аграрный университет (ВолГАУ), Волгоград, Россия

Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ), Волгоград, Россия

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук Хабаровского Федерального исследовательского центра (ВЦ ДВО РАН ХФИЦ), Хабаровск, Россия

Вятский государственный университет (ВятГУ), Киров, Россия

Государственный казенный научно-испытательный полигон авиационных систем имени Л. К. Сафронова (ГкНИПАС имени Л. К. Сафронова), п. Белозерский, Московская обл., Россия

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС), Москва, Россия

Дальневосточный государственный университет путей сообщения (ДВГУПС), Хабаровск, Россия

Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), Владивосток, Россия

Донской государственный технический университет (ДГТУ), Ростов-на-Дону, Россия

Институт автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН), Москва, Россия

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИАПУ ДВО РАН), Владивосток, Россия

Институт математики и информатики Северо-Восточного Федерального университета им. М. К. Аммосова (ИМИ СВФУ), Якутск, Россия

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН), Москва, Россия

Институт механики и машиностроения — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук» (ИММ ФИЦ КазНЦ РАН), Казань, Россия

Институт механики Национальной академии наук Республики Армения (ИМ НАН РА), Ереван, Армения

Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук (ИОФ РАН), Москва, Россия

Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПриМ РАН), Москва, Россия

Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН), Санкт-Петербург, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН), Москва, Россия

Институт проблем нефти и газа ФИЦ «Якутский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук» (ИПНГ ФИЦ «ЯНЦ СО РАН»), Якутск, Россия

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН), Москва, Россия

Институт системного программирования им. В. П. Иванникова Российской академии наук (ИСП РАН), Москва, Россия

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук (ИТПМ СО РАН), Новосибирск, Россия

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук (ИТПЗ РАН), Москва, Россия

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук (ИТ СО РАН), Новосибирск, Россия

Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (ИФПМ СО РАН), Томск, Россия

Институт энергомашиностроения и механики Московского энергетического института (ЭнМИ МЭИ), Москва, Россия

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ (КНИТУ–КАИ), Казань, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ), Казань, Россия

Кубанский государственный университет (КубГУ), Краснодар, Россия

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (МИАН), Москва, Россия

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Россия

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия

Московский городской психолого-педагогический университет (МГППУ), Москва, Россия

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н. Э. Баумана), Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (МГУ им. М. В. Ломоносова), Москва, Россия

Московский физико-технический институт (государственный университет) (МФТИ), Долгопрудный, Московская обл., Россия

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (НИИМ МГУ им. М. В. Ломоносова), Москва, Россия

Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (НИИПМЭ МАИ), Москва, Россия

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (ННГУ), Нижний Новгород, Россия

Национальный исследовательский Томский государственный университет (ТГУ), Томск, Россия

Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ), Томск, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ), Москва, Россия

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» (НИЦ «Курчатовский институт»), Москва, Россия

НИИ НПО «Луч», Подольск, Московская обл., Россия

Общественная организация научных исследований «Метагалактические Науки» Московской области (МАН), Подольск, Московская обл., Россия

ООО «ПРОМИСЛАБ», Москва, Россия

Ордена Трудового Красного Знамени Институт нефтехимического синтеза им. А. В. Топчиева Российской академии наук (ИНХС РАН), Москва, Россия

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева (ОГУ им. И. С. Тургенева), Орел, Россия

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С. П. Королева (РКК «Энергия»), Королев, Московская обл., Россия

Российская академия ракетных и артиллерийских наук (РАРАН), Москва, Россия

Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), Москва, Россия

Российский Федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е. И. Забабахина (РФЯЦ–ВНИИТФ имени академика Е. И. Забабахина), Снежинск, Челябинская обл., Россия

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет), Самара, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ), Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ), Санкт-Петербург, Россия

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина (СибНИА им. С. А. Чаплыгина), Новосибирск, Россия

Томский государственный архитектурно-строительный университет (ТГАСУ), Томск, Россия

Уральский завод гражданской авиации, Москва, Россия

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), Москва, Россия

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (ИПМ им. М. В. Келдыша), Москва, Россия

Федеральный исследовательский центр проблем химической физики и медицинской химии Российской академии наук (ФИЦ ПХФ и МХ РАН), Черноголовка, Московская обл., Россия

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН), Москва, Россия

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

Хабаровский Федеральный исследовательский центр Институт Материаловедения Дальневосточного отделения Российской академии наук (ХФИЦ ИМ ДВО РАН), Хабаровск, Россия

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ), Жуковский, Московская обл., Россия

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова (ЮКГУ им. М. Ауезова), Шымкент, Казахстан

Южный научный центр Российской академии наук (ЮНЦ РАН), Ростов-на-Дону, Россия

Южный Федеральный университет (ЮФУ), Ростов-на-Дону, Россия

АДРЕСНАЯ КНИГА

Абгарян Вартан Карленович	vka.mai@mail.ru
Аветисян Ваган Вардгесович	vanavet@yahoo.com
Акмаева Валентина Николаевна	akmaeva@mai.ru
Алексанина Марина Георгиевна	margeo@mail.ru
Алексеев Алексей Кириллович	aleksey.k.alekseev@gmail.com
Антюхов Илья Владимирович	cryogen204@mail.ru
Артамонова Нина Брониславовна	artamonovanb@mail.ru
Ахметжанов Руслан Ваисович	akhmetzhanovrv@mai.ru
Бабешко Владимир Андреевич	babeshko41@mail.ru
Бакулин Владимир Николаевич	vbak@yandex.ru
Бахиркин Михаил Васильевич	bakhirkin@mail.ru
Белашова Ирина Станиславовна	Irina455@inbox.ru
Белянкова Татьяна Ивановна	tbelen415@mail.ru
Бирюков Василий Иванович	aviatex@mail.ru
Бишаев Александр Михайлович	bishaev@bk.ru
Борзенко Евгений Иванович	borzenko@ftf.tsu.ru
Борисов Сергей Анатольевич	bsa@cosmos-plm.ru
Бочарова Ольга Витальевна	olga.v.bocharova@gmail.com
Булавкина Татьяна Александровна	tabul90@yandex.ru
Быков Никита Валерьевич	bykovnv@bk.ru
Валиев Хаммат Хафизович	hhvlv@mail.ru
Веденяпин Виктор Валентинович	vicveden@yahoo.com
Веремейчик Андрей Иванович	vai_mrtm@bstu.by
Гавва Любовь Михайловна	nio1asp@mail.ru
Герасимов Сергей Иванович	s.i.gerasimov@mail.ru
Гидаспов Владимир Юрьевич	gidaspov@mai.ru
Гимаева Наталья Радиковна	natalia.gimaeva@inbox.ru
Глазырина Людмила Леонидовна	glazyrina-ludmila@ya.ru
Глазырина Ольга Владимировна	glazyrina-olga@ya.ru
Глуховская Юлия Исааковна	gljul@bk.ru
Горбушин Антон Роальдович	gorbushin.ar@mipt.ru
Гордеев Святослав Валерьевич	svyatoslavgordeev@mail.ru
Градов Борис Владимирович	bgradov@list.ru
Градов Владимир Михайлович	gradov@bmstu.ru
Григорьева Марина Евгеньевна	mgrigorjeva@mail.ru
Гришин Олег Александрович	oleg.grishin.753@mail.ru
Гришин Юрий Аркадьевич	grishin.bmstu@mail.ru
Громов Василий Александрович	stroller@rambler.ru
Гусев Евгений Леонидович	elgusev@mail.ru
Дворник Максим Иванович	lex7861@rambler.ru
Дедова Дарина Викторовна	darina.dedova98@gmail.com
Демченко Дмитрий Сергеевич	dimax366@yandex.ru
Добровольский Сергей Владимирович	dobrovolskiy_s@mail.ru
Евдокимова Ольга Владимировна	evdokimova.olga@mail.ru

Жарова Анна Александровна	anyuta200289@gmail.com
Желонкин Михаил Владимирович	zhelonkinmichael@mail.ru
Зенкин Владимир Александрович	vl.zenkin@mail.ru
Зленко Александр Афанасьевич	zalaf121@mail.ru
Золоторев Николай Николаевич	nikzolotorev@mail.ru
Зуев Юрий Владимирович	yuri_zuev@bk.ru
Иванов Андрей Владимирович	ivanovav@mai.ru
Иванов Игорь Эдуардович	ivanovmai@mail.ru
Иванов Михаил Яковлевич	mikhivan@yandex.ru
Иванов Сергей Валерьевич	sergeyivanov89@mail.ru
Калашников Алексей Игоревич	alex-aka@mail.ru
Калинчук Валерий Владимирович	vkalin415@mail.ru
Карнаухов Виктор Николаевич	vnk@iitp.ru
Кержаев Александр Петрович	alex_kerg@mail.ru
Кибец Александр Иванович	kibec@mech.unn.ru
Клочков Юрий Васильевич	klotchkov@bk.ru
Козин Алексей Владимирович	avkozin@okbm.nnov.ru
Колесник Сергей Александрович	ksa@mai.ru
Коробовский Александр Валентинович	alkor57@yandex.ru
Королев Евгений Эдуардович	j.corleow2012@yandex.ru
Крылов Сергей Сергеевич	krylov@mai.ru
Крючков Артемий Владимирович	artemkr2003@mail.ru
Кудрявцева Ирина Анатольевна	kudryavtseva.irina.a@gmail.com
Кузнецова Светлана Валентиновна	k_svetlana_valen@mail.ru
Кули–заде Марина Евгеньевна	kuli_marina@mail.ru
Кульков Владимир Михайлович	vmk_1@mail.ru
Купченко Игорь Степанович	abcdefghiro@mail.ru
Лапшин Денис Александрович	lapshin_da@okbm.nnov.ru
Лисовский Олег Романович	Lisoleg555@yandex.ru
Литовченко Анна Александровна	litann2245.all@mail.ru
Лукин Владимир Николаевич	lukinvn@list.ru
Лунева Анна Александровна	LunevaAA@mai.ru
Лунева Светлана Юрьевна	LunevaSY@mai.ru
Маламанов Степан Юрьевич	stevmal@mail.ru
Марков Андрей Алексеевич	markov.ipm@yandex.ru
Мартюшова Янина Германовна	ma1554@mail.ru
Машкин Михаил Николаевич	mnmashkin@yandex.ru
Меньшова Ирина Владимировна	menshovairina@yandex.ru
Миллер Александр Борисович	amiller@iitp.ru
Миллер Борис Михайлович	bmiller@iitp.ru
Миньков Леонид Леонидович	lminkov@ftf.tsu.ru
Мозеров Михаил Григорьевич	mozer@iitp.ru
Молотков Андрей Андреевич	karacerr@gmail.com
Морев Павел Геннадьевич	paulorel@mail.ru
Морозов Александр Юрьевич	morozov@infway.ru
Мякочин Александр Сергеевич	amyakochin@gmail.com
Нагибин Никита Сергеевич	nikita.nagibin@bk.ru
Наседкин Георгий Константинович	gnk@mail.ru

Наумов Андрей Викторович	naumovav@mail.ru
Неклюдова Галина Александровна	galinanekludova@yandex.ru
Нефедов Виктор Николаевич	nefedovvn54@yandex.ru
Нигматзянов Владислав Вадимович	nigmatzyanov.vv@mipt.ru
Никитин Александр Дмитриевич	nikitin_alex@bk.ru
Никитин Илья Степанович	i_nikitin@list.ru
Николаев Владимир Николаевич	nikvla50@mail.ru
Никонов Артем Михайлович	artyom.nikonov.99@mail.ru
Носенко Никита Андреевич	nick468@mail.ru
Ольшанский Алексей Михайлович	lexolshans@gmail.com
Острик Афанасий Викторович	ostrik@ficp.ac.ru
Пантелеев Кирилл Андреевич	kir.panteleew2016@yandex.ru
Первухин Алексей Сергеевич	pervukhin.alexey@mail.ru
Пестрякова Надежда Владимировна	mbgavrikov@yandex.ru
Пиунов Владислав Николаевич	Taimkraft@mail.ru
Подгорная Виолетта Михайловна	vita1401@outlook.com
Подпорин Игорь Валентинович	mai_ltgdm@mail.ru
Пожидаев Алексей Алексеевич	pozhidaevaa@mai.ru
Попов Алексей Константинович	ap@iitp.ru
Попов Иван Алексеевич	popov-ivan20@yandex.ru
Попова Елена Олеговна	polenao@bk.ru
Прозорова Эвелина Владимировна	e.prozorova@spbu.ru
Псеунов Дамир Рустемович	pseunovdamir@gmail.com
Пупышева Юлия Юрьевна	j_poupycheva@mail.ru
Ревизников Дмитрий Леонидович	reviznikov@inbox.ru
Решетникова Ольга Владимировна	ov13r@yandex.ru
Романенков Александр Михайлович	romanaleks@gmail.com
Романов Александр Вячеславович	atomicra@ya.ru
Романова Ирина Андреевна	irrom_22@mail.ru
Ромашин Сергей Николаевич	Sromashin@yandex.ru
Рубцов Петр Васильевич	petya.rubtsoff@yandex.ru
Рулева Лариса Борисовна	ruleva@ipmnet.ru
Сабырханова Гулзат Шалхарбаевна	Gulzat-077@mail.ru
Савельев Алексей Сергеевич	Aleksey.schumacher@gmail.com
Саламатин Артур Андреевич	arthur.salamatin2@gmail.com
Сальков Юрий Алексеевич	salkov@laser-app.ru
Сапрыкин Дмитрий Леонидович	dsaprykin@laserapr.ru
Светличная Екатерина Валентиновна	svetlichnayak27@gmail.com
Свотина Виктория Витальевна	vsvotina@mail.ru
Северина Наталья Сергеевна	severinans@mai.ru
Седова Дарья Владимировна	IPad.0303@yandex.ru
Сейранян Сурен Паруйрович	seysuren@yandex.ru
Сеченых Полина Алексеевна	p-sechenyh@mail.ru
Силакова Юлия Георгиевна	krat_yuliya@mail.ru
Сиротин Андрей Николаевич	asirotin2@mail.ru
Скурихин Григорий Олегович	grishaskurihin1@gmail.com
Соколов Геннадий Павлович	lex7861@rambler.ru
Соловьев Сергей Александрович	solovev_sa@okbm.nnov.ru
Солодовников Сергей Иванович	sis63@yandex.ru
Сотский Михаил Юрьевич	msotsky.bmstu@mail.ru

Способин Андрей Витальевич spise@inbox.ru
Степанов Алексей Евгеньевич stepanoffalsey@gmail.com
Степанян Карен Вартанович KVStepanyan@iitp.ru
Стрелков Кирилл Сергеевич ks.strelkov@yandex.ru
Стрижак Павел Александрович pavelspa@tpu.ru
Стрижак Сергей Владимирович s.strijhak@ispras.ru
Строганов Виктор Юрьевич vy_str@mail.ru
Строкач Евгений Александрович evgenij.strokatsch@mai.ru

Татаренко Михаил Николаевич michaeltatarenko@gmail.com
Терешин Валерий Алексеевич terva@mail.ru
Титеев Александр Максимович loksader@yandex.ru
Товстик Татьяна Петровна tovstik_t@mail.ru
Томащук Корней Кириллович korneytomashchuk@yandex.ru
Торчик Марина Васильевна mari.torchick@ipmnet.ru
Третьякова Ольга Николаевна tretiyakova_olga@mail.ru
Трофимов Вадим Владимирович trofimovadim@list.ru
Тужилин Дмитрий Николаевич tuzhilin@laserapr.ru

Ухов Петр Александрович ukhov79@gmail.com

Федюшкин Алексей Иванович fai@ipmnet.ru
Филиппов Глеб Сергеевич filippov.gleb@gmail.com
Фимин Николай Николаевич oberon@kiam.ru
Фирсов Георгий Игоревич firsovgi@mail.ru
Фроленкова Лариса Юрьевна Larafrolenkova@yandex.ru
Фролова Юлия Владимировна yuliu-281000@mail.ru

Хамидуллин Марсель Рашитович marseille.ksu@gmail.com
Хатунцева Ольга Николаевна ol-khatun@yandex.ru
Хеук Максим Викторович kheuk@mail.ru
Хмель Татьяна Алексеевна khmel_ta@mail.ru

Чекмарев Дмитрий Тимофеевич 4ekm@mm.unn.ru
Черкасова Мария Владимировна maria-post@mail.ru
Черных Вера Дмитриевна vera.chernykh@mail.ru
Чернышов Лев Николаевич levchern@gmail.com
Чертова Надежда Васильевна chertova@ispms.tsc.ru
Чехонин Константин Александрович lex7861@rambler.ru

Шамордин Антон Александрович ashamordin@laser-app.ru
Шешенин Сергей Владимирович sergey.sheshenin@mail.ru
Шиманчук Дмитрий Викторович d.shimanchuk@spbu.ru
Ширковский Иван Аркадьевич em.kozyreva@yandex.ru
Широков Владимир Борисович vkalin415@mail.ru
Шишкин Виктор Михайлович vshishkin1951@mail.ru
Шмыров Василий Александрович v.shmyrov@spbu.ru
Шоркин Владимир Сергеевич v.s.shorkin@yandex.ru
Шустов Станислав Алексеевич shustov.st@yandex.ru

Юсим Валентин Александрович ValentinYusim@mail.ru

Ягодников Дмитрий Алексеевич daj@bmstu.ru
Языков Иван Геннадьевич kael999@mail.ru

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аббасов К. Т. 92
Абгарян В. К. 298, 300
Абгарян М. В. 150, 298
Абу Даввас Я. 68
Аветисян В. В. 271
Акмаева В. Н. 273
Алексанина М. Г. 152
Алексеев А. К. 154
Алексейчук А. С. 55
Анджикович И. Е. 91
Андросенко В. Н. 220
Антонов Д. В. 156
Антюхов И. В. 159
Артамонова Н. Б. 69, 147
Архипов В. А. 160
Астахов С. А. 302, 305, 310
Афанасенков А. А. 227
Ахметжанов Р. В. 300, 306
Ахметова М. А. 124

Бабешко В. А. 71, 73
Бабешко О. М. 71, 73
Бакулин В. Н. 21, 76, 78, 80, 82, 85, 87, 89, 185, 308
Батищева Я. Г. 260
Бахиркин М. В. 339
Бездольный Г. Р. 263
Белашова И. С. 293
Беляев А. К. 258
Белянкова Т. И. 234
Бирюков В. И. 302, 305
Бирюкова М. В. 302, 305
Бишаев А. М. 150
Богатый А. В. 306
Борзенко Е. И. 162
Борзых С. В. 80, 308
Борисов С. А. 164
Бочарова О. В. 91
Булавкина Т. А. 350
Быков Н. В. 15, 17
Бычков Р. С. 80, 308

Валиев Х. Х. 114
Варыгин Р. А. 37
Вахнина О. В. 122
Веденяпин В. В. 260
Велданов В. А. 134
Веремейчик А. И. 92, 95
Виленский О. Ю. 98
Виноградов В. И. 45
Власов А. Н. 114
Власов Д. А. 109, 116
Власова Н. С. 15
Волков Е. Н. 82, 85
Ворович Е. И. 234
Высокоморная О. В. 156

Гавва Л. М. 142
Гавриков Б. М. 39
Гарбузов Д. Н. 162
Гарибян Б. А. 36
Гелин Д. В. 134
Герасимов С. И. 310
Гидаспов В. Ю. 166, 168, 170, 208
Гимаева Н. Р. 172
Гладков С. О. 174
Глазков С. А. 176
Глазырина Л. Л. 19
Глазырина О. В. 19
Глуховская Ю. И. 164, 250
Гоголева О. В. 100
Голубев В. И. 120, 236
Горбушин А. Р. 176
Гордеев С. В. 310, 312, 313, 315
Гостев А. Ю. 310, 332
Градов Б. В. 178, 182
Градов В. М. 180
Гранич В. Ю. 317
Гречников Ф. В. 41
Грибкова М. С. 176
Григорьева М. Е. 261
Гришин О. А. 21, 185
Гришин Ю. А. 21, 82, 85, 185
Громов В. А. 23
Гусев Е. Л. 87, 100

Дворник М. И. 187
Дедова Д. В. 102
Демидова О. Л. 341
Демченко Д. С. 300, 319

Денисов М. Д. 166
Добровольский С. В. 164, 250
Дугин Д. И. 176
Дьяконов Г. А. 306, 310, 312, 313, 315

Евдокимов В. С. 73
Евдокимова О. В. 104
Егоров Ю. Г. 328
Елистратова П. А. 43
Ельников Р. В. 332
Епихин А. Д. 176
Ереев М. Н. 25, 106
Ерофеев А. И. 317
Ершова М. И. 106
Ефремов М. А. 162

Жарова А. А. 45
Желонкин В. И. 46
Желонкин М. В. 46

Зарецкий А. Г. 73
Зенкин В. А. 21
Зленко А. А. 263
Золоторёв Н. Н. 160
Зуев Ю. В. 189

Иванов А. В. 321
Иванов И. Э. 194, 208, 230
Иванов М. Я. 240
Иванов С. В. 342

Кабальнова М. Ю. 357
Кадильникова Е. Н. 46
Калашников А. И. 323
Калинчук В. В. 234, 238, 252
Калмыков П. Н. 310
Карнаухов В. Н. 280
Карнет Ю. Н. 114
Кержаев А. П. 109, 116
Керимбекова С. А. 191
Кибец А. И. 111
Ким В. 306
Ким В. В. 208
Кирсанова Н. А. 122
Киселев И. А. 302, 305, 310
Клементьев П. Д. 147
Клентак А. С. 41
Клочков М. Ю. 122
Клочков Ю. В. 122
Коваленко М. Д. 109, 116
Ковтанюк Л. В. 112
Ковтун С. А. 46
Козик А. Е. 176
Козин А. В. 106
Козорез Д. А. 274
Колесник С. А. 27, 36
Колпаков В. И. 134
Корнев Ю. В. 114
Коробовский А. В. 261, 326
Королев Е. Э. 310
Костров М. А. 15
Котов М. А. 220
Кравченко И. В. 328
Крапивина Е. А. 176
Криворучко Д. А. 193
Круглов М. С. 106
Крюков И. А. 194, 208, 230
Крылов С. С. 58
Крючков А. В. 344
Кудрявцева И. А. 48, 276
Кузнецов Г. В. 191
Кузнецова С. В. 344
Кули-заде М. Е. 346
Кули-заде Ф. Т. 166
Кульков В. М. 328
Купченко И. С. 336

Лапшин Д. А. 98
Левин В. А. 240
Лисовский О. Р. 50
Литовченко А. А. 52
Лозовой В. В. 104
Лонин К. А. 25
Лукин В. Н. 348
Лунева А. А. 278
Лунева С. Ю. 278
Лысов Д. А. 134

Мазо А. Б. 223
Маламанов С. Ю. 196
Маркин А. А. 119
Марков А. А. 198
Марков В. А. 134
Марков В. В. 240
Марков В. Г. 89
Мартиросов М. И. 102
Мартюшова Я. Г. 342
Матвиенко О. В. 160
Машкин М. Н. 243
Мельников А. В. 298, 300, 319
Меньшова И. В. 109, 116
Мизин С. В. 240

Миллер А. Б. 289
Миллер Б. М. 289
Миньков Л. Л. 172
Михайлова И. Б. 238, 252
Могулкин А. И. 298, 300
Мозеров М. Г. 280
Моисеев Д. В. 323
Молотков А. А. 264, 265
Молчанов А. М. 201
Молчанов С. П. 114
Морев П. Г. 119
Морозов А. Ю. 28
Москаленко О. А. 168
Мошаров В. Е. 176
Мухин А. С. 71, 73
Мякочин А. С. 164

Нагибин Н. С. 174
Наседкин Г. К. 283
Наумов А. В. 342
Неклюдова Г. А. 350
Нефедов В. Н. 283
Нигматзянов В. В. 193
Никитин А. Д. 120, 236
Никитин И. С. 120, 236
Никифоров А. П. 317
Николаев А. П. 122
Николаев В. Н. 30
Николаев Д. Н. 124
Никонов А. М. 204
Новиков А. С. 27
Носенко Н. А. 206

Оберган Т. Ю. 261
Ольшанский А. М. 53
Онысько С. Р. 92
Острик А. В. 124, 208

Павлевич А. Л. 321
Паймушин В. Н. 127
Пантелеев К. А. 32
Панченко Г. Л. 112
Патрушев В. Л. 25
Пейсахович О. Д. 300
Первухин А. С. 48
Перфильева К. Г. 160
Пестрякова Н. В. 39
Петров К. С. 276
Петрова П. Н. 100
Пиунов В. Н. 41
Пичков С. Н. 98
Плужник А. В. 104
Подгорная В. М. 285
Подпорин И. В. 164
Пожидаев А. А. 250
Полякова О. Р. 258
Попов А. К. 289
Попов А. С. 32
Попов Г. А. 306
Попов И. А. 312, 313, 315
Попова Е. О. 112
Потапов И. И. 210, 211
Поташев К. А. 223
Прозорова Э. В. 245, 247
Пролетарский А. В. 178
Псеунов Д. Р. 55
Пупышева Ю. Ю. 267

Рабинский Л. Н. 102
Радченко В. Н. 176
Ревизников Д. Л. 28, 212
Решетникова О. В. 210
Романенков А. М. 287
Романов А. В. 250
Романова И. А. 56
Романова–Большакова И. К. 330
Ромашин С. Н. 254
Рубцов П. В. 330
Рулева Л. Б. 213
Русских А. А. 260

Сабырханова Г. Ш. 352
Савельев А. С. 354
Савчук Д. В. 25
Сазонов М. И. 92
Саламатин А. А. 216
Сальков Ю. А. 264
Самусенко С. О. 114
Сапрыкин Д. Л. 264
Саркисов С. Э. 232
Светличная Е. В. 315
Свотина В. В. 298, 332
Северина Н. С. 170, 355
Седова Д. В. 129
Сеимов М. С. 58
Сейранян С. П. 130
Сембиев О. З. 352
Сеченых П. А. 60
Силакова Ю. Г. 211
Сиротин А. Н. 274
Скрылёв А. В. 193
Скурихин Г. О. 61

Соколов Г. П. 133
Соколова Т. Ю. 357
Солдатов В. А. 63
Соловьев Н. Г. 220
Соловьев С. А. 25
Солодовников С. И. 213
Сотский М. Ю. 134
Способин А. В. 212
Статников И. Н. 33
Степанов А. Е. 342
Степанян К. В. 289
Стратула Б. А. 120
Стрелков К. С. 136
Стрижак П. А. 156, 191
Стрижак С. В. 218, 291
Строганов В. Ю. 293
Строкач Е. А. 250
Сухов А. В. 256
Сыпало К. И. 274

Татаренко М. Н. 64
Телятников И. С. 104
Терешин В. А. 139
Тимошенко П. Е. 238, 252
Титеев А. М. 66
Тихонов К. М. 336
Тишков В. В. 336
Товстик Т. П. 258
Томащук К. К. 23
Торчик М. В. 220
Третьякова О. Н. 52, 264, 265
Трофимов В. В. 68, 129, 141
Тужилин Д. Н. 264, 265
Турчин А. С. 91, 238, 252
Тушавин Н. А. 27

Уафа Г. Н. 104
Ухов П. А. 37, 43, 63
Ушаков В. И. 41

Федюшкин А. И. 221
Филиппов Г. С. 58
Филиппов Ф. В. 220
Фимин Н. Н. 260, 267
Фирсанов В. В. 142
Фирсов Г. И. 33
Фирсюк С. О. 328
Формалев В. Ф. 36
Фроленкова Л. Ю. 254
Фролова Ю. В. 201

Халиуллина А. С. 216
Хамидуллин М. Р. 223
Хан Т. А. 142
Хартов С. А. 319
Харченко Н. А. 204, 206
Хатунцева О. Н. 224
Хвисевич В. М. 92
Хеук М. В. 92
Хмель Т. А. 227
Холодарь Б. Г. 95

Чаусов Д. Н. 232
Чекмарев Д. Т. 68, 129, 141
Чекулаев И. С. 232
Черкасова М. В. 334
Черных В. Д. 87
Чернышов Л. Н. 348
Чернышов С. В. 114
Чернышова М. М. 152
Чертова Н. В. 144
Чехонин К. А. 133, 187, 229
Чубиков В. Н. 336

Шайкин Д. В. 17
Шамордин А. А. 264
Шевченко А. В. 236
Шевченко Е. Р. 326
Шемякин А. Н. 220
Шешенин С. В. 69, 147
Шилов Е. А. 306
Шиманчук Д. В. 295, 296
Ширковский И. А. 317
Широков В. Б. 238, 252
Шишкин В. М. 127
Шмыров А. С. 295, 296
Шмыров В. А. 295, 296
Шоркин В. С. 254
Шпара А. П. 256
Шувалова А. М. 224
Шустов С. А. 230
Шуховцов Д. В. 89

Юсим В. А. 232

Ягодников Д. А. 256, 357
Языков И. Г. 82, 85
Якимов М. Ю. 220
Ярмак М. А. 92