

Колебания прямоугольной трехслойной пластины*

Н. В. Наумова, Д. Н. Иванов, А. Б. Яковлев, Н. П. Дорофеев, Л. С. Ласкавый

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Наумова Н. В., Иванов Д. Н., Яковлев А. Б., Дорофеев Н. П., Ласкавый Л. С. Колебания прямоугольной трехслойной пластины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 2. С. 231–245. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.205>

В работе рассмотрена трехслойная прямоугольная пластина. Выведено осредненное дифференциальное уравнение колебаний пластины. На основе двумерной теории тонких пластин получены приближенные формулы для вычисления собственных частот и форм колебаний. Показано влияние ребер жесткости на деформацию изучаемой трехслойной пластины. Проведено сравнение аналитических и численных результатов. Численные расчеты выполнены методом конечных элементов при использовании программного комплекса ANSYS и пакета MAXIMA.

Ключевые слова: трехслойная пластина, деформация, колебания, подкрепленная пластина, космический парус, частоты колебаний пластины.

1. Введение. Естественное развитие исследований и освоения космического пространства потребовало разработки принципиально новых двигательных систем, которые способны работать с минимальным расходом бортовых источников энергии. К таким системам, в частности, относятся различные парусные конструкции: обычные солнечные [1, 2], электрические [3–6] и магнитные [7–9]. Проводятся разработки и других, по мнению авторов, более эффективных конструкций, не использующих топливо двигателей для межзвездных полетов [10, 11]. Электрический парус состоит из ряда длинных и тонких тросов, имеющих высокий положительный потенциал, которые разворачиваются при закрутке космического аппарата (КА) вокруг его оси симметрии. Положительный заряд тросов создается электронной пушкой на КА, которая эмитирует пучок электронов, направленный против движения космического корабля. Положительно заряженные тросы отталкивают ионы солнечного ветра, что приводит к передаче импульса от ионов к парусу и, следовательно, ускорению корабля. Тяга магнитного паруса возникает в результате магнитостатического взаимодействия между солнечным ветром и искусственным магнитным полем, которое произведено на борту электрическим током, текущим по электрическому контуру из проводящего материала. Несмотря на подробную разработку концепций электрического и магнитного полюсов, значительное количество работ по их предполагаемому использованию для проведения конкретных космических миссий и проведению натурных испытаний электрического паруса [6], наиболее обсуждаемой и практически реализуемой является концепция обычного пленочного солнечного паруса.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>, а также при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета, проект № 116636233.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

Напомним, что солнечные паруса, впервые предложенные К. Циолковским и Ф. Цандером еще в 1920-х годах, представляют собой большие листы материала низкой плотности, единственным источником энергии которых служит электромагнитный поток Солнца. В теории полет на солнечном парусе может продолжаться неограниченное время за счет «постоянного мягкого воздействия солнечного света». Интерес к солнечным парусам возрос в 1970-х годах благодаря теоретическим исследованиям NASA, хотя в то время никаких практических миссий с их использованием не проводилось. В последующие десятилетия было опубликовано много теоретических и экспериментальных работ по солнечному плаванию. Отдельно стоит отметить несомненный вклад в них доцента кафедры небесной механики СПбГУ Е. Н. Поляховой, которой в этом году исполняется 90 лет и по праву считающейся «Solar Sail Queen». Кроме изучения динамики межпланетных перелетов в последнее время активно рассматривается использование солнечного паруса для маневрирования в окрестности определенных, представляющих особый интерес точек космического пространства, например точек либрации [12–17].

Отдельное важное направление исследований движения КА с солнечным парусом — изучение влияния на их динамику процессов негативного воздействия различных факторов космического пространства, таких как старение пленки [18] и ее электризация под воздействием солнечного излучения и космической плазмы [19, 20]. В частности, в [19] показано, что наведенный на поверхности паруса электрический заряд не оказывает заметного влияния на динамику вследствие малости межпланетного магнитного поля. В то же время поверхностный заряд на солнечном парусе способен изменять форму и площадь миделя паруса, что необходимо учитывать при управлении движением КА с парусом [20].

В последние десятилетия произошел переход от теоретических исследований к реализации натуральных экспериментов по использованию солнечного паруса. Осуществленные и перспективные проекты по разворачиванию космических парусов обсуждались, например, на международном симпозиуме по космическим путешествиям в 2023 г. (6th International Symposium on Space Sailing — ISSS–2023. New York, USA).

Среди огромного количества предложенных на симпозиуме инновационных разработок и уже имеющихся моделей космических парусов внимание привлек проект космического паруса OKEANOS, предложенный группой японских ученых (рис. 1).

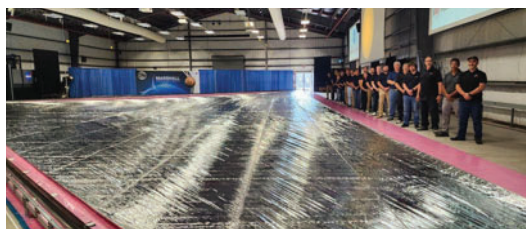


Рис. 1. Космический парус и команда конструкторов

Для проверки осуществимости указанного проекта была сформулирована задача об определении собственных частот и форм колебаний такого паруса под воздействием солнечного излучения. Цель работы — разработать подходящую математическую модель, провести численный анализ частот и форм собственных колебаний трехслойной прямоугольной пластины, сравнить теоретические и численные результаты.

В настоящей статье рассматривается трехслойная пластина — конструкция, представляющая собой две лицевые пластины и внутренний (средний) слой — наполнитель. Поскольку в трехслойных пластинах изменение по толщине жесткостных и механических свойств слоев более значительное, чем в традиционных композитных материалах, то влияние поперечного сдвига и нормальных напряжений в них на напряженно-деформированное состояние также более существенное, чем в композитах.

Огромный вклад в создание трех- и двумерных математических моделей трехслойных пластин внесли работы таких выдающихся ученых как П. Е. Товстик [21], Э. И. Григолюк [22, 23], Г. И. Михасев [24]. Помимо них проектированию трехслойных пластин, находящихся в условиях цилиндрического изгиба, посвящена статья А. Ш. Кусякова [25]. Также представляют интерес работы Е. И. Старовойтова о вынужденных колебаниях трехслойных пластин [26] и Е. Д. Грушенковой [27], где поставлена и аналитически решена задача о продольных и изгибных гидроупругих колебаниях трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости. А. Каси [28] была предложена уточненная теория нелинейного изгиба трехслойной пластины из функционально-градиентного материала, ее результаты могут пригодиться при проектировании конструкций, допускающих большие смещения в трехслойных пластинах с учетом распределения напряжений по толщине.

В настоящей статье собственные частоты и формы трехслойной пластины получены двумя независимыми различными способами и подтверждают достоверность представленных результатов. Проведенные исследования, несомненно, будут полезны в дальнейшем для определения резонансных частот колебаний трехслойных пластин.

2. Общая теория тонких упругих пластин. Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину ширины a и длины b (рис. 2). На срединной поверхности наполнителя введем декартовы координаты (x_1, x_2, z) .

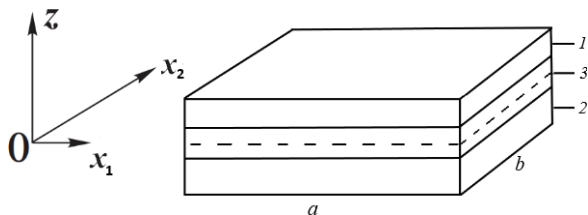


Рис. 2. Трехслойная пластина

Неоднородность структуры такой пластины по толщине требует учета работы слоя наполнителя при поперечном сдвиге и поперечном сжатии, а также приводит к необходимости проводить сопряжение слоев.

В работе [21] сравниваются две модели учета влияния поперечного сдвига для многослойной пластины: модель Э. И. Григолюка [22], базирующаяся на распределении тангенциальных деформаций по толщине пластины, и модель П. Е. Товстика [21], использующая асимптотическое разложение решения трехмерных уравнений теории упругости по степеням малого параметра тонкостенности. Погрешности моделей оцениваются путем сравнения с точным решением трехмерной тестовой задачи. Было показано, что если жесткости слоев сильно различаются, то классическая модель, основанная на гипотезе прямой нормали Кирхгоффа — Лява, неприменима, и необхо-

димо учитывать влияние поперечного сдвига. Однако, если отношение модулей Юнга внешних слоев и заполнителя $\eta \leq 10$ ($\eta = E_1/E_3$), модель Григолюка можно применять, и в этом случае удобно использовать уравнения двумерной теории оболочек и формулу для определения параметра частоты колебаний (см. (8)), предлагаемые в настоящей статье.

В работах [22, 23] вариационным методом получены основные дифференциальные уравнения конечного прогиба тонких упругих пологих трехслойных оболочек, состоящих из изотропных несущих слоев и трансверсально изотропного заполнителя. При построении уравнений для несущих слоев используются гипотезы Кирхгофа — Лява о прямой нормали, для заполнителя — гипотеза о несжимаемости материала в поперечном направлении, а также предполагается, что деформация поперечного сдвига по толщине заполнителя распределена по некоторому известному закону.

На рис. 2 показана нумерация слоев пластины: 1–3. Мы сохранили все принятые в работе [22] обозначения.

Были введены следующие обозначения: h_k — толщина слоя с номером k ($k = 1, 2, 3$), $h_3 = 2c$; h — общая толщина пластины: $h = h_1 + h_2 + h_3$; E_k и ν_k — модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го слоя; ρ_k — плотность k -го слоя; G — модуль поперечного сдвига заполнителя; w — нормальное перемещение точек исходной поверхности (прогиба); u_i^z — тангенциальное перемещение точек заполнителя в направлении оси x_i ($i = 1, 2$); k_{ij} — кривизны и кручение координатных линий ($i, j = 1, 2$); $\alpha_i \cdot (\frac{\partial f}{\partial z})$ — закон распределения поперечных сдвигов по толщине заполнителя в направлениях x_1 или x_2 ; δ_{ij} — символы Кронекера: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Кроме того, для более компактной записи аналитических формул введем так называемый приведенный коэффициент Пуассона

$$\nu = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k \nu_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

осредненный модуль упругости

$$E = \frac{1 - \nu^2}{h} \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2}, \quad (2)$$

безразмерные жесткостные характеристики и безразмерные толщины слоев

$$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad t_k = \frac{h_k}{h} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Тогда, очевидно, для γ_k и t_k выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1, \quad \sum_{k=1}^3 t_k = 1, \quad \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \gamma_k. \quad (4)$$

В общем случае функция $f(z)$ считается произвольной, но для практического использования уравнений (1)–(4) обычно рассматривают два вида распределения поперечных сдвигов по толщине заполнителя, определяемых условиями

$$f'(z) = 1 \quad \text{или} \quad f'(z) = \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Первый закон вытекает из уравнений равновесия с легким заполнителем. В рассматриваемой математической модели используется именно такой вид функции $f(z) = z$. Это обусловлено выбором материала заполнителя (майлар). Дополнительно $f(z)$ задается таким образом, чтобы

$$f(c) = \frac{1}{2}h_3, \quad f(-c) = -\frac{1}{2}h_3.$$

Деформация поперечного сдвига в заполнителе

$$\varepsilon_{ij}^3 = \frac{\partial u_i^z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

где $u_i^z = u_i + \alpha_i f(z) - z \frac{\partial w}{\partial x_i}$, $-c \leq z \leq c$. Тангенциальные перемещения поверхностей соприкосновения заполнителя с первым и вторыми слоями задаются соответственно формулами

$$u_i^1 = u_i + c \alpha_i - c \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{при } z = c,$$

$$u_i^2 = u_i - c \alpha_i + c \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{при } z = -c,$$

тангенциальные перемещения несущих слоев в случае описываемой математической модели — в виде

$$u_i^{1z} = u_i + c \alpha_i - z \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{при } c \leq z \leq c + h_1,$$

$$u_i^{2z} = u_i - c \alpha_i - z \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{при } -c - h_2 \leq z \leq -c.$$

Деформации слоев определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^1 = e_{ij} + c \alpha_{ij} - c \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - (z - c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\varepsilon_{ij}^2 = e_{ij} - c \alpha_{ij} + c \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - (z + c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\varepsilon_{ij}^3 = e_{ij} + f(z) \alpha_{ij} + z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \varepsilon_{iz}^3 = \alpha_i \cdot \frac{df}{dz},$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right).$$

Распределения функции сдвига и тангенциальных перемещений по нормали оболочки показаны на рис. 3.

В соответствии с законом Гука напряжения в слоях запишутся так:

$$\sigma_{ij}^k = \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} [(1 - \nu) \varepsilon_{ij}^k + \nu \delta_{ij} (\varepsilon_{11}^k + \varepsilon_{22}^k)],$$

$$\sigma_{iz}^3 = G \alpha_i \cdot \frac{df}{dz}.$$

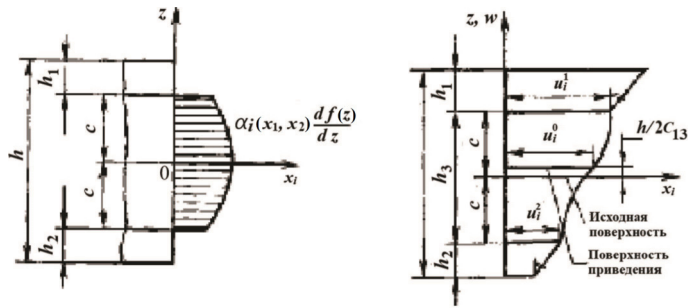


Рис. 3. Распределения функции сдвига (слева) и тангенциальных перемещений (справа) по нормали оболочки

Более подробная информация о тангенциальных перемещениях несущих слоев, а также тангенциальных перемещениях поверхностей соприкосновения заполнителя с первым и вторыми слоями представлена в [24]. В ней приведены и основные разрешающие уравнения теории колебаний пологих трехслойных оболочек. Согласно исследованиям, проведенным П. Е. Товстиком [21], в случае выполнения соотношения на модули Юнга несущих слоев и заполнителя $\eta \leq 50$ ($\eta = E_1/E_3$), для рассматриваемой пластины (модели космического паруса) пригодна теория Е. И. Григолюка, описывающая колебания пологих оболочек. В связи с этим обстоятельством мы применили модель исследования пологих оболочек Е. И. Григолюка по отношению к прямоугольной пластине, провели линеаризацию уравнений, учитывая малость поперечных прогибов и перемещений слоев.

3. Свободные поперечные колебания прямоугольной трехслойной пластины. В случае отсутствия внешних сил линеаризованные уравнения малых поперечных колебаний трехслойной пластины примут вид

$$D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \lambda w. \quad (5)$$

Здесь λ — частотный параметр, D — жесткость составной трехслойной пластины $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Theta$, где $\Theta = t_3^2 + 4\gamma_1(t_3^2 + 3t_1t_3 + 2t_1^2)$.

Для шарнирно закрепленной по периметру трехслойной пластины граничные условия при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$, а также при $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ имеют вид

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0. \quad (6)$$

Будем искать решение уравнения (1) при выполнении условий (5):

$$w(x_1, x_2) = C \cdot \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b}, \quad (7)$$

где p и q — число полуволн в направлении осей Ox_1 и Ox_2 соответственно; a и b — ширина и длина пластины; C — произвольный амплитудный множитель. Подставляя (7) в (1), получим формулу для определения параметра частоты колебаний λ рассматриваемой пластины

$$\lambda = D \cdot \pi^4 \cdot \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)^2. \quad (8)$$

Минимум выражения (8) достигается при $p = 1, q = 1$, что соответствует наличию одной полуволны вдоль длины и ширины пластины. Циклическая частота ω связана с частотным параметром λ следующим соотношением:

$$\lambda = 4 \cdot \pi^2 \cdot \omega^2 \cdot \sum_{k=1}^3 (\rho_k \cdot h_k). \quad (9)$$

4. Численные расчеты. В качестве примеров были рассмотрены квадратные пластины с длиной и шириной 10 м.

В расчетных задачах в качестве заполнителя был выбран полиэтилентерефталат, наиболее известный как майлар. При этом функция распределения сдвигов по толщине заполнителя имеет вид $f(z) = z$. Несущие слои были сделаны из алюминия. Свойства выбранных материалов слоев представлены в табл. 1.

Таблица 1. Свойства материалов

Материал	Модуль Юнга, $E, 10^9 \text{ Н/м}^2$	Плотность материала, $\rho, \text{ кг/м}^3$	Коэффициент Пуассона, μ
Алюминий	70	2712	0.32
Майлар	2.5	1400	0.30

В численных расчетах первый и второй слои пластины имели толщины $h_1 = h_2 = 0.002$ м и были сделаны из алюминия. Третий (средний) слой — заполнитель толщиной $h_3 = 0.025$ м изготовлен из майлара.

В табл. 2 приведены значения первых четырех собственных частот колебаний рассматриваемой трехслойной пластины.

Таблица 2. Частоты колебаний пластины

Номер частоты	Количество полуволн по ширине и длине	Частота колебаний, Гц		Отн. погрешность, %
		по формулам (8), (9)	МКЭ (ANSYS)	
1	1 – 1	1.194	1.190	0.3
2	1 – 2	2.986	2.979	0.7
3	2 – 2	4.778	4.760	1.8
4	3 – 3	5.973	5.962	1.1

В столбце 3 табл. 2 представлены значения частот колебаний, полученные по аналитическим формулам (8), (9), а в столбце 4 — найденные методом конечных элементов (МКЭ) с помощью пакета ANSYS [29–31]. Как показывает сравнение результатов, относительная погрешность между асимптотическими и численными результатами не превышает 2 %.

При расчете частот колебаний МКЭ в пакете ANSYS рассматриваемая пластина аппроксимировалась совокупностью элементов SHELL91.

Напомним, что SHELL91 — нелинейный элемент слоистой оболочки. Он имеет восемь узлов и шесть степеней свободы в каждом узле. Данный элемент предназначен для моделирования тонких и умеренно толстых пластин и оболочек с отношением длины стороны к толщине, равным 10 или более. Кроме того, такой элемент позволяет задавать максимум 100 слоев. Также SHELL91 поддерживает учет пластичности, лучше описывает поведение конструкции при больших перемещениях, деформа-

циях и имеет специальную опцию трехслойной конструкции с легким наполнителем (sandwich).

На рис. 4, *a–г* показаны первые четыре формы колебаний рассматриваемой трехслойной пластины.

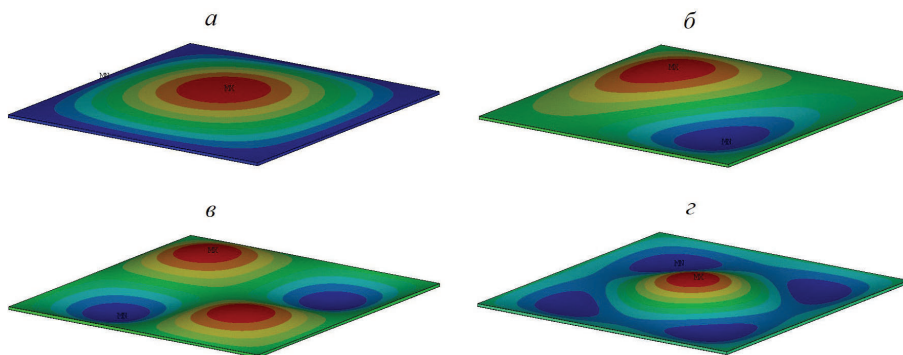


Рис. 4. Первая (*a*), вторая (*б*), третья (*в*) и четвертая (*г*) формы колебаний трехслойной пластины

При исследовании оптимального подбора количества элементов разбиения пластины в пакете ANSYS был проведен анализ сеточной сходимости результатов вычислений частот колебаний. На основе данных табл. 3 можно сделать вывод, что в качестве итоговых можно брать значения частот, получаемые при разбиении пластины на 30 элементов по длине и 30 элементов по ширине. При последующих разбиениях (столбцы 4 и 5 табл. 3) заметно полное совпадение значений частот колебаний с предыдущими столбцами.

Таблица 3. Сеточная сходимость результатов вычислений частот колебаний пластины

Номер частоты	Число элементов			
	20 × 20	30 × 30	35 × 35	40 × 40
1	1.190	1.191	1.191	1.191
2	2.979	2.981	2.981	2.981
3	4.760	4.764	4.765	4.766
4	5.962	5.964	5.965	5.966
5	7.736	7.743	7.745	7.746
6	10.137	10.141	10.142	10.142

Также отметим, что по нашей программе, написанной на языке APDL, расчет частот и соответствующих им форм колебаний в пакете ANSYS занимает не более минуты. Следует отметить, что собственные векторы вычисляются лишь с точностью до произвольного множителя, так как с точки зрения математики модальный анализ сводится к решению обобщенной задачи на собственные значения:

$$([K] - \omega_i^2 \cdot [M]) [\Phi_i] = 0,$$

где $[K]$ — матрица жесткости тела; $[M]$ — матрица масс; ω_i^2 — собственное значение с номером i (в данном случае ω_i является круговой частотой собственных колебаний); $[\Phi_i]$ — соответствующий ему собственный вектор (характеризующий форму собствен-

ных колебаний). Для определенности собственные вектора обычно нормируют. В программе ANSYS по умолчанию нормирование проводится по матрице масс так, чтобы выполнялось равенство

$$[\Phi_i]^T \cdot [M] \cdot [\Phi_i] = 1.$$

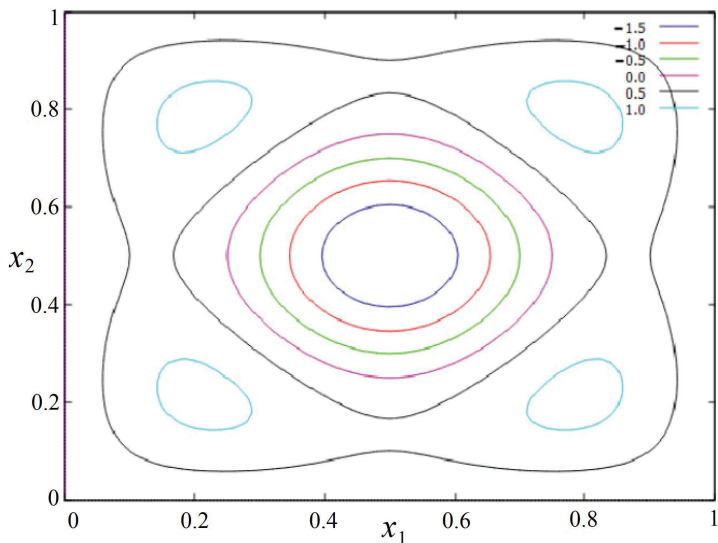


Рис. 5. Расчеты четвертой формы колебаний трехслойной пластины в пакете MAXIMA

Надо отметить, что частоты колебаний трехслойной пластины близки к частотам колебаний однослойной пластины с осредненным модулем упругости, толщина которой равна суммарной толщине трехслойной пластины. Что касается форм колебаний трехслойных и однослойных пластин, то можно заметить, что по общему деформационному виду они полностью совпадают.

Если провести сравнительный анализ не только частот, но и форм собственных колебаний трехслойной пластины, определенных по аналитическим формулам и с помощью МКЭ, то здесь также наблюдается полное совпадение результатов. В частности, на рис. 5 показана четвертая форма колебаний рассматриваемой пластины, полученная в пакете MAXIMA, при построении графика функции при условии $a = b$:

$$w = \sin \frac{3\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} + \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{3\pi x_2}{b}.$$

Здесь наблюдается линейная комбинация собственных форм колебаний $3 - 1$ (три полуволны по ширине пластины и одна — по длине) и $1 - 3$ (одна полуволна по ширине пластины и три полуволны — по длине). Аналогичную картину можно увидеть и на рис. 4, з.

5. Трехслойная пластина, армированная ребрами жесткости. Наличие ребер жесткости в направлении ширины пластины, несомненно, увеличивает собственные частоты колебаний. Об этом свидетельствуют результаты табл. 4. В качестве примера была рассмотрена, как и в предыдущем случае, квадратная трехслойная пластина, размерами 10×10 м, армированная 9 ребрами жесткости. Ребра моделировались элементами SHELL63, материал — алюминий, толщиной 2 см и высотой 3 см.

Ребра не только играют роль токопроводящих каналов, но и позволяют сохранить функциональность конструкции при повреждении одной из секций.

Таблица 4. Частоты колебаний армированной и неармированной пластин

Номер частоты	Количество полуволн по ширине и длине	Частота колебаний, Гц	
		без армирования	с учетом армирования
1	1 — 1	1.190	1.453
2	1 — 2	2.979	3.601
3	2 — 2	4.760	5.813
4	3 — 1	5.962	7.435

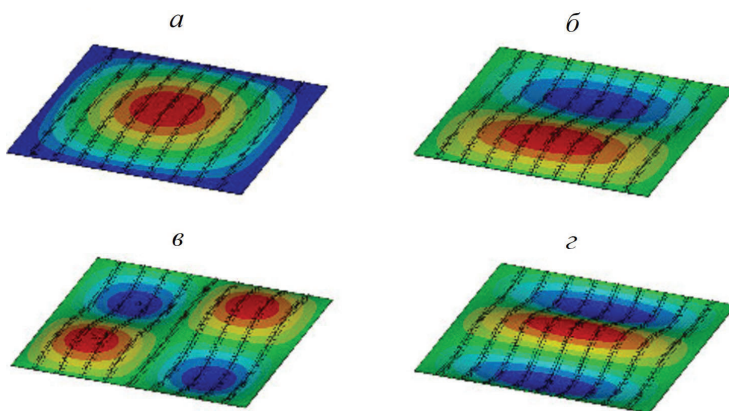


Рис. 6. Первая (а), вторая (б), третья (в) и четвертая (г) формы колебаний армированной трехслойной пластины

Сравнение форм колебаний неармированной (рис. 4, а–г) и армированной (рис. 6, а–г) пластин показывает полное совпадение первых четырех форм колебаний. Отличие заметно на вторых и четвертых формах колебаний.

6. Влияние давления солнечного ветра на деформацию космического паруса. Потребность в эффективных инженерных конструкциях космических парусов обуславливает необходимость проведения исследований возможных деформаций и напряжений трехслойных пластин под действием внешнего давления.

Напомним, что космический парус — представленная трехслойная пластина — находится под постоянным действием силы давления солнечного ветра. Солнечный ветер — непрерывный поток заряженных частиц, исходящий от солнечной короны в космическое пространство. Он образуется в результате выброса плазмы с поверхности Солнца, вызванного сильным нагревом в результате реакций ядерного синтеза, происходящих внутри звезды. С помощью солнечного ветра работает и солнечный парус, развернутый на орбите впервые в 1993 г., который может использоваться для дополнительного источника электроэнергии в космосе.

Нормальное ветровое давление (в Па) на препятствие в первом приближении определяется по формуле

$$p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2, \quad (10)$$

где ρ — плотность воздуха, $\text{кг}/\text{м}^3$ (принимаяем ее равной $1.225 \text{ кг}/\text{м}^3$); 0.5 — коэффициент сопротивления (обтекания); V — скорость ветра, $\text{м}/\text{с}$.

Так как солнечный ветер — поток ионизированных частиц (в основном гелиево-водородной плазмы), истекающий из солнечной короны со скоростью $300\text{--}1200 \text{ км}/\text{с}$ в окружающее космическое пространство, то можно рассчитать величину давления на поверхность рассматриваемой пластины.

Принимая плотность ρ солнечного ветра в формуле (10) в 7 раз меньшей, чем плотность воздуха, а также с учетом движения паруса в потоке возьмем величину среднего нормального давления на описываемую пластину порядка 500 Па .

На рис. 7 показана деформация трехслойной пластины под действием равномерного внешнего давления без учета и с учетом армирования. Максимальный прогиб в центре пластины составляет в первом случае 29 см , а во втором — 11 см . Наличие 9 ребер жесткости уменьшает величину прогиба более чем в 2 раза. В дальнейшем планируется провести отдельное исследование влияния количества шпангоутов (ребер жесткости) и их характеристик на деформацию, частоты и формы свободных колебаний изучаемой трехслойной пластины.

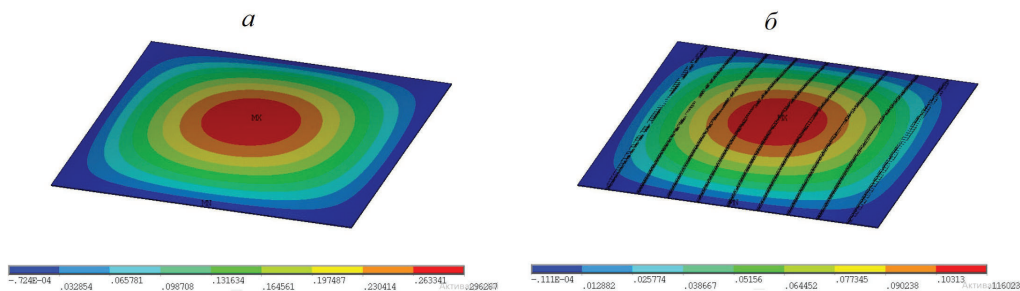


Рис. 7. Деформация трехслойной пластины под действием равномерного внешнего давления без учета (а) и с учетом (б) армирования

7. Заключение. В статье рассмотрена трехслойная прямоугольная пластина. На основе двумерной теории тонких оболочек получены дифференциальное уравнение ее колебаний и формулы для вычисления собственных частот и форм колебаний. Показано влияние ребер жесткости на деформацию трехслойной пластины. Проведено сравнение аналитических и численных результатов. Численные расчеты выполнены методом конечных элементов при использовании программного комплекса ANSYS и пакета МАХИМА. Мы надеемся, что полученные результаты могут быть полезны при определении резонансных частот колебаний многослойных пластин, и считаем, что они, несомненно, дополняют информацию тестирования разрабатываемых парусных систем для успешного проведения будущих космических полетов.

Благодарность. Авторы благодарят кандидата физико-математических наук, доцента кафедры небесной механики СПбГУ Е. Н. Поляхову за ценные советы и замечания по данному исследованию.

Литература

1. Поляхова Е. Н. Космический полет солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука, 1986. 304 с.

2. *Wright J.* Space sailing. Abingdon: Routledge, 1992. 258 p.
3. *Janhunen P., Sandroos A.* Simulation study of solar wind push on a charged wire: Basis of solar wind electric sail propulsion // *Ann. Geophys.* 2007. Vol. 25. P. 755–767.
4. *Janhunen P.* Electric sail for spacecraft propulsion // *Journal of Propulsion and Power.* 2004. Vol. 20. N 4. P. 763–764.
5. *Toivanen P., Janhunen P., Envall J.* Electric sail control mode for amplified transverse thrust // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 106. P. 111–119.
6. *Palos M. F., Janhunen P., Toivanen P., Tajmar M., Iakubivskiy I., Micciani A., Orsini N., Kütt J., Rohtsalu A., Dalbins J., Teras H., Allaje K., Pajusalu M., Niccolai L., Bassetto M., Mengali G., Quarta A. Q., Ivchenko N., Stude J., Vaivads A., Tamm A., Slavinskis A.* Electric sail mission expeditor, ESME: Software Architecture and Initial ESTCube lunar cubesat E-sail experiment design // *Aerospace.* 2023. Vol. 10. P. 694–723. <https://doi.org/10.3390/aerospace10080694>
7. *Zubrin R. M., Andrews D. G.* Magnetic sails and interplanetary travel // *Journal of Spacecraft and Rockets.* 1991. Vol. 28. N 2. P. 197–203.
8. *Andrews D. G., Zubrin R. M.* Use of magnetic sails for Mars exploration missions // *Papers of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.* 1989. P. 202–210.
9. *Zubrin R. M.* The use of magnetic sails to escape from the low Earth orbit // *Journal of the British Interplanetary Society.* 1993. Vol. 46. P. 3–10.
10. *Forward R. L.* Radioisotope sails for deep space propulsion and power // *Journal of the British Interplanetary Society.* 1996. Vol. 49. P. 147–149.
11. *Tajmar M., Kößling M., Weikert M., Monette M.* The space drive project — Developing revolutionary propulsion at TU Dresden // *Acta Astronautica.* 2018. Vol. 153. P. 1–5. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.10.028>
12. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // *Письма в Астрономический журнал.* 2020. Т. 46. № 3. С. 193–200.
13. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Орбитальное маневрирование в окрестностях коллинеарных точек либрации с использованием сил светового давления // *Письма в Астрономический журнал.* 2021. Т. 47. № 10. С. 733–742.
14. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Маневр ухода из окрестности коллинеарной точки либрации при использовании сил светового давления // *Письма в Астрономический журнал.* 2023. Т. 49. № 9. С. 612–622.
15. *Шмыров В. А.* Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 298–306. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214>
16. *Rodnikov A. V.* Keeping a solar sail near the triangular libration point of a dumbbell-shaped or binary asteroid // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2023. Vol. 19. N 4. P. 521–532. <https://doi.org/10.20537/nd230801>
17. *Vaskova V. S., Rodnikov A. V.* On a sailed spacecraft motion along a handrail fixed to two heliocentric space stations // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2023. Vol. 19. N 3. P. 359–370. <https://doi.org/10.20537/nd230802>
18. *Полягова Е. Н.* Влияние износа зеркальной пленки под действием космических факторов на динамику движения солнечного паруса цандеровской ориентации по гелиоцентрической орбите. // *Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации.* 1983–1984 гг. М.: Наука, 1985. С. 62.
19. *Yakovlev A. B.* Influence of electric charge on surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories // *Journal of Physics: Conference Series.* 2021. Vol. 1959. Art. N 012052.
20. *Tikhonov A. A., Naumova N. V., Yakovlev A. B., Ivanov D. N., Dorofeev N. P.* On the deformation of a round three-layer plate under the action of a surface charge // *Scientific publications of the State University of Novi Pazar series. A: Appl. Math. Inform. and Mech.* 2024. Vol. 16. N 1. P. 39–45.
21. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. М.* Изгибная жесткость многослойных пластин // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* 2020. № 5. С. 7–12.
22. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
23. *Григолюк Э. И., Мамай В. И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука, Физматлит, 1997. 272 с.
24. *Mikhasev G. I., Botogova M. G., Korobko E. V.* Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression // *Shell-like structures, advanced structures materials.* Berlin: Springer-Verlag, 2011. Vol. 15. P. 727–750.
25. *Кусяков А. Ш.* Проектирование трехслойных пластин, находящихся в условиях цилиндри-

ческого изгиба // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. 2019. Вып. 51. С. 6–12.

26. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24. Вып. 1. С. 123–137.

27. Грушеникова Е. Д., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды Московского авиационного института. 2019. Вып. 106. С. 6–12.

28. Каси А., Драйхе К., Зиди М. Уточненная теория нелинейного изгиба трехслойных пластин из функционально-градиентного материала // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 5. С. 187–197.

29. Наумова Н. В., Иванов Д. Н. Исследование статических деформаций, колебаний и устойчивости конструкций в пакете ANSYS: учеб. пособие. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2007. 59 с.

30. Котохов А. В. Основы анализа конструкций в ANSYS. Казань: Издательство Казанского государственного университета, 2001. 105 с.

31. Naumova N. V., Ivanov D., Voloshinova T. Deformation of a plate with periodically changing parameters // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Iss. 1. Art. N 070026. <https://doi.org/10.1063/1.5034701>

Статья поступила в редакцию 8 ноября 2024 г.

Статья принята к печати 13 марта 2025 г.

Контактная информация:

Наумова Наталья Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0003-1918-093X>, n.v.naumova@sbpu.ru

Иванов Денис Николаевич — канд. физ.-мат. наук; denisiv3@rambler.ru

Яковлев Андрей Борисович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.;
<https://orcid.org/0000-0002-8744-0783>, a.b.yakovlev@sbpu.ru

Дорофеев Никита Павлович — аспирант; <https://orcid.org/0000-0002-9094-7956>,
st067927@student.spbu.ru

Ласкавый Леонид Сергеевич — студент; st095233@student.spbu.ru

Vibrations of a rectangular three-layer plate*

N. V. Naumova, D. N. Ivanov, A. B. Yakovlev, N. P. Dorofeev, L. S. Laskavyi

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Naumova N. V., Ivanov D. N., Yakovlev A. B., Dorofeev N. P., Laskavyi L. S. Vibrations of a rectangular three-layer plate. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2025, vol. 21, iss. 2, pp. 231–245. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.205> (In Russian)

In this paper, a three-layer rectangular plate is considered. The averaged differential equation of plate vibrations is derived. Approximate formulas for calculating eigenvalues and eigenforms (vibration frequencies and vibrations modes) were obtained based on the two-dimensional theory of thin plates. The analytical and numerical results are compared. Numerical calculations were performed using the finite element method using the ANSYS software package and the MAXIMA package.

Keywords: three-layer plate, deformation, vibrations, reinforced plate, space sail, plate vibration frequencies.

* This research was supported by the Russian Science Foundation, project N 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>, and by Saint Petersburg State University, project N 116636233.

References

1. Polyakhova E. N. *Kosmicheskii polet solnechnym parusom: problemy i perspektivy* [Solar sail space flight: problems and prospects]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 304 p. (In Russian)
2. Wright J. *Space sailing*. Abingdon, Routledge Publ., 1992, 258 p.
3. Janhunen P., Sandroos A. Simulation study of solar wind push on a charged wire: Basis of solar wind electric sail propulsion. *Ann. Geophys.*, 2007, vol. 25, pp. 755–767.
4. Janhunen P. Electric sail for spacecraft propulsion. *Journal of Propulsion and Power*, 2004, vol. 20, pp. 763–764.
5. Toivanen P., Janhunen P., Envall J. Electric sail control mode for amplified transverse thrust. *Acta Astronaut.*, 2015, vol. 106, pp. 111–119.
6. Palos M. F., Janhunen P., Toivanen P., Tajmar M., Iakubivskiy I., Micciani A., Orsini N., Kütt J., Rohtsalu A., Dalbins J., Teras H., Allaje K., Pajusalu M., Niccolai L., Bassetto M., Mengali G., Quarta A. Q., Ivchenko N., Stude J., Vaivads A., Tamm A., Slavinskis A. Electric sail mission expeditor, ESME: Software architecture and initial ESTCube lunar cubesat E-sail experiment design. *Aerospace*, 2023, vol. 10, pp. 694–723. <https://doi.org/10.3390/aerospace10080694>
7. Zubrin R. M., Andrews D. G. Magnetic sails and interplanetary travel. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1991, vol. 28, no. 2, pp. 197–203.
8. Andrews D. G., Zubrin R. M. Use of magnetic sails for Mars exploration missions. *Papers of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1989, pp. 202–210.
9. Zubrin R. M. The use of magnetic sails to escape from the low Earth orbit. *Journal of the British Interplanetary Society*, 1993, vol. 46, pp. 3–10.
10. Forward R. L. Radioisotope sails for deep space propulsion and power. *Journal of the British Interplanetary Society*, 1996, vol. 49, pp. 147–149.
11. Tajmar M., Kößling M., Weikert M., Monette M. The space drive project — Developing revolutionary propulsion at TU Dresden. *Acta Astronautica*, 2018, vol. 153, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.10.028>
12. Shimanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Upravliaemoe dvizhenie solnechnogo parusa v okrestnosti kollinearnoi tochki libratsii [Controlled movement of the solar sail in the vicinity of the collinear libration point]. *Letters to the Astronomical Journal*, 2020, vol. 46, no. 3, pp. 193–200. (In Russian)
13. Shimanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Orbital'noe manevrirovanie v okrestnostiakh kollinearnykh tochek libratsii s ispol'zovaniem sil svetovogo davleniia [Orbital maneuvering in the vicinity of collinear libration points using light pressure forces]. *Letters to the Astronomical Journal*, 2021, vol. 47, no. 10, pp. 733–742. (In Russian)
14. Shimanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Manevr ukhoda iz okrestnosti kollinearnoi tochki libratsii pri ispol'zovanii sil svetovogo davleniia [Maneuver of escape from the vicinity of a collinear libration point using light pressure forces]. *Letters to the Astronomical Journal*, 2023, vol. 49, no. 9, pp. 612–622. (In Russian)
15. Shmyrov V. A. Upravlenie orbital'nym dvizheniem kosmicheskogo apparata vblizi tochki libratsii s pomoshch'iu izmeneniia otrazhatel'noi sposobnosti solnechnogo parusa [Controlling the orbital motion of the spacecraft near the libration point by changing the solar sail reflectivity]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 298–306. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214> (In Russian)
16. Rodnikov A. V. Keeping a solar sail near the triangular libration point of a dumbbell-shaped or binary asteroid. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 19, no. 4, pp. 521–532. <https://doi.org/10.20537/nd230801>
17. Vaskova V. S., Rodnikov A. V. On a sailed spacecraft motion along a handrail fixed to two heliocentric space stations. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 19, no. 3, pp. 359–370. <https://doi.org/10.20537/nd230802>
18. Polyakhova E. N. Vliianie iznosa zerkal'noi plenki pod deistviem kosmicheskikh faktorov na dinamiku dvizheniia solnechnogo parusa tsanderovskoi orientatsii po geliotsentricheskoi orbite [The effect of mirror film wear under the influence of cosmic factors on the dynamics of the movement of a Zander-oriented solar sail in a heliocentric orbit]. *Gagarin Scientific Readings on Astronautics and Aviation, 1983–1984*. Moscow: Nauka Publ., 1985, p. 62. (In Russian)
19. Yakovlev A. B. Influence of electric charge on surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1959, art. no. 012052.
20. Tikhonov A. A., Naumova N. V., Yakovlev A. B., Ivanov D. N., Dorofeev N. P. On the deformation of a round three-layer plate under the action of a surface charge. *Scientific publications of the State University of Novi Pazar series. A: Appl. Math. Inform. and Mech.*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 39–45.

21. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Izgibnaia zhestkost' mnogosloinykh plastin [Flexural stiffness of multilayer plates]. *Papers of Russian Academy of Science. Mechanics of Hard Body*, 2020, no. 5, pp. 7–12. (In Russian)
22. Grigoluk E. I., Chulkov P. P. *Ustoichivost' i kolebaniia trekhslonnykh obolochek* [Buckling and vibrations of three-layer shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973, 170 p. (In Russian)
23. Grigoluk E. I., Mamay V. I. *Nelineinoe deformirovanie tonkostennykh konstrukttsii* [Nonlinear deformation of thin-walled structures]. Moscow, Nauka, Fizmatlit Publ., 1997, 272 p. (In Russian)
24. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Korobko E. V. Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression. *Shell-like structures, advanced structures materials*. Berlin, Springer-Verlag, 2011, vol. 15, pp. 727–750.
25. Kussyakov A. Sh. Proektirovanie trekhslonnykh plastin, nakhodiashchikhsia v usloviakh tsilindricheskogo izgiba [Design of three-layer plates under cylindrical bending conditions]. *Problems of Mechanics and Control. Non-linear dynamic systems*, 2019, vol. 51, pp. 6–12. (In Russian)
26. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Vynuzhdennye kolebaniia trekhslonnoi plastiny v nestatsionarnom temperaturnom pole [Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field]. *Papers of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 123–137. (In Russian)
27. Grushenkova E. D., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Prodol'nye i izgibnye kolebaniia trekhslonnoi plastiny so szhimaemym zapolnitelem, kontaktiruiushchei so sloem viazkoj zhidkosti [Longitudinal and bending vibrations of a three-layer plate with a compressible filler in contact with a layer of viscous liquid]. *Problems of Mechanics and Control. Non-linear dynamic systems*. Works of Moscow Aircraft Unstitute, 2019, vol. 106, pp. 6–12. (In Russian)
28. Kasi A., Drayhe K., Zidi M. Utochnennaia teoriia nelineinogo izgiba trekhslonnykh plastin iz funktsional'no-gradientnogo materiala [A refined theory of nonlinear bending of three-layer plates made of functionally graded material]. *Applied Mathematics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no. 5, pp. 187–197. (In Russian)
29. Naumova N. V., Ivanov D. N. *Issledovanie staticheskikh deformatsii, kolebaniia i ustoychivosti konstrukttsii v pakete ANSYS* [Investigation of static deformations, vibrations and stability of structures in the ANSYS package]. St. Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2007, 102 p. (In Russian)
30. Konyukhov A. V. *Osnovy analiza konstrukttsii v ANSYS* [Fundamentals of structural analysis in ANSYS]. Kazan, Kazan University Press, 2001, 105 p. (In Russian)
31. Naumova N. V., Ivanov D., Voloshinova T. Deformation of a plate with periodically changing parameters. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, iss. 1, art. no. 070026. <https://doi.org/10.1063/1.5034701>

Received: November 8, 2024.

Accepted: March 13, 2025.

Authors' information:

Natalia V. Naumova — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; <https://orcid.org/0000-0003-1918-093X>, n.v.naumova@spbu.ru

Denis N. Ivanov — PhD in Physics and Mathematics; denisv3@rambler.ru

Andrei B. Yakovlev — PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher; <https://orcid.org/0000-0002-8744-0783>, a.b.yakovlev@spbu.ru

Nikita P. Dorofeev — Postgraduate Student; <https://orcid.org/0000-0002-9094-7956>, st067927@student.spbu.ru

Leonid S. Laskavyi — Student; st095233@student.spbu.ru