

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 510:531

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-277-291

Пафнутий Львович Чебышёв – академик Императорской Санкт-Петербургской академии наук (к 300-летию Российской академии наук и Санкт-Петербургского государственного университета)

Г. В. Павилайнен, А. А. Тихонов, М. П. Юшков

Павилайнен Галина Вольдемаровна — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: g.pavilaynen@spbu.ru

Тихонов Алексей Александрович — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: a.tikhonov@spbu.ru

Юшков Михаил Петрович — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: m.yushkov@spbu.ru

Аннотация

В статье приводятся краткие биографические сведения о гениальном, всемирно известном учёном, академике Императорской Санкт-Петербургской академии наук Пафнутии Львовиче Чебышёве (1821-1894). Обсуждается правильное ударение в фамилии учёного. Отмечаются учебно-научная, педагогическая деятельность и общественно-административная работа П.Л. Чебышёва. Сжато излагаются достижения П. Л. Чебышёва в области математики, более подробно – в механике. Задачи синтеза механизмов, созданных П. Л. Чебышёвым, называются задачами Чебышёва. Формулируется обобщённая задача Чебышёва, относящаяся к новому классу задач теории управления, в котором программа движения задаётся в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Обсуждается решение этих задач на основе применения обобщённого принципа Гаусса, предложенное профессором Н. Н. Поляховым и его учениками, С. А. Зегждой, М. П. Юшковым в 1983 году на кафедре теоретической и прикладной механики Ленинградского (Санкт-Петербургского) государственного университета. Обсуждается влияние идей П.Л. Чебышёва на содержание двухтомного учебника по теоретической и прикладной механике для классических университетов. Статья отражает содержание доклада, приуроченного к 300-летию РАН и Санкт-Петербургского университета и заслушанного 15 февраля 2024 года на заседании секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома учёных имени М. Горького.

Ключевые слова: Чебышёв П.Л., 300 лет, биография, теоретическая механика.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Павилайнен, Г.В., Тихонов, А.А., Юшков, М.П. Пафнутий Львович Чебышёв – академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук (к 300-летию Российской Академии наук и Санкт-Петербургского государственного университета) // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, С. 277–291.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 510:531

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-277-291

Pafnuty Lvovich Chebyshev – academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences (to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg State University)

G. V. Pavilaynen, A. A. Tikhonov, M. P. Yushkov

Pavilaynen Galina Voldemarovna – Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).*e-mail: g.pavilaynen@spbu.ru***Tikhonov Alexey Alexandrovich** – Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).*e-mail: a.tikhonov@spbu.ru***Yushkov Mikhail Pertovich** – Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).*e-mail: m.yushkov@spbu.ru***Abstract**

The article provides brief biographical information about the brilliant, world-famous scientist, academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894). The correct emphasis is in the scientist's surname discussed. The educational, scientific, pedagogical activities and social and administrative work of P.L. Chebyshev are noted. The achievements of P.L. Chebyshev are briefly in the field of mathematics, in more detail - in mechanics presented. Problems of synthesis of mechanisms created by P.L. Chebyshev are Chebyshev problems called. A generalized Chebyshev problem, which belongs to a new class of problems in control theory, is considered. The motion program is in the form of an additional system of high-order differential equations formulated. The solution to these problems is on the application of the generalized Gauss principle discussed, which proposed Professor N.N. Polyakhov and his students, S.A. Zegzda, M.P. Yushkov in 1983 at the Department of Theoretical and Applied Mechanics of Leningrad (St. Petersburg) State University. The influence of the ideas of P.L. Chebyshev is on the content of a two-volume text book on theoretical and applied mechanics for classical universities discussed. The article reflects the content of the report dedicated to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg University and heard on February 15, 2024 at a meeting of the section of theoretical mechanics named after Professor N.N. Polyakhov St. Petersburg House of Scientists named after M. Gorky.

Keywords: Chebyshev P.L., 300-th anniversary, biography, theoretical mechanics.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Pavilaynen, G.V., Tikhonov, A.A., Yushkov, M.P. 2024, "Pafnuty Lvovich Chebyshev – academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences (to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg State University)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 277–291.

1. Краткие сведения о П. Л. Чебышёве (1821-1894)

Гениальный, всемирно известный учёный, академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук Пафнутий Львович Чебышёв по свидетельству академика А.Н. Крылова [1]

«родился 14 мая 1821 г. в поместье своей матери, сельце Окатове, Боровского уезда, Калужской губернии¹. Отец его был человек образованный и обладал значительными материальными средствами. Первоначальное образование Пафнутий получил дома. Мать его обучила грамоте, а двоюродная сестра, А.К. Сухарева, учила его арифметике, другим предметам первоначального образования и французскому языку. В 1832 г. Чебышёвы переехали в Москву».



Рис. 1: Дом Чебышёвых в Москве

В 1837-1841 гг. Пафнутий Львович обучался на 2-ом (физико-математическом) отделении философского факультета Московского университета. Ещё на младших курсах за работу «Вычисление корней уравнений» он был награждён Серебряной медалью (отметим, что обладатель Золотой медали в дальнейшем не был отмечен серьёзными научными работами). Выдающиеся способности П.Л. Чебышёва обратили на себя внимание известного профессора Московского университета Н.Д. Брашмана, который сыграл большую роль в становлении Пафнутия Львовича как выдающегося учёного. В 1846 году П.Л.Чебышёв защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В 1847 г. он переехал в Санкт-Петербург и защитил ещё одну диссертацию *pro venia legendi* (на право чтения лекций) «Об интегрировании помощью логарифмов» в Императорском Санкт-Петербургском университете будучи в должности адъюнкт-профессора. В 1849 г. Пафнутий Львович защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений». В архиве семьи Юшковых сохранилась эта монография с карандашными пометками Николая Евгеньевича Юшкова (прадеда одного из авторов данной статьи), отражающими его подготовку к экзамену «Теория чисел», сдававшемуся Пафнутию Львовичу. Отметим, что монография «Теория сравнений», с одной стороны, произвела своими новыми результатами в теории чисел фурор среди математиков Европы, а, с другой стороны, длительное время являлась единственным учебником по соответствующей дисциплине для студентов университетов.

¹В метрической книге Спаса-на-Прогнаньи Боровского уезда Калужской губернии записано: «4 мая 1821 г. сельце Окатове у помещика корнета Льва Павловича Чебышева родился сын Пафнутий. Крещен 16 мая».

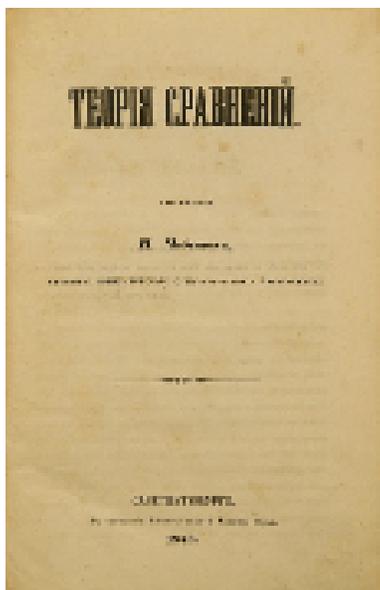


Рис. 2: П. Л. Чебышёв. Теория сравнений (1849). Фото автора (1852)

Вскоре Пафнутий Львович особенно близко сошёлся с профессором И.И. Сомовым и академиком В.Я. Буняковским, при этом Иосиф (Осип) Иванович, зная прекрасно научную литературу, помогал в первые годы П.Л. Чебышёву ориентироваться в ней (это было важно до тех пор, пока П.Л. Чебышёв не открыл совершенно новые области исследований в математике и механике). В свою очередь, Виктор Яковлевич (бывший, кстати, в 1864–1889 гг. вице-президентом Академии наук) начинает вводить Пафнутия Львовича в состав Академии – в 1853 г. он становится адъюнктом Академии наук.

2. О научно-педагогической и общественной деятельности П.Л. Чебышёва.

Научно-педагогическая и общественная деятельность П.Л. Чебышёва проходила, в первую очередь, в стенах Академии наук и Санкт-Петербургского университета, в которых он проработал соответственно 48 и 35 лет [2]. В 1856 г. его избирают экстраординарным академиком, а в 1859 г. – ординарным академиком. В свою очередь, в Университете в 1853 г. он становится экстраординарным профессором, а с 1857 г. – ординарным профессором. Обращает на себя внимание близость дат, когда Пафнутий Львович получает «ординарные» звания в Академии и в Университете. В 1872 г. ему присуждается звание Заслуженного ординарного профессора, а в 1882 г. Пафнутий Львович выходит в отставку от службы в Университете и целиком посвящает себя научной деятельности. Таким образом, П.Л. Чебышёв проработал профессором в Санкт-Петербургском университете более 30 лет.

Характер лекций и их особенности ярко описаны в воспоминаниях А.А. Маркова и И.И. Сомова [1, с.4]: «К чтению своих лекций Чебышев относился с педантичной строгостью; лекций никогда почти не пропускал, никогда на них не опаздывал и ни одной лишней минуты после звонка не оставался в аудитории, хотя для этого приходилось прерывать лекции иногда на полуслове. Недоконченный на какой-либо лекции вывод всегда начинал на следующей с самого начала, если только эта лекция не была немедленным продолжением предыдущей.

Всякой сколько-нибудь сложной выкладке предпосылал разъяснение её цели и хода в общих чертах, а затем производил вычисление на доске, большей частью молча, предоставляя студентам следить за ним глазами, а не ухом».



Рис. 3: Пафнутий Львович Чебышёв (фото 1865 г.)

И далее: «выкладки делал довольно быстро и настолько подробно, что следить за ним было легко. Во время лекций Чебышев часто делал отступления от систематического изложения курса, сообщал свои взгляды и разговоры с другими математиками по затронутым на лекции вопросам и выяснял сравнительное значение и взаимную связь между различными вопросами математики. Эти отступления очень оживляли изложение, давали отдых напряжённому вниманию слушателей и возбуждали интерес к изучению предмета в более широких рамках. На экзаменах Чебышев был сдержан и безукоризненно корректен».

Как пример лекторского мастерства можно обозначить лекции по теории вероятностей, записанные А.М. Ляпуновым [3]. Вот что пишет в предисловии к этой книге А.Н. Крылов: «П.Л. Чебышев знаменит не только как математик-творец, но и как превосходный лектор, умевший соединить простоту, ясность и краткость изложения, поэтому его курсы при небольшом объёме отличались богатством содержания».

В 1879/1880 учебном году Чебышев читал теорию вероятностей. . . . В это время в числе его слушателей был А.М. Ляпунов, который особенно тщательно записывал лекции Чебышева, а вечером в тот же день приводил свои записи в порядок и переписывал своим замечательным каллиграфическим почерком; а так как Ляпунов отличался не только своими познаниями, но и превосходной памятью, то его запись воспроизводит лекции Чебышева именно в том виде, как они прочитаны, со всеми тонкостями попутных замечаний, которыми Чебышев умел оживлять свои лекции».

К особой заслуге П.Л. Чебышёва следует отнести создание им всемирно известной Петербургской математической школы. Многочисленные его ученики, среди которых можно выделить учеников-гениев А.М. Ляпунова и А.А. Маркова, отметились выдающимися работами в различных областях математики и механики.

Помимо плодотворной научно-преподавательской деятельности П.Л. Чебышёв вёл огромную общественно-административную работу (подробнее об этом см. статью [2]): со свойственной ему ответственностью, добросовестностью и обстоятельностью он работал 40 лет в Артиллерийском отделении Военного ученого комитета и 17 лет в Учёном комитете Министерства народного просвещения. Если в первом из них он помогал решать важнейшие военные задачи научно-практического значения, то во втором участвовал в решении задач государственного значения, начиная с вопросов учебников и преподавания в начальных школах и гимназиях и кончая созданием нового университетского устава 1863 года.

Отметим, что П.Л. Чебышёв был награжден золотым наперсным крестом за активную работу в качестве члена Св. Синода Русской Православной церкви.

Заслуги Пафнутия Львович были удостоены высших орденов Российской Империи, а сам он получил чин действительного статского советника.

3. О научных трудах П. Л. Чебышёва. Задача Чебышёва в синтезе механизмов

Общеизвестны выдающиеся работы П.Л. Чебышёва в области математики. Отметим основные направления его исследований, пользуясь, так сказать, «терминологией» статьи [4]: теория чисел (фундаментальный результат о распределении простых чисел), теория вероятностей (предельные теоремы, законы больших чисел), теория приближения функций (наилучшие приближения, полиномы Чебышёва-Эрмита), геометрия (чебышёвские сети и уравнение, известное в настоящее время как Sin-Gordon), математический анализ (приближенное решение уравнений, интегрирование алгебраических функций, разложение в непрерывные дроби, «теорема об ужах»).

Обсудим теперь более подробно исследования Пафнутия Львовича в области механики.

П.Л. Чебышёв опубликовал около семидесяти научных работ, из них примерно четвертая часть относится к механике или к смежным с нею областям. Отметим, что свои научные исследования Пафнутий Львович излагал весьма подробно, стремясь максимально доходчиво донести их до читателей.

Пафнутий Львович неоднократно подчёркивал необходимость неразрывной связи теории и практики, их взаимное обогащение [5]. Большую роль в постановке задач из области практической механики играли его научные командировки за границу, первая из которых состоялась в 1852 году [6]. Через два года после неё появился мемуар «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», в котором ставилась одна из первых минимаксных задач.

Как известно, для превращения прямолинейного движения поршня паровой машины во вращательное движение коромысла Уаттом был предложен специальный механизм, имевший параллелограмм из стержней. Этот механизм блестяще работал в машинах, созданных Уаттом. Но с развитием техники и с повышением мощности и скорости вращения машин возникла необходимость изменения их габаритов. Новые соотношения рычагов не давали необходимой точности прямолинейного движения штока поршня, что приводило к усиленному износу уплотнительных соединений машины. Для решения этой сугубо технической задачи Чебышёв построил теорию полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, названных позже его именем. Он сформулировал первоначально без доказательства знаменитую теорему, называемую ныне также теоремой Чебышёва, о том, что «между наибольшими и наименьшими значениями разности $f(x) - U$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$ встречается по крайней мере $n + 2$ раза одно и то же численное значение». Здесь U обозначает полином степени n , аппроксимирующий функцию $f(x)$.

К доказательству этой теоремы Чебышёв вернулся в 1859 году, опубликовав самый большой свой трактат «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций». Эту работу Жозеф Бертран охарактеризовал как «un miracle d'analyse» («чудо анализа»).

Разработанный метод Чебышёв собирался применить непосредственно к расчёту механизмов Уатта, но это исследование он не опубликовал. В работе «О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта», подготовленной в 1861 г., он путём нового соединения стержней механизма Уатта добивается того, что «точность хода механизма может быть доведена до предела, недостижимого для технических средств изготовления механизмов». В работе 1869 г. «Об одном механизме» он предлагает еще одно изменение, скрещивая рычаги

в сокращённом параллелограмме Уатта, что улучшает точность хода более, чем в два раза.

В дальнейшем, в 1879-89 годах в цикле своих работ Чебышёв рассматривает возможность движения с заданной точностью конкретных точек механизмов по заданным кривым. Как указывает Н.И. Левитский [7], «указанная Чебышевым постановка задачи, соответствующая взвешенному приближению, дала возможность дать широкое определение общей постановки задачи о синтезе механизмов с применением теории наилучшего приближения функций». Постановку и решение подобных задач мы будем в дальнейшем называть задачами Чебышёва в синтезе механизмов.

Касаюсь работ П.Л. Чебышёва, которые также широко используются в теории машин и механизмов, следует назвать его мемуары «О параллелограммах» (1870 г.) и «О простейших сочленениях» (1878 г.). В первом из них Чебышёв приводит на 13 лет раньше Грюблера структурную формулу для плоских механизмов (Мартин Фюрхтегот Грюблер (1851 - 1935) — немецкий математик и механик), а во второй — на 3 года позже Робертса (Сэмюэль Робертс (1827 – 1913) — английский математик) фактически формулирует аналогичную теорему о возможности получения одной и той же кривой тремя различными четырёхзвенниками (третий механизм, правда, Чебышёв не выделяет, возможно, из-за его очевидности, ибо он оказывается симметричным одному из предыдущих). Предложенный в этом мемуаре Пафнутием Львовичем механизм получил название «лямбдаобразного механизма Чебышёва», он широко используется и поныне в технике, так как одна из его точек выполняет прямолинейное движение с точностью до шестой степени. Отметим, что в этой работе появилось использование «пассивных связей», как стали их называть позднее.

Теорию полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, Чебышёв успешно применяет и к ряду других задач, например, к расчёту зубчатых колёс (работа 1872 года «О зубчатых колёсах») или к выбору рациональных размеров видоизмененного им регулятора Уатта (работа 1871 года «О центробежном уравниателе»). В последнем мемуаре Чебышёв подбором параметров добивается того, что «Центробежный уравниатель ... будет очень близко подходить к изохроническому».

П.Л. Чебышёв не публиковал работ непосредственно по вопросам гидроаэромеханики и упругости, но, согласно отзывам о нём и его собственным рецензиям, он занимался отчасти и задачами их этих областей механики. Что касается работ по другим разделам механики, то необходимо отметить вклад учёного в решение задач внешней и внутренней баллистики. По просьбе главного командира порта и военного губернатора Кронштадта, генерал-адъютанта, адмирала Новосильского Федора Михайловича (губернатор с 1855 до 1866 г.) академик разработал чугунный продолговатый снаряд со стальной вершиной против железных неприятельских судов для уже имевшихся в крепости гладкоствольных орудий. Получены интересные результаты по устойчивости снаряда в полёте и сделан вывод о необходимости вращения снаряда. Действительно, опыты с гладкоствольными орудиями дали отрицательные результаты. За труды в области артиллерии П.Л. Чебышёв был избран в 1870 году почётным членом Артиллерийской академии.

Рассматривая научное наследие П.Л. Чебышёва по механике, нельзя не упомянуть о его инженерном мастерстве в создании и изучении приборов и механизмов. Как пишут его ученики, академики А.А. Марков, Н.Я. Сонин и профессор К.А. Поссе [8], «единственным предметом, на который Чебышев никогда не жалел денег, были модели изобретаемых им механизмов; на их устройство он тратил сотни и тысячи рублей. С раннего детства он любил устраивать различные приборы и, начав с игрушки, сделанной перочинным ножом, дошел до своей сложной арифметической машины, хранящейся в Conservatoire des arts et métiers в Париже. Многие из его приборов хранятся в С.-Петербургском университете и в Академии наук». На Всемирной выставке в Филадельфии в 1876 году были присуждены 3 медали за экспонировавшиеся паровую машину с параллелограммом и регулятором системы П. Л. Чебышёва, модели, инструмент, практические работы учащихся и коллекции учебных пособий».

Механизмы П. Л. Чебышёва выставлялись на 4-х Всемирных выставках:

- в Лондоне, 1876 г., где были представлены круговая линейка, табурет и прямоило;
- в Филадельфии, 1876 г., где экспонировались круговая линейка, табурет, паровая машина с параллелограммом и регулятором;
- в Париже, 1878 г., где демонстрировался стопоход;
- в Чикаго, 1893 г., где были показаны семь плоских шарнирных механизмов, самокатное кресло и сортировалька [9].

И.И. Артоболевский и Н.И. Левитский, подробно обследовавшие 41 механизм Чебышёва и около 80 различных их вариантов, отмечают [10], что наличие многочисленных карандашных пометок на моделях, сделанных собственноручно Пафнутием Львовичем, «с наглядностью показывают, что Чебышев при подборе размеров звеньев механизма и изучении свойств траекторий, описываемых отдельными его точками, не чуждался эксперимента, а создавал свои оригинальные экспериментальные установки и вёл кропотливые опыты, сочетая их с теоретической разработкой поставленных задач». И далее: «В истории развития наук о механизмах нельзя назвать ни одного имени ученого, творчеству которого принадлежало бы такое большое количество замечательных по своим свойствам механизмов. Создание подобных механизмов под силу только таким высоко одарённым ученым, каким был Чебышев».

4. Формулировка и решение обобщенной задачи Чебышёва, относящейся к новому классу задач теории управления

В предыдущем пункте была сформулирована задача Чебышёва из теории синтеза механизмов. Перейдем теперь к формулировке и обсуждению методов решения обобщенной задачи Чебышёва [11, 12, 13]. Рассмотрим движение механической системы с s степенями свободы под действием обобщенных сил

$$Q = Q(Q_1, \dots, Q_s). \quad (1)$$

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, s}, \quad (2)$$

где $T = \frac{M}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$, $\alpha, \beta = \overline{0, s}$, $q^0 = t$, $\dot{q}^0 = 1$.

Поставим новую задачу об отыскании такого движения нашей механической системы под действием активных обобщенных сил (1), которое одновременно удовлетворяло бы дополнительной системе дифференциальных уравнений, линейной относительно старших производных от обобщенных координат порядка n

$$f_n^\varkappa \equiv a_{n\sigma}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \dots, \overset{(n-1)}{q}^\sigma) + a_{n0}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \dots, \overset{(n-1)}{q}) = 0, \quad (3)$$

где $\sigma = \overline{1, s}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, $k \leq s$, $l = s - k$, причем $n \geq 3$. Назовем такие задачи *обобщёнными задачами Чебышёва*.

Отметим, что обобщённые задачи Чебышёва можно относить к *новому классу задач управления*, в которых программа движения задана в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Очевидно, что для решения подобных задач в правых частях уравнений (2) должны появиться дополнительные неизвестные силы $R = (R_1, \dots, R_s)$, которые и будут играть роль управляющих сил, выполняющих программу движения (3).

Для решения подобных задач на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета были созданы две теории

движения неголономных систем со связями высокого порядка, в которых дополнительная система дифференциальных уравнений (3) рассматривается как набор k неголономных связей порядка n [12].

Как пример применения первой теории рассматривается движение космического аппарата (ИСЗ) после требования неизменности величины ускорения, которое имеет спутник в некоторой точке своей траектории, при его движении в дальнейшем. Тем самым, рассматривается при использовании полярной системы координат наложение на дальнейшее движение материальной точки в поле притяжения Земли нелинейной неголономной связи второго порядка. Для применения созданной теории движения дифференцируем эту связь по времени и записываем её в виде линейной относительно третьих производных от полярных координат неголономной связи, после чего применяем первую теорию движения неголономных систем при связях высокого порядка [12]. Отметим, что подобная задача является первым реальным примером движения систем с неголономной связью высокого порядка, не рассматриваемой в классической неголономной механике. На рис. 4 представлены траектории движения одного из советских спутников системы «Молния»: расстояния указаны в километрах, в начале координат расположен центр Земли, до наложения связи спутник движется по красной штрихованной эллипсовидной траектории, после фиксации величины его ускорения в перигее космический аппарат начинает двигаться по черным «эллипсам», которые медленно поворачиваются и попеременно касаются двух синих концентрических штрихованных окружностей.

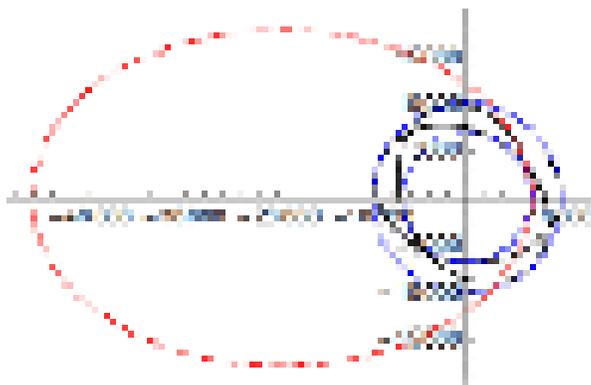


Рис. 4: Движение спутника «Молния» при закреплении величины его ускорения в перигее

Особенно интересным оказывается использование второй теории, базирующейся на применении обобщенного принципа Гаусса [14]. Весьма полезным оказывается её применение для отыскания оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему с конечным числом степеней свободы за указанное время из имеющегося фазового состояния в новое заданное фазовое состояние. Рассмотрим её применение на примере решения конкретной задачи управления.

Пусть требуется найти закон изменения горизонтальной оптимальной управляющей силы F , перемещающей тележку с маятниками за время \hat{T} на расстояние S из имеющегося состояния покоя в новое состояние покоя (см. рис 5).

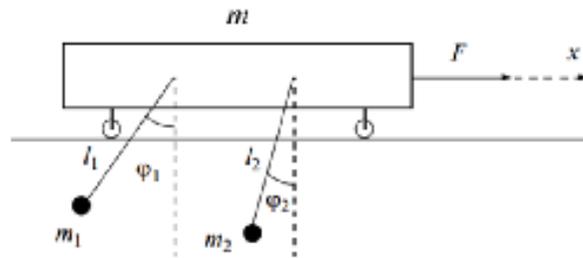


Рис. 5: Тележка с двумя маятниками

Подобную задачу управления часто решают классическим методом теории управления с привлечением принципа максимума Понтрягина, минимизирующего некоторый функционал, например, от квадрата искомой управляющей силы. Решения, полученные таким методом, на следующих рисунках изображены штрихованными кривыми. Можно показать, что при этих движениях непрерывно выполняется линейная неголономная связь высокого порядка, которая имеет вид

$$a_{8,x} \frac{d^8 x}{dt^8} + a_{8,\varphi_1} \frac{d^8 \varphi_1}{dt^8} + a_{8,\varphi_2} \frac{d^8 \varphi_2}{dt^8} + a_{6,x} \frac{d^6 x}{dt^6} + a_{6,\varphi_1} \frac{d^6 \varphi_1}{dt^6} + a_{6,\varphi_2} \frac{d^6 \varphi_2}{dt^6} + a_{4,x} \frac{d^4 x}{dt^4} + a_{4,\varphi_1} \frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} + a_{4,\varphi_2} \frac{d^4 \varphi_2}{dt^4} = 0, \quad (4)$$

где все коэффициенты выражаются через параметры механической системы. Связь (4) является одним из конкретных примеров задания системы (3) в виде одного дифференциального уравнения восьмого порядка. При появлении связи (4) исходную задачу управления можно трактовать как неголономную задачу с требованием выполнения связи восьмого порядка (4). В этом случае программа движения рассматривается как идеальная неголономная связь высокого порядка, реакция которой оказывается искомой управляющей силой. Применяя для решения задачи в такой постановке обобщенный принцип Гаусса, получаем управление в виде полинома пятой степени, коэффициенты которого находятся из поставленных граничных условий для конца движения механической задачи. Отметим, что при классическом решении задачи управления с привлечением принципа максимума Понтрягина оптимальное управление содержало гармоники с собственными частотами системы, что при длительном движении раскачивает систему !!!

На рисунках 6 и 7 приведены результаты расчётов по обоим методам, кривые, соответствующие новому методу, выполнены сплошными линиями. Система дифференциальных уравнений записывалась в безразмерном виде и в главных координатах, на печать выводились безразмерные управление u , координаты x_0, x_1, x_2 (здесь x_0 – безразмерное смещение центра масс системы), T_1 и T_2 – безразмерные периоды колебаний, соответствующие первой и второй собственным ненулевым частотам системы. При коротком движении оба решения практически совпадают (это показывает доброкачественность нового предложенного метода), а с увеличением времени движения системы в решении, полученном классическим путем, развиваются интенсивные колебания.

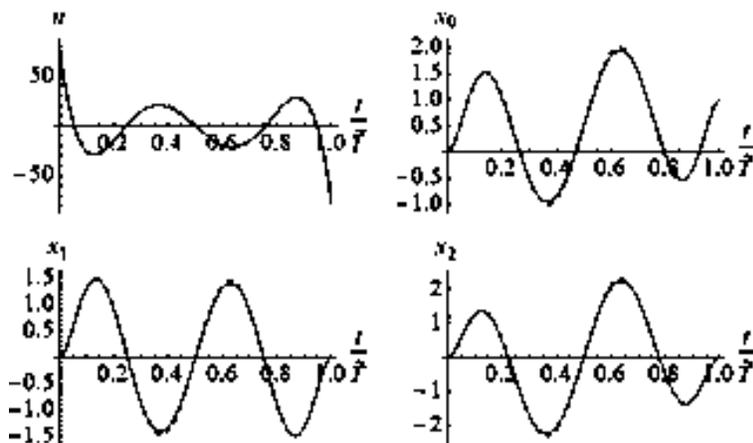


Рис. 6: $T = T_2, T_2 = 0.5T_1$

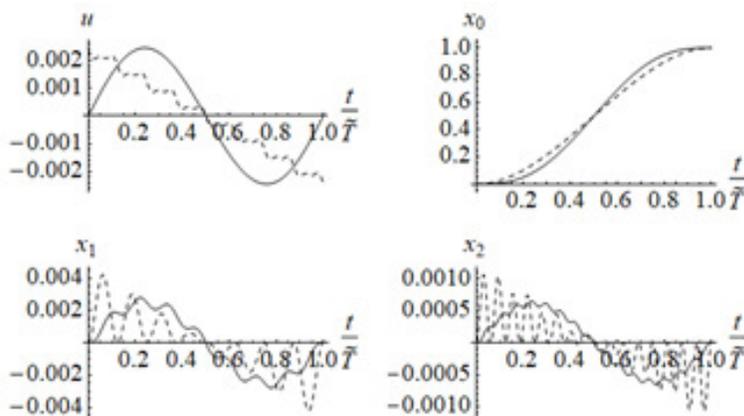


Рис. 7: $T = 16T_2, T_2 = 0.5T_1$

5. Дополнительные возможности обобщенной задачи Чебышёва

Обратим внимание на то, что при кратковременном движении (см. рис. 6) почти при полном совпадении решений, полученных обоими методами, имеются скачки управления в начале и в конце движения системы. Интересно, что при увеличении времени движения в 16 раз (см. рис. 7) в первом решении скачки управления сохранились (применение принципа максимума Понтрягина всегда дает скачки управляющей силы на концах её графика), а при использовании обобщённого принципа Гаусса подобные скачки исчезли. Это наводит на мысль уничтожения скачков управления и в случае кратковременного движения. С этой целью расширим граничные условия для начала и для конца движения дополнительным требованием равенства нулям ускорений тележки в эти моменты времени (при этом будут равны нулям и вторые производные от остальных координат системы). В результате применения обобщенного принципа Гаусса, порядок которого увеличиваем на две единицы, удастся погасить скачки управления в начале и в конце движения системы даже при её кратковременном перемещении. Этот результат отражен на рис. 8. Отметим, что решить расширенную краевую задачу с использованием принципа максимума Понтрягина не удастся, так как при этом в получаемом выражении для управления будет недостаток произвольных постоянных для удовлетворения всех поставленных граничных условий. В свою очередь, увеличивая и дальше порядок используемого обобщенного принципа Гаусса, можно добиться любой гладкости изменения закона управле-

ния вблизи начала и конца движения, для этого требуется ещё более расширять количество граничных условий требованием обращения в эти моменты времени более высоких порядков производных от координаты тележки.

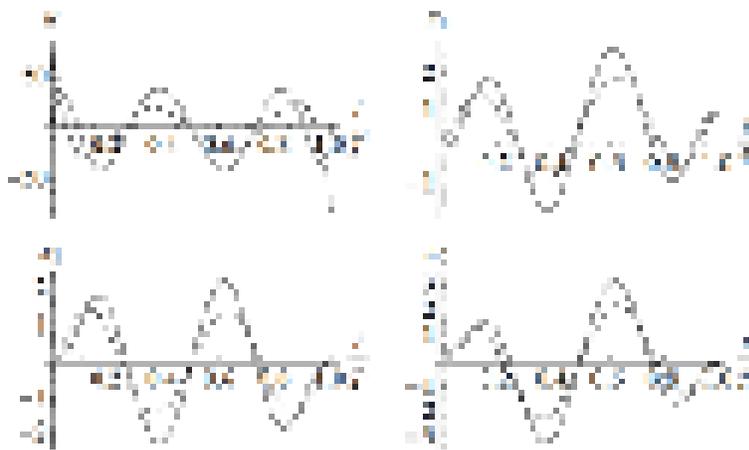


Рис. 8: $T = T_2$, $T_2 = 0.5T_1$

Отметим, что материал двух последних пунктов отражен в двухтомном учебнике для классических университетов [15]: в томе 1 имеется глава «Вариационные принципы механики», а в томе 2 теория движения неголономных систем со связями высокого порядка изложена в главе «Обобщенная задача Чебышёва. Неголономная механика и теория управления».

6. О правильном произношении фамилии Пафнутия Львовича

Надо отметить, что в середине прошлого века при наличии старшего поколения преподавателей, хранившего славные традиции Санкт-Петербургской математической школы, все преподаватели и студенты математико-механического факультета Ленинградского государственного университета правильно произносили фамилию своего великого предшественника, делая ударение на последнем слоге. К большому сожалению, в связи с исчезновением из русского алфавита буквы «ё» все чаще можно было услышать неверное ударение в этой фамилии на первом слоге. Это явление все более разрасталось и стало почти нормой.

Отрадно отметить, что силами филологической университетской школы русистов под руководством профессора Л.А. Вербицкой, ректора университета с 1994 по 2004 гг., Президента Российской Академии образования с 2013 по 2018 гг. и других лингвистов приказом Министерства образования и науки от 3 мая 2007 г. была подтверждена норма об обязательности употребления буквы ё в собственных именах, в школьных учебниках и в случаях, когда замена буквы ё на букву е искажает смысл и значение слова, а также ударение на слоге, её содержащем. В этом отношении очень полезными были и «Чебышёвские чтения», которые происходили в 90-ые годы прошлого века на механико-математическом факультете МГУ под председательством проф. В.В. Александрова. Очень большую роль в проведении «Чтений» сыграли неумная энергия и работоспособность заместителя председателя, профессора С.Н. Кружкова. Он организовал, в частности, в сентябре 1994 г. посещение памятных мест на родине Пафнутия Львовича. При этой поездке профессор М.П. Юшков вручил Спас-Проганской школе имени П.Л. Чебышёва деревянное собственноручное изделие Пафнутия Львовича с его личными пометками. Механизм был выполнен в виде зубчатого колеса со сложным профилем зубьев. Это изделие П.Л. Чебышёва хранилось в Кабинете прикладной механики при кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Ленинградского

университета. По настоятельной, неоднократной и настойчивой просьбе С.Н. Кружкова декан факультета, профессор Г.А. Леонов и заведующий кафедрой, профессор П.Е. Товстик доверили М.П. Юшкову отобрать из коллекции Кабинета прикладной механики соответствующий уникальный экземпляр.

Необычайно важно с исторической точки зрения, что в открытии и закрытии «Чебышёвских чтений», проходивших в 1993-1994 учебном году, приняли участие Клавдия Владимировна Чебышёва, Петр Владимирович Чебышёв и Лев Максимилианович Лебедев, внучатые племянница и племянники Пафнутия Львовича. Особо существенно, что на одной из этих встреч на вопрос о правильном произношении их семейной фамилии Клавдия Владимировна (см. её автограф на рис. 9) ответила, что **дома ударение всегда ставилось на последнем слоге**. Поэтому для недопущения недоразумений полезно писать фамилию Пафнутия Львовича как «**Чебышёв**».



Рис. 9: Автограф К.В.Чебышёвой



Рис. 10: Портрет из Музея истории СПбГУ

Любопытно, что в Музее истории Санкт-Петербургского университета находится дореволюционный портрет П.Л. Чебышёва (рис. 10) с табличкой «Пафнутий Львовичъ Чебышовъ».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов А. Н. Пафнутий Львович Чебышев. Биографический очерк. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1944. 32 с.
2. Тихонов А. А. Пафнутий Львович Чебышев: человек науки на службе России (к 200-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2021. Том XXII. Вып. 3(79). С. 406-423.
3. Теория вероятностей. Лекции академика П.Л.Чебышева. Читанные в 1879-80 гг. По записи А.М. Ляпунова. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1936. 253 с.
4. Кружков С. Н. К 100-летию со дня смерти Пафнутия Львовича Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 6. С. 3-10.

5. Стеклов В. А. Теория и практика в исследованиях Чебышева. Речь произнесенная на торжественном чествовании столетия со дня рождения Чебышева Российской Академией Наук. Петроград: 1921. Российская Государственная Академическая Типография. 21 с.
6. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. Прочие сочинения. Биографические материалы. –М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1951. – 474 с.
7. Левитский Н. И. Синтез механизмов по Чебышеву. Москва, Ленинград, Изд-во Акад. наук СССР, 1946. - 168 с.
8. Чебышев П. Л. Сочинения П.Л. Чебышева, изданные под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина. СПб.: Имп. Академия Наук. Том I, 1899, 714 с. Том II, 1907, 736 с.
9. Кутеева Г. А., Лопатухина И. Е., Павилайнен Г. В., Тихонов А. А. и др. Очерки по истории механики и физики. Учебное пособие. СПб.: Изд-во «ВВМ». 2016. 204 с.
10. Научное наследие Чебышева. Выпуск второй. Теория механизмов. (Отв. редакторы Н.Г. Бруевич и И.И. Артоболевский). М.-Л.: Изд. АН СССР. 1945. 192 с.
11. Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А. Неголономная механика и теория управления. М.: Наука. Физматлит. 2018. 234 с.
12. Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Том 6 (64). Вып.4. С. 680-701.
13. Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. II // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Том 7 (65). Вып.4. С. 714-733.
14. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады АН СССР. 1983. Том 269. № 6. С. 1328-1330.
15. Поляхов Н. Н., Товстик П. Е., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая и прикладная механика. 4-е издание, переработанное и расширенное. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2022. Том 1. Общие вопросы теоретической механики. 559 с. Том 2. Динамика. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики. 548 с.

REFERENCES

1. Krylov, A.N. 1944, “Pafnutii Lvovich Chebyshev. Bibliographical essay”, *Moscow–Leningrad, “AN SSSR”*.
2. Tikhonov, A. A. 2021, “Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894), a man of science in the service of Russia (On the occasion of the bicentennial of his birth)”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 405–422.
3. “Probability theory. Lectures by academician P.L. Chebyshev. Read in 1879-80. According to the record of A.M. Lyapunov”. 1936, *Publishing House of the USSR Academy of Sciences*, Moscow, Leningrad.
4. Kruzhkov, S. N. 1995, “On the 100-th anniversary of the death of Paphnutiy Lvovich Chebyshev”, *Bulletin of the Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics*, no. 6, pp. 3-10.

5. Steklov, V. A. 1921, Theory and practice in Chebyshev's research. A speech delivered at the solemn celebration of the centenary of Chebyshev's birth by the Russian Academy of Sciences", *Petrograd, Russian State Academic Printing House*. 21 p.
6. Chebyshev, P. L. 1951, "Complete set of works. vol. 5. Other works. Biographical materials", *Moscow, Leningrad, Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR*. 474 p.
7. Levitsky, N. I. 1946, "Synthesis of Chebyshev mechanisms", *Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR*, Moscow, Leningrad.
8. Chebyshev, P. L. 1899, "The works of P.L.Chebyshev, published under the editorship of A.A. Markov and N.Ya. Sonin", *St. Petersburg: Imp. Academy of Sciences*. vol. I, 714 p.; vol. II, 1907, 736 p.
9. Lopatukhina, I. E., Kuteeva, G. A., Pavilainen, G. V., Polyakhova, E. N., Rudakova, T. V., Sabaneev, V. S., Tikhonov, A. A. 2016, "Essays on the history of mechanics and physics. A study guide", *Publishing house "VVM"*, St. Petersburg.
10. "Chebyshev's scientific legacy. Issue two. Theory of mechanisms (Editors N.G. Bruevich and I.I. Artobolevsky)". 1945, *Publishing House of the USSR Academy of Sciences*, Moscow, Leningrad. 192 p.
11. Zegzhda, S. A., Yushkov, M. P., Soltakhanov, S. H., Shatrov, E. A. 2018, "Nonholonomic mechanics and control theory", *Nauka*. Physical education. Moscow. 234 p.
12. Yushkov, M. P. 2019, "Formulation and solution of the generalized Chebyshev problem. I", *Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. vol. 6 (64). Iss. 4. pp. 680-701.
13. Yushkov, M. P. 2020, "Formulation and solution of the generalized Chebyshev problem. II", *Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. vol. 7 (65). Iss. 4. pp. 714-733.
14. Polyakhov, N. N., Zegzhda, S. A., Yushkov, M. P. 1983, "Generalization of the Gauss principle in the case of nonholonomic systems of higher orders", *Reports of the USSR Academy of Sciences*. vol. 269. no. 6. pp. 1328-1330.
15. Polyakhov, N. N., Tovstik, P. E., Zegzhda, S. A., Yushkov, M. P. 2022, "Theoretical and applied mechanics. 4th edition, revised and expanded", *Publishing House of St. Petersburg University*. St. Petersburg. vol. 1. *General questions of theoretical mechanics*. 559 pp.; vol. 2. *Dynamics. Some applied questions of theoretical mechanics*. 548 p.

Получено: 09.07.2024

Принято в печать: 26.12.2024