Законодательное собрание Ленинградской области

Санкт-Петербургский государственный университет

Инвестиционно-строительная компания «Мавис»

НО «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»

Вторая межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто!»

20 – 22 декабря 2019 г.

Материалы конференции

Санкт-Петербург

2019

В87 **Вторая межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто!».** 20 – 22 декабря 2019 г. Материалы конференции. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2020. — 161 с.

ISBN 978-5-9651-1297-5

Организаторы конференции

НО «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Профсоюзный комитет сотрудников Санкт-Петербургского государственного университета,

Законодательное собрание Ленинградской области,

Академия педагогического мастерства.

Вторая межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто!» проводится при финансовой поддержке Инвестиционно-строительной компании «Мавис».

(грант № 02-12-2019-г)

Организационный комитет конференции

Сопредседатели Оргкоммитета: Востоков С.В. («УниШанс», СПбГУ, д. ф.-м. н., профессор), Павилайнен Г.В. («УниШанс», СПбГУ, к. ф.-м. н., доцент)

Технические секретари: Зуева Е.В. («УниШанс»), Глушкова Д.С. («УниШанс»), Старкова В.В. («УниШанс»)

Редактор сборника материалов конференции: Орехов А.В. («УниШанс», СПбГУ)

Члены оргкомитета:

Иванов О.А., д. пед. н., профессор (СПбГУ)

Ереемеев С.Г., д. пол. н., профессор (ЛГУ им. А.С. Пушкина)

Некрасов В.Б., Заслуженный учитель РФ, (СПб АППО)

Петров Ф.В., д. ф.-м. н., профессор (СПбГУ)

Гладкая А.В., к. ф.-м. н., доцент (СПбГУ)

Кропачева Н.Ю., к. ф.-м. н., доцент (СПбГУ)

Стукалова Н.П., («УниШанс»)

Ференс-Сороцкий Е.В., («УниШанс»).

Секция 1.

Общие вопросы педагогики

УДК 531.8

Шведова О.Н.[1]

Влияние внеурочной деятельности по математике на развитие социальных компетенций

Аннотация. В работе описывается психолого-педагогический эксперимент, проведенный на базе ГБОУ лицея №393, в ходе которого наблюдались психологические изменения школьников в процессе педагогического воздействия во время внеклассной работы по математике. Анализ эксперимента показал, что применение в организации образовательного процесса индивидуального образовательного маршрута позволяет достичь развития мыслительной деятельности учащихся, расширения и углубления фактических знаний по математике, а также развития интеллектуальных и социальных компетенций учащихся.

Ключевые слова: образовательная система, внеклассная работа, метод педагогического наблюдения, компетенции.

Главная цель педагогической деятельности — социокультурное становление и развитие личности ученика, создание определенных условий для развития у него мотивационных, интеллектуальных и творческих возможностей, воспитание в учениках человечности в созданном замкнутом пространстве, необходимость сделать учащихся адаптивными в обществе через успешность в обучении.

Основными направлениями развития нынешнего российского образования являются:
— интеграция в современное мировое сообщество, для чего необходим переход к сетевым системам образования и организация школьной жизни и досуга обучающихся;
— выход образовательного учреждения за пределы собственных стен, и создание таких условий, при которых просветительской средой для каждого ученика становится весь окружающий его мир;
— осмысление образования как непрекращающегося процесса и превращение его в постоянный мотиватор жизненного успеха;
— возрастные границы образования фактически исчезают: люди учатся и совершенствуются от рождения и до старости;
— современные образовательные системы опираются на индивидуальные способности обучающегося и используют интегрированные методы обучения [3].

Направления развития современного общества, требования к человеку и профессионалу в нашем обществе изменили подход к обучению школьников и не только: система образования теперь

[1]Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей №393 Кировского района г. Санкт-Петербурга, e-mail: shvedova1969@mail.ru

ориентирована на личностное развитие, формирование основополагающих компетенций.

Любая школа должна переходить от технологических методов работы к общеличностным, в которых сам ученик является не только целью работы, но и её полноправным участником, субъектом своего развития. Образование учащихся должно реализовываться в разных направлениях, объединенных общей идеей, идеей создания условий для раскрытия задатков и развития способностей всех учащихся со сформированной собственной познавательной потребностью. То есть мы должны уделять особое внимание сохранению индивидуальности учащегося, должны осуществлять личностный подход в образовании к каждому ученику, развивать творческие способности учащегося на уроках и во внеурочной деятельности.

Формирование и развитие личностных и метапредметных результатов обучения школьников осуществлялось в ходе психолого-педагогического эксперимента, организованного на базе ГБОУ лицея № 393 Кировского района Санкт-Петербурга. В ходе данного эксперимента прослеживались изменения психологических характеристик школьников в процессе активного педагогического воздействия средствами внеклассной работы по математике, создавались специальные ситуации, позволяющие раскрывать закономерности, механизмы, динамику, тенденции, пути формирования и развития личности ребенка с возможностями оптимизации учебно-воспитательного процесса.

Общая длительность данного эксперимента составила четыре года, он включал в себя три этапа:
— констатирующий эксперимент первого порядка, направленный на установление существующих на момент эксперимента характеристик и свойств изучаемого явления, развития личностных и метапредметных результатов обучения школьников; в ходе него формируются две группы участников: основная группа, которая принимает участие во всех процедурах эксперимента и проходит цикл формирующих воздействий (ЭГ), и контрольная группа, которая выступает как эталон, по которому будет оцениваться развивающий и формирующий эффект эксперимента (КГ);
— формирующий эксперимент (процесс активного воздействия); реализуется с помощью специально построенной экспериментальной аналитической модели «развивающего эффекта», формирующей воздействие на предмет влияния внеклассной работы как средства развития личностных и метапредметных результатов учащихся. При данной модели сочетаются процедуры различ-

ного характера: учебные, игровые и практические; выдвигаются предположения относительно результатов эксперимента;
— констатирующий эксперимент второго порядка (контрольный); «снятие» эмпирических показателей после проведенной процедуры формирующих воздействий на предмет влияния внеклассной работы; показатели КГ выступают эталоном сравнения для установления формирующего эффекта, достигнутого в работе с ЭГ; в дальнейшем результаты исследования подвергаются соответствующему анализу и используются для обоснования определенных закономерностей формирования и развития личностных и метапредметных результатов обучения школьников [7].

В исследовании были задействованы учащиеся в количестве 26 человек в период обучения с 8-го по 11-й класс.

Данная опытно-экспериментальная работа была организована по следующему плану:
— определение цели и задач опытно-экспериментальной работы;
— условия проведения опытно-экспериментальной работы;
— определены критерии личностных и метапредметных результатов;
— выбор методов исследования;
— проведение исследования;
— обработка результатов эксперимента и формулировка выводов практического исследования.

Применительно к данному исследованию целью опытно-экспериментальной работы является доказательная и научно-объективная проверка того, что работа по формированию и развитию личностных и метапредметных результатов обучения учащихся во внеурочной деятельности будет осуществляться на фоне выдвинутых педагогических условий: реализация индивидуально-персонифицированного подхода посредством применения различных форм внеурочной деятельности обучающихся; использование комплекса разнообразных форм внеурочной и внешкольной деятельности исследовательского характера; реализация кружковой, факультативной работы, а также игровой деятельности по математике.

Задачи экспериментальной работы вытекают из цели эксперимента: проверить выделенные педагогические условия; составить и внедрить комплекс методических рекомендаций; определить критерии и показатели формирования и развития личностных и метапредметных результатов обучения школьников во внеурочной деятельности.

В ходе проведения экспериментальной работы применялись следующие методы: изучение и анализ психолого-педагогической литературы, нормативных документов, наблюдения, опрос, педагогический эксперимент.

На первом, констатирующем этапе, были проанализированы нормативно-правовые документы, научно-методическая литература по проблеме развития личностных и метапредметных результатов школьников во внеурочной деятельности. В ходе данного этапа эксперимента была проведена следующая работа:
— определены ЭГ из 8 учащихся и КГ из 18 учащихся (группы сформированы на добровольной основе с учетом пожеланий);
— определены показатели развития метапредметных и личностных результатов обучающихся;
— были определены организационно-педагогические условия.

На втором, формирующем этапе, по результатам полученных материалов был разработан образовательный маршрут для ЭГ. В него из всех форм внеклассной деятельности вошли: факультативный курс «Решение нестандартных задач по курсу математики»; кружок по математике; участие и проведение декады математики; участие в «Математической регате»; игра «Матбой»; участие в различных олимпиадах. Работа с учащимися из ЭГ проводилась по всем направлениям внеурочной деятельности для развития интеллектуальной компетентности на протяжении всех четырех лет. Со школьниками КГ работа по составленному плану не проводилась.

На протяжении четырех лет ЭГ регулярно посещала кружок по математике, который проводился после уроков в течение полутора-двух часов и был направлен на углубление знаний по математике и параллельно с этим на работу по развитию мышления. В работе кружка большое внимание уделялось занимательности материала и систематичности его изложения. Ожидаемые результаты от ЭГ: формирование устойчивого интереса к творческому и поисковому процессу; умение логически мыслить и рассуждать при решении любых, не только математических задач; способность четко и грамотно излагать свои мысли; умение применять изученные методы к решению олимпиадных задач; успешное выступление учащихся на олимпиадах, конкурсах.

В течение всего периода ЭГ посещала еженедельный факультатив по математике, который проводился до уроков и продолжался в течение часа. Задачи программы факультативных курсов состоят в развитии способностей учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, расширение кругозора учащихся, развитие математического мышления, воспитание мировоззрения и позитивных личностных качеств школьников, развитие их инициативы и творчества средствами углубленного изучения математики. На факультативных занятиях происходил процесс развития школьников, углублялось понимание ими прикладной роли математики, развитие навыков самообразования и удовлетворения индивидуальных интересов, что способствовало формированию и развитию личностного результата учащихся.

ЭГ всегда участвовала в Осеннем и Весеннем Кубках ФМЛ лицея №366 Московского района Санкт-Петербурга, где решение задач требовало определенных интеллектуальных и творческих затрат. Для активизации математической деятельности других учащихся и повышения интереса к предмету ЭГ стала регулярно (один раз в четверть) проводить данное соревнование для младших школьников. В процессе этой работы учащиеся самостоятельно могли планировать и анализировать свои действия, находить выход из сложившихся ситуаций, реально оценивать свои и чужие знания, а также развивать вычислительные навыки, умение анализировать условие задачи и относить ее к тому или иному типу, при этом воспитывать у младших учащихся познавательный интерес к предмету, стремление к поисковым решениям, умение работать в коллективе, помогать и поддерживать друг друга.

В начале ЭГ участвовала в матбоях с ФМЛ лицея №366 Московского района Санкт-Петербурга, затем матбои проводились с ГОУ СОШ №18 Василеостровского района Санкт-Петербурга. Математические бои — прекрасная школа для приобретения не только навыков решения задач и работы в творческом коллективе, но и школа внятного изложения своих мыслей, умения спорить, замечать свои и чужие ошибки. Ни один из членов команды не остается в стороне, «прикрываясь» более сильными игроками. Наиболее подготовленный участник команды делится своим решением. Ребята «вынуждены» были учиться друг у друга, и, в итоге, изначально слабые ученики заметно прибавили в мастерстве.

Опыт матбоев поможет участникам эксперимента в будущем: умение сделать научный доклад, выслушать и понять работу другого, задать четкие вопросы по существу — все это пригодится на семинарах и конференциях, для совместной научной работы и других видов деятельности, с которыми наши ученики столкнуться во время дальнейшего обучения.

И еще несколько важных замечаний: после проведенного матбоя просыпается «вкус к хорошей работе», поэтому ЭГ под руководством учителя всегда с энтузиазмом разрабатывала и проводила матбои на базе своего лицея для учащихся младших классов. Ввиду того, что игра слишком сложна и длинна по продолжительности, количество задач для младших школьников предлагается на две меньше и выход к доске определен не стратегией, а жребием.

Ежегодно вся группа участвовала в различных предметных олимпиадах: школьный и районный туры Всероссийской олимпиады школьников, ЮМШ, «Кенгуру», Молодежный чемпионат по различным предметам; «Формула Единства»/«Третье тысячелетие»; различные городские Олимпиады; Интернет-олимпиады.

Реализация всех поставленных задач опытно-экспериментальной работы позволяет перейти к третьему контрольному этапу исследования, основными задачами которого являются обработка, анализ и систематизация результатов формирующего этапа эксперимента; мониторинг динамики изменений на уровне развития личностных и метапредметных результатов школьников; выявление влияния проводимой внеклассной работы на их формирование и развитие; формулировка выводов исследования.

Для определения уровня развития личностных и метапредметных результатов обучения школьников средствами внеурочной деятельности на этапе констатирующего эксперимента были выбраны следующие методы: анкетирование, беседа с учителями-предметниками, наблюдения, опрос.

Для проведения анкетирования учащихся на предмет развития личностных результатов обучения можно ввести следующие критерии и показатели оценивания. Каждый показатель можно представить тремя уровнями: низкий, средний и высокий.

Показатели:

— Оригинальность мышления: способность выдвигать новые идеи, отличающиеся от общепринятых, а также способность конструировать и применять различные способы деятельности; умение находить альтернативные стратегии решения проблем, оперативно менять направление поиска решения проблемы.

— Продуктивность: включение во внешнюю деятельность; умение находить не один вариант решения разнообразных проблем и задач; способность к адекватному генерированию большого числа различных идей.

— Способность к анализу и синтезу: способность умело обрабатывать и раскладывать на части информацию, а также синхронизировать и структурировать ее.

— Концентрация и внимание: способность к запоминанию, проявление различных видов памяти; усидчивость; высокая степень погруженности в проблему или задачу; продуктивность восприятия информации, относящейся к выбранной цели.

— Лидерство и социальная компетентность: готовность брать на себя ответственность и отстаивать собственную точку зрения, даже если она противостоит мнению большинства; стремление действовать нестандартно; доминировать в межличностных отношениях, благодаря интеллектуальному превосходству [5].

Для достоверности информации по каждому ребенку анкета заполняется в четырех экземплярах: непосредственно двумя учителями, работающим с данными группами детей; независимым учеником данного класса и самим анкетируемым учеником. Набирались результаты, статистические данные в течение всего периода эксперимента для каждой группы, в дальнейшем проводился анализ результатов и сравнение этих результатов между группами, которые представлены на рис.1.

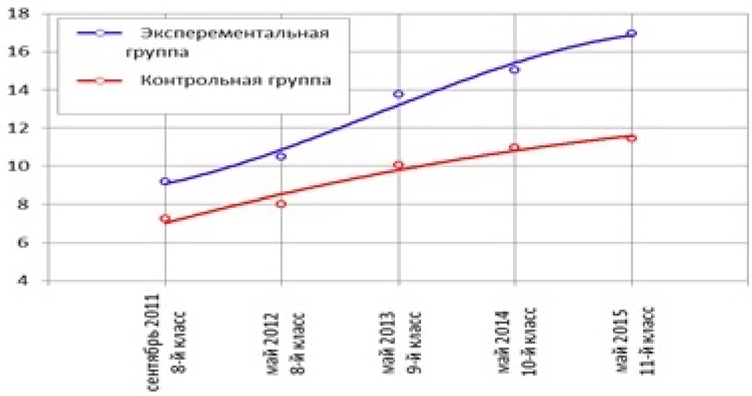

Рис. 1. Сравнение результатов групп.

Если проводить сравнительный анализ двух групп за весь экспериментальный период по статьям «Олимпиады и конкурсы» (без учета количества дипломов у каждого участника и разнообразия предметов), то мы имеем следующие результаты:

— Олимпиады: районный уровень (ЭГ — 6 уч.; КГ — 1 уч.), городской уровень (ЭГ — 5 уч.; КГ — 1 уч.), региональный уровень (ЭГ— 6 уч.; КГ — 1 уч.), всероссийский уровень (ЭГ— 2 уч.; КГ — 0 уч.).

— Научно-практические конференции: районный уровень (ЭГ— 6 уч.; КГ — 0 уч.), городской уровень (ЭГ — 3 уч.; КГ — 0 уч.), всероссийский уровень (ЭГ — 1 уч.; КГ — 0 уч.).

— Игры и конкурсы: районный уровень (ЭГ — 6 уч.; КГ — 0 уч.), городской уровень (ЭГ — 8 уч.; КГ — 0 уч.), региональный уровень (ЭГ— 4 уч.; КГ — 0 уч.), всероссийский уровень

(ЭГ — 2 уч.; КГ — 0 уч.).

Метод педагогического наблюдения позволил осуществить задачу по образованию первоначальных и уточнению существующих представлений об уровне развития личностных и метапредметных результатов обучения учащихся на основе полученных и накопленных фактов.

Проведенное исследование доказало актуальность развития личностных и метапредметных результатов обучения школьников во внеурочной деятельности по математике. В настоящее время общество испытывает потребность в росте интеллектуального уровня людей, которые способны нестандартно решать проблемы, встающие перед нашим государством, и вносить новое содержание во все сферы жизнедеятельности. Отсюда вытекает важнейшая задача современного российского образования — выявление, диагностика, развитие и поддержка интеллектуально компетентных школьников.

В задачи опытно-экспериментальной работы входили реализация педагогических условий и проверка эффективности осуществления этого процесса. В ходе опытно-поисковой работы были апробированы педагогические условия, которые способствовали эффективному развитию личностных и метапредметных результатов обучения школьников средствами внеурочной деятельности по математике: вариативностью образовательной среды; созданием разнообразных ситуаций взаимодействия школьников друг с другом и педагогами на основе сотрудничества; включением обучающихся в разные типы деятельности (познавательную, коммуникативную, организационно-управленческую, рефлексивную).

Зафиксированная в исследовании положительная динамика развития личностных и метапредметных результатов обучения школьников средствами внеурочной деятельности по математике свидетельствует об эффективности выдвинутых педагогических условий, о результативности применения в организации образовательного процесса индивидуального образовательного маршрута. Было достигнуто развитие определенных видов мыслительной деятельности учащихся, отчасти изменение черт их характера в сторону большей социализации, иногда, не преследуя в качестве основной цели, расширение или углубление фактических знаний по математике. Такое расширение происходит само собой, как результат возникшего интереса к предмету, воспитанной в ходе занятий настойчивости и, как следствие, обнаружившейся «легкости» математики.

Итак, внеурочные занятия с успехом могут быть использованы для углубления знаний учащихся в области программного материала, формирования и развития их личностных и метапредметных результатов обучения, то есть развития интеллектуальных и социальных компетенций учащихся.

Список литературы

[1] Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков/ пособие для учителей. М.: Просвещение, 1971. 462 с.

[2] Маркова А. К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте. М., 1983. 95 с.

[3] Психолого-педагогическое основы формирования умений педагогического воздействия и воздействия в процессе самовоспитания. Дипломная работа. [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: https://www.bestreferat.ru/referat-50576.html (дата обращения 30.08.2015)

[4] Стаскевич О. В. Роль внеурочной деятельности в достижении личностных и метапредметных результатов. Статья. [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: http://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/vospitatelnaya-rabota/2013/11/05/statya-rol-vneurochnoy-deyatelnosti-v-dostizhenii (дата обращения 12.08.2015)

[5] Правила матбоя. [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: http://olympiads.mccme.ru/matboi/pravila.htm (дата обращения 12.08.2015)

[6] Система оценки, ориентированная на выявление и оценку образовательных достижений учащихся. Статья. [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: http://arbuzovka.ucoz.ru/FGOS/sistema ozenki.pdf (дата обращения 12.08.2015)

[7] Биктагирова Г. Ф. Формирование социальных компетенций студентов педагогических специальностей и направлений. // Электронный научный журнал «Современные проблемы науки и образования». 2011. №4. [Электронный ресурс] Режим доступа: URL: http://www.science-education.ru/98-4748 (дата обращения: 20.08.15)

УДК 531.8

Павилайнен Г.В.[1], *Франус Д.В.*[2]

Опыт работы Фонда «УниШанс» по построению свободного интеллектуального пространства для формирования личности

Аннотация. В докладе рассматриваются вопросы построения свободного интеллектуального пространства для формирования личности молодых людей и их адаптации к воздействию информационного пространства. Особый акцент сделан на согласование школьного образования и образования в вузе, предложены новые методики преодоления системного кризиса в качестве образования и развитии общего культурного уровня личности.

Ключевые слова: научное знание, интеллектуальное пространство, формирование личности.

Формирование личности — процесс развития и становления личности под влиянием внешних воздействий социальной среды, воспитания, обучения; целенаправленное развитие личности или каких-либо её сторон, качеств под влиянием воспитания и обучения, процесс становления человека как субъекта и объекта общественных отношений [1].

Термин «личность» может употребляться только по отношению к человеку, причём начиная лишь с некоторого момента его развития. Никто не употребляет термин «личность новорождённого», воспринимая его как индивида. В социальном смысле не воспринимается личность ребёнка 2–3-летнего возраста. Личность не существует вне социальной деятельности и общения. При этом на формирование личности оказывают влияние факторы трудовой деятельности, общественный характер труда, его предметное содержание, социальный статус труда и его значимость в глазах общества.

Первым этапом трудовой деятельности можно считать обучение субъекта в высшем учебном заведении. Именно в этом возрасте после окончания средней школы происходит первая значительная ломка стереотипов поведения как в биологическом смысле (переходный возраст), так и в психологическом (поступление в вуз, служба в рядах армии и пр.). В высшем учебном заведении субъект попадает в новое окружение и условия. Многие оказываются оторванными от родителей и начинают самостоятельную жизнь. В высшем учебном заведении происходит приобщение к научно-исследовательскому труду в рамках различных производственных, исследовательских и педагогических

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: g.pavilaynen@spbu.ru
[2]НО фонд «УниШанс», e-mail: franus@mavis.ru

практик, а также лабораторной экспериментальной деятельности. Бывшие школьники входят в коллектив взрослых людей и в ходе общения с ними, в совместной трудовой деятельности проходит один из важнейших этапов формирования личности человека. Период в жизни человека от 16 до 22–23 лет является важнейшим. Именно в этом возрасте формируется единая сеть представлений, размышлений, жизненных фактов и ситуаций и появляется индивидуальность, т.е. специфический образ мыслей и индивидуальный процесс обработки поступающей информации, индивидуальная «компьютерная программа», формирующая характер.

Вторым этапом является первичное устройство на работу — вторая «ломка». Связано это с тем, что социальная обстановка и окружение существенно изменяется. Вместо однокурсников появляются коллеги, которые очень сильно различаются, как минимум, по возрасту, а соответственно и культуре, соответствующей данному поколению. То есть мы видим очередной сдвиг социальной и культурной парадигм личности человека. Более того, если смотреть на изменения окружения при переходе человека от учебы к трудовой деятельности, то можно увидеть существенное изменение и в «авторитетном» круге. Под «авторитетным» кругом общения в университете подразумевается, как авторитарное, так и социально-педагогическое влияние, которое ощутимо сказывается на развитии личности.

При устройстве на работу личность человека также испытывает сдвиг парадигмы в рамках «авторитарного» круга, в котором раннее находились только более взрослые, умные, и титулованные (ученые степени и научные звания). После сдвига в этот круг попадают руководители, которые очень часто имеют меньше знаний по той специальности, на которую устраивается человек; при этом руководители обладают значительно более широким кругом навыков. То есть получается, что у человека в рамках «авторитетного» круга произошел сдвиг его использования с очень глубокого знания и полученных в вузе компетенций в сторону более широких, но менее глубоких знаний и опыта практической деятельности, навыков эффективной организации собственного труда. У личности формируется новая «компьютерная программа» существования. Впоследствии перестройка этой «программы» происходит очень тяжело, если даже и возможна. От того, какие личности находятся вокруг формирующейся новой личности, зависит результат.

Здесь мы подходим к формулировке «интеллектуальное пространство». Очевидно, что общественное окружение формирует ценностные ориентации молодой личности. Если окружающее пространство интеллектуально, т.е. имеет своим приоритетом нравственное и научное развитие, совершенствование профессиональных навыков и умений, то новая личность также приобретает эти приоритеты, если общественное пространство предпочитает приоритет чистогана и потребительства, обывательского принципа существования, то юной личности очень трудно сформировать приоритет обучения, любознательности, творчества и культурного развития.

Проблема ценностных ориентаций, как одного из важных стимулов развития и направляющей характеристики в мировоззрении личности, всё больше привлекает к себе внимание учёных. Ценностные ориентации являются сложным психологическим феноменом, характеризующим вектор мировоззренческой направленности личности. Являясь нераздельной частью системы отношений личности, ценностные ориентации определяют поступки и поведение человека.

Нельзя обойти вниманием ещё одну из проблем нашего времени, которую можно сформулировать как некую дань моде. Это огромное количество специалистов, обучающихся по экономическим и юридическим специальностям. Эффективного контроля за их трудоустройством не проводится и многие из молодых специалистов оказываются не трудоустроенными по специальности, что часто накладывает негативный отпечаток на дальнейшее формирование их личности. А те, кто устраиваются по специальности зарабатывают меньшие суммы денег из-за высокой конкуренции на рынке труда. Может даже получиться так, что человек со средним специальным образованием без опыта работы может начать свой трудовой стаж с более высокой ставки, чем более образованный человек с высшим образованием. Но при этом всегда стоит помнить про эффект «вечного дефицита» высоко квалифицированных сотрудников; даже в самых популярных специальностях сложно найти достойного кандидата в сотрудники. При этом в данный момент на рынке труда очень сильно выросли заработные платы программистов (различного рода), что тесно связанно с их возможностью работать удаленно. То есть трудовой ресурс вымывается иностранными работодателями, и программисты работают на дому либо уезжают за границу. В итоге на локальном рынке образуется дефицит по специальности, и местный работодатель вынужден платить больше.

Другим фактором, повышающим спрос, например, на тех же программистов, является развитие различных цифровых сервисов (например, электронное правительство, экосистемы Сбербанка или Яндекса).

На фоне цифровизации и замены человеческого общения между личностями общением электронным посредством средств массовой информации и коммуникации взаимодействие человека с человеком и ценность этого взаимодействия возрастает. Дети инстинктивно тянутся к общению «глаза в глаза» им не хватает добра, внимания, сопереживания и заботы. Общение в Интернете является суррогатом человеческого общения, электронное общение лишено тепла и участия и содержит только эмоции, в лучшем случае, среднестатистические рецепты поведения «делай как все». А ребёнок хочет исследовать и постигать окружающий мир не чужими электронными глазами, а своими, и жить по рецепту «делаю как я». Отсюда стремление выделиться, выражаясь вульгарно, «собрать лайки». Но никакие «лайки» не дают ответа — правильно ли я делаю, живу, думаю и чувствую. Именно воспитание человека человеком является единственно целостным и системным. Одним из важнейших методов обучения во все исторические эпохи был метод подражания старшим. Ничто не формирует личность быстрее и надёжней, чем близкое общение с другим человеком.

В XXI веке изменяется парадигма развития науки. Двигаясь по пути узкой специализации, человечество создало уникальную цивилизацию — научилось летать в Космос, жить под водой, способно накормить, вылечить, уничтожить себя. Человечество пришло в глобальный тупик, утратив целостность окружающего нас мира. Сегодня существуют тысячи узких специальностей и специалистов, которые детально знают и понимают собственную предметную область и движутся каждый в своей парадигме, зачастую не понимая друг друга, но при этом мы очень плохо знаем мир, в котором живем, — нам открыто менее 5% информации, и эта ситуация усугубляется. Мы достигли той стадии, когда дальнейшее развитие науки, образования, промышленности возможно только на междисциплинарной основе, взаимопроникновении наук и технологий, конвергенции естественнонаучного и гуманитарного знания, а это требует принципиальных изменений в системе организации и финансирования науки и образования [2].

Заслуживает внимания новый системный подход в преподавании математики, физики, информатики и химии, который реализуется Фондом содействия развитию математического образования и научных исследований в области точных наук «УниШанс» [3]. Проект был основан профессорами и преподавателями Санкт-Петербургского госуниверситета и Академии педагогического мастерства в 2007 году. Предусматривалось логическое единство личного и обезличенного интернет-общения педагогов и школьников. Опыт работы показал, что несмотря на активное развитие электронных типов коммуникации школьники предпочитают личное общение с преподавателями в неформальной, нешкольной обстановке. В связи с этим Фондом активно развивается практика очных семинаров для школьников Ленинградской области и Северо-Запада России, а также удаленных областей, например, Челябинской и республики Крым. Всего было проведено 22 семинара школьников. Количество участников семинара непрерывно менялось в сторону увеличения и стабилизировалось на цифре 200–250 человек.

Особенностью системного подхода является то, что школьники приезжают на семинары вместе с учителями, которые тоже учатся и повышают квалификацию по методике преподавания математики и решению нестандартных задач. Такой подход вызывает меньший сдвиг парадигмы — «оказывается учителя тоже учатся», и позволяет облегчить грядущие изменения развития личности человека в рамках «авторитетного» круга. Другим эффектом, смягчающим последующий сдвиг парадигмы при обучении в университете, является общение школьника с профессорами и преподавателями университета.

Семинары проводятся на базе ОК «Университетский» Санкт-Петербургского госуниверситета при поддержке Законодательного Собрания Ленинградской области, Инвестиционно-строительной группы компаний «МАВИС», вузов и школ Санкт-Петербурга. Занятия ведут профессора и доценты СПбГУ, аспиранты и студенты СПбГУ, ИТМО, Политеха, ПГУПСа, учителя специализированных физико-математических школ 239, 393, 30 и других.

Для анализа эффективности преподавания использует тестирование и психологические тренинги. Ежегодно Интернет-школу «УниШанс» заканчивают 50–60 школьников. Абсолютное большинство из них становятся студентами вузов города и области.

Список литературы

[1] Ермолаев Ю.В. Формирование личности в контексте педагогической антропологии //Фундаментальные исследования. 2006. № 2 С. 85.

[2] Рудакова Т.В., Павилайнен Г.В. Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века. // В материалах Межрегиональной конференции «Математика — это просто!», 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Издательство ВВМ, 2017, С. 92–106. ISBN 978-5-9651-01054-4

[3] Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Проект «УниШанс» как новая современная форма образовательной деятельности в области точных наук. // В материалах Межрегиональной конференции «Математика — это просто!», 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Издательство ВВМ, 2017, С. 6–10. ISBN 978-5-9651-01054-4

УДК 531.8

Павилайнен Г.В.[1], *Рудакова Т.В.*[2], *Орехов А.В.*[3]

Формирование личности XXI века, преподавание истории и философии математики, механики, физики и системного анализа

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы построения личности молодых людей и их адаптация к воздействию информационного пространства, а также воспитание навыков научного анализа на основе изучения истории точных наук. Особый акцент сделан на согласование школьного образования и образования в вузе, которое испытывает системный кризис в связи с бурным развитием информационных технологий. Преподавание основ системного анализа уже в школьном возрасте способно оказать положительное воздействие на восприятие в принципе и сформировать стройную картину единства и взаимозависимости научного знания.

Ключевые слова: научное знание, история точных наук, системный анализ.

XX столетие — век беспрецедентных социальных преобразований и научно-технического прогресса — превратило мировое сообщество в единое, хотя и весьма противоречивое целое в процессе глобализации экономики и демократизации общества. Обеспечить исторический переход к новому этапу развития человечества интеллектуальной энергией и нравственными ориентирами — важнейшая задача народного образования при формировании личности XXI века. Отсюда особое значение интегративного, целостного восприятия мира, которое позволит избавиться от характерного для нашего времени сочетания глубокого понимания явлений в узкопрофессиональной области, с вопиющим невежеством за её пределами. Общекультурная составляющая образования должна быть сосредоточена не только в комплексе особых дисциплин, но и в любом предмете. Она заключается в выявлении методологических особенностей каждой дисциплины, её связей с другими науками, в обращении к истории и философии при раскрытии её содержания, убедительной демонстрации её значимости для развития общества [1].

Образование — это, по большому счёту, единственный и необходимый инструмент в руках человечества, обеспечивающий ему защиту и, следовательно, выживание в системе мироздания. Наша страна с её системой ценностей, в частности, как подсистема, жива до тех пор, пока хватает сил защищаться этим «инструментом» в рамках общей системы. В этой связи, очевидно, что

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: g.pavilaynen@spbu.ru
[2]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: t.rudakova@spbu.ru
[3]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: a_v_orehov@mail.ru

на выживание может рассчитывать государство, где основой государственной политики является образование в самом широком смысле этого слова [2].

Целостное систематическое мировоззрение личности возможно только на основе системного, синергетического подхода в сфере образования.

Если вопрос — что преподавать — в целом ясен, то вопрос как преподавать очень актуален. Почему?

1. Информационные технологии открывают огромные возможности, но эти технологии тоже надо осваивать, затрачивая время и технические ресурсы.

2. Изменился контингент учащихся средних школ, уровень их подготовки и компетенции. Современные молодые люди очень слабо разбираются в истории, как отечественной, так и зарубежной. Обилие различных учебников, к великому сожалению, сильно политически ангажированных, дают искажённую картину истории в целом и влияют и на историю естествознания и историю точных наук. Во многих учебниках отсутствуют даже попытки сформировать понятие об историческом срезе по всей цивилизации. В результате обучения по таким книгам школьники не могут ответить на вопросы: что было в Европе во время Смутного времени в России, что было в Европе во время крещения Руси и т.д.

3. Слабая подготовка школьников автоматически перекликается с исторической безграмотностью студентов, их «телевизионным» мышлением и историческими знаниями на уровне мультипликационных фильмов об Илье Муромце. Студентов надо учить новым современным формам мышления, должен преобладать синтез, а не анализ, умение охватить проблему целиком во взаимосвязи с другими, то, что называется системным мышлением, чтобы повышать общую культуру и общую эрудицию [3].

Системный подход базируется на диалектической теории и, по сути, выступает как *прикладная диалектика.* Основным понятием является фундаментальное понятие «система». Очевидно, что существует множество определений этого понятия в связи с его повсеместной применимостью. Однако строгого, единого определения для понятия система в настоящее время нет. Как и любое фундаментальное понятие, система конкретизируется в процессе рассмотрения её основных свойств.

С нашей точки зрения, общее определение системы — это совокупность взаимосвязанных элементов или компонентов, взаимодействующих между собой таким образом, что достигается определенный результат (цель) [4].

Попытки разработать общие принципы системного подхода были предприняты на рубеже XIX и XX веков русским врачом Александром Александровичем Богдановым (1873–1928) в работе «Всеобщая организационная наука (тектология)». Александр Александрович Богданов использовал различные псевдонимы (Вернер, Максимов, Рядовой), настоящая его фамилия — Малиновский и он вошёл в мировую историю не только как врач, но и как учёный-энциклопедист, философ-утопист, писатель-фантаст и революционный деятель. Богданов родился в Гродненской области в семье врача, окончил школу в Туле и поступил на физико-математический факультет Московского государственного университета, но был исключён оттуда за участие в студенческом движении. В 1899 году он окончил Харьковский медицинский институт. Богданов был одним из крупнейших идеологов социализма, членом РСДРП с 1896 года, большевиком, членом ЦК партии с 1905 года. Им были организованы партийные школы РСДРП на Капри и в Болонье. Однако к 1909 году у него возникли существенные расхождения в понимании и трактовке деятельности партии большевиков и в 1911 году он полностью отошёл от активной политической деятельности и сосредоточился на научной философской и врачебной деятельности.

Итогом его философских изысканий стала «тектология» — наука об общественной организации, содержащая некоторые начальные сведения о системном анализе и кибернетике. После революции 1917 года А. А. Богданов преподаёт экономику в МГУ, а затем активно работает в Пролеткульте. Ещё в 1908 году он публикует научно-утопический роман «Красная звезда», в котором утверждает огромное социальное значение переливания крови для усовершенствования морально-нравственных качеств человека. В 1926 году он организует и возглавляет первый в России институт переливания крови. В мае 1926 года была произведена первая успешная операция по переливанию крови, а уже к апрелю 1928 года число операций переливания крови составляло около 400.

Будучи убеждённым пропагандистом переливания крови, он сделал себе 11 переливаний, пять из которых были объёмом по 900 мл. Поначалу он переносил эти операции без каких-либо реакций, а эффект отмечался им как вполне удовлетворительный. Двенадцатое переливание крови оказалось для Александра Александровича роковым. Через 3 часа после переливания крови у него началась тяжёлая трансфузионная реакция, ставшая причиной смерти.

До последних минут жизни Александр Александрович, превозмогая недуг, проводил самонаблюдение и записывал симптомы болезни, отказываясь в интересах науки от врачебной помощи. Подлинное мужество и стойкость А. А. Богданова находится в одном ряду с научными подвигами исследователей, пострадавших в результате своих экспериментов, ценой своей жизни доказавших правоту своих идей [5].

Многие идеи и научные гипотезы тектологии Богданова были впоследствии исследованы и подтверждены многими учёными, например, математиком и кибернетиком Н. Винером (1894–1964), психиатром У. Росс Эшби (1903–1972), биологом Л. Фон Берталанфи (1901–1972) и другими. Основа тектологии — это признание того факта, что целое больше, чем сумма его частей. Чем больше разница целого и суммы частей, тем более оно организовано, системно.

Бурное развитие системного анализа в 80-е годы XX столетия сменилось ныне пониманием того, что одним системным методом нельзя охватить всё многообразие проявлений окружающего мира. Новая наука — синергетика объединила разрозненные научные исследования о коллективном поведении частей сложных систем, связанных с неустойчивостями и касающихся процессов самоорганизации. Синергетика — это теория самоорганизации систем различной природы.

Создатели синергетики — математик Г. Хакен (р. 1927), который в 1970-е годы ввёл этот термин, и Нобелевский лауреат 1977 года, физик И. Р. Пригожин (1917–2003). Они положили в основу синергетики термодинамическую теорию сильно неравновесных открытых систем. Основная идея заключается в том, что сложная динамическая система, состоящая из подсистем, в процессе эволюции проходит через стадии *устойчивого развития* и *бифуркации* (от лат. bifurcum — «раздвоение, развилка дорог»). Этот термин введен великим математиком и физиком, создателем топологии, Анри Пуанкаре (1854–1912) [6].

Развитие науки на рубеже второго тысячелетия подтолкнуло учёных к окончательному признанию *информации* полноценным элементом динамических систем наряду с *веществом* и *энергией* (полем). Теорию информации создал Норберт Винер, который в 40-е годы XX в. заложил основы новой науки и назвал её, следуя Платону (428–348 гг. до н.э.), кибернетикой (др.-греч. *κυβερνητική* — «кормчий»). Различают три формы информации: *биологическая* (внутри живого); *машинная* (внутри машин); *социальная* (внутри сообщества). Информация рассматривается в следующих аспектах: *информационном* — в накоплении и переработке данных о природе; *управленческом* — в процессе функционирования системы для достижения целей управления; *организационном* — в морфологии и совершенствовании самой системы. По определению одного из крупнейших математиков XX века, академика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987) «К концу XX века информация стала рассматриваться как универсальная субстанция, пронизывающая все сферы человеческой деятельности, служащая проводником знаний и мнений, инструментом общения, взаимопонимания и сотрудничества, утверждения стереотипов мышления и поведения» [7].

В XXI веке изменяется парадигма развития науки. Двигаясь по пути узкой специализации, человечество создало уникальную цивилизацию — научилось летать в Космос, жить под водой, способно накормить, вылечить, уничтожить себя. Человечество пришло в глобальный тупик, утратив целостность окружающего нас мира. Сегодня существуют тысячи узких специальностей и специалистов, которые детально знают и понимают собственную предметную область и движутся каждый в своей парадигме, зачастую не понимая друг друга, но при этом мы очень плохо знаем мир, в котором живем, — нам открыто менее 5% информации, и эта ситуация усугубляется.

Мы достигли той стадии, когда дальнейшее развитие науки, образования, промышленности возможно только на междисциплинарной основе, взаимопроникновении наук и технологий, конвергенции естественнонаучного и гуманитарного знания, а это требует принципиальных изменений в системе организации и финансирования науки и образования [8].

В России междисциплинарная подготовка специалистов уже началась. Президент НИЦ «Курчатовский институт» М. В. Ковальчук сформулировал стратегию развития в России принципиально нового научно-технологического направления, основанного на объединении *нано-, био-, информационных, когнитивных и социогуманитарных наук и технологий (НБИКС-технологий),* и создал не имеющий мировых аналогов Курчатовский НБИКС-центр НИЦ «Курчатовский институт», где под его научным руководством заложены основы конвергенции современных технологий с «конструкциями» живой природы. НИЦ «Курчатовский институт» в 2005 году открыл совместную кафедру оптики, спектроскопии и физики наносистем на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. В мае 2009 года открылся первый в мире факультет НБИКС-технологий в МФТИ. В феврале 2017 года открыта междисциплинарная площадка для школьников Санкт-Петербурга и Ленинградской области на базе образовательного ресурсного центра по направлению «Физика» Научного парка СПбГУ. Новый экспериментальный центр включает в себя лаборатории, оснащённые уникальным оборудованием, позволяющим проводить эксперименты по всем темам школьной программы с 7 по 11 класс. Самое современное оборудование на сумму более 15 миллионов рублей было закуплено Университетом по предложению декана физического факультета СПбГУ, профессора М. В. Ковальчука. Начинается подготовка специалистов, способных заниматься междисциплинарными научными исследованиями на крупных исследовательских комплексах (мегаустановках), но это требует широкой эрудиции и высокой концентрации интеллекта самих обучающихся.

Каким должен быть конечный результат конвергенции в образовании и науке?

Ответ на этот вопрос может быть таким: «Вырастить поколение думающих людей, способных видеть цель, координировать деятельность узких специалистов, направлять их к созданию принципиально новых природоподобных технологий и систем, с минимальным ущербом окружающей среде, что, возможно, позволит восстановить нарушенный человеком баланс между биосферой и техносферой» [9].

Широкая эрудиция современных научных кадров предполагает знание истории науки в той области, в которой намечаются новые исследования. Перефразируя известные слова можно сказать, что каждое новое — это хорошо изученное старое. Истории науки известны такие парадоксы, например: четырёхмерное пространство-время Г. Минковского было применено при открытии гравитационных волн через 90 лет, динамическая теория Эйлера и его уравнения движения были применены для описания спинорного движения в жидких кристаллах через 250 лет!

Знакомство с историей любой науки не только поучительно и интересно, но оно может и должно пробуждать у молодого человека вкус к поискам и открытиям и не только в бесконечности мироздания, но, что не менее важно, к поиску и открытию в себе самом человека, учёного и творца. Поэтому чрезвычайно важно, чтобы появлялись учебники по истории естествознания, математики, физики, химии и астрономии. Отметим в этой связи появление в 2016 году учебного пособия коллектива авторов из Санкт-Петербургского государственного университета «Очерки по истории механики и физики». Авторы пособия при его создании надеялись, что их работа поможет перерасти «знакомству» молодого поколения с наукой, если не в «любовь», то хотя бы в «дружбу» [3].

Заслуживает внимания новый системный подход в преподавании математики, физики, информатики и химии, который реализуется Фондом содействия развитию математического образования и научных исследований в области точных наук «УниШанс». Проект был основан профессорами и преподавателями Санкт-Петербургского госуниверситета и Академии педагогического мастерства в 2007 году. Предусматривалось логическое единство личного и обезличенного интернет-общения педагогов и школьников. Опыт работы показал, что, несмотря на активное развитие электронных типов коммуникации, школьники предпочитают личное общение с преподавателями в неформальной обстановке. В связи с этим Фондом активно развивается практика очных семинаров для школьников Ленинградской области и Северо-Запада России, а также других регионов России, например, Челябинской области и республики Крым. Всего было проведено 22 семинара школьников. Количество участников семинара непрерывно менялось в сторону увеличения и стабилизировалось на цифре 200–250 человек.

Особенностью системного подхода является то, что школьники приезжают на семинары вместе с учителями, которые тоже учатся и повышают квалификацию по методике преподавания математики и решению нестандартных задач. Семинары проводятся на базе Оздоровительного комплекса «Университетский» Санкт-Петербургского госуниверситета при поддержке Законодательного Собрания Ленинградской области, Инвестиционной группы компаний «Мавис», вузов и школ Санкт-Петербурга. Занятия ведут профессора и доценты СПбГУ, аспиранты и студенты СПбГУ, ИТМО, Политеха, ПГУПСа, учителя специализированных математических школ 239, 366, 393 и других.

Для анализа эффективности преподавания использует тестирование и психологические тренинги. Ежегодно Интернет-школу «УниШанс» заканчивают 50–60 школьников. Абсолютное большинство из них становятся студентами вузов города и области.

Список литературы

[1] Купцов В. И. Образование, наука, мировоззрение и глобальные вызовы XXI века. СПб., 2009. 428 с.

[2] Павилайнен Г. В., Колесников Е. К., Рудакова Т. В., Цибаров В. А. Безопасность учебно-научного труда и жизнедеятельности: учеб. пособие. СПб: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2013. 204 с.

[3] Лопатухина И. Е., Кутеева Г. А., Павилайнен Г. В., Поляхова Е. Н., Рудакова Т. В., Сабанеев В. С., Тихонов А. А. Очерки по истории механики и физики. СПб: ВВМ, 2016, 204 с.

[4] Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.,1983. 216 с.

[5] Донской С. И., Ягодинский В. Н. Наследие и последователи А. А. Богданова в службе крови. М. «ИПСкороходов», 2008. 587 с.

[6] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. М., 1973. 218 с.

[7] Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. М., 1987. 304 с.

[8] Генеральная Ассамблея ООН, 29 сентября 2015 г. Выступление Президента Российской Федерации В. В. Путина.

[9] Рудакова Т. В., Павилайнен Г. В. Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века. // В материалах Межрегиональной конференции «Математика — это просто!», 24-26 февраля 2017 г. Санкт-Петербург. С. 92–106.

УДК 531.8

Соколов Л.Л.[1]

Чему учить детей в наше время

Аннотация. Обсуждаются некоторые вопросы преподавания в средней школе с учетом вызовов нашего времени. В статье приводятся некоторые конкретные мысли автора, основанные, в том числе, на его личном преподавательском опыте.

Быстрые изменения в окружающем мире должны отражаться в школьном образовании. Наша цель — готовить детей к будущему, которое мы сами не очень четко себе представляем. Что, тем не менее, очевидно. Взрывной рост возможностей работы с информацией, возможностей ее преобразования, хранения и передачи влечет ряд последствий, включая полную автоматизацию различных производств, исчезновение в обозримом будущем многих рутинных профессий. Что важно в этих условиях знать и уметь? Быстро адаптироваться, адекватно реагировать на изменение окружающей обстановки, выделять главное и действительно важное, понимать, что происходит, быстро находить нужную информацию, принимать правильные решения и исполнять их. Для этого необходимы фундаментальные знания, очень тщательно подобранные. Невозможно и не нужно знать очень много, однако знания должны быть «переварены», приведены в систему; важна готовность быстро их найти, получить и проверить достоверность.

Начнем с простейшего, и, казалось бы, очевидного — понимать смысл используемых слов, терминов, и употреблять их точно. К сожалению, далеко не всегда такое понимание имеет место, и важно, чтобы дети к пониманию привыкли. Математические науки и точное естествознание играют здесь важную роль. С «гуманитарными» науками сложнее — в них больше проявляется многозначность, богатство смыслов русского (или иностранного) языка в его развитии.

Доступность информации. Научиться ею пользоваться. Типичная картина — беседуешь со студентом (школьником), он чего-то конкретного не знает, что знать ему в данный момент следует. Предлагаешь ему взять ноутбук, телефон и т. п., найти ответ в каком-нибудь Гугле. Он что-то находит, но не понимает смысла поясняющих слов. Или как вариант — предлагаешь

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: l.sokolov@spbu.ru

воспользоваться справочником, учебником, «включив секундомер». Следует длительное изучение книги и отсутствие нужного результата за приемлемое время.

По мнению автора, в борьбе со «списыванием» на экзаменах имеет место некий перебор. Конечно, тренировать память исключительно полезно. Вспоминаются студенческие годы на матмехе Ленинградского государственного университета. Преподаватели и профессора были разные. Некоторые со списыванием боролись всерьез, большинство относилось к этому формально-легкомысленно. Были и такие, которые давали вопросы и отпускали студентов куда угодно, хоть в библиотеку. Но сдавать экзамен им было не легче.

Обратимся к классикам.

Известны экзамены Льва Ландау — «теоретический минимум». Сдавшие его стали выдающимися физиками-теоретиками мирового уровня, многие — академиками. Вспоминает академик А.А. Абрикосов: «...Мы же стали принимать и экзамены теорминимума. К тому времени вследствие существования Московского физтеха народ повалил толпой. Вскоре мы узнали, что студенты ограничивались списыванием друг у друга немногих задач, дававшихся на экзамене. Тогда я придумал трудный комплексный интеграл и провалил такого ловкача, чем очень возгордился. Когда я рассказал об этом Дау, тот начал меня ругать и потребовал, чтобы мы вернулись к его стандартным задачам. «Дау, но ведь они ничего, кроме этого, знать не будут» — возразил я. «А ничего больше и не нужно», был его ответ. (Воспоминания о Л.Д. Ландау. Москва. «Наука». 1988. Стр. 36).

Когда к научному работнику приходят за консультацией, возникающую из практики задачу можно решать тремя способами.

1. Непосредственно решить эту задачу.

2. Порыться в литературе (интернете и т.п.) и найти решение там. Нередко удается найти решение близкой задачи, что тоже бывает полезно.

3. Наконец, можно обратиться «за советом к другу» — найти человека, который так или иначе решит эту задачу быстрее Вас (или уже решил).

Нередко ограничиваются первым способом, но два остальных в определенном смысле и в определенных ситуациях ничем не хуже с практической точки зрения. Они требуют своеобразных умений, навыков и «компетенций», которым борцы со списыванием в школе не учат. Есть важный нюанс — Вы отвечаете перед заказчиком за результат, даже если Вы его откуда-то списали. Проверка достоверности — Ваша забота. Многие, в том числе автор, могут вспомнить анекдотические случаи, связанные со списанным неверным решением задачи в школе (вузе).

Количество информации растет, мягко говоря, очень быстро. Проблема ориентации в этом море, проблема выбора того, что нужно — одна из основных сегодня. Не стоит перегружать детей большим числом учебных предметов, вводить какую-нибудь «цифровизацию» отдельно от математики и информатики, которая в некотором смысле частью математики является. Важно тщательно подходить к отбору материала (как это делал Лев Ландау, например, см. выше).

То, что астрономию в школу вернули — автор, конечно, одобряет, поскольку его специальность по диплому — астрономия. Кроме того, астрономия — прекрасный пример точного естествознания, который хорошо «вправляет мозги», а также имеет очевидное мировоззренческое значение (при тщательном отборе материала из необозримого моря соответствующей информации). Далеко не все знают, почему светят звезды, а Солнце горячее. Говорят, что там идут химические реакции... Оказывается, чтобы это правильно понять, нужно было изучать не мегамир, а микромир вначале, что само по себе нетривиально. Великий французский математик и физик конца 19 — начала 20 века Анри Пуанкаре, внесший неоценимый вклад в небесную механику, сказал: «Астрономия полезна, потому что она возвышает нас над нами самими; она полезна потому, что она величественна, она полезна потому что она прекрасна. Именно она являет нам, как ничтожен человек телом и как он велик духом, ибо ум его в состоянии объять сияющие бездны, где тело его является лишь темной точкой. Так приходим мы к сознанию своей мощи. Здесь никакая цена не может быть слишком дорогой, потому что это сознание делает нас сильнее.»

Научные работники знают, что настоящая хорошая задача — междисциплинарная. Для ее решения нужно привлечь знания специалистов различных областей. Дети в современном мире должны уметь общаться! И не только с компьютером. Когда рассуждают на тему о том, может ли машина мыслить, и не будут ли компьютеры управлять людьми, обычно упускают из вида, что мы общаемся не с компьютером, а (опосредованно, конечно) с командами программистов, которые этот компьютер «обучили и воспитали». От уровня этих «воспитателей» во многом зависит наше «цифровое будущее», как, впрочем, и от уровня потребителей различных «компьютерных услуг», на которых «воспитатели» ориентируются. Недавно Герман Греф сформулировал парадоксальные соображения о том, что узкоспециализированные школы — пережиток прошлого, скоро математики и программисты будут менее востребованы, а экзамены он отменил бы вообще, потому что они лишают желания учиться, дети привыкают к системе оценивания, при ее отсутствии расслабляются и не готовы что-либо делать, становятся в некотором смысле инвалидами. Вряд ли с Грефом можно полностью согласиться. Очевидно, необходимое число математиков и программистов не бесконечно; экзамены пока заменить нечем, однако поднятая проблема мотивации на самом деле очень серьезная. От адекватного ее решения во многом зависит, будут люди управлять машинами в своих правильно понятых интересах, или машинная инфраструктура, созданная не всегда грамотными людьми, будет навязывать нам стихийно возникающие неожиданные ситуации, среди которых могут быть совершенно неприемлемые.

Сегодня перед школой стоят серьезнейшие проблемы подготовки людей, способных успешно решать проблемы, с которыми сталкивается или скоро столкнется человечество. Важно стимулировать творческие способности детей — тогда они будут счастливы, решая сложнейшие задачи.

УДК 531.8

Соловъёв Д. П.[1]

Феноменологическое эпохé и преподавание математики

Аннотация. В процессе изложения материала педагог очень часто вынужден использовать приём, в ходе которого он ставит себя на место студента, а затем вместе с ним, методично строит излагаемое знание. У студента, тем самым, появляется возможность успешно пропустить через себя все построения и усвоить материал. Часто этот процесс является трудоёмким, так как мало того, что задействует понимание самых глубоких аспектов преподаваемого предмета, но ещё и требователен к способностям педагога к эмпатии и рефлексии. Оказывается, что данный процесс является частным случаем более общей процедуры под названием феноменологическое эпохе, что была построена философом Эдмундом Гуссерлем и хорошо изучена последующими поколениями феноменологов. Мы рассмотрим конкретный пример из преподавательской деятельности, увидим, что это действительно частный случай феноменологического эпохе, а также получим из этого некоторые следствия.

Ключевые слова: философия, феноменология, феноменологическое эпохé.

На некотором уровне погружения, педагогика неминуемо затрагивает множество довольно интересных вопросов, лежащих глубоко в области философии. Одной из таких областей является феноменология. Идеи о связи феноменологии с построением научного знания и преподавания были высказаны такими философами, как Рудольф Штайнер или Эдмунд Гуссерль [1, 2]. Оба эти философа в процессе исследований выработали необычайный набор инструментов, о приложении которых к преподаванию и будет рассказано. Эдмунд Гуссерль в меньшей степени рассматривал вопросы педагогики, поэтому главным образом будут рассмотрены его идеи и их приложение к преподаванию наук. Сам он, до осуществления поворота в сторону философии, был математиком и учился под руководством великого математика Карла Вейерштрасса, поэтому особо ценными приложениями его инструментарий обладает именно в применении к преподаванию математики, хоть и, без ограничения общности можно прилагать эти инструменты и к другим наукам.

Чтобы рассмотреть постановку проблемы, хочется обратиться к примитивному, но понятному примеру. Давайте представим себе преподавателя, который не является профессиональным педагогом, но намеревается ясно изложить основы теории групп студентам первокурсникам. Он выходит к студентам и начинает с естественного места, а именно, с определения группы. Он говорит: группа — это множество с ассоциативной бинарной

[1]Санкт-Петербургский Государственный Университет, e-mail: dimsol42@gmail.com.

операцией, где к каждому элементу существует обратный. На этот момент студенты могут впасть в ступор, так как такие концепты, как, например, бинарная операция могут быть им не знакомы.

Поэтому, чтобы материал был ясен, преподавателю необходимо предварительно поставить себя на место студентов, как бы предвкушающих узнавание определения группы. Во-первых, для того, чтобы иметь информацию о том, какой перечень знаний у студентов уже имеется (и понять, что в данном случае понятие бинарной операции на множестве студентам неизвестно). Хорошо, допустим, теперь он осведомлен о том перечне знаний, который известен студентам. Не пренебрегая общностью, давайте предположим, что изложение концепта бинарной операции на множестве задействует только те знания, что студентам уже известны. Теперь преподавателю необходимо правильным образом ввести это понятие и выстроить повествование вокруг уже известных студентам концептов, что представляет некоторую сложность, так как ввиду академического опыта преподавателя в излагаемые концепты могут неминуемо вплетаться более сложные конструкции (например, категорные свойства или же конструкции из алгебраической геометрии), что в случае хотя бы косвенного упоминания покажутся студенту неясными. Отсюда следует, что, во-вторых, преподавателю нужно поставить себя на место студента для того, чтобы иметь возможность не забыть, но как бы приостановить свои уже имеющиеся знания о теории групп (и понять, что есть множество интуитивных аспектов теории групп[1], которые в естественной установке преподавателя давно существуют, но у студентов совершенно отсутствуют), после чего строить повествование, в ходе которого постепенно должны достраиваться те понятия и знания, что были приостановлены в ходе всего этого процесса.

Резюмируя, в идеальном сценарии преподавателю необходимо поставить себя на место студента и создать персонажа «себя-студента»: вжившись в ограниченный перечень студенческих знаний, а также приостановив уже имеющиеся у преподавателя знания не только на уровне логики повествования (вводить понятия, опирающиеся только на уже известные), но и на инту-

[1]Примером такого интуитивного знания может являться взгляд на фундаментальную группу многообразия, где за формальным определением стоит интуитивное понимание в лице забрасывания петель и попытки их стянуть. Таким образом, после выписывания определения на доску, у преподавателя наличествует интуиция, а у студента — нет. И в данном случае для построения ясного изложения преподавателю необходимо уловить сам факт присутствия этой разницы между пониманием его и студента.

итивном уровне (отмечать те вещи, интуиция к которым вырабатывается со временем). Затем преподаватель должен выстроить повествование так, чтобы рассказывая «себе-студенту» были постепенно введены в обиход и объяснены все необходимые приостановленные знания. На практике же в данном примере этот рецепт реализуется следующим образом. Мы осведомились о том, что студентам неизвестно понятие бинарной операции. Затем представили себе, будто мы забыли про то, что такое бинарная операция. Перед определением группы, вводим понятие бинарной операции, и не как морфизм из категорного произведения в категорию, что естественно, а на студенческом уровне интуиции, как отображение пары объектов множества в объект этого же множества. Напомню, что было сделано предположение о том, что определение бинарной операции опирается на уже изученный студентами материал (понятие отображения, множества и т.д.), посему у нас нет больших преград к его введению. После этого уже можно определить понятие группы. Таким образом, мы как бы вернулись в студенческие годы и проделали всю работу по построению необходимых концептов с самого начала.

Казалось бы, данную процедуру умело проделывает любой опытный педагог, но как осуществить эти же манипуляции начинающему или же педагогу, желающему сменить область преподавания? Главной сложностью в данной ситуации может являться даже не наличие или отсутствие какого-то конкретного знания о преподаваемом предмете у педагога, а плохо развитая способность, во-первых, к определению тех аспектов знания, что естественно даны преподавателю, но совершенно неестественны с точки зрения студентов[2], а во-вторых, к отстранению от этих аспектов уже имеющихся знаний и разрушению своей естественной установки. Но оказывается, что две эти способности включены в процесс так называемого феноменологического эпохé, который повсеместно используется в такой области философии, как феноменология. Впервые этот процесс был описан в работах Эдмунда Гуссерля и был использован для анализа очевидности суждений. Путём феноменологического эпохé, Гуссерль определял с какой очевидностью дано нам суждение: дано ли нам оно аподиктично, требует ли оно обоснования с помощью других суждений или же оно дано с неадекватной очевидностью, подвергающейся Картезианскому ниспровержению. В дан-

[2]Например, мы делим числа друг на друга ежедневно, но ребёнку в начальной школе эта операция без соответствующих примеров покажется совершенно неестественной. В абстрактных научных построениях аналогичная ситуация усугубляется.

ном случае мы принимаем аподиктически очевидными те суждения, обоснование которых требует только уже имеющийся у студентов материал, а затем кладём их в базис нашей науки, в примере выше, теории групп. Философия Гуссерля также открывает начинающему педагогу инструменты, такие как феноменологическая редукция, эйдетическая редукция и другие, что помогает не только в преподавании математики и других наук, но и в распознавании пробелов конкретно рассматриваемого студента, а также в их ликвидации.

Ясно, что процесс в примере, с которого мы начали можно обобщить. Например, если нет возможности изложить студентам концепт бинарной операции ввиду вовлечения других неизвестных концептов, то можно осуществить феноменологическое эпохé и с этими концептами, и так до тех пор, пока не произойдёт редукция до того уровня знаний, что соответствует студентам, с которыми работает преподаватель. Отсюда становится ясно, что преподавание в школе в каком-то смысле сложнее, чем преподавание в университете, так как уровень глубины феноменологического эпохé сравнительно больше. Школьному учителю необходимо приостановить больший массив аспектов своего знания из естественной установки, что непросто, так как чем глубже мы осуществляем эту редукцию, тем глубже редуцируемые понятия встроены в естественную установку, и тем сложнее распознать концепты, к которым эту редукцию вообще необходимо применять. Таким образом, феноменология Эдмунда Гуссерля оказывается полезной в решении изложенной проблемы в преподавании и позволяет нам получить нетривиальные выводы, упомянутые выше.

Список литературы

[1] Гуссерль Э. Картезианские размышления. СПб.: Наука, 2001.

[2] Штейнер Р. Естественно-научные труды Гете (GA 2), 1883-1897

УДК 531.8

Дмитренок М.Г.[1]

Об «УниШансе» замолвлю я слово...

Аннотация. В статье описывается история фонда «УниШанс» и участие МОУ «Громовская СОШ» в семинарах «Математика — это просто!». Приводятся ответы участников на вопросы анкеты о фонде «УниШанс». Основной вывод — этот проект нужен школьникам, родителям и учителям.

Ключевые слова: фонд «УниШанс», содружество, востребованность.

Если учитель хочет расти в своем профессиональном мастерстве, дать возможность своим ученикам получить знания из новых источников, то он не замыкается в школьном пространстве, ищет себе союзников за пределами школьного порога. Участие в семинарах «УниШанс» дают такую возможность; «что», «как» и «сколько» возьмет каждый для себя — индивидуально. На этих учебных сборах учитель становится ближе к ученику, порой раскрывая для себя с новой стороны его черты характера, его человеческие качества, скрытый ранее потенциал возможностей...

В 2007 году была организована Интернет-школа УниШанс при поддержке Санкт-Петербургского Математического общества и Благотворительного фонда Эйлера. Инициаторами были выпускники и преподаватели математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета. Дистанционное обучения с использованием Интернета давало возможность школьникам старших классов из отдаленных регионов получать бесплатные консультации по решению задач и освоению школьного материала у преподавателей и профессоров университетского уровня. Кроме этого на сайте Интернет-школы были размещены многочисленные примеры для тренировки и занимательные задачи для развития логического математического мышления.

В 2010 году Комиссия по образованию и науке Законодательного собрания Ленинградской области одобряет и поддерживает инициативу Интернет-школы "УниШанс"по организации очных семинаров для учителей математики школ Ленинградской области и Северо-Западного региона. Идея была реализована на базе Оздоровительного комплекса СПбГУ "Университетский"при поддержке спонсоров и районных Комитетов образования. Первый семинар прошёл успешно, и учителя единодушно предложили приглашать для участия и школьников. С 2011 года семинары

[1]МОУ «Громовская СОШ» Приозерского района, п. Суходолье,
e-mail: dmitrenokmarina@yandex.ru

проводятся как для учителей, так и для учащихся 8-11 классов. Главная задача семинаров — оказание методической помощи при подготовке школьников к государственной аттестации различных уровней не только по математике, но и по информатике, физике, химии.

В 2015 году Интернет-школа «УниШанс» была преобразована в Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук с одноименным названием.

МОУ «Громовская СОШ» Приозерского района включилась в проект «УниШанс» с самого начала, активно участвуя во всех 22-х семинарах под девизом «Математика — это просто!». Автор этой статьи участвовала вместе со своими питомцами не только в семинарах, но и в Зимних школах, которые стали проводиться с 2014 года, а также в двух научно-практических конференциях учителей школ и преподавателей вузов, которые успешно прошли в 2017 и 2019 годах.

По личному опыту автор утверждает, что большинство учеников Громовской СОШ из муниципального образования Суходолье, единожды попав на семинар, стремятся во время каникул приехать вновь. Следует отметить, что директор Громовской СОШ, Григорьев Эдуард Александрович, видя востребованность данного образовательного проекта со стороны ребят и их родителей, оказал активную поддержку и помощь в организации выездов на семинары, лично участвовал в выездах вместе со школьниками.

Что же значит для ребят, учителей, родителей «УниШанс»? Почему не падает интерес к этому проекту, не зарастает к нему «народная тропа», всё новые участники из разных регионов России появляются на семинарах?...

Постараюсь рассказать об этом через ответы на анкету, которая проводилась среди учеников Громовской СОШ, участников XX семинара.

Участие в проекте «УниШанс» в 2018-2019 учебном году было для нашей школы результативным: с каждого семинара мы увозили дипломы победителя или призёра. Еще он примечателен тем, что с нами отважилась поехать человек неискушенный в точных науках — родительница одной из школьниц и учитель физкультуры в одном лице — Наталья Анатольевна Лукьянова. Тем интересен и ценен ее взгляд со стороны.

Вот что отметила Н.А. Лукьянова:

1. Хочется отметить хорошую организацию проведения этого мероприятия

a. подвоз и развоз детей;
b. размещение и проживание детей;
c. отличное сбалансированное питание;
d. организация и проведение учебных занятий и досуга: в вечернее время проводились развлекательно-познавательные игры и спортивные мероприятия.

2. На протяжении всех дней была доброжелательная обстановка, только положительные эмоции и даже в некотором роде «несвойственное спокойствие». Большинство ребят уже неоднократно были на семинарах «УниШанса», из этого следует, что им нравятся эти поездки.

3. Душевный, заботливый, сплочённый учительский коллектив единомышленников, который приезжает не только для самосовершенствования, но и ради ребят. Учителя, которым важен процесс обучения и результат своей работы.

4. Без преподавателей-организаторов не было бы замечательного «УниШанса»

Это был родительский взгляд человека далекого от изучения математики и физики. А теперь посмотрим на «УниШанс» глазами детей (результаты анкетирования, апрель 2019).

Вопрос: Какие занятия (лекции) тебе понравились, считаешь их полезными для тебя?

Ответы (сохранена авторская стилистика):

— Мне очень понравились лекции по математике. Они оказались очень занятными и интересными, возможно они помогут мне лучше сдать ОГЭ (Павлов Гордей, 8 кл.).
— Физика и комбинаторика (Кувшинов Максим, 9 кл.).
— Занятия по теме «Тригометрические функции», которое проводил Даня Кауфман (Ермолаев Родион, 10 кл.).
— Была полезна лекция Шведовой Ольги Николаевны. Расстроило то, что у 11 класса не вели преподаватели Кауфман Даниил, Нагаев Артур, Кремнев Иван. (Лисеная Катя, Алексеева Настя, Назарчук Катя, Поляк Никита, Ордин Илья, 11 класс).
— По-моему, самой интересной и необычной была лекция по геометрии Евгения Викторовича (Ференц-Сороцкого) (Геокчаева Настя, 9 класс).

Не секрет, что «школьный учитель» и «вузовский преподаватель» далеко не одно и тоже. Благодаря семинарам, у ребят появляется возможность общения с профессорско-преподавательским составом, аспирантами, студентами СПбГУ и других

ВУЗов г. Санкт-Петербурга. Поэтому следующий вопрос касался данной темы.

Вопрос: Твое впечатление о преподавателях «УниШанса»?

Ответы:

— Преподаватели «УниШанса» умеют весело провести лекцию, дав ученикам полезные знания (Анастасия, 9 кл.).
— Весёлые, интересно рассказывают, спокойные (Максим, 9 кл.).
— Очень понравились молодые студенты, которые преподавали нам новый материал. Они очень энергичные, с ними можно поговорить не только о математике, физике или химии. (Федорец Антон, 8 кл.).
— Нам очень нравится, что в «УниШансе» преподают студенты матмеха СПбГУ и других университетов, потому что они ближе к ученикам школы, находят общий язык и могут рассказать о личном опыте ЕГЭ (11 класс).
— Сначала студенты университетов, которые преподают на семинарах, показались мне какими-то странными, но после последней поездки вся странность в них куда-то ушла. Они умеют отдыхать и веселиться (Гордей Павлов, 8 кл.).
— Студенты, аспиранты — разносторонние, молодые, на одной волне с нами. Галина Вольдемаровна Павилайнен — молодец, все организует. Востоков Сергей Владимирович — достоин уважения (Ермолаев Родион, 10 кл.).

Вопрос: Что тебе больше всего запомнилось в «УниШансе»?

Ответы:

— Было интересно посетить СПбГУ, была интересная экскурсия по Ораниенбауму (Коваленкова Таня, 10 кл.).
— Больше всего мне запомнились лекции в СПбГУ. Разбиралось много заданий которые пригодятся на ЕГЭ (Емельянова Лиза, 10 кл.).
— Экскурсия по Петергофу была самая запоминающаяся. Очень запомнился отель, в котором жили («Александрия»), неплохие условия для проживания (Горькавенко Георгий, 10 кл.).
— Нам понравилась экскурсия в Ораниенбаум. Было очень интересно узнать много нового, сделали много хороших фотографий. Кроме того, понравилась дискотека. Алексей, одни из преподавателей, умеет развеселить. (11класс).
— Больше всего мне запомнилось награждение. Это чувство конкретно проявляется на «УниШансе», когда все вещи собраны, номера пустуют, слёзы появляются на девичьих глазах. И это чувство напряжения и радости за то, что представитель нашей

делегации занимает одно из первых мест по итогам теста. Вывод один: работать, работать и ещё раз работать. Награждение — это заключительная часть семинара. Чтобы не смазать все те хорошие впечатления, полученные за два дня, надо хорошо написать выходящий контрольный тест! (Ермолаев Родион, 10 кл.).

Вопрос: какие темы и задания ты хотел бы разобрать на семинаре?

Ответы:

— задания второй части ОГЭ и наиболее удобные способы решения (9 кл.).
— задания 13, 15, 17, 19 ЕГЭ (11 кл.).

Вот несколько мнений о заданиях тестов

— Задания и входящего и итогового теста были хорошими и весело составленными, за исключением некоторых, слишком сложных (9 кл.).
— Разница в сложности между входящим и итоговым тестом очень большая. Входящий тест гораздо легче итогового (8 кл.).

Были у ребят и пожелания по культурной программе

— Надо проводить больше дискотек.
— Не хватило дополнительных конкурсов, например «Что? Где? Когда?»
— Думаю, на дискотеке стоит включать более популярную музыку, а занятия сделать разнообразными и четко разделять материал по классам.
— Иногда не хватает организации, т.е. планы могут поменяться очень быстро.
— Я хочу посетить необычные музеи Санкт-Петербурга и картинные галереи.

Вопрос: Какие выводы ты сделал для себя после посещения семинаров?

Ответы:

— Вывод о том, что математика легче, чем кажется (Кувшинов М., 9 кл.).
— После семинаров, я поняла, что главное — учиться играя и весело проводя время (Геокчаева Настя, 9 кл.).
— Я сделала вывод, что я могу, но не занимаюсь математикой более высокого уровня. И надо это исправлять и углубиться в математику сильнее (Горькавенко Георгий, 10 кл.).
— Математика — это интересное занятие и даже те, у кого что-то не получается, получают много знаний, а затем справляются с

этими заданиями. Так что такие семинары очень полезны (Поляк Никита, 11 кл.).
— Узнаешь много нового и интересного. Обязательно поеду туда еще раз. (Коваленкова Таня, 10 кл.).

Вопрос: Почему ты участвуешь в семинарах «УниШанс»?

Ответы:

— Так как я могу показать достойный результат (Горькавенко Г., 10кл.)
— Это способствует общему развитию и очень увлекательно (Коваленкова Таня, 10 кл.).
— Можно познакомиться с интересными людьми и, конечно, я получаю знания, чтобы хорошо сдать экзамен и определиться с будущим университетом и профессией (Емельянова Лиза, 10кл.).
— Чтобы найти новых друзей, узнать что-то новое, что поможет с экзаменами в 9 классе (Геокчаева Настя, 9 кл.).
— Проверить себя (11 кл.).
— Мне нравится заниматься математикой, физикой, химией. Это отличный шанс познакомиться и пообщаться с новыми людьми, показать свои знания. (Павлов Гордей, 9 кл.).
— «УниШанс» — это умение совмещать приятное с полезным. Умение ложиться в час ночи и, просыпаясь в восемь, быть, как огурчик. «УниШанс» для каждого это возможность остаться с самим собой или осуществить как можно больше новых знакомств. Этим он и хорош: каждый найдёт в нём что-нибудь СВОЁ! (Ермолаев Родион, 10 кл.)

Время показало, что проект «УниШанс» помогает учителям Ленинградской области, энтузиастам и преданным своей профессии людям, расширять горизонты своих учеников, стать им конкурентоспособными при поступлении в высшие учебные заведения, проверить в то, что «Математика — это просто!»

Секция 2.

Преподавание точных наук в средней школе

УДК 372.851

Благовещенская Е.А.[1], *Востоков С.В.*[2], *Гарбарук В.В.*[3], *Пак Э.Е.*[4], *Соловьёва И.М.*[5]

Контрольные работы для школьников

Аннотация. В статье содержится 10 контрольных работ по основным разделам школьной математики. Каждая контрольная работа содержит 10 задач. Задачи, в основном, предназначены для первоначального закрепления соответствующего теоретического материала. Решение этих контрольных работ будет полезно школьникам, желающим самостоятельно упорядочить и систематизировать знания курса математики.

В статье содержится 10 контрольных работ по следующим разделам школьной математики: вычисления и преобразования алгебраических выражений, алгебраические уравнения, алгебраические неравенства, уравнения и неравенства с модулем, иррациональные уравнения и неравенства, планиметрия, текстовые задачи, преобразование логарифмических выражений, показательные и логарифмические уравнения, тригонометрия, элементы математического анализа, векторы.

Контрольная работа №1 (Вычисления и преобразования алгебраических выражений).

Задание 1. Вычислите:

$$\frac{3\frac{5}{6} - 37\frac{1}{3} : \frac{7}{2}}{\left(1\frac{11}{18} + 1\frac{19}{24} : \frac{49}{16}\right)} + 6,15\ .$$

Задание 2. Вычислите:

$$\frac{1\frac{23}{30} - 1\frac{1}{3} - \frac{5}{6}}{1\frac{1}{5} : \left(\frac{17}{40} + 0,6 - 0,0005\right)}\ .$$

[1]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, e-mail: kblag2002@yahoo.com

[2]Санкт-Петербургский государственный университет, «УниШанс», e-mail: s.vostokov@spbu.ru

[3]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, e-mail: vmkaf@pgups.ru

[4]Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, e-mail: vadimpak@yandex.ru

[5]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, e-mail: sol.irina@mail.ru

Задание 3. Вычислите:

$$3 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} - \frac{7}{\sqrt{10}} \right).$$

Задание 4. Вычислите:

$$\left(\sqrt[4]{2^5 \cdot \sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}} \right)^{12}.$$

Задание 5. Вычислите:

$$\frac{\left(5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{50}\right)\left(5 - \sqrt{24}\right)}{\left(\sqrt{75} - 5 \cdot \sqrt{2}\right)}.$$

Задание 6. Упростите выражение:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \right) \cdot \left(\sqrt{x^3-1} \right).$$

Задание 7. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{x^3}-1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \cdot \left(x + \sqrt{x}\right).$$

Задание 8. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{(m+n)^2} \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{2}{(m+n)^3} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right) \cdot m^2 n^2.$$

Задание 9. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \left((x-y)^2 + xy\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \cdot \left((x+y)^2 - xy\right).$$

Задание 10. Упростите выражение:

$$\left(a^{-2/3} - b^{-2/3}\right) \cdot ab \cdot \left(a^{1/3} - b^{1/3}\right)^{-1} + \left(ab^2\right)^{1/3} + \left(a^2 b\right)^{1/3}.$$

Контрольная работа №2 (Алгебраические уравнения).

Задание 1. Найдите корень уравнения:

$$\frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7}.$$

Задание 2. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения:

$$\frac{x-3}{x+5} = -3.$$

Задание 3. Найдите корень уравнения:

$$\frac{5x-3}{4x-5} = 1 \ .$$

Задание 4. Найдите корень уравнения:

$$\frac{1}{9x+2} = \frac{1}{8x-4} \ .$$

Задание 5. Найдите корень уравнения: $x^2 - 17x + 72 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Задание 6. Найдите меньший корень уравнения:

$$x^2 - 3,6x - 7 = 0.$$

Задание 7. Найдите корень уравнения: $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Задание 8. Найдите корень уравнения:

$$(x-1)^3 = -8.$$

Задание 9. Найдите разность $x_0 - y_0$ если (x_0, y_0) есть решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 9x + 7y = 24 \\ x + 3y = 4. \end{cases}$$

Задание 10. Найдите частное $\dfrac{x_0}{y_0}$, если (x_0, y_0) есть решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 7x + 11y = 1 \\ -x + 3y = 9. \end{cases}$$

Контрольная работа №3 (Алгебраические неравенства. Уравнения и неравенства с модулем).

Задание 1. Решите неравенство:

$$\frac{x+2}{x^2+x-6} \leqslant 0 \ .$$

Задание 2. Решите неравенство:

$$\frac{2x-1}{x} > 4\ .$$

Задание 3. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

$$\frac{1}{x+2} \leqslant \frac{1}{5}$$

на отрезке [–3; 4].

Задание 4. Найдите сумму целых решений неравенства:

$$\frac{1}{x+5} < \frac{1}{3}$$

на отрезке [-7; 0].

Задание 5. Найдите корень (или среднее арифметическое корней, если их несколько) уравнения:

$$|x+3| - 1 = 5\ .$$

Задание 6. Решите уравнение:

$$\frac{3-x}{4} + 2x = |x-3|\ .$$

Задание 7. Решите уравнение:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| + 3 = |x+7|\ .$$

Задание 8. Решите неравенство:

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{7}\ .$$

Задание 9. Решите неравенство:

$$\frac{2x-3}{x} \leqslant 5\ .$$

Задание 10. Решите неравенство:

$$\frac{x+3}{2x-1} < \frac{1}{3}\ .$$

Контрольная работа №4 (Иррациональные уравнения и неравенства).

Задание 1. Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{15-2x}=3\ .$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Задание 2. Найдите корень уравнения:

$$\sqrt[3]{x-4}=3\ .$$

Задание 3. Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{17-x^2}=3-x\ .$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Задание 4. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения:

$$\sqrt{3x-2}=x\ .$$

Задание 5. Найдите корень (или среднее арифметическое корней, если их несколько) уравнения:

$$12-x=\sqrt{x+98}\ .$$

Задание 6. Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+3}=6\ .$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Задание 7. Решите неравенство:

$$\sqrt{1-x}<2\ .$$

Задание 8. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2-4x}<x-3\ .$$

Задание 9. Решите неравенство:

$$\sqrt{24-10x}>3-4x\ .$$

Задание 10. Решите неравенство:

$$\sqrt{x+3}<\sqrt[4]{x+23}\ .$$

Контрольная работа №5 (Планиметрия).

Задание 1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, sinA = 7/25. Найдите cosA.

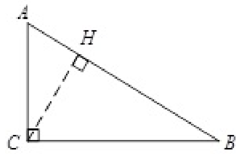

Рис. 1. Задание 2.

Задание 2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, BC = 25, BH = 20 (Рисунок 1). Найдите cosA.

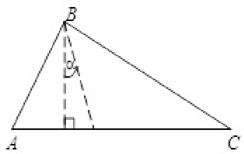

Рис. 2. Задание 3.

Задание 3. Острые углы прямоугольного треугольника равны 85° и 5° (Рисунок 2). Найдите угол α между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

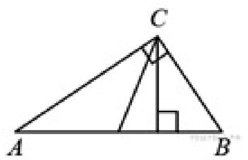

Рис. 3. Задание 4.

Задание 4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, один из острых углов равен 60 (Рисунок 3). Найдите квадрат большего катета.

Задание 5. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Задание 6. В треугольнике ABC стороны AC=BC=$4\sqrt{15}$, cosBAC=0,25. Найдите высоту AH.

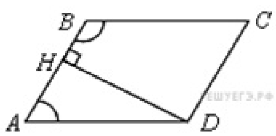

Рис. 4. Задание 7.

Задание 7. В параллелограмме ABCD высота, опущенная на сторону AB, равна 4, AD = 8 (Рисунок 4). Найдите синус угла B.

Задание 8. Найдите площадь параллелограмма со сторонами 6 см и $4\sqrt{3}$ см, с острым углом 60°.

Задание 9. Найдите длину дуги, на которую опирается центральный угол 10°, если радиус окружности равен $\dfrac{36}{\pi}$ см.

Задание 10. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности (Рисунок 5). Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

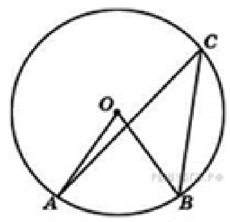

Рис. 5. Задание 10.

Контрольная работа №6 (Текстовые задачи).

Задание 1. Найдите число, 5% которого составляет 23% от числа 15,5.

Задание 2. Найдите число a, если известно, что число $(a+10)$ составляет от него 140%.

Задание 3. Найдите три числа, если первое на 10% больше второго; третье составляет 40% от второго, а сумма всех трех чисел равна 250.

Задание 4. Цена товара была уменьшена на 20%, а затем увеличена на 40%. Найдите первоначальную цену товара, если окончательная цена составила 224 руб.

Задание 5. Число a на 25% больше числа b. На сколько процентов число b меньше a?

Задание 6. Из порта А в порт В одновременно отправляются два катера. Так как скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго, то он прибывает на 5 часов раньше. Найдите скорость первого катера, если расстояние от А до В равно 300 км.

Задание 7. Поезд был задержан на станции на 30 мин. Чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на 8 км/ч и на следующем перегоне длиной 360 км ликвидировал опоздание. Определите скорость поезда до задержки на станции.

Задание 8. Найдите разность d арифметической прогрессии, если известно, что сумма второго и пятого членов равна 8, а сумма третьего и седьмого членов равна 14.

Задание 9. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма второго и четвертого членов равна 39/4, а сумма первого и третьего членов равна 13/2.

Задание 10. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10%?

Контрольная работа №7 (Преобразование логарифмических выражений. Показательные и логарифмические уравнения).

Задание 1. Найдите значение выражения:

$$\log_5 625 \cdot \log_2 4 \ .$$

Задание 2. Найдите значение выражения:

$$9^{\log_3 7} - 9^{1+\log_{81} 36} \ .$$

Задание 3. Найдите значение выражения:

$$(\log_5 0,2 + \log_5 25) \cdot (\log_2 6 - \log_2 3) \ .$$

Задание 4. Найдите значение выражения:

$$\frac{\log_4 25}{\log_4 5} \ .$$

Задание 5. Вычислите:

$$9^{\frac{\log_2 5}{\log_4 9}} \ .$$

Задание 6. Найдите корень уравнения:

$$5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} + 7 \cdot 5^{x} = 47 \ .$$

Задание 7. Найдите корень уравнения:

$$2^{4-2x} = 64 \ .$$

Задание 8. Найдите корень уравнения:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4 \ .$$

Задание 9. Найдите корень уравнения:

$$\log_2(4-x)=7\ .$$

Задание 10. Решите уравнение:

$$\log_{5-x}49=2\ .$$

Контрольная работа №8 (Тригонометрия).

Задание 1. Найдите значение выражения:

$$\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\sin\alpha}\ .$$

Задание 2. Найдите значение выражения:

$$\sin 61^\circ\cos 31^\circ-\cos 61^\circ\sin 31^\circ\ .$$

Задание 3. Найдите значение выражения:

$$24\cdot\frac{\left(\sin^2 17^\circ-\ \cos^2 17^\circ\right)}{\cos 34^\circ}\ .$$

Задание 4. Найдите значение выражения:

$$\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\ .$$

Задание 5. Найдите значение выражения:

$$\frac{3\cos(\pi-\beta)+\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}{\cos(3\pi+\beta)}\ .$$

Задание 6. Найдите $2\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0,7$.

Задание 7. Найдите корни уравнения:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Задание 8. Решите уравнение:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\ .$$

В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Задание 9. Решите уравнение: $\sin(2x-60^\circ)=0$.

Задание 10. Решите уравнение: $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

Контрольная работа 9 (Элементы математического анализа).

Задание 1. Найдите производную функции: $y = x^2 2^x$.

Задание 2. Найдите производную функции:

$$y = \frac{x^2 - 1}{5x - 2} .$$

Задание 3. На рисунке 6 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

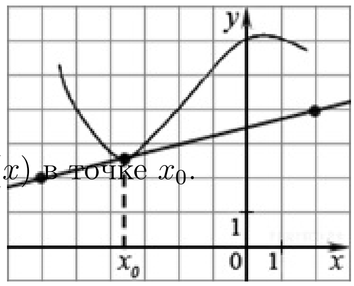

Рис. 6. Задание 3.

Задание 4. На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2; -1; 1; 2$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

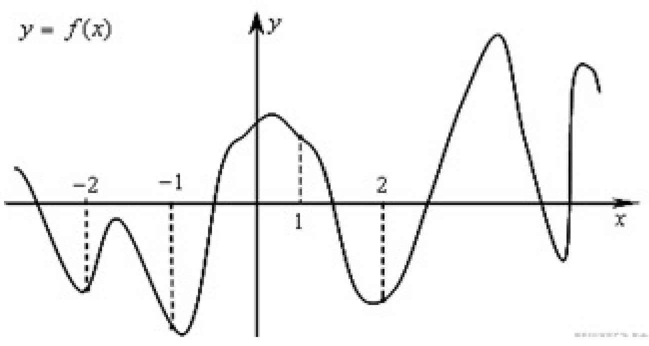

Рис. 7. Задание 4.

Задание 5. На рисунке 8 изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

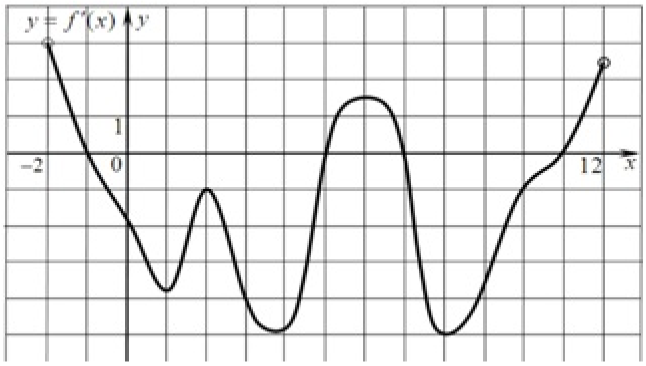

Рис. 8. Задание 5.

Задание 6. На рисунке 9 изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю.

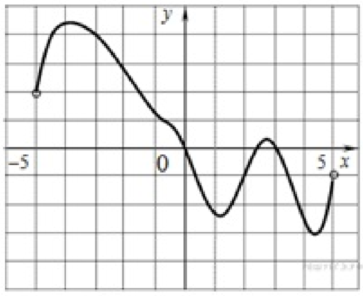

Рис. 9. Задание 6.

Задание 7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке 10 изображён график ее производной $f'(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.

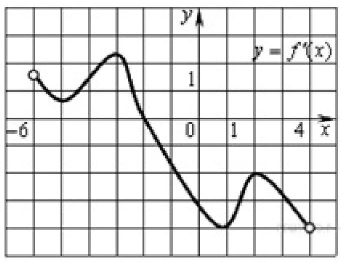

Рис. 10. Задание 7.

Задание 8. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

Задание 9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-4; 1]$.

Задание 10. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 - 48t + 17$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость в момент времени $t = 9c$.

Контрольная работа №10 (Векторы).

Задание 1. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если:

$$\begin{cases} 3\vec{a} - 2\vec{b} = (-1; 4; 2), \\ \vec{a} + 5\vec{b} = (3; -5; 1). \end{cases}$$

Задание 2. Найдите значение параметра k, если расстояние между точками $A(1; 2)$ и $B(k; -2)$ равно 5.

Задание 3. При каких значениях параметра m длина вектора $\vec{a} = (m + 1, -3, m - 3)$ не превышает 5?

Задание 4. Найдите значение скалярного произведения векторов $\vec{c}$ и d и угол между ними, если: $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} = (-1; 0; 4), \quad \vec{b} = (2; -1; 1)$.

Задание 5. При каких значениях параметра m векторы $\vec{a} = (-m; 4; 1)$ и $\vec{b} = (2; m + 1, 4)$ ортогональны?

Задание 6. При каких значениях параметров m, n и p векторы $\vec{a} = (2m - 1; 3; -3)$, $\vec{b} = (-2; n + 2; 1)$ и $\vec{c} = (3; -1; p + 1)$ взаимно перпендикулярны?

Задание 7. При каких значениях параметра m вектор $\vec{a} = (4; 2; m)$ составляет угол $\dfrac{\pi}{4}$ с вектором $\vec{b} = (2; 3; -1)$?

Задание 8. При каких значениях параметров m и n векторы $\vec{a} = (m + n; 2; -1)$ и $\vec{b} = (3; -1; 2m - n)$ коллинеарны?

Задание 9. Найдите отношение длин сторон паралллограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (4; -4; 2)$ и $\vec{b} = (0; 3; -4)$.

Задание 10. Найдите угол А треугольника ABC, заданного вершинами A(0; 3), B(3; 7), C (4; 0).

Список литературы

[1] Решение задач по математике. Адаптивный курс для студентов технических вузов. Учебное пособие / В.В. Гарбарук, В.И. Родин, И.М. Соловьёва, М.А. Шварц. СПб. : Лань, 2017. 688 с.

[2] Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый уровень / Ш. А.Алимов, Ю. М.Колягин, М. В. Ткачева и др. 20-е изд. М.: Просвещение, 2014. – 463 с.

[3] Атанасян Л. С. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 18-е изд. М.:Просвещение, 2009. – 255 с.

[4] Воронина М.М. Алгебра: Пособие для поступающих в Петербургский государственный университет путей сообщения. Часть I / М. М. Воронина, И. М. Соловьева СПб: ПГУПС, 2000. 57 с.

[5] Гарбарук В. В. Производная и дифференциал. Учебное пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, М. А. Шварц. СПб.: ПГУПС, 2006. –52 с.

[6] Интегрирование функции одной переменной. Методические указания / Н. В. Лапшина, И. М. Соловьева, Е. И. Спиридонов, М. А. Шварц. СПБ.: ПГУПС, 2007. 54 с.

УДК 372.851+372.853

Гунько Ю.Ф.[1], *Гунько, Н.А.*[2]

Школьная математика в решении физических задач (вычисление средних)

Аннотация. В работе обсуждаются вопросы, связанные с применением понятия среднего значения к решению различных физических задач, относящихся к различным разделам школьной физики. Приведены определения понятий: среднее арифметическое, среднее арифметическое взвешенное, среднее гармоническое, среднее степенное степени d и т.д. Приведенные понятия и формулы используются при решении иллюстрирующих задач из области механики, теории электричества, оптики. Статья носит методический характер.

Ключевые слова: вычисление средних значений, теорема Архимеда, геометрия масс, мощность тепловых потерь, формула тонкой линзы.

Введение. Спор о главенствующем положении в области естественных наук между физиками и математиками ведётся уже давно. И одновременно — недавно. До начала XX века и те, и другие жили одной, довольно дружной семьей. Многие видные ученые писали трактаты и по физике, и по математике и считали себя «натуральными философами». В качестве примера можно привести Ньютона, Эйлера, Гаусса, Гильберта и многих других.

На рубеже XIX и XX веков началось весьма интенсивное развитие наших знаний об окружающем нас мире и об обществе, которое наиболее заметно наблюдалось прежде всего в области точных наук. И математика, и физика не были при этом исключениями. Одновременно с увеличением объема знаний в разных сферах начался процесс разделения, размежевания отдельных областей знания, который нередко сопровождался обособлением и самоизоляцией целого ряда направлений развития.

Для того чтобы избежать вредного влияния этих тенденций, надо, на наш взгляд, время от времени делать некоторые экскурсии с плацдарма фундаментальных дисциплин в смежные области науки и техники.

Этой цели и посвящена данная работа.

1. Средние величины.

1.1. *Средние арифметическое.*

Определение 1. *Средним арифметическим* некоторого числового множества называется величина, равная сумме всех эле-

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: yurigunko@gmail.com
[2]Физико-Технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН, e-mail: nataliagunko@gmail.com

ментов этого множества, деленной на их количество:

$$A_{ср} = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}{n} .$$

Теорема 1. (о среднем арифметическом)

Среднее $n+1$ числа больше среднего n чисел тогда и только тогда, когда новое число больше, чем старое среднее; меньше тогда и только тогда, когда новое число меньше среднего; не меняется тогда и только тогда, когда новое число равно среднему.

Ещё одна формулировка данной теоремы.

Для того, чтобы среднее $n+1$ числа было больше среднего n чисел, необходимо и достаточно, чтобы новое число (A_{n+1}) было больше, чем старое среднее. Для того, чтобы новое среднее (среднее $n+1$ числа) было меньше старого среднего (среднего n чисел), необходимо и достаточно, чтобы новое число было меньше, чем старое среднее. Для того, чтобы новое среднее было равно старому среднему, необходимо и достаточно, чтобы новое число было равно старому среднему.

Доказательство. Рассмотрим доказательство первого из этих утверждений. А именно: для того чтобы среднее $n+1$ числа было больше среднего n чисел, необходимо и достаточно чтобы новое число (A_{n+1}) было больше чем старое среднее.

Начнем с доказательства необходимости. Другими словами, докажем, что из условия: среднее $n+1$ числа больше среднего n чисел следует, что новое число больше чем старое среднее.

Введем следующие обозначения:

$$A^n_{ср} = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} ; \quad A^{n+1}_{ср} = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{n+1}}{n+1} .$$

Вычислим разность $A^{n+1}_{ср}$ и $A^n_{ср}$

$$A^{n+1}_{ср} - A^n_{ср} = \frac{n(A_1 + \ldots + A_{n+1}) - (n+1)(A_1 + \ldots + A_n)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{nA_{n+1} - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}{n(n+1)} = \frac{A_{n+1} - A^n_{ср}}{n+1} . \qquad (1)$$

Если $A^{n+1}_{ср} > A^n_{ср}$, то из (1) следует, что $A_{n+1} > A^n_{ср}$. Необходимость доказана.

Достаточность условия «новое число больше, чем старое среднее» для справедливости утверждения, что «среднее $n+1$ числа больше среднего n чисел» также следует из равенства (1).

Рассмотрим два примера.

Пример 1. *Всего было 10 яблок. 3 яблока весили по 100 грамм каждое; 4 яблока — по 150 грамм и 3 яблока — по 200 грамм. Вычислить среднее арифметическое значение веса яблок.*

Решение. По определению

$$P_{ср}^{10} \;=\; \frac{3\cdot 100 \;+\; 4\cdot 150 \;+\; 3\cdot 200}{10} \;=\; \frac{1500}{10} \;=\; 150 \textit{ грамм} \;.$$

Пример 2. *Переставим некоторые цифры в предыдущей задаче. Пусть среди 10 яблок будет 4 яблока весом по 100 грамм, 3 яблока — весом по 150 грамм и 3 яблока — по 200 грамм. Требуется вычислить средний вес.*

Решение.

$$P_{ср}^{10} \;=\; \frac{4\cdot 100 \;+\; 3\cdot 150 \;+\; 3\cdot 200}{10} \;=\; \frac{1450}{10} \;=\; 145 \textit{ грамм} \;.$$

Сравнивая результаты полученные при решении этих задач, видим, что среднее значение не есть характеристика какого-нибудь элемента взятого отдельно, а характеристика всей совокупности элементов.

1.2. ***Среднее значение непрерывной функции.*** Приведём ещё одно выражение, играющее важную роль в приложениях и решении физических задач.

Определение 2. *Средним от непрерывной функции,* заданной на отрезке называется величина:

$$f_{ср} \;=\; \frac{1}{b-a}\,\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{S}{\Delta}\;.$$

где: S — площадь под графиком функции $f(x)$, $\Delta = b-a$ — длина интервала, на котором ищется среднее значение $f(x)$. Площадь под графиком — S — это площадь геометрической фигуры ограниченной самим графиком функции $f(x)$, отрезком оси абсцисс (OX) от $x = a$ до $x = b$, и двумя прямыми, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$ и перпендикулярными оси абсцисс (см. рис. 1).

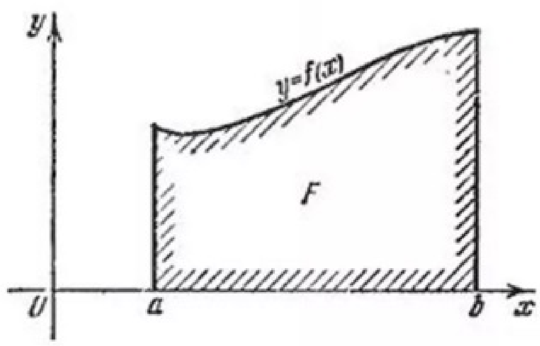

Рис. 1. Вычисление среднего от непрерывной функции.

2. Применения понятия среднего в физике.

2.1. ***Средняя скорость.*** Перейдём теперь к рассмотрению применения понятия среднего в физике. Сначала обсудим применения понятия среднего к вычислению средней скорости.

Определение 3. *Средней скоростью* $\vec{v}$ движения материальной точки за промежуток времени Δt называется отношение перемещения точки $\Delta\vec{r}$ за этот промежуток времени к его длительности:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2}$$

В простейшем случае — при движении точки по прямой в одном направлении формула (2) принимает вид:

$$v = \frac{S}{t} \tag{3}$$

В формуле (3): S — длина пути пройденного точкой, t — время движения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. *Вычислить среднюю скорость движения человека, если первую половину пути он шел со скоростью 6 км/ч, а вторую — со скоростью 4 км/ч.*

Решение. Обозначим через s длину пройденного пути.

Тогда время, которое затратил пешеход на первую половину пути:

$$t_1 = \frac{s}{2v_1}\ ;$$

время, затраченное на вторую половину пути:

$$t_2 = \frac{s}{2v_2} .$$

Время, за которое человек прошел весь путь:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = \frac{s(v_1+v_2)}{2v_1v_2} .$$

Средняя скорость движения человека:

$$v_{cp} = \frac{s}{s(v_1+v_2)/2v_1v_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} . \qquad (4)$$

Вычисление средней скорости и определение размерности полученного выражения.

$$v_{cp} = \frac{2\cdot 6\cdot 4}{6+4} = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ км/ч} .$$

Если проводить вычисление в системных единицах, то сначала надо перевести скорости, приведенные в условиях задачи в км/ч, в скорости, записанные в м/с. $v_1 = 6$ *км/ч* $= 6000/3600$ *м/с* $= 5/3$ *м/с* $\approx 1,66$ *м/с;* $v_2 = 4$ *км/ч* $= 10/9$ *м/с* $\approx 1,11$ *м/с, а затем выполнить вычисления по формуле (4):* $v_{cp} = (2\cdot 5/3\cdot 10/9)/(5/3+10/9) = 4/3 \approx 1,33$. *(м/с)*

Ответ: 4,8 км/ч или 1,33 м/с.

Замечание 1. *Иногда при определении средней скорости частицы имеется в виду векторная величина, определенная выше, а иногда — средняя величина модуля скорости частицы. О чём идёт речь, надо определять, исходя из контекста и формулировки задачи. Поясним сказанное на следующем примере.*

Пример 4. *Тело брошено вертикально вверх со скоростью* $v_0 = 10$ *м/с. Найти среднюю скорость движения за первые 2 секунды.*

Решение. Введём декартову систему координат с началом в точке бросания и осью Oy, направленной вертикально вверх. Закон движения тела определяется формулой

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Значение y в начальный момент времени $y(0) = 0$, в конечный момент времени $y(2)$ также равно нулю: $y(2) = 0$. Следовательно, $\vec{v}_{cp} = 0$. Этот результат кажется парадоксальным, хотя он верен. Это связано с тем, что наш критический ум из посылки, что скорость движения точки почти всюду не равна нулю, делает вывод, что среднее значение скорости также не равно нулю. А это для векторных величин не верно.

Если бы в условиях задачи говорилось о вычислении среднего значения модуля скорости, то для её определения следовало бы использовать следующую формулу:

$$v_{cp} \;=\; \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

где s_1 — путь пройденный точкой к началу первой секунды ($s_1 = 0$), s_2 — путь пройденный точкой к концу второй секунды.

Основная особенность движения в рассматриваемом случае: первую часть времени тело движется в направлении оси Oy, а вторую часть — в противоположном направлении. Так как s неотрицательная, неубывающая, аддитивная величина, то для s_2 справедливо следующее соотношение $s_2 = s' + s'' > 0$, где s' — длина пути, пройденного телом в положительном направлении оси Oy, s'' — длина пути, пройденного телом в отрицательном направлении.

Легко видеть, что $s' = y_{max}$ $s'' = |y(0) - y_{max}| = y_{max}$. Откуда находим: $s_2 = 2y_{max}$, $y_{max} = v_0^2/2g = 5$ м.

Следовательно, $v_{cp} = 2 \cdot 5/2 = 5$ м/с.

Пример 5. *Материальная точка равномерно движется по окружности радиуса R, совершая один оборот вокруг центра за T секунд. Найти среднюю линейную скорость движения точки.*

Решение. По определению

$$v_{cp} \;= \frac{S}{T}\;. \tag{5}$$

Так как длина пути, пройденного точкой за один оборот, равна длине окружности, то $S = 2\pi R$. Подставляя это значение в *формулу (5), находим:*

$$v_{cp} \;=\; \frac{2\pi R}{T}\;. \tag{6}$$

Учитывая, что период можно выразить через число оборотов в единицу времени (частоту): $T = 1/\nu$ или циклическую частоту: $T = 2\pi/\omega$, формулу (6) можно также записать в одном из следующих видов:

$$v_{cp} \;=\; 2\pi R\nu\;; \quad \text{или} \quad v_{cp} = \;\omega R\;.$$

Пример 6. *Найти среднюю мощность тепловых потерь в цепи переменного тока на сопротивлении R.*

Решение. Мгновенная сила тока в цепи

$$J \;=\; J_0\; cos\;\omega\; t\;.$$

Мгновенная мощность тепловых потерь на сопротивлении R:

$$Q \;=\; J^2 R \;=\; J_0^2\; R\; cos^2\omega\; t\;.$$

Средняя мощность тепловых потерь за период колебаний

$$Q_{cp} \;=\; J_0^2\; R\;(cos^2\omega\; t\;)_{cp} \;=\; J_0^2\; R\;(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\; 2\omega\; t\;)_{cp} \;=\; \frac{1}{2}\; J_0^2 R\;.$$

2.2. *Средне-арифметическое взвешенное.* Понятие средне-арифметического допускает обобщение.

Определение 4. *Средне-арифметическим взвешенным* множества чисел $x_1,\; x_2,\; \dots\;,\; x_n$ с весами $w_1,\; w_2,\; \dots\;,\; w_n$ называется следующая величина:

$$x_{cp} \;=\; \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\;.$$

Приведем примеры использования этого понятия в физике, химии, экономике.

Температура смеси нескольких порций одной жидкости с разными температурами:

$$t_{cp} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

где t_{cp} — средняя температура смеси, t_i — температура i-й порции, m_i — масса i-й порции.

Средневзвешенный курс валюты (в экономике)

$$C_{cp} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i},$$

C_{cp} — средневзвешенный курс, c_i — курс оборота по i-му торгу, b_i — размер i-го торга.

Понятие средне-взвешенного арифметического позволяет иначе написать формулу для определения средней скорости.

Пусть тело в течение промежутка времени t_1 двигалось со скоростью v_1, затем в течение следующего промежутка времени t_2 — со скоростью v_2 и т. д. до последнего промежутка времени t_n — со скоростью v_n, то средняя скорость движения тела будет средне-взвешенным арифметическим величин $v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_n$ с набором весов $t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n$. Действительно,

$$v_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i v_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}.$$

3. Центр масс и центр тяжести.

3.1. *Нахождение центра масс системы материальных точек.* Пользуясь понятием средне-взвешенного арифметического можно исследовать свойства как механических, так и иных систем. Продемонстрируем это на примере *центра масс* некоторой системы материальных точек.

Определение 5. *Положение центра масс* системы материальных точек задается формулой

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \tag{7}$$

где $\vec{r}_C$ — радиус-вектор центра масс, $\vec{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки системы, m_i — масса i-й точки.

Приведем основные свойства этого понятия.

1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом единственный.

2. Центр масс двух материальных точек лежит на отрезке, соединяющим эти точки, и его положение определяется архимедовым правилом рычага.

3. Центр масс системы, состоящей из нескольких подсистем материальных точек, определяется по формуле (7), в которой вместо масс отдельных точек стоят массы подсистем, а вместо радиус-векторов, определяющих положение материальных точек, стоят радиус-векторы, определяющие положения центров масс подсистем:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} M_i \vec{R}_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} M_i} .$$

4. Центр масс системы является одновременно и центром инерции, и центром тяжести (в однородном поле силы тяжести).

Пример 7. *Материальная точка массой m_1 находится в точке A, точка с массой m_2 — в точке B. Показать, что центр масс указанной системы лежит на отрезке AB и делит его в отношении m_2/m_1.*

Введем декартову систему координат таким образом, чтобы отрезок AB лежал на оси OX. Тогда $y_1 = y_2 = 0$; $z_1 = z_2 = 0$. Кроме того, будем предполагать: $x_1 = 0$; $x_2 = l$. Обращаясь к формуле (7), получим: $y_C = z_C = 0$; $x_C = m_2\ l/(m_1 + m_2) = AC$; $CB = m_1\ l/(m_1 + m_2)$. Из двух последних формул следует, что $AC/BC = m_2/m_1$.

Теорема 2. (о центре масс двух систем материальных точек) Пусть имеются две системы материальных точек Σ_1 и Σ_2 и пусть их центры масс находятся в точках A и B.

Тогда центр масс системы $\Sigma_1 + \Sigma_2$ лежит на отрезке AB и делит его в отношении M_2/M_1, где M_1 — масса системы Σ_1, а M_2 — масса системы Σ_2.

Доказательство. Введем декартову систему координат таким образом, чтобы отрезок AB лежал на оси OX.

Тогда $y_{cp,1} = y_{cp,2} = 0$; $z_{cp,1} = z_{cp,2} = 0$.

Для системы $\Sigma_1 + \Sigma_2$

$$y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+m} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+m} m_i} =$$

$$= \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i)(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i / \sum\limits_{i=1}^{n} m_i) + (\sum\limits_{j=1}^{m} m_j)(\sum\limits_{j=1}^{n} m_j y_j / \sum\limits_{j=1}^{m} m_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i + \sum\limits_{i=j}^{n} m_j} =$$

$$= \frac{M_1\ y_{cp,1} + M_2\ y_{cp,2}}{M_1 + M_2}.$$

Так как $y_{cp,1} = y_{cp,2} = 0$, то $y_C = 0$. Аналогично, $z_C = 0$. Откуда следует, что центр масс лежит на оси OX. Равенство $AC/CB = M_2/M_1$ доказывается способом, аналогичным способу, использованному в примере 7.

3.2. *Определение центра тяжести плоских фигур.*

Пример 8 (теорема Архимеда). *Три медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке, и каждая из медиан делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины (см. рис. 2).*

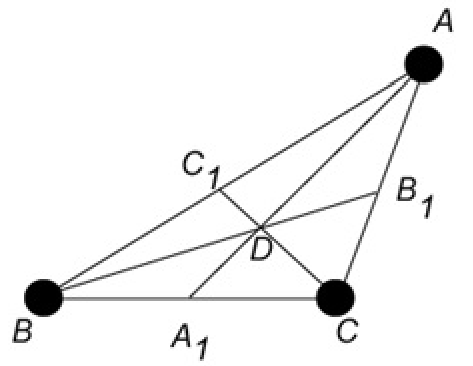

Рис. 2. Определение точки пересечения медиан треугольника.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, а AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы. Поместим в каждую из вершин *треугольника одинаковые точечные массы, каждая равная m. Эта система из 3-х материальных точек имеет однозначно определенный центр масс — точку D (свойство 1).*

Подсистема из масс, находящихся в точках B и C имеет центр масс в точке A_1 (свойство 2, пример 7). Далее согласно свойству 3 центр масс всей системы находится в точке D, лежащей на медиане AA_1 и отстоящей от точки A на расстоянии в два раз большем, чем от точки A_1. Аналогичные рассуждения верны и в других случаях, когда подсистема из двух масс берется: а) из масс, находящихся в точках A и C; б) из масс, находящихся в точках A и B.

Предположим, что положение этих «новых» центров масс определяется точками D_1 и D_2. Но в силу свойства 1 положение центра масс системы определяется однозначно, следовательно $D = D_1 = D_2$, то есть все три медианы пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Возьмем плоскую фигуру G и отметим на ней две точки A и B, в которых проделаем малые отверстия. Возьмем жесткую ось и вставим ее в одно из отверстий. Ось поместим горизонтально на двух опорах. Отпустим фигуру. Некоторое время она будет колебаться вращаясь вокруг оси. Но, в конце концов, колебания прекратятся и фигура придет в состояние равновесия (см. рис. 3).

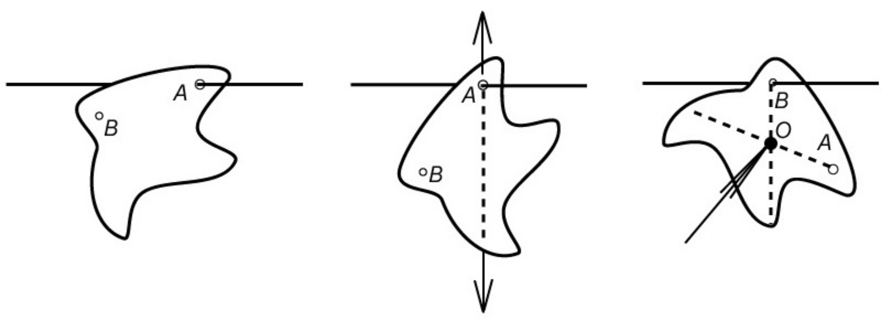

Рис. 3. Определение положения центра тяжести плоских фигур.

В состоянии равновесия сумма всех сил, действующих на тело и сумма всех моментов сил равны нулю.

На фигуру G действуют силы тяжести и реакция опоры со стороны оси. Назовем сумму всех сил тяжести *главным векто-*

ром сил тяжести $\vec{F}$, реакцию опоры обозначим через $\vec{R}$. Тогда согласно первому условию равновесия:

$$\vec{F} + \vec{R} = 0 . \tag{8}$$

Равенство (8) имеет место тогда, когда: векторы $\vec{F}$ и $\vec{R}$ равны по величине и противоположны по направлению, причем точки приложения этих сил могут не совпадать. Суммарный момент сил $\vec{F}$ и $\vec{R}$, относительно любой точки на плоскости равен нулю. Реакция опоры приложена к фигуре в месте соприкосновения фигуры с осью; направление вектора $\vec{F}$ совпадает с направлением поля силы тяжести. Так как в силу равенства нулю суммарного момента сил силы $\vec{F}$ и $\vec{R}$ лежат на одной прямой, то и вектор $\vec{F}$ лежит на прямой, проходящей через отверстие в фигуре и направленной параллельно направлению поля силы тяжести (вектору $\vec{g}$).

После того, как равновесие установится, проводим указанную прямую на поверхности фигуры.

Переносим ось в другое отверстие и снова проделываем описанную выше процедуру.

Пересечение двух прямых определит положение центра тяжести.

В качестве упражнения обобщите теорему Архимеда на пространственный случай. А именно, во-первых, докажите, что все отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке, а во-вторых, найдите отношение, в котором точка пересечения делит указанные отрезки.

4. Среднее гармоническое. Приведём пример, связанный с использованием понятия среднего гармонического. Определение среднего гармонического:

$$H_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} .$$

Среднее гармоническое есть величина, обратная к среднему от обратных чисел: $x_1, x_2, \ldots , x_n$. Заметим, что если $x_i = x_j$ для любых i и j, то $A_{cp} = H_{cp}$.

Пример 9 (формула тонкой линзы). *Линза, для которой толщина линзы считается приблизительно равной нулю, называется* ***тонкой***. *В формуле тонкой линзы удвоенное фокусное расстояние равно среднему гармоническому расстояний от* *линзы до предмета и от линзы до изображения предмета. Для тонкой линзы показывают одну главную плоскость, которая на схеме, отображающей ход лучей изображается отрезком AP.*

Два главных свойства тонкой линзы: луч, прошедший через оптический центр линзы O, не меняет своего направления и параллельные лучи, проходящие через линзу сходятся в одной точке, расположенной в фокальной плоскости (см. рис. 4).

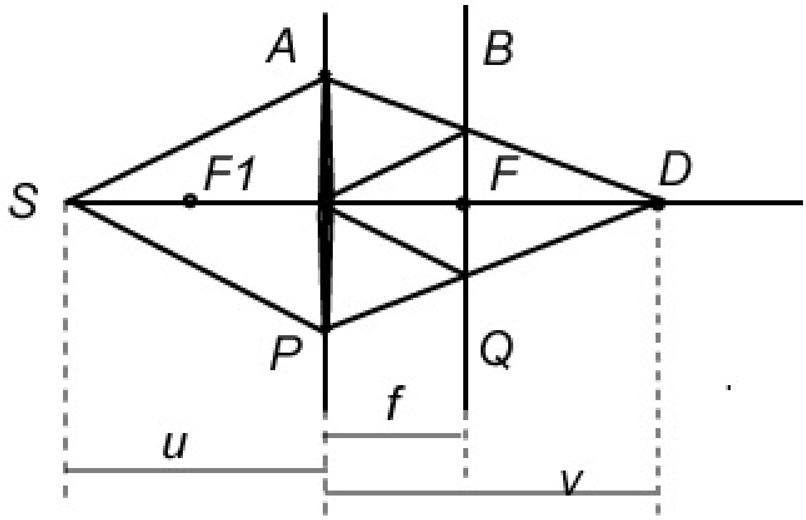

Рис. 4. Схема прохождения лучей в тонкой линзе.

Рассмотрим луч SA произвольного направления, падающий на линзу в точке A. Изучим его линию распространения после преломления в линзе. Для этого построим луч OB, параллельный лучу SA и проходящий через оптический центр линзы O. По первому свойству линзы луч OB не меняет своего направления и пересекает фокальную плоскость в точке B. По второму свойству линзы параллельный ему луч SA после преломления должен пересекать фокальную плоскость в той же точке B. Таким образом, после прохождения через линзу луч SA пойдет *по пути AB. Аналогичным образом можно построить другие лучи, например луч SPQ.*

Обозначим расстояние SO от линзы до источника света через u; расстояние OD от линзы до точки фокусировки лучей через v, фокусное расстояние OF через f. Выведем формулу, связывающую эти величины. Рассмотрим две пары подобных треугольников: ΔSOA и ΔOFB; ΔDOA и ΔDFB; запишем пропорции

$$\frac{OA}{u} = \frac{BF}{f}\,; \qquad \frac{OA}{v} = \frac{BF}{v-f}\,.$$

Разделив первую пропорцию на вторую, получим:

$$\frac{v}{u} = \frac{v-f}{f} \quad \text{или} \quad \frac{v}{u} = \frac{v}{f} - 1\,.$$

После деления обеих частей выражения на v и перегруппировки членов, приходим к окончательной формуле:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}\,.$$

что и требовалось доказать.

Заключение. Заметим, что имеется еще несколько других определений «средних» значений, в том числе: среднее геометрическое, среднее степенное, среднее Колмогорова и т.д., и различные средне-взвешенные величины (например, средне-арифметическое взвешенное, средне-геометрическое взвешенное, средне-гармоническое взвешенное).

Средне-гармоническое взвешенное набора чисел $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ с весами $w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_n$ определяется так:

$$H_{cp} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}\,.$$

Средне-степенное степени d определяется следующим образом:

$$A_d = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^d}{n}\Big)^{1/d}\,.$$

При этом по непрерывности доопределяются следующие величины:

$$A_0 = \lim_{d\to 0} A_d = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}\,;$$

$$A_{+\infty} \;=\; \lim_{d\to+\infty} A_d \;=\; max\{x_1,\; x_2,\; \cdots x_n\}\;;$$
$$A_{-\infty} \;=\; \lim_{d\to-\infty} A_d \;=\; min\{x_1,\; x_2,\; \cdots x_n\}\;;$$

Средне-степенное степени d «содержит» в себе основные иные средние. A_0 — среднее геометрическое; A_1 — среднее арифметическое; A_2 — среднее квадратичное; A_{-1} — среднее гармоническое. Среднее степенное — частный случай Колмогоровского среднего.

Список литературы

[1] Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. Серия «Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1987. 160 с.

[2] Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. М.: Высшая школа, 1998. 24 с.

[3] Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. СПб.: Лань, 2009. 110 с.

[4] Кунце Х.-И. Методы физических измерений. М.: Мир, 1989. 216 с.

УДК 531.8

Кунтыш С.А.[1], *Грибушкин И.Ю.*[2], *Холопов Е.Г.*[3], *Москаленко М.А.*[4]

IT технологии в общеобразовательных учебных заведениях

Аннотация. Использование информационных технологий в школе способствует более интенсивному развитию обучающихся и даёт возможность применять новые методы учебной работы. Сейчас в школах, лицеях и гимназиях используются различные информационные технологии: электронные документы (дневники, расписания уроков), электронные учебники, интерактивные доски, камеры, Wi-Fi роутеры и т.п. Для предупреждения возможного негативного влияния IT технологий на здоровье и развитие детского организма, необходимо строго соблюдать санитарно-гигиенические требования, и педагоги и школьники должны знать особенности влияния цифровых устройств на функциональное состояние, работоспособность и здоровье ребёнка.

Ключевые слова: информационные технологии, школа, лицей, гимназия, гигиена, санитарные требования.

1. Цифровая школа. Разговоры о внедрении в школы эффективные цифровые инструменты ведутся уже не один год, однако вопрос о том, кто будет это всё внедрять и каким образом учащиеся захотят всем этим пользоваться, так и остается без ответа. Любую технологию нужно освоить. К сожалению, учитель, загруженный подготовкой к ЕГЭ, оформлением огромного количества документации, физически не успевает ещё и освоить новые программы и новую технику.

По статистике курс дистанционного обучения заканчивает лишь один из десяти мотивированных взрослых, а мы ожидаем от подростков заинтересованности в новых технологиях, желания подобрать свою траекторию и выбрать маршрут обучения, выбрать три экзамена и поступить в ВУЗ. Треть выпускников меняет свои приоритеты в 11 классе, и, занимаясь танцами или футболом, в выпускном классе вдруг принимает решение сдавать физику с информатикой.

Вот лишь несколько цитат из сочинений учащихся на тему «Что бы я поменял в школе?»

В большинстве школ нашего государства стоят старые парты, парты советских времен. Десяток лет назад эти парты смотрелись хорошо: чистые, крепкие и удобные. Времена поменялись,

[1]МБОУ «Лицей г. Отрадное», e-mail: nkuntysh@mail.ru
[2]МБОУ «Лицей г. Отрадное»
[3]МБОУ «Лицей г. Отрадное»
[4]МБОУ «Лицей г. Отрадное»

сменилось поколение, но парты остались те же, что и были раньше. Нельзя не согласиться с тем, что во многих учебных заведениях решают эту проблему, но также остается и огромное количество школ, где никто даже не задумывается над ней! Нынешние рабочие места описать легко: парты из старой древесины, все в рисунках и царапинах, расшатанные стулья. Безусловно тут есть и вина учеников, которые небрежно относятся ко всему. Но вам не кажется, что если сделать рабочую зону удобнее, то и сами школьники не будут ничего портить?

Из уст учащихся часто слышно, что одежда цепляется за рабочие места, пачкается. Идея заключается в том, чтобы кардинально поменять то самое место, где учащиеся сидят по несколько часов в день. В этой связи возникает несколько идей, которое сделают обучение намного приятнее и удобнее. Многофункциональные парты из крепкой пластмассы и металла — отличное решение для нашего времени. Металлические ножки, которые будут справляться с неровностями пола за счет своей конструкции, выдвижной ящик и регулятор наклона парты для правильной осанки детей. Какому ребенку захочется портить такую вещь? Эти изменения пойдут только на пользу не только ученикам, но и всей школе. Будущее не за горами, поэтому надо меняться. Только мы в силах изменить то, что когда-то было сделано такими же индивидами, как и мы.

Сейчас, когда на дворе двадцать первый век, практически на каждом шагу можно встретить современные технологии и разнообразные новинки. Такие нововведения не могли обойти и наши школы. Уже большинство школ внедряют такие «диковинки», как: электронные дневники, видеокамеры, системы безопасности. Однако, это ещё не всё чем нас смогут удивить в будущем.

Можно предложить школам перейти с учебников на электронные носители. Это будет довольно удобно, ведь вместо того чтобы носить каждый день тяжёлый портфель, достаточно будет взять с собой специальный ноутбук или планшет, в который будут загружены все учебники, дополнительные материалы и методические пособия для изучения школьной программы. К тому же это приучит детей работать с электронными носителями. Однако внедрять такую технологию лучше со старших классов, так как им легче будет адаптироваться к новой системе.

Правда, для использования таких носителей есть ограничения по времени, а главное, должен быть выход в Интернет, что пока возможно только в крупных городах.

Помимо замены учебников на электронные носители, было бы неплохо увидеть в будущих «цифровых» школах безналичную оплату в столовой, потому что у многих старшеклассников уже имеются банковские карты. Часто можно столкнуться с ситуацией, когда школьник не может взять себе еды, потому что у него нет наличных денег, а есть только банковская карта. Безналичная оплата будет неплохим нововведением в школах нового поколения.

Введение информационных технологий в школы и другие средние общеобразовательные учебные учреждения позволит ребятам быстрее адаптироваться к новинкам, которые появляются в последнее время с внушительной скоростью.

Безусловно, нужно подумать о решении кадрового вопроса, чтобы в школах не было случайных людей, а в педагогические институты шли те, кто действительно желает работать с детьми. Современные учителя должны стремиться получать знания о новых технологиях и применять на практике в школах, лицеях, гимназиях, кадетских корпусах, суворовских и нахимовских училищах. Тогда и качество образования повысится, и уровень знаний выпускников порадует.

2. Безопасность и гигиена школьника в цифровом мире. XXI век — это век информационных технологий: миром правит техника, самой надёжной валютой стала информация (самой главной ценностью стала информация), а Интернет является неотъемлемой частью нашей жизни. Люди стараются сделать всё максимально комфортным и удобным для себя, поэтому всё чаще технологии и техника заменяют участие человека в реальной жизни. Такая участь ждёт и учебные заведения, в том числе школу. На смену учебникам и тетрадям приходят портативные устройства: ноутбуки, смартфоны, планшетные компьютеры; а домашние задания всё чаще отправляют и задают в онлайн-формате. Для удобства некоторые учителя пользуются помощью интернет-уроков, а ученики для более глубокого понимания отдельных тем и вопросов узнают дополнительную информацию в интернете прямо на уроке и делятся ей со своими одноклассниками.

Все нововведения кажутся очень привлекательными и удобными для большинства, но некоторые зададутся вопросом: а всегда ли техника приносит людям только пользу, в особенности школьникам? Ведь она может навредить их здоровью: испортить осанку, ухудшить зрение, вызвать головные боли или снижение концентрации внимания и недомогание, что может негативно отразиться на обучении [1].

В первую очередь, электронные устройства дают ученикам возможность не носить учебники и тетради, суммарный вес которых может достигать 4–5 килограммов — ежедневное ношение подобных тяжестей может привести к постоянным болям в спине и последующему нарушению осанки. Так что техника в данном случае может предупредить серьезные проблемы.

С другой стороны, постоянное использование планшетных устройств плохо сказывается на зрении школьника, однако можно избежать серьёзных проблем, следуя некоторым правилам по использованию устройств. Во-первых, следует правильно сидеть и расположить условный монитор под углом 80–100 градусов к рабочей поверхности, что даёт возможность снизить нагрузку на позвоночник во время занятий. Известно, что постоянное напряжение мышц спины может привести к последующему нарушению осанки и вызвать головную боль.

С целью предупреждения вышеописанных осложнений необходимо принять расслабленную и удобную позу, откинувшись на спинку стула или кресла, чтобы экран монитора находился на расстоянии вытянутой руки, а его верхняя треть располагалась на уровне глаз.

Для создания максимально комфортных условий для продуктивной работы за компьютером желательно пользоваться вспомогательными средствами, к которым относятся компьютерные очки, антибликовый фильтр для экрана монитора, регулируемая по высоте подставка под клавиатуру с упором для кистей рук, коврик для мыши с поддержкой кисти и другие полезные вещи, что сделает ваше времяпрепровождение за ПК максимально комфортным и безопасным [2].

Кроме того, необходимо соблюдать режим работы и отдыха и регулярно выполнять гимнастику для глаз, которая включает в себя фокусировку зрения на 10–15 секунд сначала на отдаленном объекте, а после — на кончике своего носа, что позволит расслабить мышцы и избавиться от «тумана» перед глазами. Также можно закрыть их и плавно описать глазными яблоками окружность сначала по часовой стрелке, а затем — против. Каждый час следует выполнять небольшую разминку для уставших мышц кистей рук, шеи и спины. Рекомендуется каждые полчаса давать отдых своим глазам.

При использовании мобильного устройства рекомендуется держать его ниже уровня глаз на расстоянии не менее 35 см, смотря на экран под углом 90 градусов.

Соблюдая эти простые правила, мы можем минимизировать негативные последствия от частого и длительного использования электронных устройств и наслаждаться школьной жизнью во всех красках [3, 4].

Список литературы

[1] http://www.neumeka.ru/pravila_raboty_za_kompyuterom.html

[2] https://hadassah.ru/o-klinike/poleznaya-informaciya/10-pravil-raboty-za-komputerom.htm

[3] https://www.hse.ru/twelve/part2

[4] https://educationmanagers.ru/novosti_/cifrovaya-shkola-novoe-soderzhanie-klassicheskogo-obrazovaniya/

УДК 531.8

Волокитина Т.Н.[1]

Формирование навыков исследовательской работы на уроках математики с использованием УМК Т.В. Дорофеева

Аннотация. В статье представлен опыт использования системно-деятельностного подхода в обучении на уроках математики 6-9 классов. Приведен набор задач-исследований из УМК Г.В.Дорофеева и описаны формы работы с ними на конкретных примерах.

Что значит преподавать? —
Это систематически побуждать
учащихся к собственным открытиям.
Герберт Спенсер

Школа сегодня стремительно меняется, пытается попасть в ногу со временем. Главное же изменение в обществе, влияющее и на ситуацию в образовании, - это ускорение темпов развития. Подготовка к будущей жизни закладывается еще в школе, поэтому требования к образованию меняют свои приоритеты. Сегодня одна из важнейших задач общеобразовательной школы состоит в том, чтобы привить учащимся умения, позволяющие им самостоятельно добывать информацию и активно включаться в творческую исследовательскую деятельность. Успешной организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся способствует реализация учителем системно-деятельностного подхода. Я думаю, что его подача материала в учебниках Дорофеева Г. В. и др. наиболее удачно вписывается в концепцию системно-деятельностного подхода. Например, при введении центральных понятий курса предшествует этап содержательно - практической деятельности, в ходе которого знания формируются на наглядно-интуитивном уровне, этому в значительной степени способствует набор упражнений, в которых учащиеся выполняют разнообразную практическую деятельность, составляющую материальную основу понятий. Правила возникают как обобщенное вербальное выражение способов действий, которые на интуитивном уровне уже освоены.

[1]ГБОУ гимназия № 446 Колпинского района г. Санкт- Петербурга,
e-mail: tatvolokitina5@gmail.com

Так при введении операций сложения и вычитания отрицательных чисел с разными знаками мы сначала «играем в два кубика». Белый кубик показывает число выигрышных очков, черный — число проигрышных. Результат выигрыша записываем со знаком плюс, а проигрыш со знаком минус. И затем считаем очки каждого хода, общий счёт. Выполняя такие упражнения, мы наблюдаем, нащупываем правило сложения. А затем пытаемся сформулировать «своё» правило и привыкаем к нему на простых примерах с целыми числами. И тогда серьезное правило из учебника уже не вызывает затруднений и ребята хорошо им пользуются, считая примеры с рациональными числами.

Но лично мне особенно симпатична в учебниках Г. В. Дорофеева линия задач — исследований, которая прослеживается с шестого по девятый класс. Работа над этими задачами выполняет не только функцию обучения математическим понятиям, математическим операциям, алгоритмам и т.д., но что самое ценное, на мой взгляд, помогает учителю подвести учащихся к самостоятельному мышлению и самостоятельной практической деятельности, способствует формированию у школьников таких качеств, как вдумчивость, терпеливость, настойчивость, выдержка, аккуратность, сообразительность.

Задача №381 (8 класс) [1]

а) Заметьте закономерность и запишите следующие три числа в последовательности:

$$2\frac{2}{3}, \quad 3\frac{3}{8}, \quad 4\frac{4}{15}, \quad 5\frac{5}{24}, \ldots.$$

б) Проверьте равенства:

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\cdot\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

Составьте несколько аналогичных равенств.

в) Запишите соответствующее равенство в буквенном виде и докажите его.

Решения этой задачи заслуживает особого внимания, в общем виде справедливо:

$$\sqrt{a\frac{a}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a\cdot(a^2-1)+a}{a^2-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a\cdot((a^2-1)+1)}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a^3}{a^2-1}} = a\cdot\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}.$$

Особое внимание надо обратить на то, что под квадратным корнем стоит дробь $a\dfrac{a}{a^2-1}$, а не произведение целого числа a на дробь $\dfrac{a}{a^2-1}$. В противном случае:

$$\sqrt{a\cdot\frac{a}{a^2-1}} \neq a\cdot\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}.$$

Мы видим, что сначала рассматривая частные случаи, мы наблюдаем, учимся увидеть закономерность, выдвигаем гипотезу, проверяем ее жизнеспособность. Формулируем соответствующее свойство и доказываем его.

Систематическое обучение такому подходу, на мой взгляд, учит школьника не пасовать, встречая сложную незнакомую и, на первый взгляд, совсем непонятную задачу, к которой не знаешь, как подступиться и не говорить: «Мы этого не проходили». А начинать изучать частные случаи, пока за ними не выстроится закономерность. Увидеть и доказать. Не знаем алгоритма — не беда. А голова на что? Хочется отметить, что при решении этих задач ученики испытывают эмоциональный подъем, получают удовольствие от интеллектуального труда.

Формы работы с задачами-исследованиями следующие:

1. Задаю домашнее задание для тех, кто особенно заинтересован, но обязательно называю конкретных учеников, мысли и соображения которых было бы интересно послушать на следующем уроке. В учебнике хорошо расписаны шаги для достижения цели, поэтому всегда есть достаточное количество учеников, которые справляются с задачей.

Задача № 1180 (6 класс) [2]

1) В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ. Она разбивает четырехугольник на два треугольника. Сумма углов каждого треугольника $180°$. Чему равна сумма углов четырехугольника?

2) Начертите в тетради пятиугольник и проведите все диагонали, выходящие из какой-нибудь вершины. Сколько треугольников получилось? Чему равна сумма углов пятиугольника?

3) Сумма углов четырехугольника равна $2\cdot 180°$, пятиугольника — $3\cdot 180°$. Покажите, что сумма углов шестиугольника равна $4\cdot 180°$. Чему равна сумма углов n-угольника?

Ученица на следующем уроке очень толково представила свой поиск решения с чертежами, свои наблюдения и обосновала вывод. Получился небольшой научный доклад шестиклассницы.

Одноклассники даже аплодировали её ответу. И я думаю, что при прохождении в восьмом классе материала ребята вспомнят яркий ответ одноклассницы, а заодно и формулу суммы углов выпуклого n-угольника.

2. Фронтально решаем задачу, обсуждаем гипотезы. Кто быстрее сообразит, кто лучше сформулирует, кто сможет доказать. В такие моменты всегда оживление на уроке, интерес в глазах, здоровый азарт и конкуренция. Ведь приятно прослыть самым умным! Я не скуплюсь на похвалы, если кто-то из ребят быстро увидел закономерность и хорошо сформулировал свою идею. Если же сталкиваемся с затруднениями, особенно при формулировании идеи, то стараюсь подтолкнуть наводящими вопросами.

Задача № 611 (9 класс) [3]

1) Рассмотрите арифметическую прогрессию: $4; 8; 12; \ldots$. *Возьмите какой-нибудь член этой прогрессии, кроме первого, и убедитесь в том, что он равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.*
2) Докажите, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.
3) Найдите члены последовательности, обозначенные буквами, если известно, что эта последовательность — арифметическая прогрессия:
а) a_1; 12; a_3; 18; a_5; a_6; ...
б) -7; a_2; -17; ...; a_15; -82; a_17; ....

3. Исследовательские работы в группах. Эту форму работы, целесообразно использовать при решении задач с геометрическим содержанием и заданий на исследование функций.

Задача № 678 (8 класс) [1]

1) В одной системе координат постройте прямые:
а) $y = 3x + 1$ *и* $y = -1/3x + 1$*; б)* $y = -2x + 2$ *и* $y = 1/2x - 3$.
2) Убедитесь, что прямые на каждом из рисунков перпендикулярны. Как связаны между собой угловые коэффициенты каждой пары прямых?
3) Запишите в буквенном виде соотношение, связывающее угловые коэффициенты перпендикулярных прямых $y = k_1x + l_1$; $y = k_2x + l_2$.
Запишите уравнение какой-нибудь прямой, перпендикулярной прямой:
а) $y = -1/4x - 1$*; б)* $y = x + 5$*. В каждом случае выполните чертеж.*

4) Дана прямая $y = -2/3x + 3$*. Запишите уравнение прямой:*
а) перпендикулярной данной прямой и проходящей через начало координат;
б) перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку $A(9;2)$*;*
в) пересекающую данную прямую под прямым углом в точке $M(0;3)$.

Каждой группе можно предложить свой набор функций. На такие задачи, конечно, тратится значительная часть времени урока или внеурочного занятия, но нельзя считать это время потраченным напрасно, в конечном итоге задачи-исследования учат грамотно решать проблемы. А в решении проблем растёт и развивается личность.

Список литературы

[1] Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. и др. Алгебра 8 класс, М., Просвещение, 2016. 320 с.

[2] Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. и др. Математика 6 класс, М.,Просвещение, 2016. 304 с.

[3] Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. и др. Алгебра 9 класс М., Просвещение, 2016. 336 с.

[4] Дорофеев Г.В., Суворова С.Б.. и др. Алгебра 7 класс, М.,Просвещение, 2016. 287 с.

УДК 531.8

Кононова А.Ю.[1]

Педагогическая технология — дебаты на уроках математики в девятых классах

Аннотация. В данной статье представлен опыт использования педагогической технологии дебатов на уроках математики в 9-ых классах. Приведены примеры использования данной технологии, её актуальность для подрастающего поколения.

«Краткость — сестра таланта»
А.П. Чехов.

Верный отбор видов учебной деятельности, различных форм и методов работы, поиск различных ресурсов для повышения мотивации учащихся к изучению математики, ориентация учащихся на приобретение компетенций, необходимых для жизни и деятельности в мире позволит получить требуемый результат обучения.

Проведение соревнований по методу «Дебаты» среди учащихся содействует становлению нового поколения гражданского открытого общества: толерантного и мобильного, критически осмысляющего перемены. Данный метод развивает способности и формирует необходимые навыки для ведения диалога, дискуссии.

На уроках математики я использовала следующую технологию — дебаты на одном из этапов урока, как правило, на этапе рефлексии. Использовался классический формат Карла Поппера. В дебатах участвуют две команды из трёх человек. Они обсуждают заданную тему, при этом одна команда утверждает тезис, а другая его опровергает. Остальные учащиеся являются зрителями и судьями. Судьи оценивают учащихся по качеству и количеству приведенных аргументов. Каждый из судей заранее ознакомлен с критериями оценивания. На данный этап обычно отводится до 15 минут. В силу возраста учащихся и четких рамок, которые я сама устанавливаю, этого времени, как правило, достаточно. Если же тема вдруг станет чрезмерно животрепещущей, то у меня всегда готово предложение для учащихся перенести это обсуждение во внеклассную работу.

[1]ГБОУ гимназия № 446 Колпинского р-на г. Санкт-Петербурга,
e-mail: aukononova79@gmail.com

Первая тема дебатов: «Человеку, в обычной жизни, не обойтись без математики». Из года в год, рассказывая о биквадратных уравнениях, интегралах и производных, я слышу от своих учеников один и тот же вопрос: «Как нам всё это пригодится в жизни?» И за годы работы у меня уже сформировался готовый ответ. Но тут я выступала в роли стороны, которая всегда выдвигает аргументы «за», и, естественно, под давлением авторитета ученики принимали или, молча, не принимали мои доводы, и мы благополучно закрывали этот вопрос. Но всегда было интересно услышать доводы «против». Формат дебатов позволил ученикам смелее высказываться, и я услышала очень интересные рассуждения. Не буду приводить аргументы «за», они очевидны. А вот аргументы «против»:
1) по математике не присуждают Нобелевскую премию;
2) профессор математики Мориарти, граждане Мавроди и Березовский — выдуманный и реальные злодеи — математики;
3) по статистике за 2017 г (по ЕГЭ) до 20% выпускников школы реально обладают математическими познаниями на уровне 6-8 класса. До 40% — не выше 9 класса. И ничего: никто из них от этого не помер;
4) Можно отлично прожить в современном мире без математики. Если надо что-то посчитать, современный человек достает мобильный телефон и считает. Можно использовать калькулятор или компьютер для этой цели. Так что не надо быть «семи пядей во лбу», чтобы быть успешным человеком. На дворе 21 век, и никто не ходит в магазин с блокнотом, чтобы сложить или вычесть цены, проценты посчитать.

Вот пришел человек в магазин, выбрал товар за 2435 рублей, подошел к кассе, дал продавцу карту скидок (5%). Что делает продавец? Вычисляет проценты на бумаге? Или покупатель вычисляет? Нет, конечно. Карточка считывается специальным устройством, и покупателю говорят цену уже со скидкой. Все очень просто, и математика тут не нужна.

Данные споры, как правило, приводили к тому, что часть учащихся меняли свои позиции. Те, кто был «за» переходили к тем, кто «против», и наоборот. Но всегда оставались приверженцы своей очки зрения.

Следующая тема, которую я бы хотела предложить своим учащимся — «Математика — царица всех наук». В качестве аргументов, я предложу найти учащимся цитаты учёных, писателей и пр. Конечно, это потребует от учащихся определённой подготовки, но, мне кажется, получится интересно.

УДК 531.8

Кузъмина Е.Ю.[1]

Методы внеклассной работы по математике в средних общеобразовательных учреждениях

Аннотация. В статье описаны и систематизированы основные виды внеклассной работы в старших классах общеобразовательных средних учебных заведений с учащимися, интересующимися и увлекающимися математикой.

Предмет математики настолько
серьёзен, что надо не упускать
случая сделать его занимательным.
Б.Паскаль

1. Введение. Современная жизнь предъявляет к человеку новые требования. Общество нуждается в людях творчески мыслящих, любознательных, активных, умеющих принимать нестандартные решения и брать ответственность за их принятия, а также умеющих осуществлять жизненный выбор.

В последние десятилетия, при переходе к постиндустриальному обществу логика развития производственной сферы привела к осознанию того, что истинное совершенствование жизни связано не столько с внешней образованностью человека, усвоением им той или иной системы знаний и умений, сколько с развитием его ума и способностей, системы ценностей и мотивационных установок. Это не просто вопрос успешности человека в жизни, что, естественно, очень важно. Но это ещё и вопрос безопасности и конкурентоспособности страны, условие её расцвета и мирного развития.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы начального общего образования по математике должны отражать:

1) использование начальных математических знаний для описания окружающих предметов, процессов, явлений, а также оценки их количественных и пространственных отношений;
2) овладение основами логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи,

[1]ГБОУ гимназия № 446 Колпинского р-на г. Санкт-Петербурга,
e-mail: alenajurevna@mail.ru

измерения, пересчета, прикидки и оценки, наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов;
3) приобретение начального опыта применения математических знаний для решения учебно-познавательных и учебно-практических задач;
4) умение выполнять устно и письменно арифметические действия с числами и числовыми выражениями, решать текстовые задачи, умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы, исследовать, распознавать и изображать геометрические фигуры, работать с таблицами, схемами, графиками и диаграммами, цепочками, совокупностями, представлять, анализировать и интерпретировать данные;
5) приобретение первоначальных знаний и представлений о компьютерной грамотности.

Внеклассная работа по математике составляет неразрывную часть учебно-воспитательного процесса обучения математике, сложного процесса воздействия на сознание и поведение младших школьников, углубление и расширение их знаний и навыков; прежде всего таких факторов как содержание самого учебного предмета — математики, всей деятельности учителя в сочетании с разносторонней деятельностью учащихся.

Несмотря на свою необязательность для школьника, внеурочные занятия по математике заслуживают самого пристального внимания каждого учителя, преподающего этот предмет.

Общее образование — это совокупность знаний, умений, навыков, способов творческой деятельности, ценностных ориентиров, необходимых каждому человеку независимо от его профессии. Образование, которое призвано сохранить достигнутый уровень цивилизованности общества, принято считать основным. Активное освоение содержания, выходящего за пределы общеобразовательного стандарта, называется дополнительным образованием. С точки зрения возможностей каждого учебного предмета можно говорить о дополнительном предметном образовании, основной целью которого является приобщение учащихся к интеллектуальному опыту мировой культуры, повышение уровня конкретно-предметной подготовки, предоставление возможностей для освоения компетенций в области конкретной науки. Под дополнительным математическим образованием школьников будем понимать систематическое освоение математических компетенций, не входящих в инвариант математического образования.

2. Внеклассная работа по математике. Под внеклассной работой по математике понимаются необязательные систематические занятия учащихся с преподавателем во внеурочное время. Различают два типа внеклассной работы по математике:

1) работа с детьми, отстающими от других учащихся в изучении программного материала (дополнительные внеклассные занятия);

2) работа с учащимися, проявляющими к изучению математики повышенный, по сравнению с другими, интерес и способности (внеклассная работа в традиционном понимании этого термина).

Основной целью внеклассной работы с отстающими школьниками является своевременная ликвидация и предупреждение имеющихся у учащихся пробелов в знаниях и умениях по курсу математики. Первый тип внеклассной работы должен иметь ярко выраженный индивидуальный характер: занятия с учащимися, пропустившими занятия из-за болезни или другой уважительной причины; занятия с учащимися, перешедшими из другой школы, и т.п.

Внеклассные занятия с учащимися, проявляющими к изучению математики повышенный интерес и способности, отвечает следующим основным целям:

— пробуждение и развитие устойчивого интереса учащихся к математике и её приложениям;
— расширение и углубление знаний учащихся по программному материалу;
— развитие математических способностей, мышления, культуры учащихся;
— развитие у учащихся умения самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой;
— привитие учащимся научно-исследовательских навыков;
— расширение и углубление представлений учащихся о практическом значении и культурно-исторической ценности математики, о роли ведущих учёных-математиков в развитии мировой науки.

Перечислим наиболее распространенные формы внеклассной работы с учащимися по математике:
— система спецкурсов, кружков, факультативов;
— олимпиады по математике;
— математические соревнования, школьная математическая печать, математические вечера, недели (декады) математики;
— математические экскурсии;
— внеклассное чтение по математике;

— школьные математические конференции;
— математические общества учащихся.

2.1. ***Математический кружок.*** Кружок (группа, студия) способствует формированию и развитию интереса учащихся к математике, расширяет и углубляет математические знания, развивает математический кругозор, мышление, способности, исследовательские умения школьников, позволяет в дальнейшем сделать правильный выбор профессии.

Итогом работы кружка (группы, студии) может стать математический вечер.

Возможные темы кружковых (групповых, студийных) занятий приведены в книге А.В. Фаркова «Внеклассная работа по математике». Основные формы проведения занятий кружка (группы, студии).

1. Комбинированное тематическое занятие — наиболее традиционная форма.
2. Занятия-семинары.
3. Занятия-практикумы проводятся после того, как рассмотрена определенная тема на семинаре.
4. Комбинированное занятие разновозрастного кружка.
5. Итоговое занятие кружка может быть проведено в форме математического вечера, олимпиады и т.п.

2.2. ***Факультативные занятия.*** Общая характеристика и целевое предназначение спецкурсов и факультативных занятий. «Факультативный» означает «необязательный», «предоставленный собственному выбору». Цели организации факультативных занятий — развитие математических способностей, интереса, мышления учащихся; углубленное изучение математики; содействие профессиональной ориентации учащихся в области математики и ее приложений. Основные виды факультативов по математике (А.В. Фарков):

— факультативы, углубляющие знания, полученные учащимися на уроках (на таких факультативах основное внимание уделяется вопросам школьной математики);
— факультативы, расширяющие знания учащихся по математике (на таких факультативах основное внимание уделяется темам, которые обычно не входят в школьную программу, в том числе рассматриваются методы решения олимпиадных задач).

Элективные курсы — это обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения.

2.3. ***Математические игры и развлечения.*** Цели, задачи и теоретико-методологические аспекты игровой технологии. Одним из древнейших средств воспитания, обучения и развития учащихся считается игра. Включение игры в учебный процесс заметно повышает интерес к учебному предмету, создает ситуации, наполненные эмоциональными переживаниями, стимулирует деятельность учащихся.

Игры классифицируют по различным признакам.[1mm] — игры с правилами (настольные; игры-состязания; подвижные игры на местности; компьютерные)
— творческие игры (ролевые; игровое проектирование; компьютерные) в зависимости от творческой активности учащихся.

2.4. *Математические соревнования, конкурсы, фестивали.* Математическое соревнование — это форма учебной деятельности учащихся, при которой участники стремятся превзойти друг друга в решении математических задач. Выделяют следующие виды математических соревнований:

— математическая олимпиада;
— математический бой;
— математический конкурс;
— математическая игра;
— математический турнир;
— математическая карусель;
— математическая викторина;
— математическая эстафета и др.

2.5. *Математические олимпиады.* Одной из разновидностей математических соревнований являются математические олимпиады. Целевое предназначение проведения олимпиад по математике: развитие математических способностей, мышления, интереса к предмету; расширение математического кругозора учащихся; выявление математически одаренных учащихся.

С 1994 года в Российской Федерации проводится международный конкурс-олимпиада «Кенгуру». Основная цель этого конкурса — развитие интереса к математике. Главное отличие конкурса — его массовость. Организатор конкурса «Кенгуру» в Российской Федерации — Институт продуктивного обучения РАО. Конкурс «Кенгуру» проводится во всех странах-участницах в один и тот же день.

Существуют и другие олимпиады.

2.6. *Школьные математические печатные материалы.* К школьной математической печати относятся, прежде всего, математическая стенная газета, математический листок, журнал математического кружка, тематический стенд и математический уголок в кабинете математики, альбом с решением задач повышенной сложности, задач олимпиадного характера, занимательных задач и задач для поступающих в вузы, календарь знаменательных дат, фотогазета, выставка, учебный иллюстративный журнал и др.

Газета — периодическое текстовое листовое издание, содержащее официальную информацию, оперативную информацию, художественные произведения, фотоснимки, рекламу и т.д. Основные цели математической стенной газеты — пропаганда математических знаний среди учащихся; повышение их интереса к математике.

2.7. ***Математические вечера.*** Математический вечер — художественное, занимательное, познавательное мероприятие. Это не только форма организации досуга учащихся, но и эффективный способ поддержания интереса к предмету, предоставляющий школьникам возможность проявить свои разнообразные способности.

По своему содержанию вечера могут быть тематическими, юбилейными, историческими, занимательными, прикладными, смешанными. По форме проведения вечера подразделяются на игры, турниры, бои, конкурсы, лабиринты, «базары», путешествия, экскурсии и т.п.

С точки зрения педагогической пользы, период подготовки вечера по математике имеет для учащихся большее значение, чем участие в его проведении. Как правило, математические вечера проводятся один раз в год, как итог недели (декады) математики.

2.8. ***Проектная деятельность учащихся.*** Целью проектной технологии является самостоятельное «постижение» школьниками различных жизненно важных для них проблем. Материализованным продуктом проектирования является учебный проект, который определяется как самостоятельно принимаемое учащимися развернутое решение проблемы. В проекте наряду с научной (познавательной) стороной решения всегда присутствуют эмоционально-ценностная (личностная) и творческая стороны. Именно эмоционально-ценностный и творческий компоненты содержания определяют, насколько значим для учащихся проект и какова степень самостоятельности его выполнения.

Данная технология всегда ориентирована на самостоятельную деятельность учащихся — индивидуальную или групповую, которую школьники выполняют в течение определенного отрезка времени, и предполагает совокупность творческих проблемных методов обучения.

Результаты работы школьников докладываются на научно-практической конференции.

2.9. ***Недели математики.*** Одной из самых распространенных форм внеклассной работы по математике в школе, организации досуга учащихся в Центрах дополнительного математического образования являются недели (декады) математики.

В план проведения недели (декады) могут быть включены викторины, олимпиады, математические бои, КВН, математический вечер научно-практические конференции, выпуски стенгазет и т.п.

2.10. ***Математические каникулы.*** По целевому признаку существующие каникулярные математические школы и лагеря можно условно разделить на четыре группы (И.С. Рубанов):

— отборочные;
— воспитательные;
— образовательные;
— развивающие.

Формы проведения занятий: лекции; «занятия кружкового типа с упором на самостоятельную работу учащихся» (И.С. Рубанов); математические соревнования (игры; бои; олимпиады; конкурсы и т.п.).

2.11. ***Дистанционные формы дополнительного математического образования школьников.*** Примерное содержание:

— Образовательный web-квест.
— Дистанционные игровые турниры.
— Дистанционные конкурсы и проекты.
— Дистанционные математические олимпиады.
— Дистанционные обучающие олимпиады по математике.
— Дистанционные предметные недели.
— Интернет-карусель по математике.
— Веб- и чат-занятия.
— Дистанционные лекции.

3. Заключение. Константину Кушнеру принадлежит следующая мысль: «Задача учителя не в том, чтобы дать ученикам максимум знаний, а в том, чтобы привить им интерес к самостоятельному поиску знаний, научить добывать знания и пользоваться ими.»

Любой ученик способен к творческой деятельности, поэтому учителю необходимо уметь организовывать такую деятельность, которая побуждала бы каждого школьника к раскрытию своих творческих способностей, активности и самостоятельной деятельности.

Список литературы

[1] Альхова З.Н., Макеева А.В. Внеклассная работа по математике. Саратов: Лицей, 2003.

[2] Балк М.Б., Балк Г.Д. Математика после уроков. М.: Просвещение, 1971.

[3] Внеклассная работа по математике в средней школе. / под ред. В.В. Сухорукова. Балашов, 1994.

[4] Дополнительное образование детей. М.: ВЛАДОС, 2000.

[5] Дробышев Ю.А. Олимпиады по математике. М.: Первое сентября, 2003.

[6] Дышинский Е.А. Игротека математического кружка. М.: Просвещение, 1972.

[7] Казакова Е.И. Проектирование образовательных программ. СПб., 1994.

[8] Ключ к успеху: Авторские программы педагогов дополнительного образования. М., 2006.

[9] Коваленко, В.Г. Дидактические игры на уроках математики. М.: Просвещение, 1990.

[10] Математика: Интеллектуальные марафоны, турниры, бои: 5-11 классы. М.: Первое сентября, 2003.

[11] Мерлина, Н.И. Дополнительное математическое образование школьников и современная школа. М.: Гелиос АРВ, 2000.

[12] Организация внеклассной работы по математике в средней школе / под ред. В.Л. Пестеревой. Пермь, 2010. - 240 с.

[13] Программное обеспечение учреждений дополнительного образования. СПб., 1995.

[14] Предметные недели в школе. Математика / сост. Л.В. Гончарова. Волгоград: Учитель, 2002.

[15] Труднев В.П. Внеклассная работа по математике в начальной школе. М.: Просвещение, 1975.

[16] Фарков А.В. Внеклассная работа по математике. 5-11 классы. М.: Айрис-пресс, 2009.

[17] Фарков А.В. Математические кружки в школе. 5-8 классы. М.: Айрис-пресс, 2005.

[18] Фарков А.В. Школьные олимпиады. М.: Айрис-пресс, 2009.

Секция 3.

Преподавание точных наук в высших учебных заведениях

УДК 512.71

Беккер Б.М.[1], *Востоков С.В.*[2], *Востокова Р.П.*[3]

Теорема Гильберта о нулях

Аннотация. Цель настоящей статьи — познакомить читателя с теоремой о нулях, доказанной Гильбертом в 1893 году. С тех пор появилось множество различных доказательств этой теоремы, использующих разнообразную технику: теорию исключения, коммутативную алгебру, теорию моделей. Большое внимание к этой теореме связано с тем, что она является одним из результатов, лежащих в основе алгебраической геометрии — бурно развивающейся области математики, имеющей в настоящее время многочисленные применения от математической физики до криптографии. В данной статье мы подробно объясняем читателю-непрофессионалу формулировку теоремы о нулях на простых конкретных примерах и приводим доказательства этой теоремы, стараясь свести до минимума необходимые предварительные знания. От читателя требуется лишь знание основ алгебры в пределах стандартного курса.

Ключевые слова: алгебраически замкнутое поле, система уравнений, теорема о нулях.

1. Введение. Теорема о нулях, является одним из основополагающих результатов, на котором построено всё грандиозное здание современной алгебраической геометрии, — области современной математики, без преувеличения занимающей лидирующее положение по количеству всевозможных приложений. Эта теорема обобщает на многочлены от нескольких переменных некоторые простые утверждения, справедливые для многочленов от одной переменной. Цель настоящей статьи — познакомить непрофессионала с разнообразными формулировками и доказательствами этой теоремы, используя по мере возможности минимум специальных знаний. Все понятия и факты, выходящие за рамки стандартного курса алгебры, объясняются в статье.

2. Формулировки теоремы и обсуждение её частных случаев. Пусть K — алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики (читатель, не знакомый с соответствующими понятиями может без значительного ущерба для понимания считать, что K — поле комплексных чисел (или поле всех алгебраических чисел, т.е. корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом единица).

Пусть $K[x_1, \dots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из поля K. Если $n = 1$, то мы

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: b.bekker@spbu.ru

[2]Санкт-Петербургский государственный университет, «УниШанс», e-mail: s.vostokov@spbu.ru

[3]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: r.vostokova@mail.spbu.ru

имеем дело с обычными многочленами от одной переменной (в этом случае мы в обозначении переменной индекс будем опускать). Теорема Гильберта даёт необходимое и достаточное условие не совместности системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \qquad \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1 (теорема Гильберта о нулях)**.** *Система* (1) *не имеет решений в* K *в том и только в том случае, если существуют многочлены*

$$g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

такие, что

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f_k(x_1, \ldots, x_n)g_k(x_1, \ldots, x_n) = 1. \tag{2}$$

В одну сторону утверждение этой теоремы очевидно: если равенство (1) имеет место для некоторых многочленов $g_1(x_1, \ldots, x_n)$,..., $g_k(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, то подстановка любого решения $(c_1, \ldots, c_n)$ системы (1) в левую часть равенства (2) приводит к противоречию. Таким образом, нетривиальной частью теоремы о нулях является обратное утверждение: если система (1) не имеет решений в K, то некоторая линейная комбинация левых частей системы с многочленными коэффициентами равна 1. Заметим, что если существуют многочлены $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, для которых справедливо равенство (2), то существуют также и многочлены $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, для которых справедливо равенство

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f_k(x_1, \ldots, x_n)g_k(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

в котором $g(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный наперёд заданный многочлен с коэффициентами из K. Действительно, достаточно многочлены, для которых выполняется равенство (2), умножить на $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Многочлены вида

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + f_k(x_1, \ldots, x_n)g_k(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ — фиксированные многочлены, а многочлены $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ пробегают кольцо $K[x_1, \ldots, x_n]$, образуют идеал кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$ — *идеал, порождённый многочленами* $f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, теорема о нулях утверждает, что система уравнений не имеет решений в том и только в том случае, если идеал, порождённый левыми частями уравнений, совпадает со всем кольцом многочленов (т.е. является единичным идеалом). Опять же нетривиальной частью теоремы является утверждение о том, что если система (1) не имеет решений, то идеал, порождённый левыми частями уравнений является единичным, или, что то же самое, если идеал, порождённый левыми частями уравнений системы не совпадает со всем кольцом многочленов, то система (1) имеет решение в K.

1° Рассмотрим простейший частный случай этой теоремы: $n = 1,\ m = 1$ и $K = \mathbb{C}$. В этом случае система (1) сводится к одному уравнению $f(x) = 0$. Критерий разрешимости такого уравнения даёт основная теорема алгебры, которая утверждает, что уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — ненулевой многочлен, имеет корень в том и только в том случае, если степень многочлена $f(x)$ больше нуля. Другими словами, уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений в K в том и только в том случае, если степень многочлена $f(x)$ равна нулю. Последнее условие очевидно равносильно существованию многочлена $g(x)$ такого, что

$$f(x)g(x) = 1.$$

Таким образом, в случае $n = 1,\ k = 1$ теорема Гильберта о нулях равносильна утверждению об алгебраической замкнутости поля K.

2° Пусть теперь $n = 1$, а k произвольно. В этом случае система (1) принимает вид:

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0. \tag{4}$$

Всякое решение этой системы в K является корнем уравнения $d(x) = 0$, где $d(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $f_1(x), \ldots, f_k(x)$, и наоборот, всякий корень уравнения $d(x) = 0$ является решением системы (4). Следовательно, система (4) равносильна уравнению $d(x) = 0$, которое, в силу алгебраической замкнутости поля K, не имеет решений в том и только в том случае, если $d(x)$ — ненулевая константа. По теореме о линейном представлении наибольшего общего делителя в кольце $K[x]$ получаем, что система (4) не имеет решений в том и только в том случае, если существуют

$$g_1(x), \dots, g_k(x) \in K[x]$$

такие, что

$$f_1(x)g_1(x) + \dots + f_k(x)g_k(x) = 1.$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае теорема о нулях является тривиальным следствием алгебраической замкнутости поля K (см. пункт 1°) и теоремы о линейном представлении наибольшего общего делителя, справедливой в произвольном кольце многочленов от одной переменной.

Для многочленов от нескольких переменных линейного представления наибольшего общего делителя нет, и теорему о нулях можно рассматривать как обобщение этого линейного представления: условие взаимной простоты многочленов нужно заменить на отсутствие у них общих корней.

3° Пусть теперь n и k — любые, а многочлены $f_i(x_1, \dots, x_n)$ имеют степень 1:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i. \tag{5}$$

В этом случае система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{6}$$

Применяя к уравнениям этой системы элементарные преобразования, мы приведём систему к ступенчатому виду. Заметим, что каждое из уравнений полученной ступенчатой системы является линейной комбинацией уравнений исходной системы, т.е. имеет вид

$$c_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots$$
$$\dots + c_k(a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n) = c_1b_1 + \dots + c_kb_k$$

при некоторых $c_1, \dots, c_k \in K$. Система (6) не имеет решений в том и только в том случае, если последнее ненулевое уравнение полученной ступенчатой системы имеет вид

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b,$$

где $b \neq 0$. В силу сказанного выше, это имеет место в том и только в том случае, если найдутся такие константы $c_1, \dots, c_k$, что

$$c_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + c_k(a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n) = 0$$

и

$$c_1b_1 + \cdots + c_kb_k = b \neq 0.$$

Откуда

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) + \cdots + c_k(a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n - b_k) = -b \neq 0,$$

$$\frac{c_1}{-b}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) + \cdots + \frac{c_k}{-b}(a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n - b_k) = 1.$$

Взяв в качестве многочленов $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ константы $c_i/(-b)$, мы получаем утверждение теоремы о нулях.

3. Сильная теорема о нулях, частные случаи и примеры. Из теоремы о нулях, сформулированной в предыдущем параграфе (и часто называемой слабой теоремой о нулях), вытекает следующее утверждение.

Теорема 2 (сильная теорема о нулях)**.** *Пусть многочлен* $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *— обращается в нуль на каждом решении системы* (1)*. Тогда существует такое натуральное* m *и такие многочлены* $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, \ldots, k)$*, что имеет место равенство*

$$f^m(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n)g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f_k(x_1, \ldots, x_n)g_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Заметим, что из сильной теоремы о нулях вытекает слабая. Действительно, пусть система (1) не имеет решений. Тогда условие сильной теоремы о нулях выполняется: взяв в качестве многочлена f константу 1, мы видим, что f обращается в нуль на множестве решений этой системы (на пустом множестве). Следовательно, 1 представляется в виде линейной комбинации многочленов f_i, что и утверждается в слабой теореме. Наша цель — доказать, что из слабой теоремы вытекает сильная. Приводимое ниже рассуждение носит название трюка Рабиновича.

Итак, пусть $f(x_1, \ldots, x_n), f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены, участвующие в формулировке сильной теоремы о нулях. Рассмотрим кольцо $K[x_1, \ldots, x_n]$ как подкольцо кольца

$K[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ многочленов от $n+1$-й переменной и одновременно рассмотрим следующую систему уравнений от неизвестных $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ 1 - x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

По условию многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на каждом решении системы (1). Поэтому система (7) решений не имеет. По слабой теореме о нулях (применённой к многочленам от $(n+1)$-й переменной, получаем, что существуют многочлены

$$h_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), h_{k+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

такие, что

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) h_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) + \cdots \\ \cdots + f_k(x_1, \ldots, x_n) h_k(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) + \\ +(1 - x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)) h_{k+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив $x_{n+1} = 1/f(x_1, \ldots, x_n)$ в равенство (8), получим

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) h_1 \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} \right) + \cdots \\ + f_k(x_1, \ldots, x_n) h_k \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} \right) = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Умножая обе части равенства (9) на достаточную степень многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$, чтобы избавиться от знаменателей, мы получим, что

$$f^m(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$

$$\cdots + f_k(x_1, \ldots, x_n) g_k(x_1, \ldots, x_n)$$

для некоторого натурального m. □

Рассмотрим несколько частных случаев.

1° Пусть $n = 1$, $k = 1$, $f_1(x) = x - c$, где $c \in K$. Сильная теорема о нулях утверждает, что если многочлен $f(x)$ обращается в нуль в точке c, то некоторая степень многочлена $f(x)$ делится на $x-c$; но поскольку $x-c$ неприводим, то и сам многочлен $f(x)$ делится на $x - c$. Это утверждение теоремы Безу.

2° Пусть $n = 1$, $k = 1$, $f_1(x) = a(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_s)^{k_s}$. Сильная теорема о нулях утверждает, что если некоторый многочлен обращается в нуль в $c_1, \ldots, c_s$, то некоторая его степень делится на $f_1(x)$. Это конечно очевидно и без теоремы о нулях: по условию $c_1, \cdots, c_s$ являются корнями многочлена $f(x)$. Значит, этот многочлен делится на $x - c_1, \ldots, x - c_s$. Пусть m — наибольшая из степеней $k_1, \ldots, k_s$. Тогда $f(x)^m$ делится на $f_1(x)$.

3° Пусть $f(x, y)$, $g(x, y)$ — многочлены от переменных x, y с коэффициентами из K. Теорема о нулях утверждает, что если многочлен $f(x, y)$ обращается в нуль во всех нулях многочлена $g(x, y)$, то некоторая степень многочлена $f(x, y)$ делится на $g(x, y)$. В частности, если многочлен $g(x, y)$ неприводим, то $f(x, y)$ делится на $g(x, y)$. Отсюда вытекает, что уравнение плоской неприводимой аффинной алгебраической кривой (которая определяется как множество всех решений уравнения вида $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — неприводимый многочлен) определено однозначно с точностью до постоянного множителя. Это конечно легко доказать и без использования теоремы о нулях (см., например, [1]). Аналогичный факт справедлив и для многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ от произвольного числа переменных. Множество решений уравнения $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в K^n называется *аффинной гиперповерхностью*. Можно ли восстановить уравнение гиперповерхности по гиперповерхности?

Ответ конечно отрицательный, если поле K не предполагать алгебраически замкнутым. Например, уравнения $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ и $x_1^4 + \cdots + x_n^4 = 0$ задают одно и то же множество — начало координат. Ответ так же отрицательный и в случае алгебраически замкнутого поля: уравнения $x_1 + \cdots + x_n = 0$ и $(x_1 + \cdots + x_n)^2 = 0$ задают одну и ту же гиперповерхность (подпространство) в K^n. Как же связаны многочлены $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$, если известно, что они задают одну и ту же гиперповерхность? Теорема о нулях даёт ответ на этот вопрос: некоторая степень каждого из этих многочленов делится на другой. В случае неприводимых многочленов это означает, что они отличаются на постоянный множитель.

4. Обсуждение различных путей доказательства теоремы о нулях. Напомним, что в предыдущем параграфе мы вывели из слабой теоремы о нулях сильную. Осталось доказать слабую теорему о нулях. Существует большое количество доказательств этой теоремы (см., например, [2], [3], [4], [5]). В некоторых из них используется понятие результанта и индукцией по числу переменных порождённый левыми частями системы неединичный. Одно такое доказательство мы приведём в следующем параграфе.

Другие доказательства основаны на конструкции, аналогичной конструкции присоединения к произвольному полю K корня произвольного неприводимого многочлена $f(x)$ одной переменной, а именно рассмотрения факторкольцо кольца $K[x]$ по идеалу, порождённому многочленом $f(x)$. Так как многочлен $f(x)$ неприводим, то идеал $(f(x))$, порождённый многочленом $f(x)$ является простым, а значит максимальным (поскольку кольце многочленов от одной переменной любой ненулевой простой идеал является максимальным). Следовательно, факторкольцо $L = K[x]/(f(x))$ является полем. Отождествляя элементы поля K с их образами в L, мы можем считать поле L расширением поля K. Образ переменной x в L и является корнем многочлена $f(x)$ в поле L (именно такой конструкцией получается поле комплексных чисел из поля вещественных). Заметим, что если поле K алгебраически замкнуто, то неприводимые многочлены над K — это в точности многочлены степени 1 и при указанном выше отождествлении $L = K$.

Попытаемся провести аналогичные рассуждения в случае многочленов от нескольких переменных. Рассмотрим систему уравнений (1). Пусть I — идеал кольца $K[x_1, \dots, x_n]$, порождённый левыми частями уравнений этой системы, т.е. множество всех многочленов вида

$$f_1(x_1, \dots, x_n)g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_k(x_1, \dots, x_n)g_k(x_1, \dots, x_n),$$

где $g_i(x_1, \dots, x_n)$ пробегают кольцо $K[x_1, \dots, x_n]$. Предположим, что этот идеал неединичный. Тогда он содержится в некотором максимальном идеале M кольца $K[x_1, \dots, x_n]$. Факторкольцо $L = K[x_1, \dots, x_n]/M$ является полем. Отождествляя элементы поля K с их образами в L, мы можем считать поле L расширением поля K. Пусть $c_1, \dots, c_n$ — образы переменных $x_1, \dots, x_n$ в поле L. Тогда набор $(c_1, \dots, c_n)$ является решением системы (1) в поле L. Но беда в том, что нам нужно было найти решение системы не в каком-то расширении поля K, а в самом K. Если бы L было алгебраическим расширением K, то в силу алгебраической замкнутости K выполнялось бы равенство $L = K$ и найденное решение лежало бы в K, что доказывало бы слабую теорему о нулях. Оказывается, L действительно алгебраично над K, и разные доказательства теоремы о нулях в этом направлении сводятся к доказательству этого факта.

Наконец, можно напрямую доказать следующее утверждение:

Если система (1) имеет решение $(c_1, \ldots, c_n)$ в некотором расширении F поля K, то она имеет решение и в самом поле K, не доказывая равенство $L = K$. А именно, если $c_1, \ldots, c_n$ алгебраичны над K, то, в силу алгебраической замкнутости K они содержатся в K, и доказывать нечего. Если же они не являются алгебраическими над K, т.е., грубо говоря, содержат переменные, то идея состоит в том, чтобы подставить в место этих переменные некоторые элементы из K и получить в результате решение в K. Доказательство, основанное на этой идее, изложено, например, в [3] и приведено в параграфе 7.

5. Доказательство слабой теоремы о нулях в случае несчётного алгебраически замкнутого поля.

1° Сначала рассмотрим случай $K = \mathbb{C}$. Пусть F — поле, порождённое над $\mathbb{Q}$ коэффициентами левых частей уравнений системы (1). Поле F является конечно порождённым расширением поля $\mathbb{Q}$, лежащим в $\mathbb{C}$, и, следовательно, оно счётно и имеет конечную степень трансцендентности над $\mathbb{Q}$. С другой стороны, поле $\mathbb{C}$ имеет над F бесконечную степень трансцендентности, так как поле $\mathbb{C}$ несчётно, а всякое расширение счётного поля конечной степени трансцендентности счётно. Рассмотрим максимальный идеал M кольца многочленов $F[x_1, \ldots, x_n]$, содержащий многочлены, стоящие в левых частях системы. Факторкольцо $L = F[x_1, \ldots, x_n]/M$ является полем. Образы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ в L являются корнями всех многочленов из M, а, значит, и решениями системы. Но любое конечно порождённое над $\mathbb{Q}$ поле можно вложить в $\mathbb{C}$. Действительно, существует такое чисто трансцендентное подрасширение M/F в L/F, что расширение L/M алгебраично.

Так как M получено из F присоединением конечного числа независимых переменных, а степень трансцендентности $\mathbb{C}$ над F бесконечна, то сопоставив этим переменным произвольным образом алгебраически независимые комплексные числа, мы получим вложение поля M в $\mathbb{C}$. Используя далее теорему о продолжении изоморфизмов, мы получим вложение L в $\mathbb{C}$. Образы элементов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ в $\mathbb{C}$ и дадут нужное решение системы.

2° Теперь докажем теорему для случая, когда K — произвольное несчётное поле произвольной характеристики. В отличие от предыдущего случая здесь понадобится небольшой трюк. Точно так же как и раньше, рассмотрим поле максимальный идеал M кольца многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$, содержащий многочлены, стоящие в левых частях системы и соответствующее поле $L = K[x_1, \ldots, x_n]/M$. Размерность расширения L/K не более, чем счётна. Как отмечалось в параграфе 4 достаточно доказать, что $L = K$, для чего достаточно доказать, что это расширение алгебраично.

Доказательство проведём от противного. Пусть $t \in L$ трансцендентен над K. Тогда подполе поля L, порождённое над K элементом t изоморфно полю рациональных функций $K(t)$. Рассмотрим следующий несчётный набор элементов поля $K(t)$:

$$\left\{\frac{1}{t-c}, \text{ где } \in K\right\}.$$

Элементы этого набора линейно независимы над K. Действительно, пусть для какого-нибудь конечного набора различных элементов $c_1, \ldots, c_n$ при некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ справедливо равенство

$$\lambda_1 \frac{1}{t-c_1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{t-c_n} = 0.$$

Освобождаясь от знаменателей и подставляя в полученное равенство последовательно $t = c_1, \ldots, c_n$, мы получим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$. Таким образом, мы получили противоречие с тем, что размерность L/K не более чем счётна.

6. Доказательство для произвольного алгебраически замкнутого поля $\boldsymbol{K}$ с применением результанта и индукции по числу переменных. Вначале докажем простое вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $n \geqslant 2$ — непостоянный многочлен полной степени d. Тогда существуют такие элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$, что коэффициент при x_n^d в многочлене*

$$f(x_1 + \lambda_1 x_n, \ldots, x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n)$$

отличен от нуля.

Доказательство. Пусть f_d — старшая однородная компонента многочлена f. Коэффициент при x_n^d в многочлене

$$f(x_1 + \lambda_1 x_n, \ldots, x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n)$$

равен $f_d(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)$.

Поле K бесконечно, так как оно алгебраически замкнуто. Следовательно, существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in F$, что

$$f_d(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0.$$

$\square$

Перейдём к доказательству самой теоремы 1.

Пусть I — идеал, порождённый левыми частями системы (1) и пусть $I \neq K[x_1, \dots, x_n]$. Нам нужно доказать существование решения системы (1) в K. Доказательство теоремы проведём индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $n \geqslant 2$. Заметим, что замена переменных, указанная в лемме, обратима. Рассмотрим произвольный непостоянный многочлен из I; пусть d — его степень. Воспользуемся леммой и рассмотрим замену переменных, переводящую этот полином в полином с ненулевым коэффициентом при x_n^d.

Произведём во всех полиномах из I такую замену переменных. Мы получим новый идеал кольца многочленов. Если мы докажем, что у всех многочленов из этого идеала есть общий корень, то, применяя к этому корню обратную замену переменных, мы найдём общий корень для многочленов исходного идеала. Поэтому можно считать с самого начала, что идеал I содержит какой-нибудь многочлен g с ненулевым коэффициентом при x_n^d, где d — степень g. Более того, можно считать, что идеал I содержит какой-нибудь многочлен g с коэффициентом при x_n^d, равным 1.

Рассмотрим теперь идеал I', состоящий из всех полиномов в I, не содержащих переменной x_n. Так как $1 \notin I$, идеал I' неединичный. В силу индукционного предположения существуют такие $a_1, \dots, a_{n-1}$, что $f(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$ для всех $f \in I'$. Теперь рассмотрим идеал J в $K[x_n]$, состоящий из многочленов

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n),$$

где $f \in I$.

Докажем, что $J \neq K[x_n]$. Будем рассуждать от противного. Пусть $1 \in J$. Тогда существует такой многочлен f в I, что

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) = 1.$$

Представим f в виде

$$f = f_0 + f_1 x_n + \dots + f_k x_n^k,$$

где $f_i \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

Очевидно, что

$$f_0(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 1, \; f_1(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \cdots = f_k(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0.$$

С другой стороны,

$$g = g_0 + g_1 x_n + \cdots + g_{d-1} x_n^{d-1} + x_n^d,$$

где $g_i \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

Рассмотрим результант R полиномов f и g относительно переменной x_n. Известно, что R является линейной комбинацией полиномов f и g с коэффициентами в $K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Поэтому результант $R \in I$ и, так как $R \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, то $R \in I'$. Но прямое вычисление показывает, что $R(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 1$. Это противоречит тому, что все многочлены из I' обращаются в нуль в точке $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Таким образом, идеал J неединичный. Значит, $J = (h(x_n))$, где h — многочлен, не равный ненулевой константе.

Пусть a_n — его корень в K. Тогда $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 0$ для всех $f \in I$. В частности, $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ — решение системы (1).

7. Ещё одно доказательство слабой теоремы о нулях. Напомним определение точки поля. Пусть Ω — произвольное поле. Присоединим к Ω символ ∞ и в полученном множестве $\Omega \cup \{\infty\}$ определим следующие действия (везде $a \in \Omega$):

$$a \pm \infty = \infty, \quad a \cdot \infty = \infty, \quad \text{если } a \neq 0,$$

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty,$$

выражения $\infty \pm \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 0/0,\ \infty/\infty$ не определены.

Ω-значной точкой поля K называется отображение

$$\varphi : K \to \Omega \cup \{\infty\},$$

для которого $\varphi(1) = 1$ и равенства $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ выполняются при любых $a, b \in K$, при которых правые части этих равенств определены. Фундаментальная, но просто доказываемая теорема о продолжении утверждает следующее (см. например, [3]).

Теорема 3 (о продолжении гомоморфизмов). *Пусть K — поле, содержащее кольцо R и φ — гомоморфизм кольца R в некоторое алгебраически замкнутое поле Ω, причём $\varphi(1) = 1$. Тогда φ можно продолжить до Ω-значной точки поля K.*

Определение. Пусть L/K — произвольное расширение полей. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in L^n.$$

Будем говорить, что x' является специализацией точки x над K, если всякий многочлен с коэффициентами из K, обращающийся в 0 в точке x, обращается в 0 и в точке x'.

Пример: $L = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$, $x = (\pi, \pi^2) \in \mathbb{R}$, $x' = (1, 1) \in \mathbb{R}$. Очевидно x' является специализацией точки x над $\mathbb{Q}$.

Следствие. *Пусть множество K — алгебраически замкнутое поле, $L = K(x_1, \dots, x_n)$ — расширение поля K. Пусть $x \in L^n$. Тогда существует точка $x' \in K$ являющаяся специализацией точки x над K.*

Доказательство. Выберем базис трансцендентности поля L над K. Его можно выбрать из элементов $x_1, \dots, x_n$. Можно считать, что этот базис образуют первые r элементов $x_1, \dots, x_r$. Тогда для каждого x_i, где $i > r$, справедливо равенство вида

$$a_m(x_1, \dots, x_r)x_i^m + a_{m-1}(x_1, \dots, x_r)x_i^{m-1} + \cdots$$
$$\cdots + a_0(x_1, \dots, x_r) = 0, \tag{10}$$

где $a_i(x_1, \dots, x_r) \in K[x_1, \dots, x_r]$ и $a_m(x_1, \dots, x_r)$ — ненулевой многочлен. Пусть $x'_1, \dots, x'_r \in K$ таковы, что $a_m(x'_1, \dots, x'_r) \neq 0$. Рассмотрим гомоморфизм φ_0 кольца многочленов $K[x_1, \dots, x_r]$ в K, переводящий каждый элемент x_i в x'_i и оставляющий на месте все элементы поля K. Используя теорему о продолжении гомоморфизмов, продолжим его до K-значной точки φ поля $K(x_1, \dots, x_n)$. Для любого i значение $\varphi(x_i)$ отлично от ∞. Действительно, для $i \leqslant r$ это ясно по построению гомоморфизма φ_0. Если для некоторого $i > r$ выполняется равенство $\varphi(x_i) = \infty$, то, разделив обе части равенства (10) на x_i^m, мы получим

$$a_m(x_1, \dots, x_r) + a_{m-1}(x_1, \dots, x_r)\frac{1}{x_i} + \cdots$$
$$\cdots + a_0(x_1, \dots, x_r)\frac{1}{x_i^m} = 0. \tag{11}$$

Теперь, применяя φ к обеим частям равенства (11), получаем

$$a_m(x'_1, \ldots, x'_r) = 0,$$

противоречие. Пусть $x'_i = \varphi(x_i)$ для $i > r$. Тогда точка $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ является специализацией над K точки x. $\square$

Доказательство слабой теоремы о нулях. Мы уже говорили о том, что легко найти решение $x = (x_1, \ldots, x_n)$ системы (1) в некотором конечно порождённом расширении исходного алгебраически замкнутого поля K (см. параграф 4). Тогда точка x', построенная в только что доказанном следствии будет решением системы (1) в поле K. $\square$

Список литературы

[1] И.Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии, 3-е изд., МЦНМО, 2007.

[2] E. Arrondo, Another Elementary Proof of the Nullstellensatz, American Math. Monthly Vol. 113, No. 2 (Feb., 2006), pp. 169-171.

[3] S. Lang, Introduction to algebraic geometry, Interscience Publ., New York, 1958.

[4] Д. Мамфорд, Алгебраическая геометрия I. Комплексные проективные многообразия, Мир, Москва, 1979.

[5] D. Perrin, Algebraic geometry, Springer-Verlag, London, 2008.

УДК 378.147.227

Разин А.Д.[1], *Некрасов К.Ю.*[2]

Усовершенствование эффективности усвоения лекций путём внедрения онлайн курсов на платформу «Открытое образование»

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос эффективности усвоения лекционного материала по профильным направлениям, его усовершенствование путём внедрения инновационной системы онлайн курсов. В качестве соответствующей площадки для реализации проекта авторами была выделена национальная платформа «Открытое образование».

Ключевые слова: онлайн курсы, усвоение учебного материала, методика образования, лекции.

Большинство студентов на сегодняшний день при подготовке к семинарам и экзаменам сталкиваются с проблемой усвоения лекционного материала. Как правило, аудиальная память не позволяет зафиксировать на долгое время значительную часть информации, что приводит к потери большого процента материала, который понадобится в дальнейшем, профильном обучении. Немало научных трудов посвящено этой теме, в связи с чем наблюдается актуальность поднятия данного вопроса [1, 2]. На сегодняшний день очно-лекционный формат требует усовершенствования или даже кардинального изменения, поскольку обычным изложением учебного материала студентов трудно завлечь, чтобы информация зафиксировалась на длительный срок. Целью исследования авторов было нахождение наиболее эффективного и технологичного способа усовершенствования стандартной системы преподавания профильных дисциплин в лекционном формате. Для реализации данного проекта авторами предлагается использовать доступную платформу «Открытое образование», на которую будут размещаться онлайн курсы по профильным предметам.

Достижение поставленной цели возможно только при комплексном охвате всех причин возникновения данной проблемы, к которым можно отнести:

1. При использовании только одного из способов восприятия лекционного материала, а именно звуковой, теряется эффективность усвоения лекции. Извлечение объективно наиболее важных моментов из большого количества информации на слух превращается в насущную проблему [2].

[1]Санкт-Петербургский Горный университет, e-mail: razinxalex@gmail.com
[2]Санкт-Петербургский Горный университет, «УниШанс»,
e-mail: kirya_nekrasov_2000@mail.ru

2. Формат «живая лекция» очень часто сводится к тому, что происходят отклонения от наиболее важного направления в теме, поскольку может возникнуть необходимость углубиться в конкретный вопрос. Временные ограничения лекции зачастую приводят к тому, что преподаватель не успевает уложиться в рамки занятия и изложить весь необходимый материал.

3. Научно-исследовательская деятельность преподавателей позволяет рассказать студентам не только необходимый по программе материал, но и дополнительные факты, полученные из опыта работы. Лекционная программа, которая включает в себя сжатый материал, зачастую не даёт отклониться от написанного конспекта, необходимого для сдачи экзаменов.

Решение данной проблемы коренится в способе усвоения материала, чтобы увидеть, где находится пробел, обратимся к структурной пирамиде обучения, рисунок 1 [3].

Рис. 1. Структурная пирамида усвоения материала.

Ведущие российские вузы при обучении студентов проходят не все ступени, представленные в пирамиде. Во многих университетах не предоставляется записанный аудио и видео материал, благодаря которому освоение материала проходит на 10% эффективней.

Методом усовершенствования системы образования станет включение в программу онлайн курсов, которые созданы в соответствии с лекциям, читаемыми в аудитории. Визуализация необходимого материала, к которому обучающийся сможет обратиться в любой момент, по профильным направлениям, станет отличным способом усвоения информации, необходимой для подготовки к семинарам и сдаче экзаменов.

Многие вузы уже практикуют такую систему, используя доступную онлайн платформу «Открытое образование». Однако на сегодняшний день студент, обратившийся к данной площадке, не сможет найти все необходимые ему профильные курсы [4].

Некоторые из таких университетов: Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Высшая школа экономики, Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Томский государственный университет, Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого. Обратившись к актуальному рейтингу Forbes, российских университетов, можно наблюдать, что представленные вузы занимают соответственно ведущие позиции: 2, 3, 4,10, 27 [5].

Данные университеты, используя методику онлайн курсов, уже решили проблему усвоения лекционного материала. Поскольку в ходе исследования Forbes были использованы статистические данные о трудоустройстве выпускников, их востребованности в регионах, количестве предпринимателей среди них [5]. Можно сказать, что данный метод следует рекомендовать к использованию остальным российским университетам.

В результате, если большее количество университетов будет практиковать онлайн лекции, хотя бы по профильным дисциплинам, обучающиеся в них студенты смогут всегда обратиться к необходимому материалу. Тестирование, проходящее после каждого блока онлайн курса, что эквивалентно очным лекциям, будет гарантировать эффективность усвоения конкретных тем по профильным дисциплинам, которые необходимы студентам как будущим специалистам.

Список литературы

[1] Тремасова В.А. Особенности кратковременной памяти у студентов 1 курса клинической психологии с различным типом доминирующей перцептивной модальности // Научное сообщество студентов XXI столетия. Гуманитарные науки: сб. ст. по мат. XLVII междунар. студ. науч.-практ. конф. № 10(47). [Электронная рессурс] URL: https: //sibac. info/archive/guman/10(47).pdf (дата обращения: 16.11.2019)

[2] Сейдаметова С. Активные методы обучения в вузе / И. Ш. Мевлют, Ф. Р. Аметов, А. Н. Аблякимова, А. Д. Аметов // Информационно-компьютерные технологии в экономике, образовании и социальной сфере. 2017. № 2(16). С. 102-108. [Электронная ресурс] URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_29422149_53522012.pdf (дата обращения 16.11.2019)

[3] Приемы эффективного обучения в школе и дома. Режим доступа: https://trizway.com/art/form/effektivnoe-obuchenie-v-shkole-i-doma.html (дата обращения 17.11.2019)

[4] Открытое образование. Режим доступа: https://openedu.ru/course /#group=368 (дата обращения 17.11.2019)

[5] Университеты для будущей элиты. 100 лучших вузов России по версии Forbes. Режим доступа: https://yandex.ru/turbo?text=https %3A%2F%2Fwww.forbes.ru%2Fkarera-i-svoy-biznes%2F378695-universitety-dlya-budushchey-elity-100-luchshih-vuzov-rossii-po-versii (дата обращения 18.11.2019)

УДК 510.6+510.222

Гладкая А.В.[1]

Несколько задач о множествах на числовой прямой и особенности их формулировок

Аннотация. В статье кратко обсуждаются некоторые варианты формулировок математических утверждений на примере задач о структуре множеств на числовой прямой. Особое внимание уделяется высказываниям вида «из A следует B». Такой тип задач может быть полезен студентам как старших, так младших курсов при изучении основ математической логики.

Ключевые слова: высказывания с кванторами, следование и равносильность, множества на числовой прямой.

1. Высказывания и предикаты. Следование и равносильность.

Для правильного понимания математических утверждений и теорем необходимо умение «переводить» их формулировки с естественного языка на логический и обратно. При изучении математических дисциплин стоит уделить особое внимание построению высказываний с кванторами.

1.1. Высказывания и предикаты. Напомним некоторые базовые понятия и операции математической логики, с которыми школьники, как правило, встречаются на уроках информатики. Высказыванием называют повествовательное предложение, про которое имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Истинным высказываниям будем присваивать значение **И**, а ложным — **Л**. Предикатом называют утверждение с переменными, которое при замене переменных на конкретные значения становится высказыванием.

Пример 1. *«1+1=3» является ложным высказыванием, «1+1» высказыванием не является. «$x > 3$» является предикатом, который превращается в истинное высказывание, например, при $x = 5$.*

Будем использовать стандартные операции над высказываниями и предикатами: $\neg$ — отрицание, $\wedge$ — конъюнкция (логическое «и»), $\vee$ — дизъюнкция (логическое «или»), $\rightarrow$ — импликация (если [посылка], то [заключение]). Также будем использовать кванторы всеобщности ($\forall$) и существования ($\exists$). При составлении предикатов будем предполагать, что переменные принадлежат естественной области определения предиката, если

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, «УниШанс», e-mail: anna.v.gladkaya@gmail.com

не указано иное (подробнее об операциях и их свойствах см., например, [1]).

Так как ровно одно из двух высказываний a и $\neg a$ истинно и ровно одно ложно, то вместо доказательства, например, того, что $a = \textbf{И}$, можно доказать, что $\neg a = \textbf{Л}$. Для этого необходимо грамотно строить отрицания высказываний с кванторами.

Пример 2. *Приведем несколько примеров отрицания утверждений.*

$\neg(\forall x\ P(x)) = \exists\, x : \neg P(x)$
$\neg(\exists\, x : P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\ \neg(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\ (\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))$
$\neg(\exists\, y : \forall x\ P(x, y)) = \forall y\ \neg(\forall x\ P(x, y)) = \forall y\ \exists\, x : \neg P(x, y)$

Общее правило отрицания утверждений с кванторами звучит так: необходимо заменить все кванторы на противоположные, а последний предикат на его отрицание.

1.2. Следование и равносильность. Структура теорем. Особое внимание здесь мы уделим высказываниям, полученным из предиката с помощью квантора всеобщности, вида

$$\forall x\, (A(x) \to B(x)),$$

где A и B некоторые предикаты. Такое высказывание обозначается $A(x) \Rightarrow B(x)$. Отметим, что «$A(x) \to B(x)$» является предикатом, а $A(x) \Rightarrow B(x)$ — высказыванием.

Если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно, то говорят, что из A *следует* B. Многие математические утверждения имеют структуру следования, хотя это не всегда явно заметно, так как квантор всеобщности в словесной формулировке опускается, а проговаривается лишь импликация.

Пример 3. *Теорему Пифагора по данным логическим правилам стоило бы формулировать следующим образом: «Для любого треугольника, если он прямоугольный, то квадрат наибольшей стороны равен сумме квадратов двух других сторон».*

Когда теорема имеет структуру $A \Rightarrow B$, то формулируют ее обычно словами «если A, то B» , однако используют и другие формулировки: «A достаточно для B» , «B необходимо для A» , «A только тогда, когда B» , «B тогда, когда A».

Пример 4. *Проиллюстрируем эту структуру примером*

$$x \,\vdots\, 100 \Rightarrow x \,\vdots\, 10.$$

Такую формулировку можно прочесть многими способами: «из делимости на 100 следует делимость на 10», «делимость на 100 достаточна для делимости на 10», «делимость на 10 необходима для делимости на 100», и т.п.

Отметим тут же, что метод доказательства от противного основан на том факте, что истинностные значения высказываний $A \Rightarrow B$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$ совпадают.

Если истинно высказывание $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то говорят, что предикаты A и B равносильны и обозначают этот факт:

$$A \Leftrightarrow B.$$

Теорема, имеющая такую структуру, обычно формулируется словами «необходимо и достаточно» , «тогда и только тогда».

Для доказательства теоремы крайне важно умение извлекать из формулировки, что дано, а что следует доказать. На этом этапе у обучающихся зачастую возникают проблемы с пониманием заданий вида «докажите достаточность». Некоторые типичные логические ошибки проиллюстрируем на примере задач о свойствах множеств на прямой.

2. Некоторые задачи о множествах на числовой прямой. Рассмотрим некоторые задачи, указывая типичные ошибки, встречающиеся в решениях обучающихся.

Задача 1. *Составьте отрицание высказывания*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N}\ \exists\, c \in \mathbb{R} : x \leqslant c \leqslant y.$$

Является ли какое-то из получившихся двух высказываний истинным?

Решение. Наиболее распространенная ошибка в этой задаче встречается в формулировке отрицания предиката $x \leqslant c \leqslant y$. Так как $\neg(p \leqslant q) = p > q$, то может показаться, что:

$$\neg(x \leqslant c \leqslant y) = x > c > y,$$

но, конечно, это не верно. Правильное отрицание получается следующим образом:

$$\neg(x \leqslant c \leqslant y) = \neg((x \leqslant c) \wedge (c \leqslant y)) = (x > c) \vee (c > y).$$

Тогда ответ можно записать в виде:

$$\exists\, x, y \in \mathbb{N} : \forall\, c \in \mathbb{R}\ \ (x > c) \vee (c > y).$$

Ответ на второй вопрос очевиден — из двух высказываний a и $\neg a$ ровно одно является истинным, поэтому ответ — да, является. Так как в формулировке задания пояснения не требовались, то нет необходимости выяснять какое именно высказывание истинно (однако здесь укажем, что исходное высказывание является ложным).

Для дальнейших примеров напомним некоторые базовые понятия о структуре множеств, ограничиваясь только множествами на числовой прямой. По отношению к множеству $M \in \mathbb{R}$ все точки числовой прямой длятся на три типа: внутренние точки M принадлежат M вместе с некоторой окрестностью, внешние точки M имеют некоторую окрестность, не пересекающуюся с M (то есть являются внутренними точками дополнения M), граничные точки M — точки, любая окрестность которых пересекается как с M, так и с дополнением M. Множество называют открытым, если все его точки внутренние, множество называют замкнутым, если его дополнение открыто (подробнее см., например, [2]).

Пример 5. *Для полуинтервала* $[1; 2)$ *внутренними являются точки соответствующего интервала* $(1; 2)$, *внешними все точки из* $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$, *точки 1 и 2 являются граничными.*

Пример 6. *Открытыми множествами на прямой являются, например, интервалы; замкнутыми — отрезки и отдельно стоящие точки. Полуинтервал не является ни открытым, ни замкнутым. Пустое множество и множество* $\mathbb{R}$ *являются и открытыми, и замкнутыми одновременно.*

Задача 2. *Определите истинность высказываний о множестве* $A \in \mathbb{R}$ *(ответ поясните):*

a. Внутренняя точка множества A принадлежит A

b. Внешняя точка множества A может принадлежать A

c. Граничная точка множества A может принадлежать A

d. Граничная точка множества A принадлежит A

Решение. При решении необходимо обращать внимание на форму вопроса, чтобы определить когда утверждение нужно доказывать, а когда достаточно примера или контрпримера.

a. Истинно по определению внутренней точки. Внутренняя точка множества ***всегда*** *принадлежит ему;*

b. Ложно по определению внешней точки. Внешняя точка множества ***всегда*** *принадлежит его дополнению;*

c. Истинно. Граничная точка ***может*** *принадлежать множеству. Например, множеству* $[1; 2]$ *принадлежат обе граничные* *точки 1 и 2;*

d. Ложно. Граничная точка ***может не*** *принадлежать множеству. Контрпример: множеству* $(1;2]$ *не принадлежит его граничная точка 1.*

Рассмотрим внимательней последний пункт задачи 2. На естественном языке можно было бы сказать, что оно иногда истинно, а иногда ложно, так как граничные точки множества иногда принадлежат ему, а иногда не принадлежат. Однако при переводе на математический язык станет ясно, что в утверждении опущен квантор всеобщности (сравните с пунктом c, в котором говорится о существовании). Следовательно, утверждение ложно, так как мы построили контрпример, то есть показали, что существует множество, которому не принадлежит его граничная точка (см. первый пункт примера 2).

Задача 3. *Определите истинность высказываний (ответ поясните).*

Множество $M \subset \mathbb{R}$ имеет ровно три граничные точки. Тогда

a. множество M *конечно*

b. множество M *бесконечно*

c. множество M *замкнуто*

d. множество M *не замкнуто*

e. множество внутренних точек множества M *не пусто*

f. множество внутренних точек множества M *пусто*

g. множество M *не пусто*

Решение. Все высказывания в этом задании имеют структуру $A \Rightarrow B$, поэтому необходимо доказать истинные утверждения, а ложные достаточно опровергнуть контрпримером.

a. Ложно. Контрпример: $M = (1;2) \cup \{3\}$

b. Ложно. Контрпример: $M = \{1;2;3\}$

c. Ложно. Контрпример: $M = (1;2) \cup \{3\}$

d. Ложно. Контрпример: $M = [1;2] \cup \{3\}$

e. Ложно. Контрпример: $M = \{1;2;3\}$

f. Ложно. Контрпример: $M = (1;2) \cup \{3\}$

g. Истинно. Для того, чтобы показать истинность утверждения недостаточно привести пример непустого множества $M = (1;2) \cup \{3\}$*, имеющего ровно три граничные точки, необходимо привести доказательство. Построим доказательство от противного: пусть множество пусто, тогда оно не имеет граничных точек, что противоречит посылке.*

Список литературы

[1] Пратусевич М. Я. , Столбов К. М., Головин А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень. М.: Просвещение, 2009.

[2] Виноградов О. Л. Математический анализ: учебник. СПб.: БХВ-Петербург., 2017.

УДК 519.1+378:004

Кропачева Н.Ю.[1], *Тихомиров А.С.*[2], *Федорова М.Ю.*[3]

О графовой формализации текстовых задач

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена использованию графов в качестве вспомогательного средства, позволяющего облегчить процесс формализации вербального описания текстовых задач. Графовое моделирование обладает наглядностью, позволяет четко структурировать описываемый процесс, раскрыть все связи и выявить возможные пути решения текстовой задачи, рассматривая все возможные варианты действий.

Ключевые слова: графовая модель, формализация текстовых задач, теория вероятностей, формула полной вероятности.

Моделирование в настоящее время получило широкое применение во многих областях знаний: теории принятия решений, управлении и навигации, логистике, лингвистике и социологии, биологии и медицине, квантовой химии, схемотехнике, геоинформатике и т. д. Моделирование — это тот вид деятельности, которым человек занимается с самого раннего детства. Любая игра — это упражнение в моделировании, то есть в имитации какого-либо явления. В силу этого, моделирование является естественным методом познания, для которого не нужно искать искусственных побудительных мотивов. Лучшие представители педагогической мысли (Платон, Коменский, Руссо и другие) утверждали, что игра для детей — лучший способ познания. Продолжая эту мысль, можно сказать, что математическое моделирование — это игры взрослых людей, помогающие изучать и анализировать окружающие явления, и в итоге принимать наилучшие решения. Известнейший в нашей стране педагог А.С. Макаренко так характеризовал роль детских игр: «Игра имеет важное значение в жизни ребенка, имеет то же значение, какое у взрослого имеет деятельность, работа, служба. Каков ребенок в игре, таким во многом он будет в работе. Поэтому воспитание будущего деятеля происходит, прежде всего, в игре...».

Графы, в силу своей наглядности, служат идеальным средством для знакомства с методологией моделирования. Язык теории графов прост и понятен, он естественным образом используется для представления различных процессов и явлений. Основными элементами любого графа являются вершины и рёбра.

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, «УниШанс»,
e-mail: natakr4@gmail.com

[2]Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, e-mail: tikhomirov.as@mail.ru

[3]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: mgfed@mail.ru

Вершины изображаются точками (кружками, квадратиками), а связи между ними (рёбра) — линиями (дугами, стрелками). Таким образом наглядно определяются отношения между объектами. Граф предстаёт в качестве достаточно компактного и информативного способа описания структуры системы и значительно облегчает её анализ, позволяя раскрыть состав и подчиненность функциональных её элементов.

Прежде чем построить модель явления, необходимо выделить составляющие его объекты и определить связи между ними, а затем формализовать полученную информацию. Формализация — это процесс выделения и перевода внутренней структуры явления, предмета или процесса в определенную информационную структуру — форму. Моделирование любой системы невозможно без предварительной формализации. Формализация — это первый и очень важный этап процесса моделирования. Рассмотрим применение графового моделирования к решению текстовых задач (задачи на проценты и движение, задачи теории вероятностей и т.п.). Обычно, основные трудности при решении таких задач возникают при переходе от вербального описания задачи к формальному. С помощью графов можно упростить понимание формальной постановки проблемы, так как граф строится на основании логических рассуждений о процессе, происходящем в задаче. После ознакомления с текстом вводится система обозначений для объектов и устанавливаются связи между ними, затем непосредственно строится граф, отражающий структуру процесса. Рассматривая на примерах формализацию процесса, происходящего в задаче, обучающийся может самостоятельно придти к пониманию теоретических выводов и теорем.

Приведем задачу, иллюстрирующую понимание смысла формулы полной вероятности: если событие может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, $\ldots$, H_n, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

Задача. *Грибник заблудился в лесу и стоит на развилке трёх дорог. В свою очередь, он знает, что каждая из дорог приведёт его к следующей развилке. Если он пойдёт по первой дороге, то далее у него будет выбор из трёх дорог, одна из которых приведёт домой. Если пойдёт по второй, то выбор из пяти, две из которых приведут домой. Если по третьей, то* *там будет одна дорога, которая сразу приведёт домой. Стоя на развилке, грибник не знает какая из дорог куда приведёт. Какова вероятность, что грибник сразу попадёт домой?*

Нарисуем граф, соответствующий этой задаче (Рис. 1).

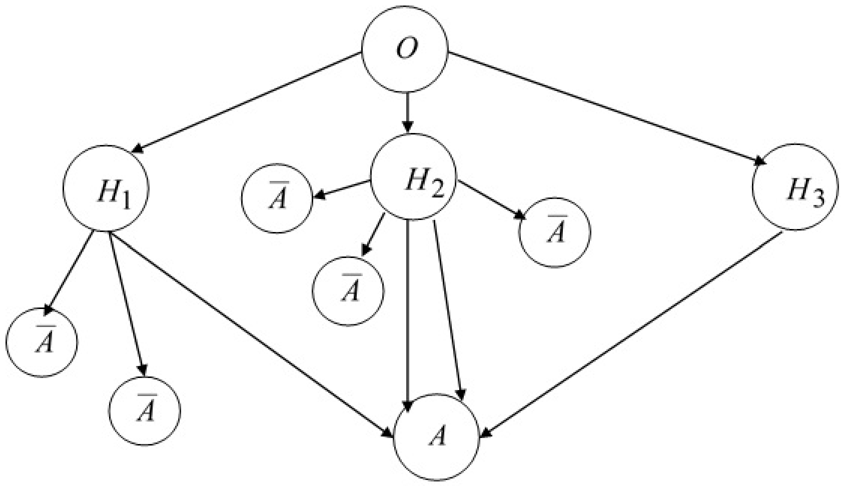

Рис. 1.

Действительно, при решении этой задачи возможен переход от вербального описания процесса, к его формальному описанию при помощи графа, так как объекты (вершины графа) — это точки развилок дорог, а рёбра — дороги. События в данной задаче — это выбор дорог на развилке.

На графе изображаем все возможные события. Замечаем, что они не могут произойти одновременно (полная группа событий). Таким образом, мы сначала формализуем задачу, а затем наглядно представим решение, которое приводит к формуле полной вероятности.

Отметим на графе все возможные пути, которые приводят грибника к дому (Рис. 2). Припишем рёбрам веса. Если допустить, что выбор варианта пути равновозможен для всех дорог, то вес рёбер, исходящих из вершины O будет равен $1/3$, из вершины $H_1 = \dfrac{1}{3}$, из вершины $H_2 = \dfrac{1}{5}$, и из вершины $H_3 = 1$ (Рис.2).

Теперь рассмотрим выделенные пути. Вероятность попадания в конечную вершину для каждого пути вычисляем по теореме умножения вероятностей, перемножая веса рёбер соответствующего выделенного пути

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

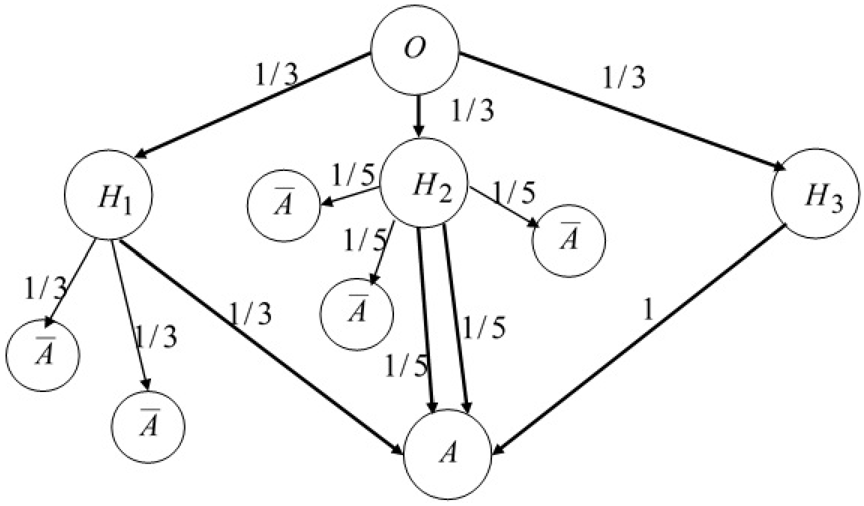

Рис. 2.

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{3}; \qquad P(A \mid H_2) = \frac{2}{5}; \qquad P(A \mid H_3) = 1.$$

Так как событию A благоприятствует несколько взаимоисключающих путей, то:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{26}{45}$$

и мы получим наглядное решение задачи (Рис. 3).

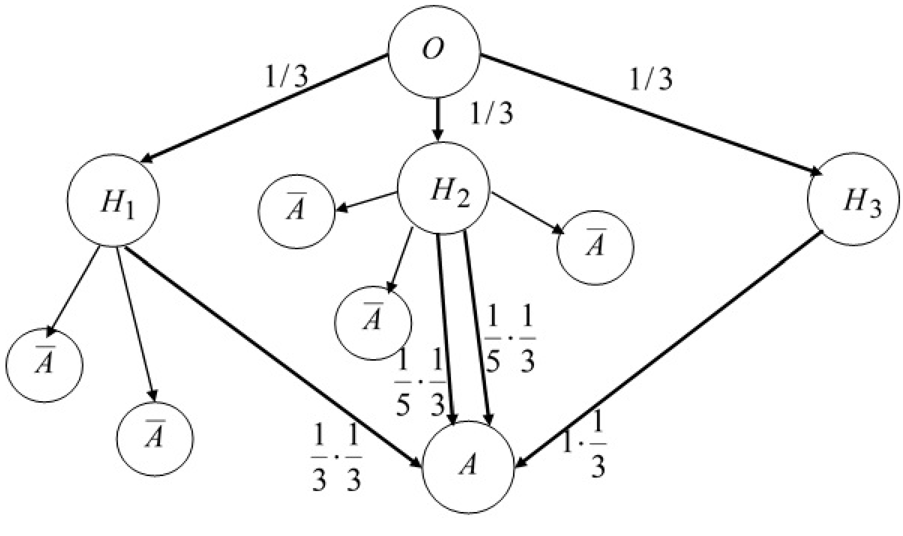

Рис. 3.

Используя графовое моделирование при формализации вербального описания задачи, мы естественным путем подводим обучающихся к пониманию формулы полной вероятности.

Главное достоинство использования элементов теории графов при формализации и решении текстовых задач заключается в том, что достигается возможность вначале увидеть структуру происходящего процесса, формализовать его, а затем непосредственно перейти к решению. Графовая модель с одной стороны, иллюстрирует все возможные пути решения задачи, а с другой, позволяет выбрать наиболее рациональный. При этом изложение таких задач в занимательной, игровой форме позволяет постоянно поддерживать интерес к процессу обучения.

Список литературы

[1] Бунякина Е.В., Кропачева Н.Ю., Федоров А.Б., Федорова М.Ю. О графовом моделировании как части когнитивно-креативного процесса обучения. // сб. статей и докладов научно-исторической конференции «220 лет военно-морскому образованию России», ч. 1, СПб, Военный институт (военно-морской политехнический) ВУНЦ ВМФ «ВМА», 2019.

[2] Бунякина Е.В., Кропачева Н.Ю., Федоров А.Б., Федорова М.Ю. Применение инструментария теории графов при обучении.// сб. трудов III Всероссийской военно-научной конференции «Актуальные проблемы подготовки военных специалистов в области сбора и обработки информации техническими средствами», ч.2 / Ред. кол.: Д.Н.Бирюков, К.В.Сазонов. СПб, ВКА им. А.Ф.Можайского, 2019. 303 с.

[3] Кропачева Н.Ю Применение элементов моделирования в обучении. СПб: Изд-во ЦНИТ «АСТЕРИОН». Журнал «Теория и практика сервиса», 2010. №3. стр. 120–125.

[4] Кропачева Н.Ю., Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Преподавание математики с учетом реалий современности. // Современные проблемы науки и образования. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2018. Том III. ISBN 978-5-91327-533-2, стр. 58–61

[5] Шеннон Р. Имитационное моделирование систем — искусство и наука: / Пер. с англ. М: Наука, 1978.

[6] Kolesov A.K., Kropacheva N.Y.The use of graph simulation to enhance learning of students. // Contentк3rdInternational Conference "Research, Innovation and Education"by SCIEURO in London, 25–30 January 2016, pp. 89–92

[7] Kropacheva N.Y., Sushkov Y.A. Generation of Graph Models of Multiphase Service Systems // Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg. June 26–July 2, 2005. pp. 397–400.

УДК 531.8

Кутеева Г.А.[1]

Лабораторный практикум «Кинематический анализ механизмов» на примере исторических моделей из коллекций СПбГУ

Аннотация. В статье обсуждается лабораторный практикум «Кинематический анализ механизмов», проводимым в Санкт-Петербургском государственном университете для студентов первого курса магистратуры отделения механики. В этом практикуме исторические модели — механизмы являются неотъемлимой частью заданий.

Ключевые слова: лабораторный практикум, механизмы XIX века, компьютерный пакет Maple, компьютерный пакет Mathematica, исторические коллекции механизмов, обучение студентов анимации.

Введение. В структуре учебно-методического комплекса любой дисциплины одним из его элементов являются лабораторные работы [1]. В учебно-методическом комплексе дисциплин, которые являются базовыми на отделении механики математико-механического факультета СПбГУ, обязательными элементами являются лабораторные практикумы. По существующим учебным планам лабораторные практикумы для обучающихся на отделении механики начинаются с 3 курса, далее продолжаются вплоть до обучения на последнем курсе магистратуры. Существующие лабораторные практикумы разделяются по отделам механики, включая теорию колебаний, сопротивление материалов, лабораторные работы по газодинамике. Эти практикумы проводятся в шести экспериментальных лабораториях отделения механики СПбГУ. Пособия [2]–[4] были изданы преподавателями кафедры теоретической и прикладной механики для лабораторного практикума своих дисциплин.

В данной статье дается описание структуры, содержания, критерии оценивания лабораторного практикума «Кинематический анализ механизмов» к комплексу дисциплин кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ для обучающихся по программе магистратуры первого года обучения. Практикум проводится с 2012/2013 учебного года. Об этом практикуме автор рассказывала на нескольких конференциях [5]–[8]. Отдельные работы студентов после прохождения практикума являются законченными новыми интересными результатами в области математического моделирования, об этом рассказывается, например, на семинарах по истории математики в ПОМИ. Эта же тематика

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: g.kuteeva@spbu.ru

освещена автором в научных журналах и учебных пособиях, например, [9]–[11].

Среди различных сайтов Интернета, среди современной научной учебно-методической литературы есть информация о преподавании механики, включая лабораторные практикумы по теоретической механике и коллекции учебных пособий-механизмов в высших учебных заведениях разных городов и стран, например, в России [12]–[14], в Японии [15], в США [16], в Германии [17]. В том числе, на этих сайтах приводятся коллекции учебных пособий по математике и механике конца 19 – начала 20 века [16]–[19]. Современные компьютерные средства позволяют представить эти коллекции в виде баз данных и прекраснейшего исполнения в виде двигающихся картинок-файлов, встроенных в систему Интернет. Для обучения студентов созданию современных компьютерных анимационных файлов, для привлечения студентов к конкретным компьютерным проектам, для повышения культурного исторического уровня студента в области математики и механики автором работы разработан лабораторный практикум «Кинематический анализ механизмов» с использованием современных программных компьютерных комплексов и механизмов 19 века.

1. Структура лабораторного практикума «Кинематический анализ механизмов». Согласно учебному плану, занятия лабораторного практикума проходят у обучающихся первого курса магистратуры математико-механического факультета СПбГУ в первом осеннем семестре.

Предполагается, что обучающиеся обладают знаниями по курсу теоретической механики (главным образом, по кинематике механизмов) в объёме курсов, читаемых, например, в СПбГУ кафедрой теоретической и прикладной механики для 1-3 курсов, а также некоторыми знаниями в области программирования в компьютерных системах типа MAPLE и MATHEMATICA или других компьютерных системах, а также обладают некоторым опытом работы в системе Интернет.

Основная цель практикума состоит в применении знаний по современным компьютерным пакетам к конкретному проекту — созданию анимационной компьютерной копии механизма. Занятия разделены на два модуля. В **первом модуле** каждому обучающемуся даётся механизм, который предполагается достаточно простым для теоретического решения механической системы. Этот механизм может быть выбран преподавателем из сборников задач по курсу теоретической механика 1-3 курсов обучения [20]. Например, кривошипно-шатунный механизм. Аналитическое решение может быть получено самим обучающимся. При затруднениях обучающегося в получении аналитического решения преподаватель явно задаёт это решение. Основное содержание этого модуля состоит в создании компьютерного кода для теоретически простой механической задачи. Преподаватель на первых занятиях оценивает знания обучающегося в области компьютерных программ, при необходимости даёт справочные данные по компьютерным программам. Например, советует обратиться к обучающим официальным Интернет-сайтам вида vuz.exponenta.ru. Обучающемуся необходимо обработать в выбранной компьютерной программе следующие задания.

Задание 1. Записать аналитическое решение с помощью программного кода.

Задание 2. Построить схему механизма с помощью встроенных функций в выбранной компьютерной программе.

Задание 3. Построить программный код, связывающий аналитическое решение (из задания 1) и схему механизма (из задания 2). Предполагается, что в результате будет получен анимационный файл-картинка, например, в формате GIF.

Второй модуль является расширением задания первого модуля. Обучающемуся необходимо провести кинематический анализ реального учебного механизма конца 19 века. Обучающиеся знакомятся с коллекциями исторических механизмов, с помощью преподавателя каждый обучающийся выбирает свой механизм, для которого делает презентацию с историческим обзором. В зависимости от выбранного механизма в этом историческом обзоре могут быть указаны:

а) к какой коллекции принадлежит механизм (механизм может принадлежать к нескольким разным коллекциям);

б) автор-создатель механизма или коллекции механизмов;

в) краткие сведения из биографии создателя механизма;

г) содержательная часть геометрического описания механизма (например, в следующем виде: *«Рассматривается механическая система, состоящая из семи стержней разной длины»*.

Отчет-задание студента (как в первом, так и во втором модуле) состоит в создании набора файлов (описание которых будет дано ниже) и презентации, включая

— историческое описание и описание геометрии механизма (для первого модуля — описание геометрии механизма),

— математическое теоретическое описание,
— описание компьютерного кода (совместно с самим кодом),
— анимационный файл-картинку работы механизма,
— заключение.

Этот набор файлов включает следующие компоненты.

1). Файл-отчёт в формате WORD или PDF.

2). Файл-презентацию в формате POWERPOINT.

3). Код программы с комментариями для построения схемы механизма, для определения положения всех активных точек механизма, для построения анимации механизма (например, для системы MAPLE, код программы может быть записан как MW-файл или как TXT-файл).

4). Анимационная картинка-файл в формате GIF.

В зависимости от квалификации обучающегося зачёт может быть проставлен при следующем выполнении заданий: задания первого модуля выполнены в объёме 80-100 % , задания второго модуля от 60 % до 100 %, более подробно указано ниже в плане занятий.

В статье автор решил подробнее остановиться на использовании исторических механизмов, поэтому далее будет приведено описание второго модуля. Для каждого занятия будут представлены тема, цель и задания для студентов. Предложено следующее сокращение: задание II.1 означает, что это задание ко второму модулю (модулю II) первого занятия.

2. Модуль II. Анимации исторических механизмов.

Занятие 1. Тема: Введение.

Цель: показать многообразие исторических коллекций пособий по механике и математике.

Задание II.1: выбрать свой механизм, создать отчёт-презентацию в POWERPOINT, включая описание этого механизма с исторической точки зрения. Здесь студент указывает, например, имя создателя механизма и кратко его биографию.

Методические рекомендации к 1 занятию. В настоящее время существуют исторические коллекции механизмов и учебных пособий-моделей по математике в США (например, Cornell University), в Германии (например, Гетенгенский университет, университет в Дрездене и другие), на Украине (например, Харьковский университет), в России (например, коллекция

МГТУ им. Баумана, коллекция СПбГУ, в том числе, в музее истории Университета), в Португалии, на Тайване и других странах. Перечислим некоторые официальные сайты, статьи, книги с описанием коллекций. Большая часть этих сайтов регулярно обновляется.

1. Коллекция геометрических моделей Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина (Украина) http://geometry.karazin.ua/ru/geome-tric-models-collection.html и http://touch-geometry.karazin.ua.

2. Коллекция математических моделей и инструментов Гёттингенского университета имени Георга-Августа (Германия), Göttingen collection of mathema-tical models and instruments: http://modellsammlung.uni-goettingen.de/.

3. Коллекция математических моделей Технического университета Дрездена (Германия), Mathematische Modelle. Sammlung der Technischen Universitat Dresden: http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/.

4. Информационная система для коллекций и музеев в немецких университетах: http://www.universitaetssammlungen.de/modell/

5. Цифровая библиотека механизмов и передач, поддерживаемая ведущими специалистами из Германии, Испании, Румынии, Франции и Италии, Digital Mechanism and Gear Library (DMG-Lib) http://www.dmg-lib.org

6. Коллекция университета штата Иллинойс, отделение математики (США), University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics: http://www.mathmodels.illinois.edu/cgi-bin/cview?SITEID=4&ID=342

7. Создание виртуального музея моделей по теории машин и механизмов в Японии: Shiroshita S., Kumamoto H., Nishihara O. and Jing D. Constructing a Virtual Museum of Machine Mechanism Models Imported From Germany During Japanese Westernization for Higher Education: 3D Animation Based on Kinematics and Dynamics. Presented at Museums and Web 2001. http://www.archimuse.com/mw2001/papers/shiroshita/shiroshita.html.

8. Коллекция исторических моделей на Тайване. Hong-Sen Yan, Hsing-Hui Huang, Chin-Hsing Kuo, "Historic mechanism teaching models in Taiwan 12th IFToMM World Congress, France, June 18-21, 2007 http://www.iftomm.org/iftomm/proceedings/proceedings_WorldCongress/WorldCongress07/articles/sessions/papers/A580.pdf

9. Коллекция моделей Ф. Рёло в Португалии: J.M. Tavares, M.V. Guedes, P.M. de Castro "The Collection of Reuleaux models of the faculdade de engenharia da Universidade do Porto, Portugal: Brief historical note and current status". https://web.fe.up.pt/tavares/downloads/publications/artigos/WHMM_2006.pdf

10. Коллекции моделей прошлого по теории машин и механизмов в Европе: H. Kerle, K. Mauersberger, M. Ceccarelli "Historical Remarks on Past Model Collections of Machines and Mechanisms in Europe 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México, 19-25 June, 2011

Занятие 2. Тема: Создание схемы механизма.

Дополнительная цель преподавателя: выяснить насколько обучающиеся владеют компьютерными программами для построения графических схем.

Цель для работы обучающегося: построить схему своего механизма в графических редакторах (минимальное число баллов), в системах математической алгебры типа MAPLE или MATHEMATICA (большее число баллов).

Под графическими редакторами понимаем, в том числе, графические редакторы, встроенные в систему WORD.

Задание II.2: начертить схему механизма на отдельном листе (например, лист тетради в клеточку). Выбрать свой графический редактор или компьютерную систему. Построить схему своего механизма в этом редакторе или системе. Задание считается выполненным на 100 %, если файл-рисунок можно загружать в различные программы, например, в презентацию POWERPOINT предыдущего задания.

Занятие 3. и 4. Тема: Теоретическое описание механизма. Построение математической модели (выбор обобщенной координаты, построение математических уравнений для отыскания этой координаты).

Цель: создать математическое описание движения механизма на основе знаний кинематического анализа (например, см. [3]).

Задание II.3-4: записать математическое описание (по алгоритму указанному ниже в методических рекомендациях) в виде рукописного варианта на листе бумаги в клеточку. Перевести это описание в систему POWERPOINT для презентации в дальнейшем.

Методические рекомендации к 3 и 4 занятию. Предложим **алгоритм** математического описания движения механизма. Этот алгоритм также указан в [3].

1. Определить число степеней свободы (обычно у выбранных механизмов одна степень свободы).
2. Выбрать обобщённую координату (обычно угол поворота кривошипа — ведущего звена механизма).
3. Ввести систему координат (обычно декартовую систему координат). В этой системе координат задать координаты всех активных точек звеньев. Знать, где неподвижные звенья, где звенья, траектории точек которых являются окружностями или прямыми.
4. На основе этих знаний построить трансцендентные квадратные уравнения, неизвестными в которых будут координаты активных точек, в зависимости от выбранной обобщенной координаты п. 2.

Занятие 5 и 6. Тема: Теоретическое описание механизма. Построение решения в системе MAPLE или MATHEMATICA.

Цель: построить решение или в MAPLE или в MATHEMATICA (или другой компьютерной программе).

Задание II.5-6: выбрать свою систему компьютерной алгебры (MAPLE, MATHEMATICA или что-либо другое). Перевести уравнения задания II.3-4 на язык компьютерной математики. Получить решение — координаты всех активных точек как функцию одной обобщенной координаты (обычно угла).

Методические рекомендации к 5 и 6 занятию. В настоящее время существуют системы компьютерной математики, которые являются современными математическими пакетами, ориентированными на сложные математические вычисления, визуализацию данных, моделирование. Они используются в научных, инженерных, математических и компьютерных областях. Среди них по широте и охвату математических, символьных, численных вычислений выделяются системы MAPLE и MATHEMATICA . Система MAPLE является продуктом компании WaterlooMapleInc., система MATHEMATICA — компании WolframResearch. Официальные сайты разработчиков для системы MAPLE: http://www.maplesoft.com/, для системы MATHEMATICA http://www.wolfram.com/.

Занятие 7. Тема: Показ лучших анимаций-файлов и их компьютерных кодов (главным образом, для исторических коллекций первого занятия второго модуля). Это занятие является напоминанием и продолжением первого занятию первого модуля.

Цель: показать лучшие анимационные картинки-файлы и компьютерные коды файлов анимаций предыдущих студентов, в том числе, на сайте exponenta.ru.

Задание II.7: Создание компьютерных кодов для анимации механизма.

Занятие 8 и 9. Тема: Создание анимационной картинки исторического механизма.

Цель: Создать файл — анимационную движущуюся картинку, обычно в формате gif, на основе встроенных функций системы MAPLE или MATHEMATICA (возможны другие форматы, которые оговариваются с преподавателем заранее).

Задание II.8-9: Построить компьютерный код программы для создания анимационной картинки.

Занятие 10. Тема: Отчетное занятие. Показ подготовленных презентаций слушателям и преподавателю. Зачёт.

Критерии оценивания второго модуля. Предлагается следующая таблица с баллами для зачёта по второму модулю:

номер задания	количество баллов
II.1	10
II.2	10
II.3-4	20
II.5-6	20
II.7	10
II.8-9	30

Максимальное количество баллов 100 . По каждому заданию студент может набрать разное число баллов. Итоговый зачёт по второму модулю ставится при сумме от 60 до 100 баллов.

3. Содержание исторической части первого занятия второго модуля. Преподаватель заранее обдумывает, какие исторические механизмы будут разбираться во втором модуле. В СПбГУ есть несколько мест, где хранятся исторические механизмы, среди них музей истории СПбГУ (3-й этаж Главного здания СПбГУ), коллекция моделей механизмов на математико-механическом факультете (см. [10, 21]). В 2018 году на Культурном форуме в Санкт-Петербурге была представлена богато иллюстрированная книга-альбом [22], в которой дается описание различных музеев и коллекций, хранящихся в СПбГУ.

Приведём некоторые слайды из выступлений автора на конференциях и выступлениях на семинаре по истории математики в Петербургском отделении Математического института (см. например в базе данных докладов и лекций math-net на персональном сайте www.mathnet.ru/rus/person114094). На рисунках (1-5) представлено многообразие имеющихся исторических механизмов.

Рис. 1. Модели механизмов из каталога профессора Ф.Рёло, хранящиеся в коллекции математико-механического факультета СПбГУ.

Рис. 2. Деревянные приборы из бывшего технологического кабинета.

Наиболее привлекательны по простоте реализации и проектирования движения в компьютерных системах оказались прямолинейно-направляющие механизмы (рис. 6-8).

Далее приведём содержание исторической части конкретного занятия первой вводной темы.

Это занятие может быть проведено в двух вариантах.

Рис. 3. Механизм Уатта из сборника задач И.В. Мещерского.

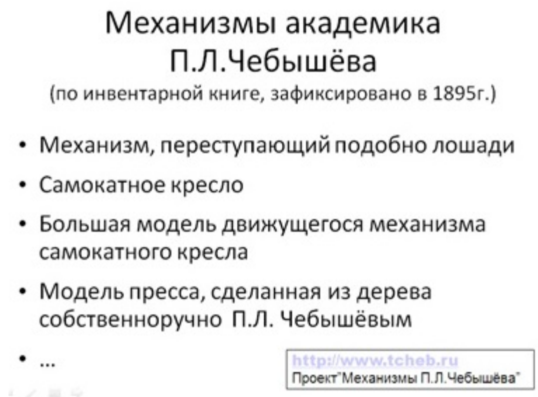

Рис. 4. Механизмы академика П.Л. Чебышёва, принадлежавшие кабинету практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета.

1. Преподаватель приводит обучающихся к шкафам с механизмами и представляет им механизмы.
2. Преподаватель показывает слайды (рисунки 1-8).

Рассмотрим второй вариант — работа со слайдами. На рисунках 1-5 представлены механизмы из бывшего кабинета практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета [10]. В настоящее время эта коллекция удостоена вниманием комитета по истории Международной федерации по содействию теории машин и механизмов (IFTOMM).

Начиная с середины XIX века кабинет практической механики обладал богатой коллекцией механизмов. Сохранилась внушительных размеров книга с надписью на обложке «Кабинет

Рис. 5. Стопоходящая машина П.Л. Чебышёва, черновой вариант хранящийся на математико-механическом факультете СПбГУ.

Рис. 6. Один из прямолинейно-направляющих механизмов. Параллелограмм Уатта.

Практической Механики С. Петербургского Университета. Инвентарь». Первая часть этой инвентарной книги (кинематические и статические модели) представляет собой перечень, с небольшим описанием, механизмов, часть из которых хранится в больших деревянных шкафах в нескольких соседних комнатах.

Эти механизмы — демонстрационные деревянные и металлические модели, приобретенные университетом в конце XIX – начале XX века. Некоторые из моделей были подарены кабинету. Другие созданы собственными конструкторами-механиками, в том числе, указаны модели собственноручно созданные академи-

Рис. 7. Механизм Липкина-Посселье. Один из точных прямолинейно-направляющих механизмов.

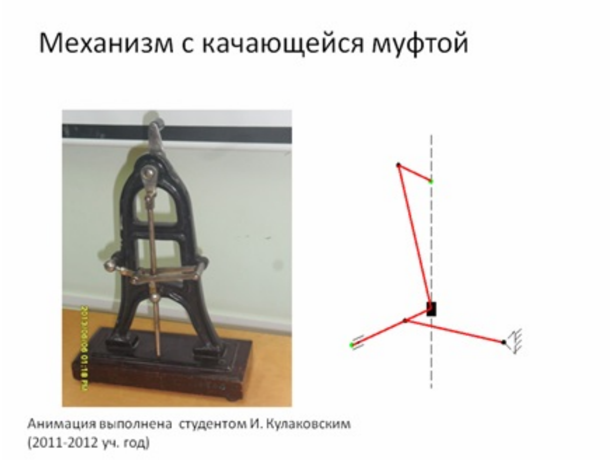

Рис. 8. Механизм с качающейся муфтой. Один из прямолинейно-направляющих механизмов.

ком П.Л. Чебышёвым. В книге записано чуть более ста моделей. Самые ценные из них (пять механизмов П.Л. Чебышёва) сейчас находятся в музее истории Санкт-Петербургского университета. Достаточно полную информацию об этих механизмах можно посмотреть в работах [23, 24] и в интернет-проекте «Механизмы П.Л. Чебышёва» tcheb.ru. На кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ хранятся две черновые модели стопоходящей машины с пометками П.Л. Чебышёва. Эти черновые модели в удовлетворительном состоянии показывают студентам (рисунок 5).

Хранителями этого кабинета были недавние выпускники физико-математического факультета, впоследствии ставшие знаменитыми учёными, профессионалами в области математики и механики (слайды на рисунках 9-11). Список хранителей составлен профессором математико-механического факультета в конце 1930-х годов Н.В. Розе (список находится в музее истории Санкт-Петербургского государственного университета).

Рис. 9. Список хранителей (консерваторов) кабинета практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета (начало).

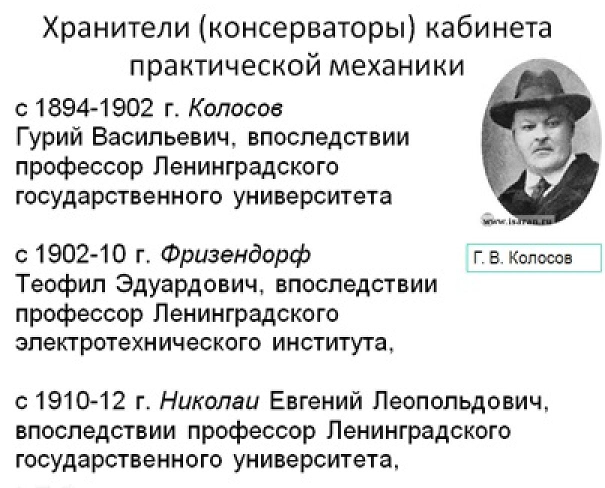

Рис. 10. Список хранителей (консерваторов) кабинета практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета (продолжение).

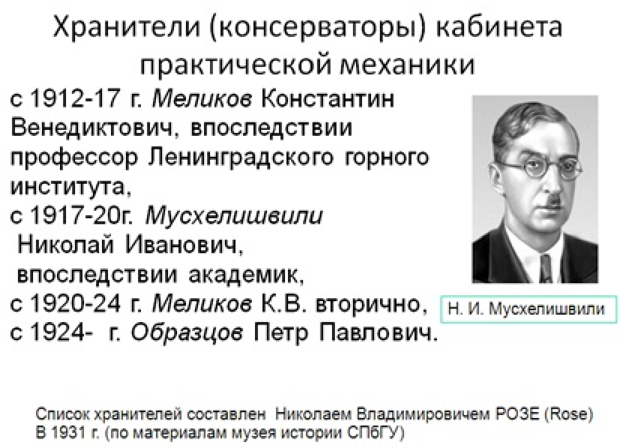

Рис. 11. Список хранителей (консерваторов) кабинета практической механики Императорского Санкт-Петербургского университета (окончание).

1. Заключение

В данной статье даётся содержание нового лабораторного практикума, в котором студенты знакомятся как с историческими учебными пособиями XIX века, так и осваивают современные компьютерные пакеты.

Список литературы

[1] Даринская Л.А. Педагогика. Дидактика высшей школы: учебное пособие. СПб.: Изд-во С.Петерб. уни-та, 2011. 148 с.

[2] Волошинова Т.В., Ершов Б.А., Зегжда С.А., Юшков М.П. Задачи лабораторно-вычислительного практикума по теории линейных колебаний, управления и удара. Л., 1984. 78 с.

[3] Волошинова Т.В., Кутеева Г.А. Решение задач по механике с применением пакета Maple: Малые колебания (учебное пособие). СПб: Изд-во С. Петерб. ун-та, 2003. 44 с.

[4] Лабораторный практикум по теории линейных колебаний / К.Г. Петров, А.А.Тихонов, Б.В. Трифоненко, М.П.Юшков; Под общ. ред. М.П.Юшкова. СПб., 2006. 100 с.

[5] Кутеева Г.А. О коллекции механического кабинета Санкт-Петербургского университета в современном преподавании механики. В сборнике: Современные проблемы механики и ее преподавание в вузе. Труды Всероссийской научно-методической конференции. Изд-во: Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург) 2015. С. 287-290.

[6] Кутеева Г. А. Об учебно-вспомогательных кабинетах по математике и механике в Российских уверситетах XIX века // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции. 2014. С. 423-424

[7] Кутеева Г.А. О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып.7. Гомель, 2013. С. 177-185

[8] Кутеева Г.А. О коллекции демонстрационных приборов и механизмов кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ // Материалы докладов. Международная конференция «Восьмые Окуневские чтения». СПб, 2013. С. 202-204

[9] Кутеева Г. А., Синильщикова Г. А., Трифоненко Б. В. Математические модели каталога Мартина Шиллинга // Математика в высшем образовании. 2017. Т. 15. С. 89-94

[10] Кутеева Г. А., Синильщикова Г. А., Трифоненко Б. В. Экспонаты исторической коллекции математико-механического факультета СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 493-504. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.313

[11] Лопатухина И. Е., Кутеева Г. А., Павилайнен Г. В., Поляхова Е.Н., Рудакова Т.В., Сабанеев В.С.,Тихонов А.А. Очерки по истории механики и физики: Учебное пособие. СПб.: ВВМ, 2016.

[12] Баран Е.Д., Крамаренко Н.В. Виртуальные лабораторные работы по теоретической механике. Версия 1. Учебное пособие. Новосибирск. Изд-во НГТУ. 2015. 60 с.

[13] Маркин Ю. С., Маркин О. Ю., Наумов Л. Г. Учебное и лабораторное оборудование по механике. Изд-во: Каз. гос. энергет. ун-т, Казань, 2004, 174 с.

[14] Потеев М.И. Практикум по методике преподавания теоретической механики в высшей школе. Учебное пособие. Ярославль. 1977. 79 с.

[15] Shiroshita S., Kumamoto H., Nishihara O. and Jing D. Constructing a Virtual Museum of Machine Mechanism Models Imported From Germany During Japanese Westernization for Higher Education: 3D Animation Based on Kinematics and Dynamics. Presented at Museums and Web 2001. http://www.archimuse.com/mw2001/papers/shiroshita/shiroshita.html

[16] Кинематические модели при проектировании цифровой (электронной) библиотеки в Корнельском университете, США (Kinematic Models for Design Digital Library: KMODDL) http://kmoddl.library.cornell.edu/

[17] Библиотека в электронном формате для Механизмов и Зубчатых передач (Digital Mechanism and Gear Library: DMG-Lib) http://www.dmg-lib.org

[18] Golovin A., Tarabarin V. Russian Models from the Mechanisms Collection of Bauman University. Springer Science, 2008. 245 с .

[19] Тарабарин В.Б., Carbone G. Применение коллекций моделей механизмов в преподавании машиноведения / Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. 6 июня 2009. technomag.bmstu.ru/doc/127492.html

[20] Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. СПб.: Лань, 2004. 448 с.

[21] Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. Справочник-путеводитель / ред.-сост. Г. И. Синкевич, науч. ред. А. И. Назаров. СПб.: Образовательные проекты, 2018.

[22] Коллекция знаний. Музеи и коллекции Санкт-Петербургского государственного университета / Санкт-Петербургский государственный университет ; [авт.-сост.: Г. Ф. Анастасенко и др. ; редкол.: Е. Г.Чернова и др. ; пер. на англ. яз.: В. Ю. Голубев, Уолкер У. Тримбл]. Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2018. - 287 с.

[23] Научное наследие П.Л. Чебышева. Вып. 2. Теория механизмов. М. Л. Изд-во АН СССР.1945.-192 с.

[24] Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений. Т.IV. Теория механизмов. М. Л. Изд-во АН СССР. 1948.-255 с.

УДК 57:51-76+632.938

Шишкин В.И.[1], *Орехов А.В.*[2], *Кудрявцева Г.В.*[3], *Картунен А.А.*[4], *Кузнецов С.Р.* [5]

Математическая иммунология — новое направление в преподавании прикладной математики

Аннотация. Основная цель курса математической иммунологии — дать студенту общее представление о содержании, задачах и методах математического моделирования как самостоятельной научной дисциплины, а также его применения в медицине, биологии и экологии. Естественно, что при этом возникает задача ознакомить студентов с базовыми математическими моделями иммунного процесса и способах их исследования. Данная дисциплина должна способствовать формированию способности владеть методами математического моделирования и исследования процессов в иммунных системах живых организмов, описываемых с помощью дифференциальных или разностных уравнений.

Ключевые слова: математическая иммунология, иммунитет, дифференциальные уравнения, разностные уравнения.

Введение. Система организации иммунитета человека и животных имеет чрезвычайно сложную структуру и её исследование невозможно без использования формальных научный методов. Поэтому за последние два десятилетия у научного сообщества значительно возрос интерес к математическому моделированию в иммунологии [1]. Об этом свидетельствует быстро растущее число исследований в данной области и большое количество обзорных статей на эту тему; что можно считать индикатором появления нового научного направления, находящегося в стадии бурного развития и получившего название «математическая иммунология» [2]–[6].

Основной целью учебного курса математической иммунологии является формирование навыков владения базовыми методами вычислений и обработки информации, владения методами поиска и структурирования информации, эффективного применения их для решения научно-технических и прикладных задач, математического моделирования и исследования процессов управления в живых системах, таких как иммунная система человека и животных.

Для изучения данного курса студенты должны владеть материалом в рамках первых трёх курсов математических факуль-

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: visvi@mail.ru
[2]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: a_v_orehov@mail.ru
[3]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: g.v.kudryavtseva@spbu.ru
[4]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: kartunen@mail.ru
[5]Санкт-Петербургская Духовная Академия, e-mail: abxy01@yandex.ru

тетов государственных университетов. По окончании курса математической иммунологии студенты должны владеть: методами вычислений и обработки информации, методами поиска и структурирования информации, эффективного применения их для решения научно-технических и прикладных задач, методами математического моделирования и исследования процессов управления в живых системах, таких как иммунная система человека, знанием о базовых математических моделях иммунного процесса и способах их исследования. Лекционные и семинарские занятия должны проходить при участии студентов в обсуждении примеров, иллюстрирующих излагаемый материал. Учебная работа проводится с презентациями, интерактивными заданиями и тестами. Также проводятся практические занятия с использованием компьютерной техники, на которых студенты получают практические навыки по исследованию математических моделей иммунного процесса численными методами.

Для самостоятельной работы студентам предлагается проектная деятельность по созданию математической модели на заданную тему, которая включает в себя все этапы создания модели, от выбора предметной области и ПО, до реализации и исследования полученной модели.

1. Основные понятия современной иммунологии. *Иммунитет* (лат. immunitas) — способ защиты организма от действия различных патогенов (веществ или организмов), вызывающих деструкцию его клеток и тканей. Иммунный ответ организма характеризуется изменением функциональной активности некоторых органов и специализированных клеток с целью поддержания гомеостаза (физиологического равновесия) внутренней среды. Защитные механизмы, имеющие своей целью распознавание и обезвреживание патогенов, сформировали сложную многоуровневую иммунную систему многоклеточных организмов, важнейшим звеном которой становятся специализированные клетки, противостоящие вторжению генетически чужеродных объектов [7]–[9]. В широком плане, система иммунитета направлена на сохранение генетической идентичности организма. Наряду с нервной и эндокринной системами она является важнейшей системой управления организмом животного. Иммунный ответ возникает при столкновении с самыми различными чужеродными субстанциями, называемыми антигенами.

Антиген (англ. *antibody-generator — «производитель антител»*) — любое вещество, которое организм рассматривает как чужеродное или потенциально опасное и против которого организм обычно начинает вырабатывать собственные антитела и/или иммуноциты (иммунный ответ). Первый вариант иммунитета называется гуморальным (немедленного типа), второй — клеточным (замедленного типа).

Антитела (*иммуноглобулины, Ig*) — вид белковых соединений плазмы крови, синтезирующихся плазматическими клетками в организме человека и других теплокровных животных в ответ на попадание в него чужеродных или потенциально опасных веществ (это молекулы из бактерий или вирусов, белковые токсины и т.п., которые называют антигенами). Для каждого антигена формируются соответствующие ему специализированные плазматические клетки, вырабатывающие специфичные для этого антигена антитела. Антитела прикрепляются к антигенам, связываясь с определённым эпитопом (характерным фрагментом поверхностной мембраны антигена). Антитела выполняют две функции: антигенсвязывающую, то есть прямо мешают антигену приносить вред, и эффекторную, то есть вызывают тот или иной иммунный ответ, например, запускают классическую схему активации комплемента (комплементом называют сложный комплекс белков, действующий совместно для удаления внеклеточных форм патогена; система активируется спонтанно определёнными патогенами или комплексом антиген-антитело). Антитела являются особым классом гликопротеинов, имеющихся как в сыворотке крови, так и на поверхности специализированных клеток в виде мембрано-связанных рецепторов. Они состоят из двух лёгких и двух тяжёлых цепей. У млекопитающих выделяют пять классов антител (иммуноглобулинов) — IgG, IgA, IgM, IgD, IgE, различающихся между собой по строению и аминокислотному составу тяжёлых цепей и по выполняемым эффекторными функциям. Антитела являются важнейшим фактором специфического гуморального иммунитета, являются главным фактором в инфекционном иммунитете. В чистом виде они способствуют фагоцитозу, но не разрушают антиген.

Для дальнейшей реакции необходим комплемент.

Система комплемента состоит из нескольких молекул, последовательно активирующихся при соединении с комплексом антиген-антитело. При этом образуются противовоспалительные факторы, обладающие свойством стимулировать хемотаксис фагоцитов, фагоцитоз, дегрануляцию гранулоцитов, активацию тромбоцитов, вовлечение, таким образом, системы свёртывания (фибриноген). На последнем этапе активации системы комплемента возникает компонент, разрушающий стенку клетки или микроорганизма, несущего специфический антиген [10].

С точки зрения биохимии, антиген — любая молекула, специфично связывающаяся с антителом. По отношению к организму антигены могут быть как внешнего, так и внутреннего происхождения. Хотя все антигены могут связываться с антителами, не все они могут вызвать массовую выработку этих антител организмом, то есть иммунный ответ. Антиген, способный вызывать иммунный ответ организма, называют *иммуногеном* [11].

Антигены являются белками или полисахаридами и представляют собой части бактериальных клеток, вирусов и других микроорганизмов. Липиды и нуклеиновые кислоты, как правило, проявляют иммуногенные свойства только в комплексе с белками. К антигенам немикробного происхождения относятся некоторые металлы, пыльца, яичный белок и белки трансплантатов тканей и органов, а также поверхностные белки клеток крови при гемотрансфузии. Иммунный ответ на антиген всегда специфичен.

Аллергены — это антигены, вызывающие аллергические реакции.

В зависимости от происхождения, антигены классифицируют на *экзогенные*, *эндогенные* и *аутоантигены.*

Экзогенные антигены попадают в организм из окружающей среды, путём вдыхания, проглатывания или инъекции.

Эндогенные антигены образуются клетками организма в ходе естественного метаболизма или в результате вирусной или внутриклеточной бактериальной инфекции или мутаций. *Аутоантигены* — как правило, нормальные белки или белковые комплексы (а также комплексы белков с ДНК или РНК), которые распознаются иммунной системой у пациентов с аутоиммунными заболеваниями. Такие антигены в норме не должны узнаваться иммунной системой, но, ввиду генетических факторов или условий окружающей среды, иммунологическая толерантность к таким антигенам может быть утеряна.

Опухолевые антигены, или *неоантигены* — антигены, презентирующиеся на поверхности опухолевых клеток. Такие антигены могут быть презентированы опухолевыми клетками, и никогда — нормальными клетками. В таком случае они называются опухоль-специфичными антигенами (*tumor-specific antigen, TSA*) и, в общем случае, являются следствием мутации, которая называется *опухоль-специфичной.* Более распространёнными являются антигены, которые презентируются и на поверхности здоровых, и на поверхности опухолевых клеток, их называют опухоль-ассоциированными антигенами (*tumor-associated antigen, TAA*).

Нативный антиген — это антиген, который не был ещё процессирован антиген представляющей клеткой на малые части.

Иммунитет является способом защиты организма от всех антигенно чужеродных веществ как экзогенной, так и эндогенной природы. Биологическим смыслом такой защиты является обеспечение генетической целостности живого организма в онтогенезе [7].

2. Иммунная система. *Иммунная система* — совокупность органов и тканей организма, которые защищают его от различного рода патогенов, идентифицируя и уничтожая их. Характерные признаки иммунной системы: способность отличать «своё» от «чужого», формирование памяти после первичного контакта с чужеродным антигенным материалом, клональная организация иммунокомпетентных клеток, при которой отдельный клеточный клон способен, как правило, реагировать лишь на одну из множества антигенных детерминант [12]. Иммунная система исторически описывается состоящей из двух частей — системы гуморального иммунитета и системы клеточного иммунитета. В случае гуморального иммунитета защитные функции выполняют молекулы, находящиеся в плазме крови. С другой стороны, в случае клеточного иммунитета, защитная функция связана именно с клетками иммунной системы.

Гуморальный иммунитет является основным в противодействии инфекциям. Клеточный иммунитет участвует в отторжении трансплантата, борьбе с онкопатологией и играет важнейшую роль при туберкулёзе и проказе.

Иммунитет так же классифицируют на врождённый и адаптивный.

Врождённый (неспецифический, наследственный [10]) иммунитет обусловлен способностью идентифицировать и обезвреживать разнообразные патогены по наиболее консервативным, общим для них признакам. Осуществляется большей частью клетками миелоидного ряда, не имеет строгой специфичности к антигенам, не имеет клонального ответа, не обладает памятью о первичном контакте с чужеродным агентом. В связи с неспецифичностью этой реакции данный вариант можно не относить к системе иммунитета (неспецифическая система защиты).

Адаптивный (приобретённый, специфический) иммунитет имеет способность распознавать и реагировать на индивидуальные антигены, характеризуется клональным ответом, в реакцию вовлекаются лимфоидные клетки, имеется иммунологическая память, возможна аутоагрессия [10].

Специфический иммунитет разделяют на активный и пассивный.

Приобретённый активный иммунитет возникает после перенесённого заболевания или после введения вакцины.

Приобретённый пассивный иммунитет развивается при введении в организм готовых антител в виде сыворотки или передаче их новорождённому с молозивом матери или внутриутробным способом.

Другая классификация разделяет иммунитет на естественный и искусственный.

Естественный иммунитет включает врождённый иммунитет и приобретённый активный (после перенесённого заболевания), а также пассивный иммунитет при передаче антител ребёнку от матери.

Искусственный иммунитет включает приобретённый активный после прививки (введение вакцины) и приобретённый пассивный (введение сыворотки).

Выделяют центральные и периферические органы иммунной системы. К центральным органам относят красный костный мозг и тимус (вилочковая железа), а к периферическим — селезёнку, лимфатические узлы, а также местно-ассоциированную лимфоидную ткань: бронх-ассоциированную (БАЛТ), кожно-ассоциированную (КАЛТ), кишечно-ассоциированную (КиЛТ, пейеровы бляшки).

Красный костный мозг — центральный орган кроветворения и иммуногенеза. Содержит самоподдерживающуюся популяцию стволовых клеток. Красный костный мозг находится в ячейках губчатого вещества плоских костей и в эпифизах трубчатых костей.

Тимус — центральный орган иммунной системы. В нём происходит дифференцировка Т-лимфоцитов из предшественников, поступающих из красного костного мозга.

Лимфатические узлы — периферические органы иммунной системы. Они располагаются по ходу лимфатических сосудов. В каждом узле выделяют корковое и мозговое вещество.

Селезёнка — паренхиматозный зональный орган. Является самым крупным органом иммунной системы, кроме того, выполняет депонирующую функцию по отношению к крови. Селезёнка покрыта капсулой из плотной соединительной ткани, которая содержит гладкомышечные клетки, позволяющие ей при необходимости сокращаться. *Паренхима* представлена двумя функционально различными зонами: белой и красной пульпой. *Белая пульпа* составляет 20% паренхимы и представлена лимфоидной тканью. *Красная пульпа* составляет 80% паренхимы и выполняет следующие функции: депонирование зрелых форменных элементов крови, контроль состояния и разрушения старых и повреждённых эритроцитов и тромбоцитов, фагоцитоз инородных частиц, обеспечение дозревания лимфоидных клеток и превращение моноцитов в макрофаги.

К иммунокомпетентным клеткам относят макрофаги и лимфоциты. Эти клетки совместно участвуют в инициации и развитии всех звеньев адаптивного иммунного ответа (система трёхклеточной кооперации).

Макрофаги (от др.-греч. *μακρός* — большой, и *φάγος* — пожиратель) — клетки в организме животных и человека, способные к активному захвату и перевариванию бактерий, остатков погибших клеток и других чужеродных или токсичных для организма частиц. Термин «макрофаги» введён И. Мечниковым. Макрофаги присутствуют практически в каждом органе и ткани, где они выступают в качестве первой линии иммунной защиты от патогенов и играют важную роль в поддержании тканевого гомеостаза [10]. Макрофаги являются активными участниками фагоцитоза.

Фагоцитоз — процесс, при котором клетки крови или тканей организма (фагоциты) захватывают и переваривают инородные частицы. Фагоцитоз у многоклеточных животных взял на себя функцию удаления отходов и патогенов. Важной составляющей фагоцитоза являются дендритные клетки.

Дендритные клетки — это фагоциты, присутствующие в тех тканях, которые соприкасаются с внешней средой, т.е. расположены, главным образом, в коже, носу, лёгких, желудке, кишечнике и т.д. Эти клетки названы так, поскольку напоминают дендриты нейронов из-за наличия многочисленных отростков, однако дендритные клетки никак не связаны с нервной системой, но с другой стороны служат связующим звеном между врождённым и приобретённым иммунитетом [13].

Клетки, входящие в состав крови образуются в красном костном мозге. Существует три основных типа таких клеток: *эритроциты* (красные кровяные клетки), *тромбоциты* (кровяные пластинки) и *лейкоциты* (белые кровяные клетки). Клетки крови выполняют разнообразные функции: переносят кислород и углекислый газ (эритроциты), обеспечивают свёртываемость крови (тромбоциты) и работу иммунной системы (лейкоциты) [14].

Лейкоциты — ядерные шаровидные клетки. В зависимости от типа гранул в цитоплазме их подразделяют на гранулоциты (нейтрофилы, эозинофилы, базофилы) и агранулоциты (лимфоциты и моноциты). Отличительная черта лейкоцитов - их подвижность, которая обеспечивается сократительными белками актином и миозином. Они могут даже выходить из кровеносных сосудов, проникая между клетками эндотелия. Основная функция лейкоцитов - защитная. Они фагоцитируют микроорганизмы, инородные частицы, продукты распада тканей, синтезируют и инактивируют различные биологически активные вещества, опосредуют реакции гуморального и клеточного иммунитета [7],[9],[14].

Наиболее многочисленный тип лейкоцитов — *нейтрофилы*. После выхода из костного мозга они циркулируют в крови всего несколько часов, после чего оседают в различных тканях. Их главная функция — фагоцитоз обломков тканей и опсонизированных микроорганизмов. Таким образом, нейтрофилы, наряду с макрофагами, обеспечивают первичный неспецифический иммунный ответ [8],[10].

Эозинофилы в течение нескольких дней после образования остаются в костном мозге, потом на несколько часов выходят в кровоток и далее мигрируют в ткани, контактирующие с внешней средой (слизистые оболочки дыхательных и мочеполовых путей, а также кишечника). Эозинофилы способны к фагоцитозу, задействованы в аллергических, воспалительных и антипаразитарных реакциях. Они также выделяют гистаминазы, инактивирующие гистамин, и блокируют дегрануляцию тучных клеток [15].

Базофилы — очень малочисленный тип лейкоцитов (не более 0-1 % общего числа лейкоцитов в крови), в их гранулах содержатся гистамин и гепарин. Они выходят из кровотока в ткани, где участвуют в аллергических реакциях, выделяя гистамин и другие вазоактивные вещества [15].

Моноциты — самые крупные лейкоциты. После нескольких дней циркуляции в кровотоке они выходят в ткани и превращаются в макрофаги. Они фагоцитируют из крови денатурированные белки, состарившиеся эритроциты, обломки клеток и внеклеточного матрикса. Они также поглощают находящиеся в тканях опсонизированные бактерии и после активации секретируют разнообразные ферменты, транспортные белки, интерлейкины, факторы роста, тромбоксаны, а также лизоцим и эндогенные пирогены [15].

Лимфоциты подразделяют на два основных типа: *Т-лимфоциты* и *В-лимфоциты*, — в зависимости от места их созревания (тимус или красный костный мозг соответственно). Они постоянно поступают в кровь с лимфой из лимфатических узлов. Лимфоциты обеспечивают специфический иммунитет. B-лимфоциты выделяют антитела. T-лимфоциты подразделяются на T-киллеров, обеспечивающих клеточный иммунный ответ, *T-хелперов*, которые поддерживают пролиферацию и дифференцировку B-лимфоцитов, и T-регуляторные клетки, подавляющие T-клеточный иммунный ответ после устранения угрозы. Выделяют также особую группу лимфоцитов — *натуральные киллеры*, которые уничтожают раковые клетки, чужеродные клетки и клетки заражённые вирусами[9],[10].

Все кровяные клетки происходят из стволовых кроветворных (гематопоэтических) клеток, находящихся в костном мозге. Сначала они разделяются на популяции предшественников лимфоидных клеток и миелоидных клеток.

Предшественники лимфоидных клеток дают начало натуральным киллерам, T-лимфоцитам и B-лимфоцитам. Предшественники миелоидных клеток развиваются в популяции мегакариоцитов (предшественников тромбоцитов), предшественников эритроцитов, тучных клеток и миелобластов. От миелобластов происходят базофилы, нейтрофилы, эозинофилы и моноциты. Образование эритроцитов (эритропоэз) стимулируется эритропоэтинами при нехватке кислорода в тканях. Содержание лейкоцитов в крови регулируется гормонами тимуса. В печени синтезируется тромбопоэтин, который стимулирует образование мегакариоцитов [14],[15].

3. Информационные процессы в иммунной системе и клонально-селекционная теория. Клетки живого организма (в том числе и клетки крови) могут обмениваться информацией и способны к обучению (это явление называется *клеточной памятью*), например [16]–[19]. Физическим носителем межклеточной информации являются небольшие информационные молекулы: *клеточные рецепторы и цитокины.*

Клеточный рецептор — молекула на поверхностной мембране клетки, которая специфично реагирует изменением своей пространственной конфигурации на присоединение к ней молекулы определённого химического вещества, передающего внешний регуляторный сигнал и, в свою очередь, передаёт этот сигнал внутрь клетки нередко при помощи так называемых вторичных посредников или трансмембранных ионных токов; вещество, специфически соединяющееся с рецептором, называется *лигандом* этого рецептора.

Основными продуцентами цитокинов являются лимфоциты. Группа цитокинов, синтезируемая в основном лейкоцитами называется *интерлейкинами, IL* (по этой причине был выбран корень «лейкин»). Кроме лимфоцитов цитокины секретируют макрофаги, гранулоциты, ретикулярные фибробласты, эндотелиальные клетки и другие типы клеток.

В общем случае цитокин **X** выделяется на поверхность клетки **A** и взаимодействует с рецептором находящейся рядом клетки **B**. Таким образом, от клетки **A** к клетке **B** передаётся сигнал, который запускает в клетке **B** дальнейшие реакции.

Цитокины регулируют межклеточные и межсистемные взаимодействия, определяют выживаемость клеток, стимуляцию или подавление их роста, дифференциацию, функциональную активность и *апоптоз* (регулируемый процесс программируемой клеточной гибели, в результате которого клетка распадается на отдельные апоптотические тельца, ограниченные плазматической мембраной), а также обеспечивают согласованность действия иммунной, эндокринной и нервной систем в нормальных условиях и в ответ на патологические воздействия.

Цитокины активны в очень малых концентрациях. Их биологический эффект на клетки реализуется через взаимодействие со специфическим рецептором, локализованным на клеточной цитоплазматической мембране. Образование и секреция цитокинов происходит кратковременно и строго регулируется. Все цитокины, а их в настоящее время известно более 30, по структурным особенностям и биологическому действию делятся на несколько самостоятельных групп [8],[10],[20].

Важными понятиями, связанными с системой иммунитета являются *некроз*, *пролиферация* и *дифференцировка* клеток.

Некроз — патологическая, форма клеточной смерти, противоположная апоптозу. Такая смерть постигает клетку если вирус или иной патоген разрушает клетку: она лизируется, ее содержимое изливается наружу, в межклеточное пространство. Начинается воспалительный процесс, исходом которого может быть, как выздоровление, так и гибель организма. Некротическую гибель могут вызывать физические или химические повреждения, например обморожение или ожог, органические растворители, гипоксия, отравление, гипотонический шок и др. [21].

В сильно поврежденных тканях преобладают процессы некроза, которые затрагивают целые клеточные поля и характеризуются пассивной дегенерацией клеток с набуханием и фрагментацией органелл, разрушением мембран, лизисом клеток, выходом внутриклеточного содержимого в окружающую ткань и развитием воспалительного ответа. Некроз всегда обусловлен грубой патологией. Элементы разрушительного характера являются атрибутами воспалительной реакции. Наличие или отсутствие воспаления у животных используется как признак, позволяющий отличить апоптоз от некроза [21].

Гибель клеток в процессе некроза связана с нарушениями в мембране или цитоплазме клеток. К некрозу, в частности, приводит атака клетки антителами и комплементом, что вызывает образование пор в мембране, нарушение осмотического давления в клетке, разрыв мембраны и, в конечном итоге, гибель клетки.

Пролиферация — разрастание ткани организма (в том числе и крови) путём размножения клеток делением.

Дифференцировка клеток — процесс реализации генетически обусловленной программы формирования специализированного фенотипа клеток, отражающего их способность к тем или иным профильным функциям. Дифференцировка меняет функцию клетки, её размер, форму и метаболическую активность. В процессе дифференцировки менее специализированная клетка становится более специализированной. Например, моноцит развивается в макрофаг; пролиферация и дифференцировка — основные процессы, обеспечивающие развитие всего многообразия клеток крови.

Кластер дифференцировки (англ. cluster of differentiation или cluster designation; сокращённо CD) — номенклатура дифференцировочных антигенов лейкоцитов человека. Данная классификация была предложена в 1982 году для идентификации и исследования поверхностных мембранных белков лейкоцитов. *CD-антигенами* (или иначе *CD-маркерами*) могут быть белки, которые служат рецепторами или лигандами, участвующими во взаимодействии клеток между собой и являющимися компонентами каскада определённых сигнальных путей. Однако, они могут быть и белками, выполняющими другие функции (например, белки клеточной адгезии). Список CD-антигенов, внесённых в номенклатуру, постоянно пополняется и в настоящее время содержит порядка 350 CD-антигенов и их подтипов.

Лейкоциты экспрессируют особые для каждой субпопуляции поверхностные молекулы, которые рассматривают как специфические маркеры (метки). Значительная часть этих маркеров легко идентифицируется с помощью моноклональных антител. Разработана систематизированная номенклатура маркерных молекул. За основу CD-номенклатуры принята специфичность прежде всего мышиных моноклональных антител к лейкоцитарным антигенам человека. В создании этой классификации участвуют многие специализированные лаборатории. Моноклональные антитела совпадающей специфичности связывания объединяют в одну группу, присваивая ей номер в системе CD. Однако в настоящее время принято таким образом обозначать не группы антител, а маркерные молекулы, распознаваемые антителами [8],[10],[20].

Парадигмой современной иммунологии является *клонально-селекционная теория*, созданная Ф. Бернетом на основе как своих идей, так и идей Н. Ерне, Дж. Ледерберга и Д. Толмейджа [22]. Суть этой теории заключается в том, что иммунная система распознает антигены на молекулярном уровне. Главным инструментом осуществления этой функции является создание специфических клонов лимфоцитов, т. е. групп клеток, «настроенных» на определение какого-то конкретного антигена. Всего в организме существует огромное множество таких групп разной специфичности, позволяющих «вычислить» практически любой возможный антиген, кроме своего (чтобы не «начать войну» с собственный организмом).

Упрощённо схема, обеспечивающая разнообразие клонов, может быть представлена следующим образом: изначально иммунная система с помощью специального генетически обусловленного механизма создаёт клоны всевозможной специфичности, которые затем проходят специфический отбор. Его суть заключается в том, что клоны, специфичные к собственным здоровым тканям, запрещаются — не функционируют.

Помимо описанной системы, являющейся адаптивным иммунитетом, в организме существует ещё система врождённого иммунитета. В основе учения о врождённом иммунитете лежит фагоцитарная теория И. Мечникова, существенно развитая и расширенная в последние десятилетия благодаря трудам C.A. Janeway, R. Medzhitov и J. Hoffmann [10].

Согласно данной теории на поверхности специализированных иммунных клеток врождённого иммунитета (моноцитов-макрофагов, нейтрофилов и др.), а также (в меньшей степени) практически на всех клетках организма существуют т.н. образраспознающие рецепторы (*pattern recognition receptors, PRR*). Данные рецепторы способны очень чутко различать патогенные организмы не только по отдельным белкам, но и по их совокупности — по характерным для специфического патогена молекулярным образам (*pathogen-associated molecular patterns, PAMP*) [23]. После того, как патоген опознан, клетки врождённого иммунитета пытаются его уничтожить. Данная система является первым уровнем обороны. Если патоген не удаётся подавить силами врождённого иммунитета, то в борьбу вступает иммунитет адаптивный. По мнению ряда, учёных PRR также обеспечивают толерантность на слизистых оболочках человека и животных к собственной микрофлоре. Обе системы между собой жёстко связаны, взаимно дополняют друг друга, и система врождённого иммунитета почти всегда является необходимой платформой для развития адаптивного иммунного ответа. Клетки врождённого иммунитета выступают в качестве источника информации для клеток адаптивного иммунитета. Захватывая патогенные организмы и структуры, они перемещаются в центры развития адаптивного иммунного ответа (лимфоузлы, селезёнку и др.), дробят захваченный материал на небольшие кусочки, которые затем представляют для анализа клеткам адаптивного иммунитета. Процесс этот называется презентацией антигена, а сами клетки — антиген презентирующими клетками. Система адаптивного иммунитета имеет довольно сложную структуру, имеющую целью развитие различных форм иммунного ответа (наиболее подходящих к конкретному патогену).

В целом всеми процессами адаптивного и, частично, врождённого иммунитета управляют специфичные CD4+ Т-лимфоциты (иначе — Т-хелперы). Т-хелперные клетки определяют, какой тип иммунного ответа наиболее подходит в конкретном случае, и координируют развитие иммунного ответа с помощью цитокинов.

Другими координационными клетками являются *регуляторные лимфоциты (супрессоры)*. Их основная задача запускать процессы торможения иммунного ответа, когда «опасность миновала», или ограничивать силу иммунного ответа, когда этого требуют обстоятельства. Они также используют цитокины для управления процессами иммунного ответа.

Любая клетка организма, в особенности иммунокомпетентная клетка, имеет на своей мембране огромное число различных рецепторов к цитокинам, и сама способна производить немалое их число. При этом цитокины, по всей вероятности, представляют собой некоторую сеть, которая имеет свои на данный момент малоизученные законы, и которая поддерживается и используется всеми клетками иммунной системы.

Необходимо отметить, что все типы иммунных процессов неразрывно связаны с понятием пролиферации и дифференцировки. Если пролиферация — это процесс деления клетки, запускаемый в ходе иммунного ответа на антиген, то дифференцировка — это своего рода дозревание клетки, в ходе которого она приобретает определённый фенотип и становится способной выполнять узкоспециализированные функции. Дифференцировка характерна для всех клеток иммунной системы. По сути цитокиновая сеть имеет своей основной задачей управлять процессами дифференцировки всех типов иммунокомпетентных клеток.

Теперь можно вернуться к понятиям клеточного и гуморального иммунитета и описать их различия и связь чуть подробнее.

В клеточном иммунитете не участвуют ни антитела, ни система комплемента, в этом процессе активируются макрофаги, натуральные киллеры, антиген-специфичные цитотоксические Т-лимфоциты, и в ответ на антиген выделяются цитокины.

Система клеточного иммунитета выполняет защитные функции следующими способами: путём активации антиген-специфических цитотоксичных Т-лимфоцитов, которые могут вызывать апоптоз соматических клеток, демонстрируя на поверхности эпитопы чужеродных антигенов, например, клеток, заражённых вирусами, содержащими бактерии и клеток опухолей, демонстрирующих опухолевые антигены; путём активации макрофагов и натуральных киллеров, которые разрушают внутриклеточные патогены; путём стимулирования секреции цитокинов, которые оказывают влияние на другие клетки иммунной системы, принимающие участие в адаптивном иммунном ответе и врождённом иммунном ответе.

Клеточный иммунитет направлен преимущественно против микроорганизмов, поражающих клетки. Система клеточного иммунитета особенно эффективна против клеток, инфицированных вирусами; она также принимает участие в защите от грибов, простейших, внутриклеточных бактерий, против клеток опухолей и играет важную роль в отторжении трансплантата. Клеточный иммунитет — основа защиты при туберкулезе и проказе.

Полностью разделить клеточный иммунитет и гуморальный невозможно: в инициации образования антител участвуют клетки, а в некоторых реакциях клеточного иммунитета важную связующую функцию выполняют антитела.

Гуморальный иммунный ответ (образование антител) представляет собой кульминацию ряда клеточных и молекулярных взаимодействий, происходящих в определённой последовательности:

1. Т-клетки распознают антиген, представленный им антигенпрезентирующими клетками, и в результате переходят в активированное состояние;
2. Th-клетки взаимодействуют с В-клетками, которые презентируют им антигенные фрагменты;
3. активированные В-лимфоциты пролиферируют и дифференцируются в антителообразующие клетки;

4. начинается синтез антител и от их класса зависит характер последующего иммунного ответа.

4. Структура и содержание учебных занятий по курсу математической иммунологии. Занятия по курсу проводятся один семестр (8-ой), лекции — 36 часов, семинары — 18 часов, самостоятельная работа — 62 часа.

При планировании курса оказалось целесообразно выделение следующих модулей.

4.1. ***Введение.*** Математика и информатика. Их место в современной цивилизации: в естествознании, гуманитарных науках, технологии, искусстве. Математика, информатика и общество. Математическое моделирование.

4.2. ***Общие сведения, гипотезы, проблемы.*** Основные компоненты иммунного ответа. Формы заболеваний. Общая схема инфекционного заболевания. Иммунологические модели инфекционных заболеваний. Иммунологическая модель вирусной инфекции. Проблема биостимуляции иммунной системы. Иммунофизиологические реакции организма.

4.3. ***Простейшая математическая модель инфекционного заболевания.*** Построение простейшей модели заболевания. Качественный анализ простейшей модели заболевания. Результаты моделирования. Влияние температурной реакции организма на динамику заболевания.

4.4. ***Моделирование иммунного ответа организма на проникновение антигенов двух типов.*** Основная гипотеза о конкуренции антигенов. Общая модель биинфекции. Лечение хронических форм обострением. Моделирование смешанных инфекций.

4.5. ***Математическое моделирование противовирусного иммунного ответа.*** Иммуногенетическое описание модели противовирусного иммунного ответа. Построение математической модели противовирусного иммунного ответа. Моделирование защитных иммунофизиологических реакций организма.

4.6. ***Математическое моделирование противобактериального иммунного ответа.*** Иммуногенетическое описание модели противобактериального иммунного ответа. Построение математической модели противобактериального иммунного ответа.

4.7. ***Математическая модель иммунного ответа при вирусно-бактериальной инфекции.*** Иммуногенетическое описание модели вирусно-бактериальной инфекции. Построение математической модели вирусно-бактериальной инфекции.

4.8. ***Идентификация параметров моделей.*** Идентификация параметров моделей путем последовательной локальной минимизации отклонений. Статистическое оценивание параметров моделей заболеваний по экспериментальным данным.

4.9. ***Численные алгоритмы реализации математических моделей.*** Численный алгоритм решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе методов Рунге–Кутты–Фельберга. Численный алгоритм решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе линейных многошаговых методов.

4.10. ***Модели Белла.*** Построение модели взаимодействия моновалентного антигена с гомогенными (имеющими одинаковую константу связи) бивалентными антителами и мультивалентными клетками. Качественный анализ модели. Результаты моделирования.

4.11. ***Модели Молера–Бруни.*** Построение модели гуморального иммунного ответа. Качественный анализ модели. Результаты моделирования.

4.12. ***Сетевые модели иммунной реакции.*** Модель Рихтера. Модель Хоффмана. Построение модели. Качественный анализ модели. Результаты моделирования.

5. Методические указания по освоению курса «Математической иммунологии». Данная дисциплина имеет целью подготовку квалифицированных специалистов, в области математического моделирования в медицине, биологии и экологии. В лекциях и на семинарах используется мультимедийное оборудование (компьютер, проектор и т.д.), выход в Интернет.

Студентам следует понимать, что самостоятельная работа, в конечном итоге, обеспечивает приобретение заявленных компетенций и устойчивых навыков решения прикладных задач, на которые ориентирована данная учебная дисциплина.

Студентам рекомендуется:

1. Использовать указанную литературу, учебные пособия, написанные преподавателями профильных кафедр, и информационные источники сети Интернет для более прочного усвоения учебного материала, изложенного на лекциях, а также для изучения материала, запланированного для самостоятельной работы.

2. Обращать особое внимание на методологические приемы и подходы, которые преподаватель использует при объяснении теоретических вопросов и решении прикладных задач.
3. Выполнять упражнения, на которые преподаватель обращает внимание по ходу чтения лекций.
4. При изучении теоретических вопросов, отнесенных к самостоятельной работе составлять планы ответов и готовить по ним структурированные конспекты.
5. При подготовке к экзамену уделить особое внимание освоению основных понятий (терминологии) учебной дисциплины, их взаимосвязи, кругу рассмотренных задач, а также методов и алгоритмов их решения.

Задания, вынесенные на самостоятельную работу, проверяются преподавателем в течение семестра. Посещаемость занятий, оценки за индивидуальные задания и самостоятельную работу учитываются при атестации на экзаменах.

Изучение учебного предмета осуществляется как в процессе работы на лекциях и семинарах, так и в ходе систематической самостоятельной работы с учебной и научной литературой, с базами, справочными изданиями и т.д. При выполнении домашних, индивидуальных и контрольных заданий студенту необходимо знать содержание лекций, уметь формулировать определения основных понятий и утверждений, уметь применять методы доказательств для решения конкретных задач. При подготовке к самостоятельной работе целесообразно использовать рекомендованную и дополнительную литературу.

В состав методического обеспечения самостоятельной работы входят: список литературы для более глубокого изучения материала, рекомендации по использованию информационных технологий, перечень иных информационных источников.

На первом занятии преподаватель доводит до сведения слушателей график (сроки) текущего контроля их самостоятельной работы и критерии оценки знаний при устном опросе, проверке заданий, а также сроки и условия заключительной (промежуточной) аттестации.

Реализацию непрерывного контроля знаний согласно графику, преподаватель осуществляет за счет часов, предусмотренных нормами времени на проверку контрольных работ (заданий), проведение консультаций и пр.

Преподаватель имеет право изменять структуру и количество модулей дисциплины и разделов в них, в зависимости от появления новых научных результатов и исследований по теме дисциплины. Преподаватель также имеет право изменять количество точек контроля знаний слушателей за период обучения. Однако при этом необходимо обеспечить соответствие затрат учебного времени на самостоятельную работу слушателей установленным нормам затрат времени на эти виды контроля, а также бюджету времени, предусмотренному учебным планом на данную дисциплину.

5.1. ***Примерный перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:***

1) Иммуногенетическое описание модели противовирусного иммунного ответа.
2) Построение математической модели противовирусного иммунного ответа.
3) Моделирование защитных иммунофизиологических реакций организма.
4) Иммунофизиологические реакции организма.
5) Построение простейшей модели инфекционного заболевания.
6) Качественный анализ простейшей модели заболевания.
7) Влияние температурной реакции организма на динамику заболевания.
8) Численный алгоритм решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе методов Рунге–Кутты–Фельберга.
9) Численный алгоритм решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе линейных многошаговых методов.

5.2. ***Примерный перечень вопросов для экзамена:***

1. Основные компоненты иммунного ответа.
2. Формы заболеваний.
3. Общая схема инфекционного заболевания.
4. Иммунологические модели инфекционных заболеваний.
5. Иммунологическая модель вирусной инфекции.
6. Проблема биостимуляции иммунной системы.
7. Иммуногенетическое описание модели противовирусного иммунного ответа.
8. Построение математической модели противовирусного иммунного ответа.
9. Моделирование защитных иммунофизиологических реакций организма.
10. Иммунофизиологические реакции организма.

11. Построение простейшей модели инфекционного заболевания.
12. Качественный анализ простейшей модели заболевания.
13. Влияние температурной реакции организма на динамику заболевания.
14. Численный алгоритм решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе методов Рунге–Кутты–Фельберга.
15. Численный алгоритм решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе линейных многошаговых методов.
16. Модель Рихтера.
17. Модель Хоффмана.
18. Модель Белла.
19. Модель Молера–Бруни.

5.3. ***Список обязательной литературы:***

1. Л.Н. Белых. Анализ математических моделей в иммунологии. /Под ред. Г.И.Марчука. М.: Наука, 1988, 192 с.
2. Г.И. Марчук. Математические модели в иммунологии. Издание второе, переработанное и дополненное М.: Наука, 1985, 240 с.
3. Г.И. Марчук. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. Издание третье, переработанное и дополненное М.: Наука, 1991, 304 с.
4. Математические модели в иммунологии и медицине /Под ред. Г.И.Марчука М.: Мир, 1986.
5. Р.М. Хаитов. Физиология иммунной системы. М.: ВИНИТИ РАН, 2001, 224 с.
6. Е.В. Гублер. Информатика в патологии, клинической медицине и педиатрии. Л.: Медицина, 1990, 176 с.

5.3. ***Список дополнительной литературы:***

1. Р.В. Петров. Иммунология. М.: Медицина, 1982, 368 с.
2. Ю.М.Романовский, Н.В.Степанова, Д.С.Чернавский. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
3. Генкин Я.Я. Новая информационная технология анализа медицинских данных. СПб., 1999.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (издания начиная со второго). М., Наука, 1965 и более поздние.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (издания начиная с пятого). М., Наука,

1964 и более поздние.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений (издания начиная с четвертого). М., Наука, 1945 и более поздние.
7. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения (издания начиная с третьего). Минск, Высшая школа.
8. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Издание второе. М., Высшая школа, 1989.
9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление (издания начиная с первого). М., Наука, 1965 и более поздние.

Список литературы

[1] Кузнецов С.Р., Шишкин В.И. Математическое моделирование как инструмент теоретических исследований в иммунологии — достижения и перспективы // Цитокины и воспаление. 2012. Т. 11, №2. с. 5–13.

[2] Louzoun Y. The evolution of mathematical immunology // Immunological Reviews. 2007. Apr. V. 216, № 1. pp. 9–20. DOI: 10.1111/j.1600-065X.2006.00495.x.

[3] Heffernan J.M. Mathematical Immunology of Infectious Diseases April 2011, Mathematical Population Studies 18(2):47–54 DOI: 10.1080/08898480.2011.564559

[4] Eftimie R., Gillard J.J., Cantrell D.A. Mathematical Models for Immunology: Current State of the Art and Future Research Directions. Bulletin of Mathematical Biology. October 2016, Volume 78, Issue 10, pp. 2091–2134. DOI: 10.1007/s11538-016-0214-9

[5] Rudnev S.G. Mathematical models in immunology. by Mathematical Models of Life Support Systems: Vol II, 2009. pp. 261–311

[6] Bocharov G., Volpert V., Ludewig B., Meyerhans A.. Mathematical Immunology of Virus Infections. Springer International Publishing, 2018. pp.XV, 245.

[7] Галактионов В. Г. Эволюционная иммунология. М.: Академкнига, 2005. 408 с.

[8] Хаитов Р. М. Иммунология. М.: ГЕОТАР, 2006. 320 с.

[9] Ярилин А. А. Иммунология. М.: ГЕОТАР, 2010. 737 с.

[10] Хаитов Р. М., Ярилин А.А., Пенегин Б.В. Иммунология: атлас. М.: ГЕОТАР-Медиа, 20011. 624 с.

[11] Петров Р.В., Хаитов Р.М. Иммуногены и вакцины нового поколения. М. : ГЭОТАР-Медиа, 2011. 608 с.

[12] Пол У., Сильверстайн А., Купер М. и др. Иммунология, пер. с англ., в 3-х т. Т.1. М.: Мир, 1987. 476 с.

[13] Ueno, H. et al. Dendritic cell subsets in health and disease. Immunol. Rev. 219, 2007. pp. 118–142

[14] Судаков К. В. и др. Нормальная физиология. М.: ГЭОТАР-Медиа. 2015. 880 с.

[15] Физиология человека. под. ред. Покровского В.М., Коротько Г.Ф. М.: «Медицина», 2007. 246.

[16] Кузнецов С. Р. Математическая модель иммунного ответа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 72–87.

[17] Kuznetsov S. R., Kudryavtsev I. V., Orekhov A. V., Polevshchikov A. V., Serebriakova M. K., Shishkin V. I. A mathematical model for predicting of IGD–CD27+ B lymphocytes levels in donors' blood // Биоинформатика регуляции и структуры геномов и системной биологии. Новосибирск. 2016. С. 166.

[18] Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шишкин В. И. Модель пролиферации и дифференцировки неоднородной клеточной популяции // Математическое и компьютерное моделирование в биологии и химии III Международная научная Интернет-конференция. 2014. С. 95–103.

[19] Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шишкин В. И. Процесс формирования иммунной памяти Т-лимфоцитов и его зависимость от числа пройденных клетками делений // Устойчивость и процессы управления. Материалы III международной конференции. 2015. С. 487–488.

[20] Песнякевич А. Г. Иммунология: учеб. пособие. Минск: БГУ, 2018. 255 с.

[21] Авцын А. П., Шахламов В. А. Ультраструктурные основы патологии клетки. М.: Медицина, 1979. 316 с.

[22] Аронова Е.А. Иммунитет. Теория, философия и эксперимент: Очерки из истории иммунологии XX века. М.: КомКнига, 2006. 160 с.

[23] Wauben M.H.M., et al. Sensing and signaling by the immune system NVVI-Dutch Society for Immunology Course, Lunteren, April 2-3, 2009 October 2009Immunology letters 128(1):1-3 DOI: 10.1016/j.imlet.2009.09.004

Содержание

Секция 1. Общие вопросы педагогики

Секция 2. Преподавание точных наук в средней школе