Решение многокритериальной задачи определения приоритетов дорожных работ

Яковлев Д. М., СПбГУ, Санкт-Петербург st095998@student.spbu.ru,
Кривулин Н. К., СПбГУ, Санкт-Петербург nkk@math.spbu.ru

Аннотация

Рассматривается многокритериальная задача парных сравнений для определения приоритетов выполнения дорожных работ по развитию транспортной инфраструктуры. Приводится решение задачи на основе log-чебышевской аппроксимации матриц парных сравнений с помощью тропической алгебры.

Многокритериальная задача парных сравнений

Многокритериальная задача парных сравнений [1, 2, 3] позволяет определить значимость альтернатив, например, при планировании развития дорожно-транспортной инфраструктуры [4]. Задача состоит в оценке рейтингов N альтернатив с K критериями, которые сравниваются попарно. Задана матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$ парных сравнений критериев размера $K \times K$, $c_{ij} > 0$ определяет степень значимости критерия i по сравнению с критерием j (во сколько раз критерий i предпочтительнее j). Для каждого критерия $k = 1, \dots, K$ известны матрицы $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ сравнений альтернатив размера $N \times N$, $a_{ij}^{(k)} > 0$ определяет степень значимости критерия i в сравнении с j относительно критерия k. Вектор $\mathbf{x} = (x_i)$ рейтингов (приоритетов) альтернатив размера $N \times 1$, x_i показывает абсолютный рейтинг альтернативы i. Общая задача — на основе $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K$ определить $\mathbf{x}$.

Метод log-чебышёвской аппроксимации

Рассмотрим метод решения [1, 3, 5], который заключается в аппроксимации в метрике Чебышёва матриц парных сравнений согласованной матрицей с применением результатов тропической алгебры, обеспечивающих аналитическое решение. Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется *согласованной*, если $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, $i, k, j = 1, \dots, N$. Решение, полученное с помощью указанного метода, может быть не единственным, поэтому вводятся наилучший и наихудший дифференцирующие векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно. Наилучшее решение характеризуется максимальным, а наихудшее решение - минимальным значением отношения между элементами вектора решений по всему множеству полученных решений.

Для аналитического решения задачи она формулируется в терминах max-алгебры, которая представляет собой множество неотрицательных вещественных чисел с операцией сложения $\oplus$, заданной по правилу $x \oplus y = \max(x, y)$, и операцией умножения, заданной как обычно [2, 6]. Сложение и умножение матриц, согласованных по размеру, а также умножение на число выполняются по обычным правилам с заменой операции + на $\oplus$. Единичная матрица имеет обычный вид и обозначается символом I. Степень матрицы определяется в смысле тропического умножения матриц.

След квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ порядка N находится как сумма

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} \oplus a_{22} \oplus \cdots \oplus a_{NN} = \bigoplus_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Тропический спектральный радиус λ матрицы $\mathbf{A}$ вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \mathbf{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\mathbf{A}^2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/N}(\mathbf{A}^N) = \bigoplus_{k=1}^{N} \operatorname{tr}^{1/k}(\mathbf{A}^k).$$

Оператор Клини для матрицы $\mathbf{A}$ при условии $\lambda \leqslant 1$ определён в виде

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}^{N-1} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^k.$$

Для вектор-столбца $\mathbf{x} = (x_i)$ без нулевых элементов определён сопряжённый вектор-строка $\mathbf{x}^- = (x_i^{-1})$. Вектор-столбец, состоящий из единиц, обозначается $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Норма вектора $\mathbf{x}$ порядка N имеет вид

$$\|\mathbf{x}\| = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_N = \bigoplus_{i=1}^{N} x_i = \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}.$$

Решение задачи парных сравнений в терминах max-алгебры ищется выполнением следующих шагов [1, 3] .

1. Вычисление наилучшего и наихудшего дифференцирующих векторов весов для матрицы $\mathbf{C}$ парных сравнений критериев.

   1.1 Вычисление матрицы Клини для определения весов критериев

$$\mathbf{D} = (\lambda^{-1}\mathbf{C})^* = \bigoplus_{k=0}^{K-1} (\lambda^{-1}\mathbf{C})^k, \quad \lambda = \bigoplus_{k=1}^{K} \operatorname{tr}^{1/k}(\mathbf{C}^k). \qquad (1)$$

1.2 Определение по столбцам матрицы $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_k)$ наилучшего дифференцирующего вектора весов

$$\mathbf{w} = \mathbf{d}_i \|\mathbf{d}_i\|^{-1}, \quad i = \arg \max_{1 \leqslant k \leqslant K} \|\mathbf{d}_k\| \|\mathbf{d}_k^-\|. \tag{2}$$

В случае неединственного вектора $\mathbf{w}$ выбираются векторы, которые покомпонетно меньше других векторов.

1.3 Вычисление наихудшего дифференцирующего вектора весов

$$\mathbf{v} = (\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{D})^{-}. \tag{3}$$

2. Вычисление на основе матриц $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_K$ и вектора $\mathbf{w} = (w_k)$ наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив.

2.1 Определение взвешенной суммы матриц парных сравнений

$$\mathbf{P} = \bigoplus_{k=1}^{K} w_k \mathbf{A}_k. \tag{4}$$

2.2 Вычисление матрицы Клини для рейтингов альтернатив

$$\mathbf{Q} = (\mu^{-1} \mathbf{P})^* = \bigoplus_{n=0}^{N-1} (\mu^{-1} \mathbf{P})^n, \quad \mu = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathrm{tr}^{1/n}(\mathbf{P}^n). \tag{5}$$

2.3 Определение по столбцам матрицы $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_n)$ наилучшего вектора рейтингов альтернатив

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}_j \|\mathbf{q}_j\|^{-1}, \quad j = \arg \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \|\mathbf{q}_n\| \|\mathbf{q}_n^-\|. \tag{6}$$

В случае неединственного вектора $\mathbf{x}$ выбираются векторы, которые покомпонетно меньше других векторов.

3. Вычисление наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив для матриц $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_K$ и вектора $\mathbf{v} = (v_k)$.

3.1 Определение взвешенной суммы матриц парных сравнений

$$\mathbf{R} = \bigoplus_{k=1}^{K} v_k \mathbf{A}_k. \tag{7}$$

3.2 Вычисление матрицы Клини для рейтингов альтернатив

$$\mathbf{S} = (\nu^{-1} \mathbf{R})^* = \bigoplus_{n=0}^{N-1} (\nu^{-1} \mathbf{R})^n, \quad \nu = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathrm{tr}^{1/n}(\mathbf{R}^n). \tag{8}$$

3.3 Вычисление наихудшего вектора рейтингов альтернатив

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{S})^{-}. \tag{9}$$

Определение приоритетов дорожных работ

В статье [4] на основе парных сравнений альтернатив выбираются виды дорожных работ для развития дорожно-транспортной инфраструктуры в Восточном Тиморе. Заметим, что в этой статье не все используемые матрицы являются обратно симметричными. Это приводит к проблеме решения задач с исходно ошибочными данными. Рассматриваемый метод log-чебышёвской аппроксимации не зависит от ошибок в данных, что позволяет применить его в этих условиях.

Рассмотрим критерии оценки способов развития дорожно-транспортной инфраструктуры: 1) прочность дорожной покрытий, 2) надёжность дорожных покрытий, 3) безопасность автомобильных дорог, 4) работоспособность дорожных покрытий, 5) содержание дорожных покрытий. Матрица парных сравнений критериев имеет вид:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1/3 & 1 & 3 & 3 & 1/5 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 2 & 1/4 \\ 1/7 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеются следующие альтернативные виды работ: 1) монтаж и установка подпорных стен, 2) монтаж и установка дренажных систем дорожного покрытия, 3) монтаж водопроводных труб (Culverts), 4) выравнивание грунта и 5) вырубка деревьев и кустарников на полосах отвода. Матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию имеют вид:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1/2 & 1 & 4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1/5 & 1/2 \\ 1/7 & 1/4 & 5 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1/3 & 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1/5 & 1/6 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/6 & 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/6 & 1/6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 1/2 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1/3 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/5 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подчеркнём, что матрицы $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$ не обратно симметричные.

Решение задачи

Использование описанной выше процедуры решения задачи на основе log-чебышёвской аппроксимации приводит к следующим результатам.

По формулам (1) находим матрицу для определения весов критериев

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 3\lambda & 6 & 2/\lambda \\ 3/5\lambda^2 & 1 & 3/\lambda & 6/\lambda^2 & \lambda/5 \\ 1/5\lambda & \lambda/3 & 1 & 2/\lambda & 2/3\lambda^2 \\ 1/10 & \lambda^2/6 & \lambda/2 & 1 & 1/3\lambda \\ 3\lambda/10 & 5/\lambda & 15/\lambda^2 & 3\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 10^{1/4} \approx 1{,}7783.$$

Чтобы применить формулы (2), сначала найдем

$$\|\mathbf{d}_1\|\|\mathbf{d}_1^-\| = 10,$$
$$\|\mathbf{d}_2\|\|\mathbf{d}_2^-\| = \|\mathbf{d}_3\|\|\mathbf{d}_3^-\| = \|\mathbf{d}_4\|\|\mathbf{d}_4^-\| = \|\mathbf{d}_5\|\|\mathbf{d}_5^-\| = 6.$$

Выбрав $i = 1$, найдем наилучший дифференцирующий вектор весов

$$\mathbf{w} = \mathbf{d}_1\|\mathbf{d}_1\|^{-1} = (1 \quad 3/5\lambda^2 \quad 1/5\lambda \quad 1/10 \quad 3/\lambda^3)^{\mathrm{T}}.$$

По формуле (3) вычислим наихудший дифференцирующий вектор весов

$$\mathbf{v} = (\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{D})^- = (1 \quad 1/\lambda^2 \quad 1/3\lambda \quad 1/6 \quad \lambda/2)^{\mathrm{T}}.$$

С помощью (4) найдем взвешенную сумму матриц

$$\mathbf{P} = \bigoplus_{k=1}^{5} w_k \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1/2 & 1 & 4 & 6\lambda/5 & 3\lambda/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 3\lambda/5 & 3\lambda/5 \\ 2/5\lambda & 4/5\lambda & 5 & 1 & 9/\lambda^3 \\ 1/\lambda & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулы (5), построим матрицу Клини для определения наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 14/\mu^2 & 35/\mu^2 & 7/\mu & 14/3\mu \\ 5/3\mu^2 & 1 & 5/\mu & 1 & \mu/3 \\ 1/3\mu & 2/5 & 1 & 2/5 & 2\mu/15 \\ 5/3\mu^2 & 2/\mu & 5/\mu & 1 & 2/3 \\ 5/\mu^3 & 3/\mu & 15/\mu^2 & 3/\mu & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 3(\lambda/2)^{1/2}.$$

Для использования формулы (6) сначала вычислим

$$\|\mathbf{q}_1\|\|\mathbf{q}_1^-\| = 3\mu \approx 8{,}486,$$
$$\|\mathbf{q}_2\|\|\mathbf{q}_2^-\| = \|\mathbf{q}_3\|\|\mathbf{q}_3^-\| = \|\mathbf{q}_5\|\|\mathbf{q}_5^-\| = 35/\mu^2 \approx 4{,}374,$$
$$\|\mathbf{q}_4\|\|\mathbf{q}_4^-\| = 35/2\mu \approx 6{,}186.$$

Выберем $i = 1$ и найдём наилучшее дифференцирующее решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}_1\|\mathbf{q}_1\|^{-1} \approx (1{,}0000 \quad 0{,}2083 \quad 0{,}1178 \quad 0{,}2083 \quad 0{,}2209)^{\mathrm{T}}.$$

Полученный вектор определяет следующий порядок альтернатив

$$\mathbf{I} \succ \mathbf{V} \succ \mathbf{II} \equiv \mathbf{IV} \succ \mathbf{III}.$$

Применяя (7), найдём взвешенную сумму матриц

$$\mathbf{R} = \bigoplus_{k=1}^{5} v_k \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1/2 & 1 & 4 & 2\lambda & 5\lambda/2 \\ 1/3 & \lambda/6 & 1 & \lambda & \lambda \\ 2/3\lambda & 4/3\lambda & 5 & 1 & 3\lambda/2 \\ 5/3\lambda & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим матрицу для определения рейтингов альтернатив

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 21/5\nu & 35/\nu^2 & 7/\nu & 7/5 \\ 25/6\nu^2 & 1 & 5/\nu & 1 & \nu/3 \\ 5/3\nu^2 & 2/5 & 1 & 2\nu/15 & 2\nu/15 \\ 5/2\nu^2 & 3/5 & 5/\nu & 1 & \nu/5 \\ 25/2\nu^3 & 3/\nu & 15/\nu^2 & 3/\nu & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = (15\lambda/2)^{1/2}.$$

По формуле (9) вычислим наихудшее дифференцирующее решение

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{S})^{-} \approx (1{,}0000 \quad 0{,}8695 \quad 0{,}3811 \quad 0{,}5217 \quad 0{,}7143)^{\mathrm{T}}.$$

Полученный вектор определяет следующий порядок альтернатив

$$\mathbf{I} \succ \mathbf{II} \succ \mathbf{V} \succ \mathbf{IV} \succ \mathbf{III}.$$

Заключение

В статье рассмотрена многокритериальная задача парных сравнений и применен метод log-чебышёвской аппроксимации для определения приоритетов дорожных работ. Заметим, что оба полученных решения согласуются в определении наиболее и наименее предпочтительных альтернатив.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания и комментарии.

Список литературы

[1] Krivulin N. K. Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation // Int. J. Approx. Reason. — 2024. — Vol. 169. — P. 109–168.

[2] Кривулин Н.К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009.

[3] Кривулин Н. К., Агеев В. А. Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2019. — №4. — P. 472–488.

[4] Da Costa X. H. Comprehensive evaluation of video data by using the Analytic Hierarchy Process (AHP) method // Timorese Academic Journal of Science and Technology. — 2018. — Vol. 1. — P. 87–95.

[5] Решение многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений / Кривулин Н. К., Булгакова Д. С., Григорьев Д. А., Нагуманова К. И., Приньков А. С., Салова Я. А., Филатова А. А. // Компьютерные инструменты в образовании. — 2024. — №2. — P. 5–29.

[6] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.