V. V. Basov, On existence, continuability and uniqueness of a solution to the boundary initial value problem of a first-order ordinary differential equation,
Izv. IMI UdGU, 2025, Volume 65, 3–27

Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2025. Том 65. С. 3–27

УДК 517.911

© *В. В. Басов*

О СУЩЕСТВОВАНИИ, ПРОДОЛЖИМОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ПОСТАВЛЕННОЙ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. Предполагается, что его правая часть непрерывна на множестве, состоящем из области двумерного евклидова пространства и некоторой части ее границы. Излагается теория, посвященная решению вопросов о существовании, продолжимости и единственности решений ГЗК — задачи Коши, поставленной в граничной точке. Эта теория позволит дополнить существующую теорию ОДУ первого порядка, в которой задача Коши ставится во внутренней точке (ВЗК). Основные результаты в части существования или отсутствия решений ГКЗ были получены в 2020 году, поэтому в данной работе они только систематизируются и дополняются. Новыми являются результаты связанные с продолжимостью, а также с единственностью или неединственностью решений ГЗК. Доказываются теоремы о формальной и локальной единственности решений задачи Коши. При этом постоянно прослеживаются различия между свойствами решений ГЗК и ВЗК. Например, демонстрируется неравносильность понятий формальной и локальной единственности для ГЗК в отличие от ВЗК, что приводит к появлению наряду с точками неединственности и единственности так называемых скрытых точек неединственности.

Ключевые слова: граничная задача Коши, существование решения, продолжимость решения, единственность решения, отрезок Пеано.

DOI: 10.35634/2226-3594-2025-65-01

Обозначения и термины:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{R}^2$ — двумерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{R}^1$ — вещественная прямая;

$\langle a, b\,\rangle$ $(a < b)$ — промежуток (связное множество на расширенной вещественной прямой), частные случаи промежутка:
(a, b) — интервал (отрытое множество),
$[a, b]$ $(|a|, |b| < \infty)$ — отрезок (замкнутое ограниченное множество, или компакт);

область — непустое, связное, открытое множество;

$\overline{V}_c(x_0, y_0) = \big\{(x, y)\colon |x - x_0| \leqslant c,\ |y - y_0| \leqslant c\big\}$ — замкнутая c-окрестность точки (x_0, y_0) с учетом того, что для вектора $a = (a_1, a_2)$ по определению $\|a\| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$;
включение $A \subset B$ в отличие от $A \subseteq B$ не допускает совпадения множеств A и B;

f непрерывна — функция $f(x, y)$ — непрерывна по совокупности аргументов;
$f \in C(D)$ — функция $f(x, y)$ непрерывна на связном множестве $D \subset \mathbb{R}^2$;
$f \in C^1(D)$ — функция $\partial f(x, y)/\partial y$ существует и непрерывна в любой внутренней точке связного множества D и доопределена по непрерывности в любой граничной точке D;
$f \in \mathrm{Lip}^{gl}_{y,L}(D)$ — функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y глобально на связном множестве D с константой Липшица $L = L_D > 0$,
$f \in \mathrm{Lip}^{loc}_y(D)$ — функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y локально на D.

Введение

$\mathbf{1^0}$. Рассмотрим ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

в котором $f(x, y)$ — вещественная непрерывная функция на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, где G — это область в топологии евклидова пространства $\mathbb{R}^2$, а множество $\widehat{G}$ (возможно пустое) принадлежит границе ∂G области G. При этом к $\widehat{G}$ относим все точки ∂G, в которых функция $f(x, y)$ может быть доопределена с сохранением непрерывности.

Выбор множества $\widetilde{G}$ в качестве области определения уравнения (1) обусловлен следующими соображениями: функции $f(x, y)$, встречающиеся при решении конкретных уравнений, как правило, представляют собой композиции элементарных функций, непрерывных на своих областях определения, пересечение которых является не более чем счетным объединением связных множеств; еще с одной причиной рассмотрения уравнений (1) не в области G, а на множестве $\widetilde{G}$, преподаватель сталкивается на первом же практическом занятии со студентами при решении уравнения $y' = \sqrt{y}$, если на лекции в качестве области определения уравнения была выбрана область. В этом случае надо как-то объяснить студентам, почему функция $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, не является решением по определению. В то же время, при рассмотрении уравнения $y' = \sqrt{y}$ на множестве $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon x \in \mathbb{R}^1,\ y \geqslant 0\}$ эта функция будет решением, в данном случае *граничным*.

Появление граничных точек в определении уравнения (1) вызывает разделение многих понятий классической теории ОДУ первого порядка на внутренние и граничные.

В первую очередь это касается постановки задачи Коши, которую будем называть *граничной*, если она поставлена в точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, и *внутренней*, — если $(x_0, y_0) \in G$.

Для точек из области G общеизвестна теорема Пеано о существовании решения: *Пусть в уравнении* (1) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна в области* $G \subseteq \mathbb{R}^2$, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$ *на нем существует по крайней мере одно решение задачи Коши с начальными данными* x_0, y_0.

Напомним необходимые обозначения. Пусть константы $a, b > 0$ таковы, что прямоугольник $R = \{(x, y)\colon |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\} \subset G$. Отрезком Пеано $P_h(x_0, y_0)$ назовем отрезок $[x_0 - h, x_0 + h]$, где константа h определяется следующим образом: если $f \equiv 0$ на R, то $h = a$; в противном случае $h = \min\{a, b/M\}$, где $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| > 0$. Геометрически h — высота треугольника T^+ (T^-) с вершиной в точке (x_0, y_0), боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона $\pm M$, и основанием, лежащим на прямой $x = x_0 + h$ $(x = x_0 - h)$. При этом в [1] предполагается, что функция f непрерывна только в прямоугольнике $R^+ = \{(x, y)\colon x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$. Этого условия достаточно при любом способе доказательства теоремы Пеано для $x \geqslant x_0$.

Что касается исследований, отвечающих на вопросы о существовании или отсутствии решений граничной задачи Коши, выяснилось, что в учебной и научной литературе они ранее не встречались, и работы [2, 3] начали заполнять имеющийся пробел.

В работе [2] выписаны условия, при которых существует решение задачи Коши уравнения (1), поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, и условия, при которых такое решение отсутствует. Сделано это путем выделения всех случаев, в которых возможно построение аналогов треугольника Пеано с должным «поведением» функции $f(x, y)$ на его боковых сторонах, позволяющем применить простой и конструктивный метод ломаных Эйлера.

Однако специфика метода ломаных Эйлера не позволяет получить общий с теоретической точки зрения результат. Поэтому в работе [3] уравнение (1) было доопределено таким образом, что задача Коши, поставленная в граничной точке (x_0, y_0), стала внутренней задачей Коши, к которой применима стандартная теорема Пеано.

Для ответа на вопрос о том, будет ли решение модифицированной задачи Коши являться решением исходной граничной задачи, были использованы так называемые теоремы сравнения и дифференциальные неравенства (см. [4, 5]), что позволило ослабить требования на граничные кривые в окрестности точки (x_0, y_0) и добавить случаи, которые невозможно было исследовать при помощи метода ломаных Эйлера.

Отметим, что новые результаты, связанные с исследованием свойств решений уравнения (1), получены также в [6], где осуществлена оценка границ максимального интервала существования решения, рассматриваемых как функции от начальных данных.

Наряду с вопросами о существовании решений граничной задачи Коши возникают вопросы об их продолжимости и единственности, ответы на которые, как оказалось, не вытекают из известных теорем, доказанных для решений внутренней задачи Коши.

Попытка системно изложить новые понятия и некоторые результаты, связанные с существованием, продолжимостью и единственностью в различных смыслах решения задачи Коши, поставленной в граничной точке, была предпринята ранее в учебном пособии [7, глава 1].

$\mathbf{2^0}$. Данная статья преследует две цели.

1. Изложение теории, разработанной для решения вопросов о существовании или отсутствии, продолжимости, единственности или неединственности решений граничной задачи Коши.

Предполагается, что в дальнейшем полученные результаты станут частью теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, дающей максимально полные ответы на три основных вопроса: о существовании, продолжимости и единственности решений. При этом новые понятия и результаты могут быть без проблем включены в программу большинства вузов, поскольку требуют от студентов, как и весь остальной курс ОДУ, только базовых знаний по математическому анализу после одного года обучения. В частности, автор в последние годы при чтении курса лекций по ОДУ на математико-механическом факультете СПбГУ подробно разбирает вопросы, связанные с решениями граничной задачи Коши, и эти тема вызывает у студентов второго курса понимание и неподдельный интерес.

2. Формулировка и доказательство результатов, касающихся продолжимости, а также формальной и локальной единственности решений граничной задачи Коши, и сравнение их с известными результатами о единственности для внутренней задачи Коши.

$\mathbf{3^0}$. Помимо введения, работа содержит пять параграфов.

В § 1 приводятся определения, обозначения и предлагаются названия для большого числа новых понятий, возникающих при рассмотрении граничных задач Коши.

В § 2 в рамках изложения общей теории приводятся три теоремы, в которых устанавливается наличие или отсутствие решений граничной задачи Коши и которые уже доказаны в [2, 3, 7]. Но полученные в этих работах результаты здесь переработаны и дополнены, унифицированы обозначения, упрощены описания различных случаев и множеств. Кроме того, без определений и результатов первых двух параграфов невозможно формулировать и доказывать утверждения из § 4.

Основным результатом § 3 является теорема 4 о продолжимости решения уравнения (1) на границу интервала существования. Также в § 3 доказана с использованием леммы Цорна теорема 5 о существовании полного решения.

Основу § 4 заложило создание примера 3 (см. рис. 6), продемонстрировавшего, что понятие единственности решения задачи Коши, поставленной во внутренней точке, не годится для граничных точек. В теореме 6 для любой внутренней точки доказывается равносильность двух определений единственности, которую поэтому можно определять и как наличие для любых двух решений своего промежутка, где они совпадают, и как наличие универсального промежутка, на котором совпадают все решения поставленной задачи. А для граничных точек из первого определения второе может не следовать, что привело к появлению новых понятий: «формальная единственность» решения задачи Коши и «точка формальной единственности», или «скрытая точка неединственности» (это название отражает суть явления). Основным результатом § 4 является теорема 7 о локальной единственности решения граничной задачи Коши. Также интересен приведенный в начале параграфа пример 2 (см. рис. 5), показавший, что понятие «точка единственности» и естественное геометрическое понятие «точка ветвления» интегральных кривых совпадают не всегда.

В § 5 разобраны вопросы, связанные с «глобальной» единственностью решений уравнения (1). В теореме о единственности 8 предполагается, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, где $\widetilde{G}^o = G \cup \widehat{G}^o$, $\widehat{G}^o \subseteq \widehat{G}$, а в слабой теореме о единственности 9 предполагается, что f непрерывно дифференцируема по y на множестве $\widetilde{G}^o$, которое должно быть локально выпуклым по y.

§ 1. Основные определения и обозначения

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $y = \varphi(x)$, определенную на $\langle a, b\,\rangle$, будем называть *решением дифференциального уравнения* (1), если выполняются следующие три условия:

1) функция $\varphi(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in \langle a, b\,\rangle$;
2) точка $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G}$ при всех $x \in \langle a, b\,\rangle$;
3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для всякого $x \in \langle a, b\,\rangle$.

О п р е д е л е н и е 2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), определенное на $\langle a, b\,\rangle$, будем называть: $a)$ *внутренним решением,* если точка $(x, \varphi(x)) \in G$ для любого $x \in \langle a, b\,\rangle$; $b)$ *граничным решением,* если $(x, \varphi(x)) \in \widehat{G}$ для любого $x \in \langle a, b\,\rangle$; $c)$ *смешанным решением,* если найдутся такие $x_1, x_2 \in \langle a, b\,\rangle$, что $(x_1, \varphi(x_1)) \in G$, а $(x_2, \varphi(x_2)) \in \widehat{G}$.

Разумеется, если уравнение (1) рассматривать только в области G, то понятия решения и внутреннего решения будут совпадать.

О п р е д е л е н и е 3. Задачу Коши для уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0, обозначаемую для краткости ЗК(x_0, y_0), будем называть:

$a)$ *внутренней задачей Коши* и обозначать ВЗК(x_0, y_0), если точка $(x_0, y_0) \in G$;
$b)$ *граничной задачей Коши* и обозначать ГЗК(x_0, y_0), если точка $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$.

О п р е д е л е н и е 4. *Внутреннее* (*граничное, смешанное*) *решение ЗК*(x_0, y_0) *существует,* если точка $(x_0, y_0) \in G\,(\widehat{G}, \widetilde{G})$ и найдутся промежуток $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$ и определенное на нем внутреннее (граничное, смешанное) решение $y = \varphi(x)$ такие, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Для ответа на вопросы о наличии или отсутствии решения ГЗК(x_0, y_0), а также о его локальной единственности, удобно уравнение (1) преобразовать в уравнение

$$y' = f_0(x, y), \tag{2}$$

где f_0 непрерывна по совокупности аргументов на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, причем G — это область в $\mathbb{R}^2$, $\widehat{G} \subseteq \partial G$, $f_0(0, 0) = 0$ и задача Коши поставлена в точке О $= (0, 0) \in \widehat{G}$.

В самом деле, замена $x = u + x_0,\ \ y = v + y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ сводит (1) к уравнению $v' = f_0(u, v),$ в котором $f_0(u, v) = f(u + x_0, v + f(x_0, y_0)u + y_0) - f(x_0, y_0)$. При этом при $x = x_0,\ y = y_0$ получаем: $u = u_0 = 0,\ v = v_0 = 0$ и $f_0(0, 0) = 0$.

Непрерывность функции $f_0(x, y)$ в граничной точке О означает, что

$$\forall\, \tau > 0\ \ \exists\, \delta_\tau > 0\colon\ \forall\,(x, y) \in \overline{V}_{\delta_\tau}(0, 0) \cap \widetilde{G}\ \Rightarrow\ |f_0(x, y)| \leqslant \tau. \tag{3}$$

Ключевую роль для существования и единственности решения ГЗК$(0, 0)$ уравнения (2) будут играть структура граничного множества $\widehat{G}$ в малой окрестности точки О, значения f_0 на нем и расположение всего множества $\widetilde{G}$ по отношению к оси абсцисс.

О п р е д е л е н и е 5. Функцию $y = b^+_{a,u}(x)$, заданную на отрезке $[0,a]$, будем называть *правой верхнеграничной,* а ее график $\gamma^+_{a,u} = \{x \in [0,a],\ y = b^+_{a,u}(x)\}$ — *правой верхнеграничной кривой*, если выполняются следующие пять условий:

1) $b^+_{a,u} \in C^1([0,a])$;
2) $b^+_{a,u}(0) = 0$;
3) ${b^+_{a,u}}'(0) \geqslant 0$;
4) $b^+_{a,u}$ выпукла вниз на $[0,a]$, если ${b^+_{a,u}}'(0) = 0$;
5) $\gamma^+_{a,u} \subseteq \widehat{G}$,[1]

при этом в условии 3 допускается случай, когда ${b^+_{a,u}}'(0) = +\infty$, а в условии 4 выпуклость понимается в нестрогом смысле, то есть допускается тождество $b^+_{a,u}(x) \equiv 0$ на $[0,a]$.

Аналогично вводится *правая нижнеграничная функция* $y = b^+_{a,l}(x)$ и *правая нижнеграничная кривая* $\gamma^+_{a,l}$ — график $b^+_{a,l}(x)$, только в условии 3 предполагаем, что ${b^+_{a,l}}'(0) \leqslant 0$, и допускаем случай, когда ${b^+_{a,l}}'(0) = -\infty$, а в условии 4, — что $b^+_{a,l}(x)$ выпукла вверх.

В дальнейшем, когда это окажется удобным, слова «правая», а также «верхне» и «нижне» вместе с индексами u и l могут быть опущены.

Введем две ключевые константы:

$$\tau_u = {b^+_{a,u}}'(0)/2 \ \ (\tau_u = 1 \text{ при } {b^+_{a,u}}'(0) = +\infty), \ \ \tau_l = -{b^+_{a,l}}'(0)/2 \ \ (\tau_l = -1 \text{ при } {b^+_{a,l}}'(0) = -\infty).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{aligned} b^+_{a,u}(a) \leqslant a \ \text{ при } \ \tau_u = 0, \quad \forall\, x \in [0,a]\colon\ {b^+_{a,u}}'(x) \geqslant \tau_u \ \text{ при } \ \tau_u > 0; \\ -b^+_{a,l}(a) \leqslant a \ \text{ при } \ \tau_l = 0, \quad \forall\, x \in [0,a_l]\colon\ -{b^+_{a,l}}'(x) \geqslant \tau_l \ \text{ при } \ \tau_l > 0, \end{aligned} \tag{4}$$

так как функция $b^+_a(x)$ при сужении на любой отрезок $[0,\breve{a}]$ с $\breve{a} < a$ остается граничной.

Пусть $N^+_c = \{(x,y)\colon x \in (0,c],\ |y| \leqslant c\ (c > 0)\}$, причем длина верхней стороны c в прямоугольнике N^+_c выбирается так, чтобы каждая «выходящая» из точки O граничная кривая, при наличии хотя бы одной, имела пересечение с одной из сторон N^+_c.

Выделим для уравнения (2) четыре варианта расположения граничных кривых в малой окрестности точки O при $x > 0$.

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что реализуется случай

$W^+]$, если $\exists\, c_W > 0\colon\ W^+_{c_W} \cap \widehat{G} = \varnothing$, где $W^+_{c_W} = \{(x,y)\colon x \in (0,c_W],\ |y| \leqslant c_W\}$;

$U^+]$, если $\exists\, c_U > 0\colon\ U^+_{c_U} \cap \widehat{G} = \gamma^+_{a,u} \backslash$O, где $U^+_{c_U} = \{(x,y)\colon x \in (0,a],\ -c_U \leqslant y \leqslant b^+_{a,u}(x);\ x \in (a, c_U],\ |y| \leqslant c_U\}$;

$O^+]$, если $\exists\, c_O > 0\colon\ O^+_{c_O} \cap \widehat{G} = \gamma^+_{a,l} \backslash$O, где $O^+_{c_O} = \{(x,y)\colon x \in (0,a],\ b^+_{a,l}(x) \leqslant y \leqslant c_O;\ x \in (a, c_O],\ |y| \leqslant c_O\}$;

$B^+]$, если $\exists\, c_B > 0\colon\ B^+_{c_B} \cap \widehat{G} = (\gamma^+_{a,u} \cup \gamma^+_{a,l}) \backslash$O, где $B^+_{c_B} = U^+_{c_B} \cap O^+_{c_B}$.[2]

Тем самым, например, $O^+_{c_O}$ — это прямоугольник $N^+_{c_O}$ с «вырезанным» подграфиком кривой $\gamma^+_{a,l}$, не содержащий кроме нее других граничных точек; $B^+_{c_B}$ — это $N^+_{c_B}$ с «вырезаными» надграфиком $\gamma^+_{a,u}$ и подграфиком $\gamma^+_{a,l}$, не содержащий кроме них других граничных точек. И случаи сохраняются при любом уменьшении констант c_W, c_U, c_O, c_B.

Записи $X^+]$ и $X^+_{c_*}$ будут означать далее, что реализуется любой из четырех описанных выше случаев на соответствующем множестве.

В случае $X^+]$ имеет место одна из двух возможностей:

$X^+_1]: X^+_{c_*} \cap G \neq \varnothing \ \Leftrightarrow \ X^+_{c_*} \subseteq \widetilde{G}$; $\ \ X^+_2]: X^+_{c_*} \cap G = \varnothing$.

---

[1] Символ $+$ подразумевает $right$, b — $boundary$, u — $upper$, l — $lower$, w — $without$.

[2] Символ N подразумевает $neighborhood$, W — $without$, U — $under$, O — $over$, B — $between$.

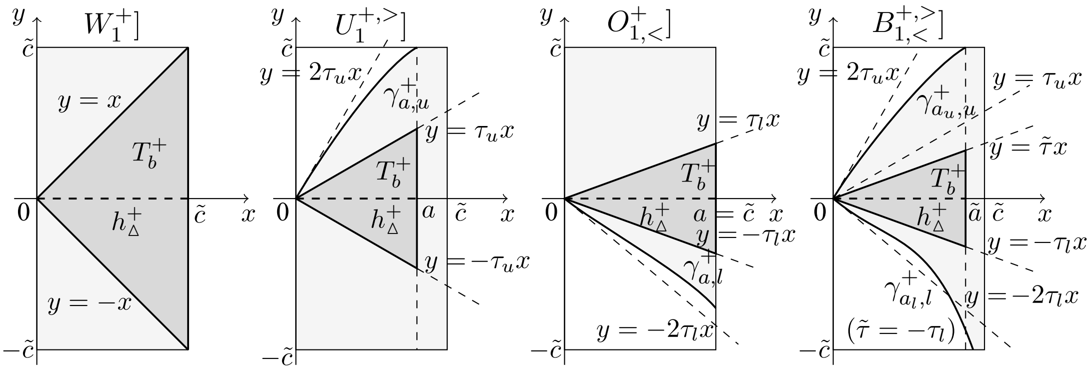

Рис. 1. Варианты расположения граничных кривых и множества $\widetilde{G}$

В свою очередь, при $k = 1, 2$ запись $X_k^{+,>}]$ будет означать, что в этом случае имеется верхнеграничная функция, у которой ${b_{a,u}^+}'(0) > 0$, $X_k^{+,=}]$ — ${b_{a,u}^+}'(0) = 0$; $X_{k,<}^+]$ — имеется нижнеграничная функция, у которой ${b_{a,l}^+}'(0) < 0$, $X_{k,=}^+]$ — ${b_{a,l}^+}'(0) = 0$. Например, в случае $B_{k,<}^{+,>}]$ обе граничные функции имеют в нуле нулевые производные (см. [7, с. 47]).

§ 2. О существовании или отсутствии решения ГЗК

1^0. Доказательство существования решения ГЗК уравнения (2), поставленной в точке О $= (0, 0) \in \widehat{G}$, начнем с построения правого граничного треугольника T_b^+, во многом аналогичного описанному в § 1, п. 4^0 равнобедренному треугольнику Пеано T^+.

Треугольник T_b^+, как и T^+, должен обладать двумя свойствами: 1) $T_b^+ \subseteq \widetilde{G}$, 2) никакая ломаная Эйлера, начинающаяся в точке $(0, 0)$, не может покинуть T_b^+ через боковые стороны, а значит, может быть продолжена на правый отрезок Пеано $[x_0, x_0 + h^+]$, где константа h^+ — длина высоты треугольника, опущенной на вертикальное основание.

Построим T_b^+ в случаях $W_1^+]$, $U_1^{+,>}]$, $O_{1,<}^+]$, $B_{1,<}^{+,>}]$ (см. рис. 1).

В простейшем случае $W_1^+]$, когда прямоугольник $W_{c_W}^+ \subset G$, согласно (3) для $\tau = 1$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что $|f_0(x, y)| \leqslant 1$ на множестве $\overline{V}_{\delta_1}(0, 0) \cap \widetilde{G}$.

Положим $\widetilde{c} = \min\{c_W, \delta_1\}$. Тогда T_b^+ — это равнобедренный треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(\widetilde{c}, \widetilde{c})$, $(\widetilde{c}, -\widetilde{c})$, лежащий в $W_{\widetilde{c}}^+ \cup \{(0, 0)\}$, и $h^+ = \widetilde{c}$.

В случае $B_{1,<}^{+,>}]$ положим $\widetilde{c} = \min\{c_B, \delta_{\widetilde{\tau}}\}$, где $\widetilde{\tau} = \min\{\tau_u, \tau_l\}$, τ_u, τ_l — из (4), $\delta_{\widetilde{\tau}}$ — из (3). Тогда $B_{\widetilde{c}}^+ \backslash (\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+) \subset G$, $|f_0(x, y)| \leqslant \widetilde{\tau}$ при $(x, y) \in B_{\widetilde{c}}^+$ и $h^+ = \widetilde{a} = \min\{a_u, a_l\}$. Геометрически T_b^+ образуют отрезки лучей с тангенсами углов наклона $\pm\widetilde{\tau}$, выпущенных из точки О, и отрезок вертикальной прямой $x \equiv \widetilde{a}$. Тогда $T_b^+ \backslash \text{О} \subseteq B_{\widetilde{c}}^+$.

В случаях $U_1^{+,>}]$, $O_{1,<}^+]$ построение T_b^+ аналогично описанным выше случаям.

В пяти оставшихся случаях построить «стандартный» граничный треугольник не удается из-за того, что в каждом из них производная хотя бы одной из граничных функций в нуле равна нулю.

Рассмотрим, для примера, случай $U_1^{+,=}]$ (см. первый из рис. 1), в котором свойство 1 треугольника нарушается всегда, поскольку для любого T_b^+ найдется окрестность точки О, в которой его верхняя боковая сторона будет лежать над верхнеграничной кривой $\gamma_{a,u}^+$, то есть вне $\widetilde{G}$.

Эта проблема вынуждает выбирать саму кривую $\gamma_{a,u}^+$ в качестве боковой стороны и рассматривать криволинейные треугольники. Но тогда может нарушиться свойство 2. Дело в том, что в любой сколь угодно малой окрестности точки О на $\gamma_{a,u}^+$ может найтись точка $(x_*, b_{a,u}^+(x_*))$ $(x_* < a)$, в которой тангенс угла наклона касательной к $\gamma_{a,u}^+$, равный ${b_{a,u}^+}'(x_*)$, будет меньше тангенса угла наклона отрезка поля направлений в этой точке,

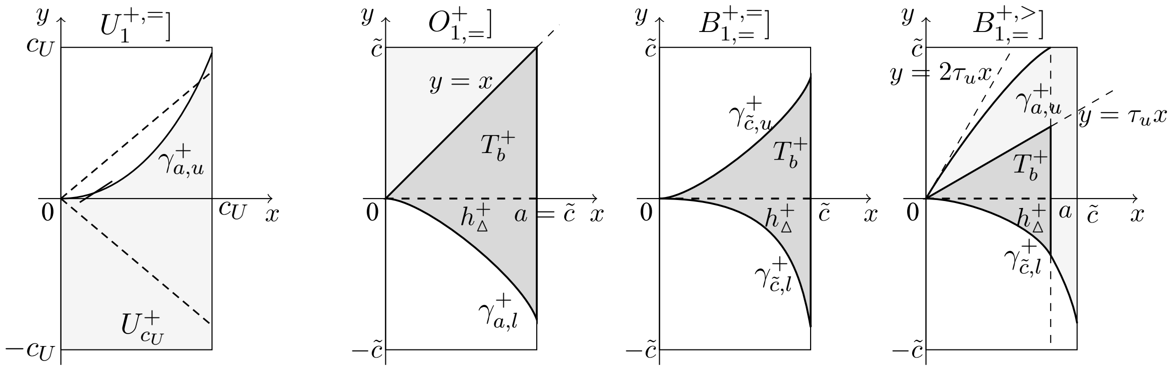

Рис. 2. Правые граничные треугольники Пеано

равного $f_0(x_*, b^+_{a,u}(x_*))$, а значит, при попадании ломаной Эйлера в эту точку ее продолжение вправо должно покинуть множество $\widetilde{G}$, что невозможно.

Для устранения этой проблемы во всех точках кривых $\gamma^+_{a,u}$, $\gamma^+_{a,l}$ введем ограничения на функцию f_0 в случаях $U_1^{+,=}]$, $O^+_{1,=}]$, $B^{+,=}_{1,=}]$, $B^{+,>}_{1,=}]$ и $B^{+,=}_{1,<}]$:

$$f_0(x, b^+_{a,u}(x)) \leqslant {b^+_{a,u}}'(x), \text{ если } {b^+_{a,u}}'(0) = 0; \quad f_0(x, b^+_{a,l}(x)) \geqslant {b^+_{a,l}}'(x), \text{ если } {b^+_{a,l}}'(0) = 0, \qquad (5)$$

для любого $x \in (0, a]$, означающие, что в любой точке $\gamma^+_{a,u}$ и $\gamma^+_{a,l}$ правый полуотрезок поля направлений уравнения (1.12) направлен внутрь или по границе области G.

Построим T_b^+ в тех случаях, в которых требуется выполнение условий (5) (см. три последних рис. 2).

$O^+_{1,=}]$. Пусть в (3) $\tau = 1$, $\widetilde{c} = \min\{c_O, \delta_1\}$. Тогда $O^+_{\widetilde{c}} \backslash \gamma^+_{a,l} \subset G$, причем $a = \widetilde{c}$, так как правый конец $\gamma^+_{a,l}$ с учетом (4) заканчивается на боковой стороне $N^+_{\widetilde{c}}$, $|f_0(x,y)| \leqslant 1$ при $(x,y) \in O^+_{\widetilde{c}}$ и $h^+ = \widetilde{c}$. Геометрически отрезок, соединяющий точки O и $(\widetilde{c}, -\widetilde{c})$, кривая $\gamma^+_{a,l}$ и отрезок боковой стороны $N^+_{\widetilde{c}}$ образуют криволинейный треугольник T_b^+, и $h^+ = \widetilde{c}$.

$B^{+,=}_{1,=}]$. По определению множества $B^+_{c_B}$ и условию (4) правые концы кривых $\gamma^+_{a_u,u}, \gamma^+_{a_l,l}$ лежат на боковой стороне прямоугольника $N^+_{\widetilde{c}}$ с $\widetilde{c} = c_B$. Поэтому $a_u = a_l = \widetilde{c}$, $B^+_{\widetilde{c}} \backslash (\gamma^+_{a_u,u} \cup \gamma^+_{a_l,l}) \subset G$ и $h^+ = \widetilde{c}$, то есть само множество $B^+_{\widetilde{c}}$ образует криволинейный T_b^+.

$B^{+,>}_{1,=}]$. Пусть $\widetilde{c} = \min\{c_B, \delta_{\tau_u}\}$, где τ_u из (4), а δ_{τ_u} — из (3). Тогда $B^+_{\widetilde{c}} \backslash (\gamma^+_{a,u} \cup \gamma^+_{\widetilde{c},l}) \subset G$, где a — абсцисса точки выхода кривой $\gamma^+_{a,u}$ на границу $N^+_{\widetilde{c}}$, $|f_0(x,y)| \leqslant \tau_u$ при $(x,y) \in B^+_{\widetilde{c}}$ и $h^+ = a$. Геометрически T_b^+ образуют выпущенный из точки O луч с тангенсом угла наклона, равным τ_u, вертикальная прямая $x \equiv a$ и кривая $\gamma^+_{a,l}$. Тогда $T_b^+ \backslash \mathrm{O} \subseteq B^+_{\widetilde{c}}$.

Построения в случаях $U_c^{+,=}]$ и $B^{+,=}_{1,<}]$ аналогичны построениям в случаях $O^+_{1,=}]$ и $B^{+,>}_{1,=}]$.

Т е о р е м а 1 (о существовании решения ГЗК). *Пусть в уравнении* (2) *функция* f_0 *непрерывна на множестве* $\widetilde{G}$, *тогда в каждом из случаев* $W_1^+]$, $U_1^{+,>}]$, $O^+_{1,<}]$, $B^{+,>}_{1,<}]$ *и в каждом из случаев* $U_1^{+,=}]$, $O^+_{1,=}]$, $B^{+,=}_{1,=}]$, $B^{+,>}_{1,=}]$, $B^{+,=}_{1,<}]$ *при выполнении неравенств* (5) *на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение ГЗК*$(0,0)$ (доказательство теоремы приведено в [2, § 4]).

2⁰. Рассмотренные в теореме 1 девять случаев не исчерпывают все ситуации, в которых можно доказать существование решения ГЗК уравнения (2). Это удается сделать еще в ряде случаев, где метод ломаных Эйлера нельзя применить в принципе.

Все новые случаи предполагают наличие двух граничных функций, которые будем обозначать $b_a^{+,u}$ и $b_a^{+,l}$, а их графики — $\gamma_a^{+,u}$ и $\gamma_a^{+,l}$. Например, $\gamma^{+,l}_{a,u}$ — нижняя верхнеграничная кривая. При этом в определении граничных функций откажемся от условия 4 (о выпуклости), требуя от их графиков только отсутствия общих точек, кроме точки O.

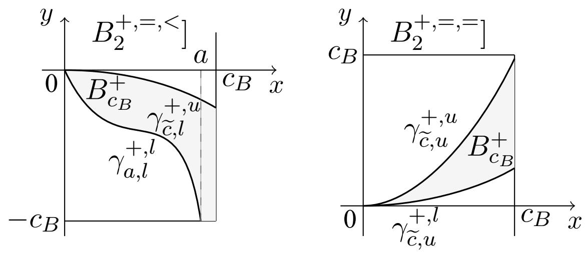

Рис. 3. Варианты расположения граничных кривых и множества $\widetilde{G}$

Для функций $b_a^{+,*}(x)$ $(*$ — это u или $l)$ положим $\tau^* = b_a^{+,*\prime}(0)/2$.

Будем использовать два варианта сравнительного поведения правых граничных функций $b_a^{+,*\prime}$ и функции $f_0(x,y)$ на граничной кривой $\gamma_a^{+,*}$, а именно:

$$\begin{aligned}&\text{вариант I:}\quad f_0(x, b_a^{+,u}(x)) \leqslant b_a^{+,u\prime}(x) \text{ и } f_0(x, b_a^{+,l}(x)) \leqslant b_a^{+,l\prime}(x)\quad (x \in (0,a]);\\ &\text{вариант II:}\quad f_0(x, b_a^{+,u}(x)) \geqslant b_a^{+,u\prime}(x) \text{ и } f_0(x, b_a^{+,l}(x)) \geqslant b_a^{+,l\prime}(x),\quad \tau^u \cdot \tau^l = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Иными словами, в варианте I построенные на обеих границах отрезки поля направлений направлены (с увеличением x) по границе или внутрь области G, лежащей между граничными кривыми, а в варианте II — наружу. В варианте II требуется также, чтобы хотя бы одна из граничных кривых имела в точке O горизонтальную касательную.

Т е о р е м а 2 (о существовании решения ГЗК). *Пусть в уравнении* (2) *функция* f_0 *непрерывна на множестве* $\widetilde{G}$ *и имеет место один из вариантов из условия* (6)*, тогда на отрезке* $[0,a]$ *существует по крайней мере одно решение ГЗК*$(0,0)$.

Теорема является следствием теоремы 11 из работы [3, раздел 2].

Перечислим и запишем новые случаи в привычных обозначениях (см. рис. 3).

В первую очередь ими являются три знакомых случая $B_{1,=}^{+,=}]$, $B_{1,=}^{+,>}]$, $B_{1,<}^{+,=}]$, но с другой направленностью отрезков поля направлений на граничных кривых.

Следующие два случая являются подслучаями случая $U_2^{+,=}]$, в котором стало существенным наличие второй верхнеграничной кривой и расположение области G между кривыми. Обозначим их $B_2^{+,>,=}]$ и $B_2^{+,=,=}]$ по аналогии со случаем $B_{1,=}^{+,=}]$.

Последние два случая, обозначаемые $B_{2,=,=}^{+}]$, $B_{2,<,=}^{+}]$, являются подслучаями $O_{2,=}^{+}]$.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 существенно усиливает результаты, полученные в теореме 1. В частности, в ней не требуются условия выпуклости граничных кривых, возможен вариант II расположения отрезков поля направлений и существование решения ГЗК доказано в отдельных случаях $X_2^+]$, когда горизонтальный отрезок поля направлений при $x > 0$ не принадлежит множеству $\widetilde{G}$. Но именно результаты теоремы 1 и используемый в ней метод ломаных Эйлера оказались необходимыми для формулировки и доказательства теорем о локальной единственности решений ГЗК.

3⁰. Изучим теперь нигде пока не рассмотренные случаи $U_2^{+,>}]$, $O_{2,<}^{+}]$, $B_{2,<}^{+,>}]$ и вырожденный случай $W_2^+]$: $\exists\, c > 0 : G \cap W_c^+ = \varnothing$, в которых отсутствуют граничные кривые, имеющие в точке O горизонтальную касательную.

Т е о р е м а 3 (об отсутствии решений ГЗК при $x \geqslant 0$). *В случаях* $U_2^{+,>}]$, $O_{2,<}^{+}]$, $B_{2,<}^{+,>}]$ *и* $W_2^+]$ *ГЗК*$(0,0)$ *уравнения* (2) *не имеет решений в правой полуплоскости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что в любом из случаев из условия теоремы на некотором отрезке $[0,a]$ существует решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши уравнения (2) с начальными данными $0, 0$, то есть $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'(0) = f_0(0, \varphi(0)) = 0$. Но график решения должен лежать в $\widetilde{G}$, а значит, располагаться не ниже правой верхнеграничной кривой, у которой в точке О тангенс угла наклона касательной равен $2\tau_u > 0$, или не выше правой нижнеграничной кривой, имеющей в точке О тангенс угла наклона касательной, равный $-2\tau_l < 0$. Поэтому $\varphi'(0) \neq 0$ — противоречие. $\square$

В [3, раздел 5], [7, с. 52–55] можно ознакомиться с примерами, показывающими, что:

1) условия (5), использующиеся при доказательстве теоремы 1, не являются необходимыми, то есть при их нарушении решение ГЗК может как существовать, так и отсутствовать;

2) в случаях $X_2^+]$, не вошедших в теорему 3, а значит, имеющих хотя бы одну граничную функцию с нулевой производной в нуле, решение ГЗК также может как существовать, так и отсутствовать.

Замечание 2. Теоремы, подобные приведенным выше, можно сформулировать и доказать для левой полуплоскости, но сначала надо на промежутках $[-d, 0\rangle$ аналогично правосторонним ввести левосторонние объекты $b_{a,l}^-$, $\gamma_{a,l}^-$, U_c^-, $U_1^-]$ и т. д., сформулировать для них условия, аналогичные условиям (4), (5), и для точки $\mathrm{O} \in \widehat{G}$ во всех случаях $X_1^-]$ построить левый граничный треугольник T_b^- и левый отрезок Пеано $P_{h^-}^-(\mathrm{O}) = [-h^-, 0]$ $(h^- > 0)$.

Например, условие (5) для левой нижнеграничной функции $b_{a,l}^-(x)$ с ${b_{a,l}^-}'(0) = 0$ будет означать, что $f_0(x, b_{a,l}^-(x)) \leqslant {b_{a,l}^+}'(x)$ для всех $x \in [-a, 0)$.

§ 3. О продолжимости решения ГЗК

$\mathbf{1^0}$. Любое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b\,\rangle$, остается решением, будучи суженным на меньший промежуток, но может перестать быть решением при добавлении к $\langle a, b\,\rangle$ даже одной точки. Разберемся, от чего это зависит.

Определение 7. Будем говорить, что решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b)$:

1) *продолжимо вправо в точку* b, или *продолжимо на границу,* если найдется такое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определенное на $\langle a, b]$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b)$ совпадает с $\varphi(x)$;

2) *продолжимо вправо за точку* b, или *продолжимо за границу,* если найдутся такие $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определенное на промежутке $\langle a, \widetilde{b}\,\rangle$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b\,\rangle$ совпадает с $\varphi(x)$.

Если решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет определению 7, то будем говорить, что оно *продолжимо вправо,* а решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ является *продолжением* $\varphi(x)$ *вправо.*

Отметим, что продолжение решения за границу может не быть единственным в том смысле, что на продолжении $(b, \widetilde{b}\,\rangle$ промежутка $\langle a, b\,\rangle$ оно может задаваться различными функциями $\widetilde{\varphi}(x)$, а также из внутреннего или граничного превращаться в смешанное.

Теорема 4 (о продолжимости решения на границу). *Пусть* $y = \varphi(x)$ — *решение уравнения* (1) *на* $\langle a, b)$ *и* $b < +\infty$. *Решение* $y = \varphi(x)$ *продолжимо вправо в точку* b, *если и только если существуют последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и число* $\eta \in \mathbb{R}^1$ *такие, что*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon\ x_k \in \langle a, b),\ \ (x_k, \varphi(x_k)) \to (b, \eta)\ \text{ при }\ k \to \infty\ \text{ и }\ (b, \eta) \in \widetilde{G}. \tag{7}$$

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (7).

Пусть $M = |f(b, \eta)| + 1$, тогда в силу непрерывности функции f на множестве $\widetilde{G}$

$$\exists\, c > 0 :\ \forall\, (x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{V}_c(b, \eta)\ \Rightarrow\ |f(x, y)| \leqslant M.$$

Действительно, непрерывность функции $f(x, y)$ в точке (b, η) означает, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности, для $\varepsilon = 1$ найдется такое $c > 0$, что для любой точки (x, y)

из множества $\widetilde{G}$ такой, что $\|(x,y)-(b,\eta)\| \leqslant c$, или $(x,y) \in \overline{V}_c(b,\eta)$, вытекает неравенство $|f(x,y)-f(b,\eta)| \leqslant 1$. Тогда $|f(x,y)| \leqslant |f(b,\eta)| + |f(x,y)-f(b,\eta)| \leqslant M$.

Докажем теперь, что существует $\lim\limits_{x\to b_-} \varphi(x)$ и что он равен η, то есть покажем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta \in \langle a, b) : \;\; \forall\, x \in [\delta, b) \;\Rightarrow\; |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon. \tag{8}$$

Пусть $\varepsilon \leqslant c$, тогда $|f(x,y)| \leqslant M$ для любой точки $(x,y) \in \widetilde{G} \cap \overline{V}_\varepsilon(b,\eta)$, и согласно (7) найдется такой индекс m, что выполняются два неравенства:

$$b - x_m < \varepsilon/(2M), \quad |\varphi(x_m) - \eta| < \varepsilon/2. \tag{9}$$

Для всякого $x \in [x_m, b)$ с учетом первого из неравенств (9) имеем:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x} \varphi'(s) ds \right| = \int_{x_m}^{x} |f(s, \varphi(s))| ds \leqslant M(x - x_m) < M(b - x_m) < \varepsilon/2.$$

Следовательно, с учетом второго из неравенств (9) получаем:

$$|\varphi(x) - \eta| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

и неравенство (8) верно при $\delta = x_m$, а значит, $\varphi(x) \to \eta$ при $x \to b_-$.

Доопределим функцию $\varphi(x)$ в точке b, положив $\varphi(b) = \eta$. Поскольку $f(x,y)$ непрерывна в точке (b,η), в тождестве $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds \;\; \big(x_0, x \in \langle a, b)\big)$, можно перейти к пределу при $x \to b_-$, получая равенство $\eta = \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{b} f(s, \varphi(s))\, ds$.

В результате функция $\widetilde{\varphi}(x) = \big\{\varphi(x) \;(x \in \langle a, b)),\; \eta \;(x = b)\big\}$ по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b]$.

Необходимость условия (7) очевидна. □

Хорошо известно и легко доказывается следующее утверждение.

Л е м м а 1 (о продолжимости решения за границу отрезка). *Пусть решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1) *определено на* $\langle a, b]$ *и точка* $(b, \varphi(b)) \in G$. *Тогда это решение продолжимо вправо за точку* b *на правый отрезок Пеано, построенный для точки* $(b, \varphi(b))$.

С л е д с т в и е 1. *Если решение* $y = \varphi(x)$ *определено:*

1) *на* $\langle a, b]$ *и не продолжимо вправо за точку* b, *то* $(b, \varphi(b)) \in \widehat{G}$;

2) *на* $\langle a, b)$, $\varphi(x) \to \eta$ *при* $x \to b_-$ *и точка* $(b, \eta) \in G$, *то* $\varphi(x)$ *продолжимо вправо за точку* b.

Оба утверждения следствия 1 доказываются рассуждением от противного.

З а м е ч а н и е 3. Определение *продолжимости* решения *влево* и все утверждения, связанные с этим понятием, формулируются и доказываются аналогично вышеизложенным определениям и утверждениям о продолжимости решения вправо.

2^0. Разберемся теперь с вопросом о том, как далеко решение уравнения (1) может быть продолжено за границу исходного промежутка.

О п р е д е л е н и е 8. Решение уравнения (1) будем называть *полным*, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо.

Иначе говоря, полное решение, его также называют *максимально продолженным* или *непродолжимым*, не является сужением никакого другого решения.

Промежуток, на котором определено полное решение, будем называть *максимальным интервалом существования* и обозначать $I_{\max}$.

График полного решения будем называть *интегральной кривой*, а график любого сужения полного решения — *дугой интегральной кривой*.

Вопрос о существовании полного решения не тривиален, поскольку продолжения любого выбранного решения могут, как уже отмечалось, многократно «ветвиться», и становится неясно, найдется ли среди максимальных интервалов всех максимально продолженных решений самый большой интервал. Так, в примере из [1, гл. 1, § 5] для уравнения (1) приведен алгоритм построения такой непрерывной в $\mathbb{R}^2$ функции $f(x, y)$, что для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и для любого $\varepsilon > 0$ ЗК(x_0, y_0) имеет более одного решения как на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon]$, так и на отрезке $[x_0 - \varepsilon, x_0]$.

Т е о р е м а 5 (о существовании полного решения). *Любое решение уравнения* (1) *может быть продолжено до полного решения.*

Другая формулировка этой теоремы: *любое решение уравнения* (1), *не являющееся полным, является сужением некоторого полного решения.*

Для доказательства теоремы будет использоваться лемма Цорна: *если любая цепь во множестве $\langle M, \preccurlyeq \rangle$ имеет верхнюю грань, то любой элемент из M не превосходит некоторого максимального элемента* (доказательство леммы см. в [8]).

Напомним следующие понятия: 1) *частичным порядком* на множестве M называется бинарное отношение $\preccurlyeq$ (не превосходит), удовлетворяющее трем условиям: $\forall\, a: \ a \preccurlyeq a$, $\forall\, a, b, c: \ a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c \ \Rightarrow \ a \preccurlyeq c$, $\forall\, a, b: a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq a \ \Rightarrow \ a = b$; 2) множество M с заданным частичным порядком, называется *частично упорядоченным* и обозначается $\langle M, \preccurlyeq \rangle$; 3) элементы $a, b \in \langle M, \preccurlyeq \rangle$ *сравнимы* $(a \asymp b)$, если $a \preccurlyeq b$ или $b \preccurlyeq a$, в противном случае элементы *не сравнимы* $(a \not\asymp b)$; 4) элемент $a \in \langle M, \preccurlyeq \rangle$ называется *максимальным*, если $\forall\, b \in M \ \Rightarrow \ b \not\asymp a$ или $b \preccurlyeq a$; 5) подмножество Θ множества $\langle M, \preccurlyeq \rangle$ называется *цепью*, если $\forall\, a, b \in \Theta \Rightarrow a \asymp b$; 6) цепь Θ имеет *верхнюю грань*, если существует такой элемент $d \in M$, называемый верхней гранью, что $\forall\, a \in \Theta \ \Rightarrow \ a \preccurlyeq d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — множество решений $y = \varphi(x)$ уравнения (1), определенных на промежутках I_φ. Зададим на M частичный порядок: $\varphi_1 \preccurlyeq \varphi_2$, если $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ на $I_{\varphi_1} = I_{\varphi_2}$ или $y = \varphi_2(x)$ является продолжением на I_{φ_2} определенного на I_{φ_1} решения $y = \varphi_1(x)$.

Пусть Θ — какая-либо цепь в $\langle M, \preccurlyeq \rangle$, а $I = \bigcup_{\varphi \in \Theta} I_\varphi$. Тогда I — промежуток в $\mathbb{R}^1$, так как он является объединением попарно пересекающихся промежутков.

Определим функцию $y = \psi(x)$ на I следующим образом:

$$\forall\, \varphi \in \Theta, \ \forall\, x \in I_\varphi: \quad \psi(x) = \varphi(x).$$

Это определение корректно, поскольку любые две функции φ_1 и φ_2 из цепи Θ сравнимы, а значит, $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ при $x \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$.

Из тех же соображений вытекает, что $y = \psi(x)$ является решением уравнения (1) на I, то есть $\psi \in M$. Наконец, ψ является верхней гранью цепи, так как по определению $\varphi \preccurlyeq \psi$ для любого элемента φ цепи Θ. Поэтому по лемме Цорна для любого решения $y = \varphi(x)$, определенного на промежутке I_φ, существует максимальный элемент — это некоторое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ на $I_{\widetilde{\varphi}}$, обладающее двумя свойствами: $y = \widetilde{\varphi}(x)$ — продолжение решения $y = \varphi(x)$ на $I_{\widetilde{\varphi}}$ и не существует решения, являющегося продолжением $y = \widetilde{\varphi}(x)$. Следовательно, $y = \widetilde{\varphi}(x)$ — полное решение на $I_{\max} = I_{\widetilde{\varphi}}$. $\square$

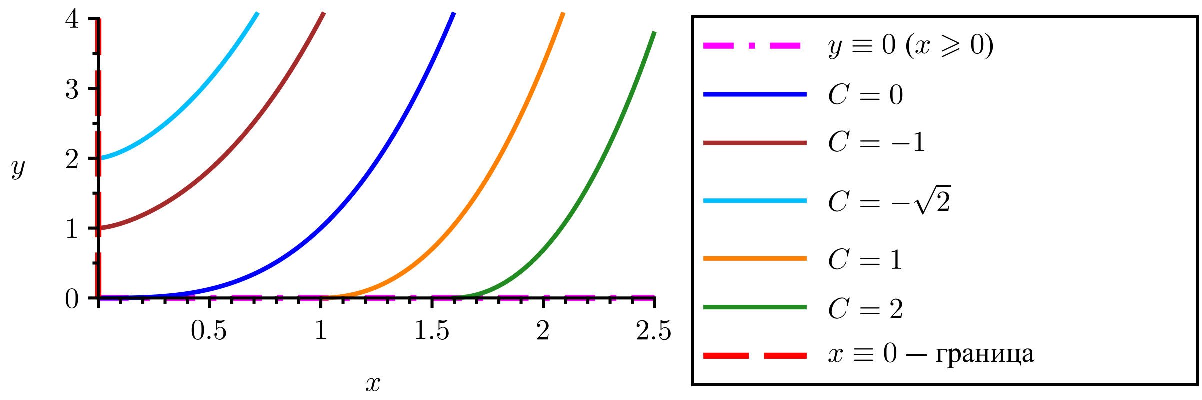

Рис. 4. Портрет интегральных кривых уравнения (10)

§ 4. О формальной и локальной единственности решения ГЗК

1⁰. Исследование вопросов о единственности решений уравнения (1) $y' = f(x, y)$ удобно начать с определения точки неединственности, единого как для внутренних, так и для граничных задач Коши.

О п р е д е л е н и е 9. Точку $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ будем называть *точкой неединственности,* если существуют определенные на некотором $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$ решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0) уравнения (1) и последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, $x_k \in \langle a, b\,\rangle$ такие, что $\varphi_1(x_k) \neq \varphi_2(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. В противном случае (x_0, y_0) будем называть *точкой формальной единственности.*

Приведем определение точки неединственности, равносильное определению 9, которое удобно тем, что его отрицание позволяет дать «прямое» определение точки формальной единственности, а именно: точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ является *точкой неединственности* тогда и только тогда, когда существуют такие определенные на некотором $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$ решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0), что для любого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ найдется такая точка $x^* \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b\,\rangle$, что $\varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$.

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3\sqrt{x}\sqrt{y}. \tag{10}$$

Его правая часть непрерывна на $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, лучи $y \equiv 0$ $(x \geqslant 0)$ и $x \equiv 0$ $(y > 0)$ образуют $\widehat{G}$. Функция $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, является граничным решением, а все внутренние решения задаются формулой $y = (x^{3/2} - C)^2$, где $x > 0$ при $C \leqslant 0$ и $x > C^{2/3}$ при $C > 0$. Их графики лежат в области $G = \{(x, y)\colon x > 0,\ y > 0\}$.

Смешанными станут все внутренние решения с $C \leqslant 0$ после добавления к их области определения точки $x = 0$, то есть для любой константы $C \leqslant 0$ функция $y = (x^{3/2} - C)^2$, $x \geqslant 0$, — полное смешанное решение и $(0, C^2)$ — его единственная граничная точка. Кроме того, для любой константы $C > 0$ полное смешанное решение образует «составная» функция $y(x) = \bigl\{0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant C^{2/3},\ (x^{3/2} - C)^2 \text{ при } x > C^{2/3}\bigr\}$ (см. рис. 4).

Пример 1 демонстрирует типичную ситуацию с «ветвлением» интегральных кривых, когда любая точка $(x_*, 0)$ с $x_* \geqslant 0$ — это точка неединственности. Из нее от графика решения $y \equiv 0$ ответвляется справа дуга интегральной кривой решения $y = \bigl(x^{3/2} - x_*^{3/2}\bigr)^2$, $x \geqslant x_*$, не имеющая больше общих точек с осью абсцисс.

О п р е д е л е н и е 10. Будем говорить, что в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ имеет место *ветвление интегральных кривых справа,* если существуют $\delta > 0$ и решения $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0) такие, что $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ для всякого $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (*слева* — аналогично).

Может показаться, что в точке неединственности всегда происходит ветвление интегральных кривых, но это не так. Могут найтись два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0) такие, что для любого $\delta > 0$ с одной стороны $\varphi_1(x) \not\equiv \varphi_2(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, с другой стороны существует такое $x_* \in (x_0, x_0 + \delta)$, что $\varphi_1(x_*) = \varphi_2(x_*)$.

П р и м е р 2. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} a_n = 2^{-n}, \ \ b_n = 2^{-2(n+1)}, \ \ d_n = 3 \cdot 2^{-(n+1)}, \ \ J_n = (a_n, a_{n-1}]; \\ \left.\begin{aligned} \psi_n(x) &= \big(b_n - (x - d_n)^2\big)^{3/2}, \ x \in J_n; \quad D_n = \big\{(x, y)\colon x \in J_n, \ |y| \leqslant \psi_n(x)\big\}, \\ D_n^+ &= \big\{(x, y)\colon x \in J_n, \ y \geqslant \psi_n(x)\big\}, \ \ D_n^- = \big\{(x, y)\colon x \in J_n, \ y \leqslant -\psi_n(x)\big\}; \\ h_n(x, y) &= -3(x - d_n) \cdot \big\{y^{1/3} \text{ при } (x, y) \in D_n, \ \pm\psi_n^{1/3}(x) \text{ при } (x, y) \in D_n^{\pm}\big\} \end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}); \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \psi(x) = \big\{\psi_1(x) \ \text{ при } \ x \in J_1, \ \psi_2(x) \ \text{ при } \ x \in J_2, \ \ldots\big\}, \ \ \psi(0) = 0; \\ h(x, y) = \big\{h_1(x, y) \ \text{ при } \ x \in J_1, \ h_2(x, y) \ \text{ при } \ x \in J_2, \ \ldots\big\}, \ \ h(0, y) \equiv 0. \end{gathered}$$

Здесь d_n — середина промежутка J_n, $b_n \geqslant (x - d_n)^2$ при $x \in J_n$; $\psi_n(a_n) = \psi_n(a_{n-1}) = 0$, $\max\limits_{x \in J_n} \psi_n(x) = \psi_n(d_n) = b_n^{3/2} = 2^{-3(n+1)} \to 0$ при $n \to \infty$; функции $\psi(x), \psi'(x)$ и $h(x, y)$ непрерывны при $x \in [0, 1]$; $\psi'(0) = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$y' = h(x, y), \tag{11}$$

в котором h непрерывна на множестве $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon x \geqslant 0, \ y \in \mathbb{R}^1\}$, причем (11) инвариантно относительно замены y на $-y$, поэтому его достаточно решить при $y \geqslant 0$.

На множестве D_n уравнение (11) принимает вид $y' = -3(x - d_n)y^{1/3}$.

Интегрируя его, получаем тривиальное решение $y(x) = 0$, $x \in J_n$, а также общий интеграл $U_n(x, y) = C$ с $U_n = y^{2/3} + (x - d_n)^2$, в котором $C \in (0, b_n]$, причем интеграл $U_n(x, y) = b_n$, будучи разрешенным относительно y, совпадает с функцией $y = \psi_n(t)$, $t \in J_n$, а при $C = 0$ график функции $U_n(x, y) = 0$ вырождается в точку $(d_n, 0)$.

На множестве D_n^+ уравнение (11) принимает вид $y' = -3(x - d_n)\psi_n^{1/3}(x)$.

Поскольку $\psi_n'(x) \equiv -3(x - d_n)\psi_n^{1/3}(x) \left(= -3(x - d_n)\big(b_n - (x - d_n)^2\big)^{1/2}\right)$ и $(\psi_n(x) + c)' = \psi_n'(x)$, функция $\psi_n(x) + c$ $(c \geqslant 0)$ является его общим решением.

Кроме того, поскольку $\psi_n''(x) = 0 \Leftrightarrow b_n - 2(x - d_n)^2 = 0$, в точках $x_n^{\pm} = d_n \pm (b_n/2)^{1/2} = \big(3 \pm 2^{-1/2}\big)2^{-(n+1)} \in J_n$ функция $\psi_n'(x)$ достигает своих экстремумов; поскольку $x_n^{\pm} - d_n = \pm 2^{-n-3/2}$ и $\big(b_n - (x - d_n)^2\big)^{1/2} = 2^{-n-3/2}$, то $\psi_n'(x_n^{\pm}) = \mp 3 \cdot 2^{-2n-3}$, а значит, максимальное по модулю отношение тангенса угла наклона касательной к интегральной кривой решения $y = \psi_n(x)$ и длины отрезка J_n равняется $(3/8) \cdot 2^{-n}$.

В результате уравнение (11) имеет решение $y(x) = 0$, два семейства решений: $\varphi^{\pm}(x, c) = \pm(\psi(x) + c)$ $(c \geqslant 0)$, определенных на отрезке $[0, 1]$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ по два семейства решений: $\varphi^{\pm}(x, C) = \pm\big(C - (x - d_n)^{2/3}\big)^{3/2}$ $(C \in (0, b_n))$, полученных из общего интеграла $U_n(x, y) = C$, графики которых лежат в $\operatorname{Int} D_n \backslash \{(d_n, 0)\}$ (см. рис. 5).

Итак, пример 2 демонстрирует, что начало координат является по определению точкой неединственности, но нельзя сказать, что интегральные кривые двух решений $y = \pm\psi(x)$ $(= \varphi^{\pm}(x, 0))$ ЗК$(0, 0)$, определенных на отрезке $[0, 1]$, ответвляются от интегральной кривой решения $y \equiv 0$, так как $\psi(0) = \psi(a_n) = 0$ и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

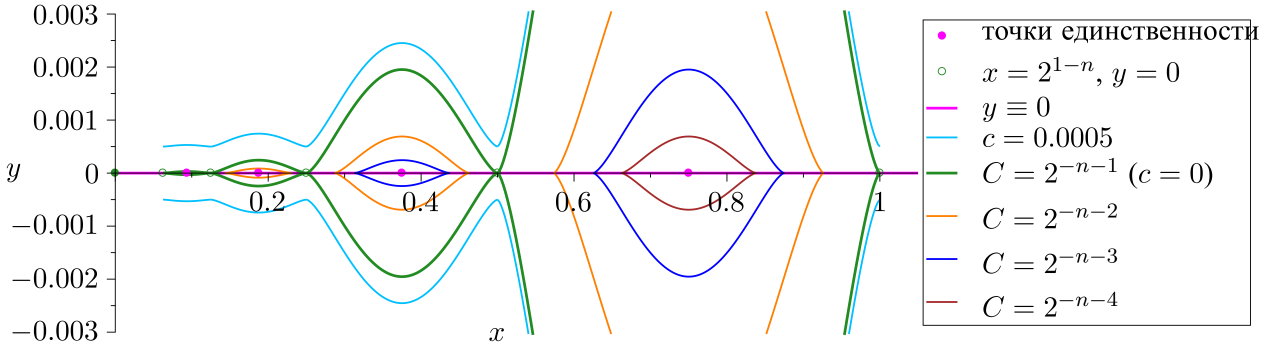

Рис. 5. Портрет интегральных кривых уравнения (11)

Отметим, что функцию $h(x, y)$ в (11) легко доопределить так, что она будет непрерывна в $\mathbb{R}^2$ и инвариантна относительно замены x на $-x$. А это значит, что точка неединственности, в которой отсутствует ветвление, может быть и граничной, и внутренней.

2⁰. Отрицание понятия «точка неединственности» различается для граничных и внутренних точек из $\widetilde{G}$, так как в отличие от внутренней решение граничной ЗК(x_0, y_0) может отсутствовать или оказаться непродолжимым за точку x_0 вправо или влево.

Определение 11. Точку $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$ будем называть *точкой формальной единственности,* если ГЗК(x_0, y_0) уравнения (5) не имеет решений или для любых двух ее решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, определенных на некотором промежутке $\langle a, b\,\rangle$, найдется такой интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для всякого $x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b\,\rangle$.

Определение 12. Решение ГЗК(x_0, y_0) будем называть *формально единственным,* или *единственным в точке,* если оно существует и точка (x_0, y_0) является точкой формальной единственности.

Слово «формальная» появилось в определении единственности решения ГЗК(x_0, y_0) не случайно, поскольку в этом определении отсутствует информация о том, насколько близка к x_0 абсцисса x_1 ближайшей к (x_0, y_0) точки неединственности $(x_1, \varphi(x_1))$.

В самом деле, выделяя какое-либо конкретное решение задачи Коши, поставленной в точке формальной единственности, заключаем, что по определению другие решения этой задачи Коши, если они имеются, совпадают с выделенным на своих промежутках, длина которых, вообще говоря, может стремиться к нулю.

Именно поэтому определение формальной единственности выглядит недостаточным с точки зрения прикладной математики, так как процесс, описываемый решением $y = \varphi(x)$ ГЗК(x_0, y_0), может оказаться полностью недетерминированным, когда, например, при любом $x > x_0$ от графика решения $y = \varphi(x)$ ответвляется дуга интегральной кривой другого решения.

Замечание 4. Ниже, в примерах 3 и 4 будет показано, что дело может обстоять именно так, то есть (x_0, y_0) окажется точкой формальной единственности из-за ограничения, пусть и естественного, множества $\widetilde{G}$, на котором задана правая часть уравнения (1). При доопределении функции $f(x, y)$ по непрерывности на некоторое расширение множества $\widetilde{G}$ точка (x_0, y_0) превращается в точку неединственности, что вызывает желание назвать ее «скрытой» точкой неединственности. При этом, как будет установлено в п. 3^0, подобная ситуация может иметь место только для граничных точек множества $\widetilde{G}$.

Значительно более информативным является другое определение единственности решения ГЗК(x_0, y_0) уравнения (1), гарантирующее детерминированность процесса на некотором общем промежутке, содержащем точку x_0.

О п р е д е л е н и е 13. *Решение ГЗК*(x_0, y_0) будем называть *локально единственным справа,* если оно существует на некотором промежутке $[x_0, b)$, найдется такой промежуток $[x_0, \beta)$, что все решения этой задачи продолжимы на $[x_0, \beta)$, и для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, при необходимости как угодно продолженных на $[x_0, \beta)$, имеем: $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ на $[x_0, \beta)$. В противном случае решение ГЗК(x_0, y_0) не является локально единственным справа. Аналогично определяется решение, *локально единственное слева.*

О п р е д е л е н и е 14. Решение ГЗК(x_0, y_0) *локально единственно,* а точка (x_0, y_0) — *точка единственности,* если это решение локально единственно слева и не продолжимо за точку x_0 вправо, или локально единственно справа и не продолжимо за точку x_0 влево, или локально единственно и слева, и справа. В противном случае решение ГЗК(x_0, y_0) не является локально единственным, а (x_0, y_0) — точкой единственности.

Так, в примере 1 для любого $y_* > 0$ решение ГЗК$(0, y_*)$ имеет вид $y = \left(x^{3/2} + y_*^{1/2}\right)^2$, определено на промежутке $[0, +\infty)$ и является локально единственным справа, а при $y_* = 0$ от решения $y = x^3$ ГЗК$(0,0)$ ответвляется граничное решение $y(x) = 0$, что означает не только отсутствие локальной единственности справа, но и признание начала координат точкой неединственности.

Следующий пример продемонстрирует, что точка $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, будучи точкой формальной единственности, может не быть точкой единственности, то есть для любых двух решений ГЗК(x_0, y_0) имеется промежуток $[x_0, b)$, на котором графики этих решений совпадают, но при этом нет единого промежутка, на котором совпадали бы графики всех решений, а значит, в такой точке отсутствует локальная единственность справа.

П р и м е р 3. Рассмотрим уравнение

$$y' = \sqrt{y} - 2\sqrt{x^2 - y} + x \tag{12}$$

на множестве $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$, тогда $\widehat{G} = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{x \geqslant 0,\ y = x^2\}$, $\gamma_2 = \{x > 0,\ y = 0\}$, и функция $y = x^2$ при $x \in [0, +\infty)$ является граничным решением.

Замена $y = u^2 x^2$, где $u \in [0, 1]$, сводит (12) к уравнению $2xuu' + h(u) = 0$, в котором $h = 2\sqrt{1 - u^2} - 2(1 - u^2) + (1 - u)$, $h(u) > 0$ при $u \in [0, 1)$, $h(1) = 0$, а решение $u \equiv 1$ равносильно решению $y = x^2$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\eta(u) + \ln(x/c) = 0, \quad \eta = \int_0^u \frac{2v}{h(v)}\, dv \quad \big(u \in [0, 1)\big).$$

Используя обратную замену $u = x^{-1}\sqrt{y}$, запишем решение в виде общего интеграла:

$$U(x, y) = c, \quad U = x e^{\eta(\sqrt{y}/x)} \quad (x > 0,\ y \geqslant 0).$$

Отметим, что несобственный интеграл $\eta(1)$ сходится, так как существует предел

$$\lim_{u \to 1_-} \eta(u) = \int_0^1 \frac{2v}{h(v)}\, dv \approx 1.66.$$

Поэтому для любой константы $c_0 > 0$ дуга интегральной кривой *частного* (см. ниже определение 16) решения $U(x, y) = c_0$ соприкасается с интегральной кривой граничного решения $y = x^2$ в точке $(x_{c_0}, x_{c_0}^2)$, где $x_{c_0} = c_0 e^{-\eta(1)}$, а не стремится с уменьшением x вдоль γ_1 к началу координат. При этом в точке $(c_0, 0)$ нижней границы $U(c_0, 0) = c_0$, так как $\eta(0) = 0$ (см. рис. 6).

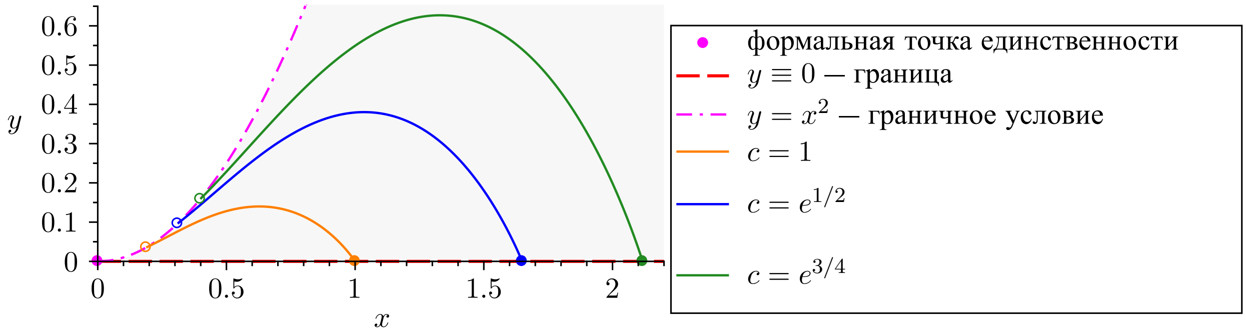

Рис. 6. Портрет интегральных кривых уравнения (12)

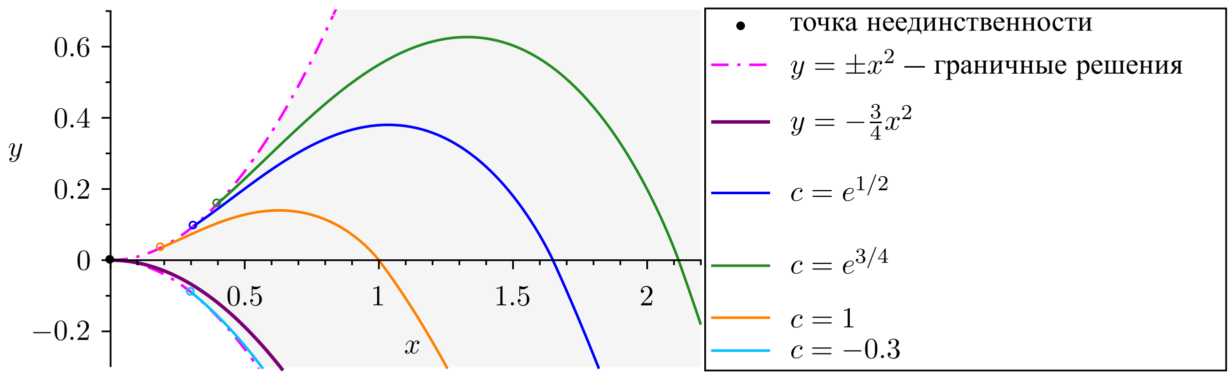

Рис. 7. Портрет интегральных кривых уравнения (13)

Итак, установлено следующее: если для любой константы $c_0 > 0$ интеграл $U(x, y) = c_0$ записать в виде частного решения $y = \varphi(x, c_0)$, что теоретически возможно, то составная функция $y = \{x^2,\ x \in [0, x_{c_0});\ \varphi(x, c_0),\ x \in [x_{c_0}, c_0]\}$, где $\varphi(c_0, c_0) = 0$, $\varphi(x_{c_0}, c_0) = x_{c_0}^2$, является полным смешанным решением как ГЗК$(c_0, 0)$, так и ГЗК$(0, 0)$.

Другими словами, начало координат является точкой формальной единственности, а любая граничная точка (x_c, x_c^2) $(x_c > 0)$ — это точка неединственности, так как в ней от графика граничного решения $y = x^2$ ответвляется дуга интегральной кривой, с ростом x попадающая на нижнюю границу в точку единственности $(c, 0)$. Поэтому для решений ГЗК$(0, 0)$ отсутствует промежуток, на котором бы все они совпадали.

Причины возникновения подобной ситуации проясняет следующий пример.

П р и м е р 4. Рассмотрим вместо уравнения (12) «расширенное» уравнение

$$y' = \{\sqrt{y} - 2\sqrt{x^2 - y} + x \ \text{ при }\ 0 \leqslant y \leqslant x^2,\ \ \sqrt{x^2 + y} - 2x \ \text{ при }\ -x^2 \leqslant y \leqslant 0\}, \qquad (13)$$

правая часть которого непрерывна на множестве $\widetilde{G}_e = \{(x, y)\colon x \geqslant 0,\ |y| \leqslant x^2\}$ и совпадает с правой частью уравнения (12) на множестве $\widetilde{G}$.

Проинтегрируем уравнение (13) в нижней полуплоскости и «состыкуем» на оси абсцисс полученные решения с решениями уравнения (12).

Итак, пусть $y \leqslant 0$. Из уравнения $y' = \sqrt{x^2 + y} - 2x$ после замены $y = u^2 - x^2$ $(0 \leqslant u \leqslant x)$ получаем уравнение $(2u' - 1)u = 0$. Тогда $u \equiv 0$ или $2u = x + c$, откуда

$$y = -x^2,\ x \geqslant 0 \text{ — граничное решение;} \quad U_e(x, y) = c \text{ — общий интеграл,}$$

где $U_e = 2\sqrt{x^2 + y} - x \quad (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0)$.

А в первой четверти решениями уравнения (12) являются уже найденные в примере 3 граничное решение $y = x^2,\ x \geqslant 0$ и общий интеграл $U(x, y) = c$.

Отметим следующие моменты:

a) для любой константы $c_0 > 0$ имеем: $U_e(c_0, 0) = c_0 = U(c_0, 0)$, а значит, в любой точке $(c_0, 0)$ положительной полуоси абсцисс происходит «склеивание» дуги интегральной кривой, параметризованной интегралом $U(x, y) = c_0$ из верхней полуплоскости, с дугой интегральной кривой, заданной интегралом $U_e(x, y) = c_0$ из нижней полуплоскости;

b) интеграл $U_e(x, y) = 0$ задает полное смешанное решение $y = -3x^2/4,\ \ x \geqslant 0$;

c) для любой константы $c_0 < 0$ полученное из интеграла $U_e(x, y) = c_0$ полное смешанное решение $y = (x + c_0)^2/4 - x^2$ определено при $x \geqslant -c_0$; его график располагается под графиком параболы $y = -3x^2/4$ и соприкасается в графиком граничного решения $y = -x^2$ в точке $(-c_0, -c_0^2)$ (см. рис. 7).

Таким образом, начало координат для расширенного уравнения (13) стало точкой неединственности, поскольку у ГЗК$(0, 0)$ появились смешанное решение $y = -3x^2/4$ и граничное решение $y = -x^2/2$.

Приведенные примеры требуют уточнения терминологии.

О п р е д е л е н и е 15. Точку формальной единственности, не являющуюся точкой единственности, будем называть *скрытой точкой неединственности.*

В результате множество граничных точек формальной единственности состоит из множества точек единственности и множества (возможно, пустого) скрытых точек неединственности.

3⁰. Разберемся теперь с вопросами о единственности для внутренних точек множества $\widetilde{G}$, помня о том, что для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ по теореме Пеано ВЗК(x_0, y_0) имеет хотя бы одно решение, определенное на отрезке Пеано $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$, и любое другое решение этой задачи при необходимости продолжимо на $P_h(x_0, y_0)$.

Пусть $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность решений ВЗК(x_0, y_0), определенных на некотором отрезке Пеано $P_h(x_0, y_0)$. Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ функции $y = \chi_k^l(x)$ и $y = \chi_k^u(x)$, где

$$\chi_k^l = \min\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x)\}, \quad \chi_k^u = \max\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x)\}, \quad x \in P_h(x_0, y_0), \tag{14}$$

также являются решениями ВЗК(x_0, y_0) на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Л е м м а 2 (о нижнем и верхнем решениях). *Для любых* $\chi_k^l(x), \chi_k^u(x)$ *из* (14) *уравнение* (1) *имеет решения ВЗК*(x_0, y_0) $y = \chi^l(x)$ *и* $y = \chi^u(x)$ *такие, что*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h]\colon \quad \chi^l(x) \leqslant \chi_k^l(x), \quad \chi^u(x) \geqslant \chi_k^u(x). \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность решений $\left\{\chi_k^l(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Она равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Поэтому по лемме Арцела–Асколи из нее выделяется равномерно сходящаяся на $P_h(x_0, y_0)$ подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (1) на отрезке Пеано. Но последовательность $\chi_k^l(x)$ монотонно убывает, поэтому сама будет сходиться к *нижнему* решению $y = \chi^l(x)$, для которого, очевидно, верно неравенство (15).

Доказательство для *верхнего* решения $y = \chi^u(x)$ проводится аналогично. □

Т е о р е м а 6 (о локальной единственности решения ВЗК). *Пусть точка* (x_0, y_0) *из области* G *является формальной точкой единственности, тогда решение ВЗК*(x_0, y_0) *уравнения* (1) *локально единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x_0, y_0) \in G$ — это формальная точка единственности. Построим какой-либо отрезок Пеано $P_h(x_0, y_0)$.

Рассуждая от противного, предположим, что для любого интервала (α, β) такого, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - h, x_0 + h]$, существуют решения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ ВЗК(x_0, y_0), не совпадающие на (α, β). Тогда для всякого $k = 1, 2, \ldots$ найдутся такие определенные на $P_h(x_0, y_0)$ решения $y = \varphi_k(x)$ и $y = \psi_k(x)$ этой задачи, что существует последовательность аргументов $x_k \in (x_0 - h/k, x_0 + h/k)$ такая, что $\varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k)$.

По лемме 2 для решений $\varphi_k^l = \min\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\}$ и $\psi_k^u = \max\{\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)\}$ найдутся решения $y = \varphi^l(x)$ и $y = \psi^u(x)$, удовлетворяющие неравенствам (15).

В результате $x_k \to x_0$ при $k \to +\infty$ и для всякого $k = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства $\varphi^l(x_k) \leqslant \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k) \leqslant \psi^u(x_k)$, означающие по определению, что (x_0, y_0) — это точка неединственности. Противоречие. □

З а м е ч а н и е 5. Хорошо известно другое доказательство этой теоремы (см. [1, гл. III, § 2, теорема 2.1]), в котором установлено существование так называемых минимального $y = \underline{\chi}(x)$ и максимального $y = \overline{\chi}(x)$ решений ВЗК(x_0, y_0) на отрезке Пеано, обладающих тем свойством, что для любого другого решения $y = \chi(x)$ той же задачи Коши справедливы неравенства $\forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h]:$ $\underline{\chi}(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \overline{\chi}(x)$. Поэтому из определения формальной единственности решения ВЗК(x_0, y_0) вытекает существование интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$, на котором $\underline{\chi}(x) \equiv \overline{\chi}(x)$, а значит, и остальные решения задачи Коши должны совпадать друг с другом на (α, β).

Таким образом, для точек из области G понятия точки единственности и формальной точки единственности равносильны, как и понятия локальной и формальной единственности решения любой ВЗК, поставленной для уравнения первого порядка (1).

З а м е ч а н и е 6. Результат, полученный в теореме 6 для уравнения первого порядка, не переносится на системы ОДУ, поскольку при построении решений $\chi_k^l(x)$ и $\chi_k^u(x)$ в соответствии с формулой (14) происходит сравнение скалярных функций $\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x)$, а не их модулей.

4⁰. Причина, по которой нельзя доказать теорему 6 для граничных точек и возможна ситуация, созданная в примере 3, заключается в том, что для граничных точек не всегда можно построить правый граничный треугольник Пеано, «не пропускающий» через свои боковые стороны любую ломаную Эйлера. А этот треугольник необходим для доказательства существования нижнего и верхнего решений (см. лемму 2) и всегда строится для любой внутренней точки.

Действительно, для уравнения (12) с $f_0(x, y) = \sqrt{y} - 2\sqrt{x^2 - y} + x$, непрерывной на множестве $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$, реализуется случай $B_{1,=}^{+,=}]$, причем условие (5) не выполняется для нижнеграничной функции $y(x) = 0$, и выполняется для верхнеграничной функции $y = x^2$, так как $f_0(x, 0) = -x < 0$ и $f_0(x, x^2) = 2x$. Поэтому правый граничный треугольник Пеано построить нельзя. И хотя решение ГЗК$(0, 0)$ существует, в (12) отсутствует нижнее решение (верхнее решение — $y = x^2$).

В «расширенном» уравнении (13) благодаря доопределению функции $f_0(x, y)$ исчезла граница $y \equiv 0$, «отрезающая» нижнее решение, и оно появилось — $y = -3x^2/4$. Но начало координат при этом стало точкой неединственности. Именно поэтому точка $(0, 0)$ для уравнения (12) названа скрытой точкой неединственности.

Для доказательства теоремы о локальной единственности решения ГЗК удобно, как это было сделано при исследовании вопроса о существовании решения, перейти от ГЗК(x_0, y_0), поставленной для уравнения (1), к ГЗК$(0, 0)$, поставленной для уравнения (2), в котором $f_0(0, 0) = 0$.

Т е о р е м а 7 (о локальной единственности решения ГКЗ). *Пусть точка* $(0, 0) \in \widehat{G}$ *и является точкой формальной единственности для уравнения* (2)*, тогда решение ГЗК*$(0, 0)$

локально единственно справа в любом из девяти случаев, приведенных в условии теоремы 1 *о существовании решения ГЗК.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для ГЗК$(0,0)$ уравнения (2) выполняется любой из случаев $W_1^{+}]$, $U_1^{+,>}]$, $O_{1,<}^{+}]$, $B_{1,<}^{+,>}]$ или любой из случаев $U_1^{+,=}]$, $O_{1,=}^{+}]$, $B_{1,=}^{+,=}]$, $B_{1,=}^{+,>}]$, $B_{1,<}^{+,=}]$ при условиях (5). В каждом из перечисленных случаев для точки $(0,0)$ можно построить правый граничный треугольник T_b^{+} и правый отрезок Пеано $P_{h^+}^{+}(0,0) = [0, h^+]$.

По теореме 1 на этом отрезке с учетом того, что O — точка формальной единственности, существует решение ГЗК$(0,0)$. Его локальная единственность доказывается дословно так же, как это делается при доказательстве теоремы 6, только все рассуждения проводятся в правой полуплоскости. □

З а м е ч а н и е 7. Очевидно, что аналогичная теорема может быть сформулирована и доказана для левой полуплоскости. А в случаях, рассматриваемых в теореме 2 и не входящих в условие теоремы 1 подобная теорема не доказуема, так как в этих случаях не гарантируется возможность построения треугольников Пеано.

§ 5. О единственности (глобальной) решения ГЗК

1⁰. Наибольший интерес представляет не просто знание того, что решение задачи Коши уравнения (1), поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$, локально единственно, а знание максимально большого промежутка, на котором решение сохраняет единственность. Другими словами, надо иметь возможность конструктивно выделять множества, состоящие из точек единственности, что позволит находить *частные* решения.

О п р е д е л е н и е 16. Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b\,\rangle$, будем называть *частным* (*особым*), если его график состоит только из точек единственности (неединственности), и это решение является полным в том смысле, что не может быть продолжено ни вправо, ни влево так, чтобы его график состоял только из точек единственности (неединственности). В этом случае промежуток $\langle a, b\,\rangle$ будем называть *максимальным интервалом существования частного (особого) решения.*

О п р е д е л е н и е 17. Область $G^o \subseteq G$ будем называть *областью единственности* для уравнения (1), если каждая точка G^o является точкой единственности. Множество $\widetilde{G}^o = G^o \cup \widehat{G}^o$, в котором G^o — область единственности, а $\widehat{G}^o \subseteq \partial G^o$ и состоит из точек единственности, будем называть *множеством единственности.*

Определение области единственности 17 равносильно определению 1.2.1 из [9], в котором *область* $G^o \subseteq G$ *называется областью единственности, если для любой точки* $(x_0, y_0) \in G^o$ *найдется такая окрестность* $\overline{V}_\delta(x_0, y_0)$, *что дуги любых двух интегральных кривых, проходящих через точку* (x_0, y_0) *и лежащих в* $\overline{V}_\delta(x_0, y_0)$, *совпадают.*

Ясно, что правая часть уравнения (1) должна в $G^o\,(\widetilde{G}^o)$ помимо непрерывности удовлетворять каким-то дополнительным условиям. Чем более слабыми, но достаточными для единственности они будут, тем более сильной окажется теорема о единственности.

Хорошо известна теорема о единственности в области: *Пусть в уравнении* (1) $f \in C(G)$, $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G^o)$, *где область* $G^o \subseteq G$, *тогда* G^o — *область единственности.*

Приведем ее обобщение, гарантирующее единственность на множестве, содержащем граничные точки.

Т е о р е м а 8 (о множестве единственности). *Пусть в уравнении* (1) $f \in C(\widetilde{G})$ *и* $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, *где* $\widetilde{G}^o = G \cup \widehat{G}^o$, $\widehat{G}^o \subseteq \widehat{G}$, *тогда* $\widetilde{G}^o$ — *множество единственности.*

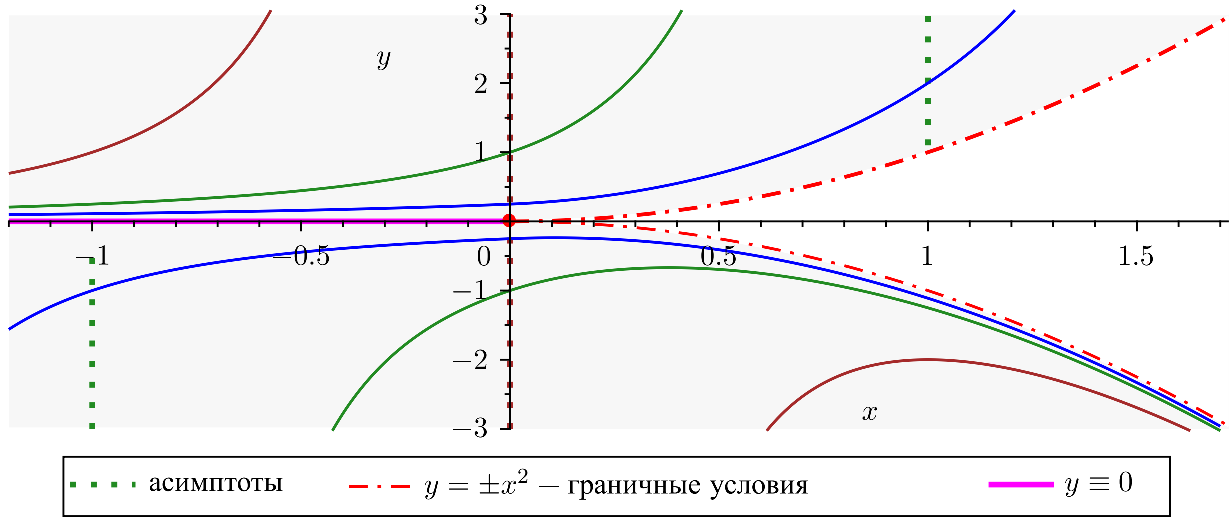

Рис. 8. Портрет интегральных кривых уравнения (16)

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из множества $\widetilde{G}^o$ и покажем, что она является точкой единственности.

Поскольку $f\in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, существуют замкнутая c-окрестность $\overline{V}_c(x_0,y_0)$ и глобальная константа Липшица $L>0$ такие, что $f\in \mathrm{Lip}_{y,L}^{gl}(U_c)$, где $U_c=\widetilde{G}^o\cap \overline{V}_c(x_0,y_0)$.

Если решение ЗК(x_0,y_0) отсутствует, что возможно, когда $(x_0,y_0)\in\widehat{G}^o$, то (x_0,y_0) — это точка единственности для уравнения (1) по определению.

Допустим, что ЗК(x_0,y_0) имеет два решения, определенные на некотором общем промежутке $\langle\alpha,\beta\rangle$ таком, что $x_0\in\langle\alpha,\beta\rangle\subseteq[x_0-c,x_0+c]$. Уменьшая при необходимости $\langle\alpha,\beta\rangle$, можно добиться, чтобы графики решений лежали в U_c.

Дальнейшее доказательство стандартно. Оно связано с записью этих решений в интегральном виде, использованием условия Липшица и леммы Гроноулла. □

Применим теорему 8 к уравнению (10) из примера 1, в котором $f(x,y)=3\sqrt{x}\sqrt{y}$, $G=\{(x,y)\colon x>0,\ y>0\}$, $\widehat{G}=\gamma_1\cup\gamma_2$, где $\gamma_1=\{x\equiv 0,\ y>0\}$, $\gamma_2=\{y\equiv 0,\ x\geqslant 0\}$.

Очевидно, что функция $f\in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G\cup\gamma_1)$ и не удовлетворяет локальному условию Липшица по y на луче γ_2, являющемся граничным решением уравнения (10). Поэтому $\widetilde{G}^o=G\cup\gamma_1$ является множеством единственности, а луч γ_2 — графиком особого граничного решения, поскольку для любого $x_*\geqslant 0$ из формулы общего решения (см. пример 1) можно найти решение ЗК$(x_*,0)$.

Отметим, что добавление к множеству $\widetilde{G}^o$, на котором функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по y, хотя бы одной точки $(x_*,y_*)\in\widehat{G}$, в которой локальное условие Липшица не выполняется, может привести к тому, что (x_*,y_*) окажется точкой неединственности.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$y'=f(x,y),\quad f=2\big\{|y|^{3/2}\ \text{при}\ x\leqslant 0,\ (|y|-x^2)^{3/2}+x\cdot\operatorname{sign}y\ \text{при}\ x\geqslant 0\big\},\tag{16}$$

в котором функции $f(x,y)$ и $\partial f(x,y)/\partial y$ определены и непрерывны на связном множестве $\widetilde{G}=\big\{(x,y)\colon y\in\mathbb{R}^1$ при $x\leqslant 0$, $|y|-x^2\geqslant 0$ при $x\geqslant 0\big\}$, а $\widehat{G}=\{y=\pm x^2$ при $x\geqslant 0\}$.

Помимо внутреннего частного решения $y(x)=0,\ x<0$ и полных граничных решений $y=\pm x^2,\ x\geqslant 0$ общие решения уравнения (16) соответственно в верхней и в нижней полуплоскостях имеют вид:

$$
\begin{aligned}
y &= \left[\begin{array}{l}\big\{(C-x)^{-2},\ x\leqslant 0;\ (C-x)^{-2}+x^2,\ x\in[0,C)\big\}\ \text{ при }\ C>0,\\ (C-x)^{-2},\ x<C\ \text{ при }\ C\leqslant 0;\end{array}\right.\\
y &= \left[\begin{array}{l}-(x-C)^{-2}-x^2,\ x\in(C,+\infty)\ \text{ при }\ C\geqslant 0,\\ \big\{-(x-C)^{-2},\ x\in(C,0];\ -(x-C)^{-2}-x^2,\ x\geqslant 0\big\}\ \text{ при }\ C<0.\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Множеством единственности $\widetilde{G}^o$ для уравнения (16) является множество $\widetilde{G}\backslash\{(0,0)\}$, поскольку начало координат — точка неединственности, в ней происходит ветвление интегральных кривых граничных решений (см. рис. 8).

И действительно, функция $f\in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}\backslash\{(0,0)\})$, а в любой окрестности точки $(0,0)$ для функции f не выполняется глобальное условие Липшица по y, так как для любого $x>0$ при $y_1=-x^2,\ y_2=x^2$ имеем: $f(x,y_2)-f(x,y_1)=2x,\ y_2-y_1=2x^2$. Поэтому для любой константы Липшица $L>0$ найдется такое $c_*>0$, что для любого $c\in(0,c_*]$ на множестве $\widetilde{G}\cap\overline{V}_c(0,0)$ неравенство Липшица, имеющее вид $2x<2Lx^2$, нарушается.

$\mathbf{2^0}$. При решении практических задач установить, что $f\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, бывает сложнее, чем проверить наличие у функции $f(x,y)$ непрерывной частной производной по y. Поэтому при ответе на вопрос о единственности решения удобно использовать следующее утверждение.

Т е о р е м а 9 (о множестве единственности; слабая). *Пусть в уравнении* (1) $f\in C(\widetilde{G})$, $\partial f/\partial y\in C(\widetilde{G}^o)$, *где* $\widetilde{G}^o=G\cup\widehat{G}^o$, *а* $\widehat{G}^o\subseteq\widehat{G}$, *и для любой точки* $(x_0,y_0)\in\widehat{G}^o$ *найдется такая окрестность* $\overline{V}_c(x_0,y_0)$, *что множество* $\widetilde{G}^o\cap\overline{V}_c(x_0,y_0)$ *выпукло по* y. *Тогда* $\widetilde{G}^o$ *является множеством единственности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in\widetilde{G}^o$. Поскольку функция $\partial f(x,y)/\partial y$ непрерывна в точке (x_0,y_0), существует такое число $\delta\ (0<\delta\leqslant c)$, где c берется из формулировки теоремы, что

$$\forall\,(x,y)\in U_\delta=\widetilde{G}^o\cap\overline{V}_\delta(x_0,y_0)\ \Rightarrow\ |\partial f(x,y)/\partial y-\partial f(x_0,y_0)/\partial y|\leqslant 1.$$

Тогда $|\partial f(x,y)/\partial y|\leqslant L=|\partial f(x_0,y_0)/\partial y|+1$ для любой точки $(x,y)\in U_\delta$.

По теореме Лагранжа для любых двух точек $(x,y_1),(x,y_2)\in U_\delta\ (y_1<y_2)$ найдется такое число $y_x^*\in(y_1,y_2)$, что $f(x,y_2)-f(x,y_1)=\dfrac{\partial f(x,y_x^*)}{\partial y}(y_2-y_1)$. Здесь точка $(x,y_x^*)\in U_\delta$, так как множество U_δ выпукло по y. Поэтому в U_δ верно неравенство $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant$ $\leqslant L|y_2-y_1|$, означающее, что $f\in\mathrm{Lip}_{y,L}^{gl}(U_\delta)$. Тогда по определению $f\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, а значит, $\widetilde{G}^o$ — множество единственности по теореме 8. □

В примере 5 продемонстрирована необходимость имеющегося в теореме 8 условия о локальной выпуклости по y множества единственности, поскольку при любом $c>0$ окрестность $\overline{V}_c(0,0)$ не является выпуклой по y.

Для сравнения изучим решения уравнения, отличающегося от уравнения (16) тем, что степени выражений $|y|$ и $|y|-x^2$ выбраны в нем не бóльшими, а мéньшими единицы.

П р и м е р 6. Рассмотрим уравнение

$$y'=2\{|y|^{1/2}\ \text{при}\ x\leqslant 0,\ \ (|y|-x^2)^{1/2}+x\cdot\operatorname{sign}y\ \ \text{при}\ x\geqslant 0\},\tag{17}$$

у которого $G_1^o=\{(x,y)\colon y>0\ (x\leqslant 0),\ y>x^2\ (x>0)\}$ и $G_2^o=\{(x,y)\colon y<0\ (x\leqslant 0),$ $y<-x^2\ (x>0)\}$ — это области единственности, так как в каждой их точке существует

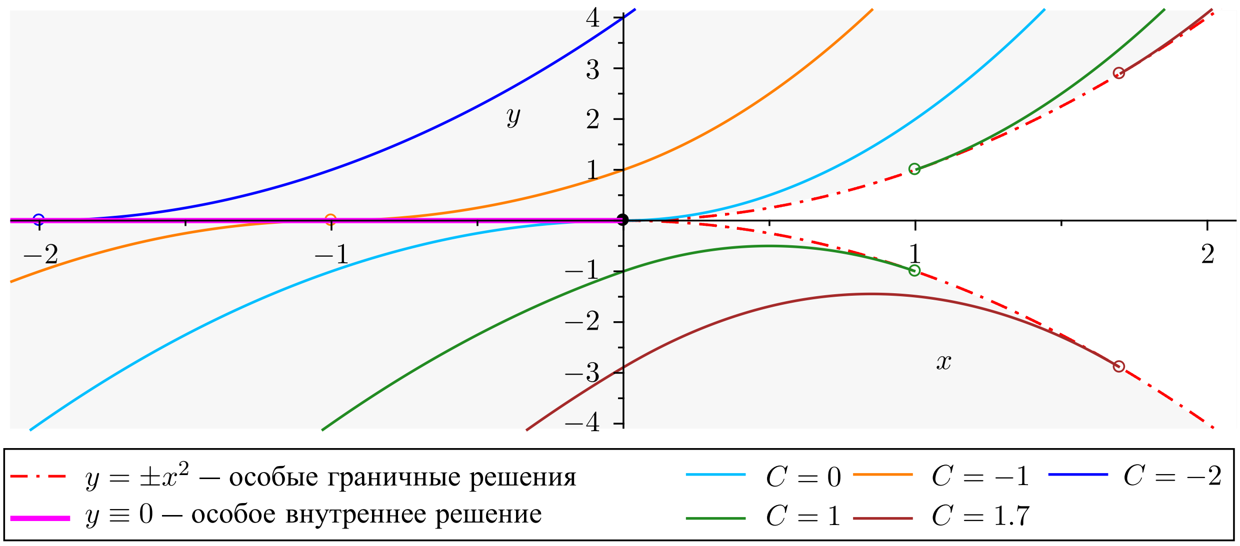

Рис. 9. Портрет интегральных кривых уравнения (17)

и непрерывна частная производная f по y. А в любой точке граничного множества $\widehat{G} = \{y = \pm x^2,\ x \geqslant 0\}$ и на отрицательной полуоси абсцисс частная производная отсутствует.

Для всякого $C_0 \in \mathbb{R}^1$ в G_1^o и G_2^o лежат интегральные кривые частных решений:

$$y = \{(x - C_0)^2 \text{ при } x \in (C_0, 0],\ (x - C_0)^2 + x^2 \text{ при } x \in [\max\{0, C_0\}, +\infty)\} \text{ и}$$
$$y = \{-(C_0 - x)^2 \text{ при } x \in (-\infty, \min\{0, C_0\}),\ -(C_0 - x)^2 - x^2 \text{ при } x \in [0, C_0)\}.$$

Действительно, решения полны, так как при $x = C_0$, если $C_0 < 0$, то график решения $y = (x - C_0)^2$ соприкасается с графиком решения $y(x) \equiv 0$ $\big($при $x = 0$ он «склеивается» со своим продолжением вправо до бесконечности — графиком решения $y = (x - C_0)^2 + x^2\big)$, а если $C_0 \geqslant 0$, то график решения $y = (x - C_0)^2 + x^2$ соприкасается с графиком граничного решения $y = x^2$ $\big($при $C_0 = 0$ — в граничной точке $(0, 0)\big)$.

В результате функция $y(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0)$, является особым внутренним решением, а функции $y = \pm x^2,\ x \in [0, +\infty)$, — особые граничные решения. Кроме того, для любой константы $C_0 < 0$ дуги интегральных кривых из верхней и нижней полуплоскостей, выделяемые этой константой, соприкасаются на оси абсцисс. А при $C_0 = 0$ соприкасаются интегральные кривые решений $y = 2x^2$ $(x > 0)$ и $y = -x^2$ $(x < 0)$ (см. рис. 9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
2. Басов В. В., Ильин Ю. А. О существовании решения граничной задачи Коши // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 277–288. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.210
3. Басов В. В., Ильин Ю. А. О задаче Коши, поставленной на границе области определения обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 636–648. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.406
4. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities. Theory and applications. Vol. 1. Ordinary differential equations. New York: Academic Press, 1969.
5. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

6. Бибиков Ю. Н., Плисс В. А. Зависимость максимального интервала существования решения дифференциального уравнения от начальных данных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1 (59). Вып. 4. С. 511–516. https://math-mech-astr-journal.spbu.ru/article/view/11083
7. Басов В. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: лекции и практические занятия. СПб.: СПбГУ, 2023.
8. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
9. Бибиков Ю. Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: СПбГУ, 2005.

Поступила в редакцию 29.10.2024

Принята к публикации 20.04.2025

Басов Владимир Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9618-5235
E-mail: vlvlbasov@rambler.ru

Цитирование: В. В. Басов. О существовании, продолжимости и единственности решения задачи Коши ОДУ первого порядка, поставленной в граничной точке // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2025. Т. 65. С. 3–27.

V. V. Basov

On existence, continuability and uniqueness of a solution to the boundary initial value problem of a first-order ordinary differential equation

Keywords: boundary initial value problem, existence of a solution, extendability of a solution, uniqueness of a solution, Peano segment.

MSC2020: 34A12, 34B60

DOI: 10.35634/2226-3594-2025-65-01

A first-order ordinary differential equation, solved with respect to the derivative, is considered. It is assumed that its right-hand side is continuous on a set consisting of a connected open subset of a two-dimensional Euclidean space and some part of its boundary. A theory is presented devoted to solving the questions of existence, continuability and uniqueness of solutions of the BIVP that is the initial value problem posed at a boundary point. This theory will allow to supplement the existing theory of first-order ODEs, in which the Cauchy problem is posed at an interior point (IIVP). The main results on existence or non-existence of a BIVP solution were obtained in 2020, therefore in this paper they are only systematized and supplemented. The results related to continuability, as well as the uniqueness or non-uniqueness of solutions to the BIVP are new. Theorems on the formal and local uniqueness of solutions to the Cauchy problem are proved. The differences between BIVP and IIVP are shown. For example, the non-equivalence of the concepts of formal and local uniqueness for BIVP and IIVP is demonstrated. This non-equivalence leads to the appearance of so-called hidden points of non-uniqueness along with points of non-uniqueness and uniqueness.

REFERENCES

1. Hartman P. *Ordinary differential equations*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. https://doi.org/10.1137/1.9780898719222
2. Basov V. V., Iljin Yu. A. On the existence of a solution to the Cauchy initial boundary value problem, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 180–190. https://doi.org/10.1134/S1063454120020053
3. Basov V. V., Iljin Yu. A. On the Cauchy problem set on the boundary of the ordinary differential equation's domain of definition, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2020, vol. 53, no. 4, pp. 424–433. https://doi.org/10.1134/S1063454120040020
4. Lakshmikantham V., Leela S. *Differential and integral inequalities. Theory and applications. Vol. 1. Ordinary differential equations*, New York: Academic Press, 1969.
5. Krasnosel'skii M. A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravnenii* (The shift operator along trajectories of differential equations), Moscow: Nauka, 1966.
6. Bibikov Yu. N., Pliss V. A. The dependence of the maximal interval of existence of solutions to a differential equation on the initial data, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2014, vol. 47, no. 4, pp. 141–144. https://doi.org/10.3103/S1063454114040025
7. Basov V. V. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya: lektsii i prakticheskie zanyatiya* (Ordinary differential equations: lectures and practical classes), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2023.
8. Kurosh A. G. *Lectures in general algebra*, Pergamon, 1965. https://doi.org/10.1016/C2013-0-01775-6
9. Bibikov Yu. N. *Obshchii kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (General course of ordinary differential equations), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2005.

Received 29.10.2024

Accepted 20.04.2025

Vladimir Vladimirovich Basov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, Saint Petersburg, 199034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9618-5235
E-mail: vlvlbasov@rambler.ru

Citation: V. V. Basov. On existence, continuability and uniqueness of a solution to the boundary initial value problem of a first-order ordinary differential equation, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2025, vol. 65, pp. 3–27.