

Д. В. Быстров, А. И. Назаров

**ЗАДАЧА РОБЕНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ С КРИТИЧЕСКИМ РОСТОМ ПРАВОЙ
ЧАСТИ**

Нине Николаевне от научных “потомков”

§1. ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений с критическим ростом правой части изучаются уже более полувека, начиная с пионерской работы С. И. Похожаева [12], который, в частности, показал, что задача Дирихле

$$-\Delta u = u^{q-1} \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1)$$

(здесь и далее $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – ограниченная область со строго липшицевой границей) имеет положительное решение с наименьшей энергией, если $1 < q < 2^* := \frac{2n}{n-2}$, $q \neq 2$, и не имеет положительных решений, если $q \geq 2^*$, а Ω – строго звездная область.

Подчеркнем, что несуществование решения (и, следовательно, недостижимость минимума соответствующего функционала энергии) весьма чувствительно к слабым возмущениям исходной задачи. Впервые этот эффект был открыт в знаменитой работе Х. Брезиса и Л. Ниренберга [3], где было показано, что задача

$$-\Delta u - \alpha u = u^{2^*-1} \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

имеет положительное решение с наименьшей энергией при сколь угодно малом положительном значении параметра возмущения¹ α , если размерность $n \geq 4$. Заметим, что при отрицательных α ситуация с разрешимостью задачи (2) такая же, как для задачи (1).

Решения с наименьшей энергией для задачи Неймана

$$-\Delta u + u = u^{2^*-1} \text{ в } \Omega, \quad \partial_{\mathbf{n}} u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3)$$

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, задача Робена, критический показатель, p -лапласиан.

Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

¹Этот эффект является нелинейным аналогом виртуального уровня, хорошо известного в спектральной теории.

изучались в работах [1] и [16]. Оказалось, что, в отличие от задачи Дирихле, такое решение существует² в любой области с границей класса \mathcal{C}^2 .

Перечисленные результаты в дальнейшем обобщались на уравнения с p -лапласианом и другими операторами в главной части, а также на уравнения на многообразиях (см., например, обзор [9] и приведенную там библиографию).

Вопрос о разрешимости задачи Робена

$$-\Delta u = u^{2^*-1} \text{ в } \Omega, \quad (\partial_{\mathbf{n}}u + \alpha u)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

также обсуждался в статье [16]. Именно, было показано, что если $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, и существует точка $x_0 \in \partial\Omega$ (не умаляя общности, можно считать ее началом координат), такая, что в некоторой окрестности x_0 область задается неравенством

$$x_n > a|x'|^{1+\gamma}(1 + o(1)), \quad a > 0, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (5)$$

(здесь $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n)$), то задача (4) имеет (положительное) решение с наименьшей энергией при любом положительном α .

Заметим, что условие (5) исключает возможность $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, поскольку кривизна границы в начале координат бесконечна. В то же время, как показано в теореме 4.2 [16], задача (4) в единичном шаре имеет **радиальное** решение тогда и только тогда, когда $\alpha < n - 2$.

В настоящей статье мы рассмотрим обобщение задачи (4) для квазилинейных уравнений – задачу Робена

$$-\Delta_p u = u^{p^*-1} \text{ в } \Omega, \quad (|\nabla u|^{p-2} \partial_{\mathbf{n}}u + u^{p-1})|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ – оператор p -Лапласа, $1 < p < n$, $p^* := \frac{pn}{n-p}$ – предельный показатель вложения пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ в пространство Лебега.

Мы будем считать, что $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, если не оговорено противное, и введем семейство сжатых/растянутых областей³

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x/R \in \Omega\}.$$

²Задача (3) имеет очевидное решение $u \equiv 1$. Однако, как показано в [11, Предложение 3.1], если область достаточно велика, то константа не является решением с наименьшей энергией.

³Заметим, что преобразование $u(x) \mapsto \alpha^{\frac{2-n}{2}} u(\alpha^{-1}x)$ переводит (4) в аналогичную задачу в области Ω_α с заменой $\alpha \mapsto 1$ в граничном условии.

Определим **функционал энергии** для задачи (6):

$$\mathcal{E}[u] = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u(x)|^p dS_x}{\left(\int_{\Omega} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} =: \frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_{L_{p^*}}^p}. \quad (7)$$

Заметим, что норма $\|u\|_p$ эквивалентна стандартной норме в пространстве $W_p^1(\Omega)$. Из теоремы вложения Соболева заключаем, что

$$\lambda(p, \Omega) := \inf_{v \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{E}[v] > 0. \quad (8)$$

Следующее утверждение достаточно стандартно. Для удобства читателя мы приводим его с доказательством.

Лемма 1.1. *Если инфимум в (8) достигается, то задача (6) имеет слабое положительное решение.*

Доказательство. Легко видеть, что если u – минимайзер в (8), то функция $|u|$ также является минимайзером. Поэтому можно, не умаляя общности, считать $u \geq 0$. Далее, необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера и естественное граничное условие) для неотрицательных функций совпадает с (6) после подходящей перенормировки (т.е. умножения u на некоторую константу). Поэтому u – слабое решение задачи (6). Более того, поскольку u – супер- p -гармоническая функция, то она не может обращаться в нуль внутри Ω (см. [15]). Наконец, u не может обратиться в нуль и в точках границы ввиду леммы о нормальной производной (см. [14]). \square

Решение, построенное в лемме 1.1, мы будем называть **решением с наименьшей энергией**.

Обозначим $K(n, p)$ точную константу в неравенстве Соболева (см. [2, 13]):

$$K(n, p) = \sup_{v \in C_0^\infty \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{L_{p^*}}}{\|\nabla v\|_{L_p}} = \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \mathcal{B}\left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'} + 1\right)^{-\frac{1}{n}}, \quad (9)$$

где $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n , $p' = \frac{p}{p-1}$ – сопряженный к p показатель, а \mathcal{B} – бета-функция Эйлера. Отметим, что

супремум в (9) достигается только на **нефинитных** радиально симметричных функциях

$$w_\varepsilon(|x|) \equiv w_\varepsilon(r) := (\varepsilon + r^{p'})^{1 - \frac{n}{p}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (10)$$

и на функциях, получаемых из них сдвигами и гомотетиями.

Ключевую роль в доказательстве существования решения задачи (6) с наименьшей энергией играет следующее утверждение. Доказательство его аналогично [8, Следствие 2.1] и [4, Предложение 1.1] и приводится для удобства читателя.

Предложение 1.1. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Пусть инфимум в (8) удовлетворяет условию

$$\lambda(p, \Omega) < \frac{2^{-\frac{n}{p}}}{K^p(n, p)}. \quad (11)$$

Тогда этот инфимум достигается.

Доказательство. Рассмотрим нормированную в $L_{p^*}(\Omega)$ минимизирующую последовательность $\{v_k\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W_p^1(\Omega)$. Согласно теореме Лионса ([7], часть 1; см. также [8, лемма 2.2]),

$$|v_k|^{p^*} \rightharpoonup |v|^{p^*} + \sum_j c_j \delta(x - x_j), \quad |\nabla v_k|^p \rightharpoonup |\nabla v|^p + \sum_j C_j \delta(x - x_j)$$

(сходимость в пространстве мер на $\bar{\Omega}$), где $\{x_j\}$ – не более чем счетный набор точек в $\bar{\Omega}$, c_j и C_j – положительные константы.

Поскольку $\{v_k\}$ – минимизирующая последовательность, дословно повторяя доказательство теоремы 2.2 [8], получим альтернативу: либо функция v реализует минимум в (8) (при этом множество $\{x_j\}$ пусто), либо $v = 0$, а набор $\{x_j\}$ состоит из одной точки $x_0 \in \partial\Omega$, причем $c_0 = 1$ и $C_0 = \lambda(p, \Omega)$.

Во втором случае, домножая функции v_k на подходящую срезку с достаточно малым носителем и учитывая, что гладкая область в малой окрестности x_0 аппроксимируется полупространством, заключаем, что $\lambda(p, \Omega) = \frac{2^{-\frac{n}{p}}}{K^p(n, p)}$. По условию это невозможно, что и доказывает требуемое утверждение. \square

Таким образом, для доказательства достижимости инфимума в (8) достаточно предъявить функцию, энергия которой меньше $\frac{2^{-\frac{n}{p}}}{K^p(n, p)}$.

Следуя [8] и [4], мы строим ее (при некоторых условиях на показатель p) в виде функции с малым носителем, имитирующей поведение функции $w_\varepsilon(r)$.

Опишем структуру нашей статьи. §2 посвящен построению решения с наименьшей энергией задачи (6). В §3 рассматривается аналогичная задача на многообразии с краем. В приложении (§4) собраны вспомогательные оценки интегралов.

Запись $o_\rho(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Все положительные константы, значение которых для нас несущественно, обозначаются буквой C . Зависимость этих констант от параметров отмечается в скобках.

§2. ЗАДАЧА (6) В ОБЛАСТИ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Следующий простой результат справедлив в любой размерности $n \geq 2$ (ср. [11, теорема 1.1]).

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < n$, и Ω – произвольная ограниченная область со строго липшицевой границей. Тогда задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в области Ω_R при всех достаточно малых R .*

Доказательство. Из доказательства предложения 1.1 видно, что нам достаточно исключить возможность концентрации минимизирующей последовательности $|v_k|^{p^*} \rightarrow \delta(x - x_0)$. Но касательный конус к Ω_R в точке x_0 не зависит от R , и потому в случае концентрации $\lambda(p, \Omega_R) = \lim_k \mathcal{E}[v_k]$ также не зависит от R . С другой стороны, для функции $c \equiv 1$ имеем

$$\mathcal{E}[c] = \frac{|\partial\Omega_R|}{|\Omega_R|^{\frac{p}{p^*}}} = \frac{|\partial\Omega| R^{n-1}}{(|\Omega| R^n)^{\frac{p}{p^*}}} = \text{const} \cdot R^{p-1}.$$

Поэтому при достаточно малых R концентрация невозможна, и инфимум в (8) достигается. Из леммы 1.1 следует утверждение теоремы. \square

Теорема 2.2. *Пусть $n \geq 4$ и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$ задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω .*

Доказательство. Рассмотрим шар наименьшего радиуса, содержащий Ω . Пусть $x_0 \in \partial\Omega$ – одна из точек касания с этим шаром. Тогда все главные кривизны $\partial\Omega$ в точке x_0 положительны, и потому средняя кривизна $H(x_0)$ положительна.

Для функции u , определенной в (15) (см. Приложение), из оценок (16), (19) и (22) получаем

$$\|u\|_p^p \leq \begin{cases} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - E_2 (H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{1}{p'}} + E_3 \varepsilon^{\frac{p-1}{p'}} \right] + C(\rho), & 1 < p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - E_2 (H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{1}{p'}} \right] + C \ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - E_2 (H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{1}{p'}} \right] + C(\rho), & \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < p < \frac{n+1}{2}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C (H(x_0) + o_\rho(1)) \ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

При $2 < p < \frac{n+1}{2}$ отсюда с учетом (17) получаем

$$\mathcal{E}[u] \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 + \left(\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) (H(x_0) + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)) \varepsilon^{\frac{1}{p'}} \right].$$

Прямой подсчет показывает, что при $p < \frac{n+1}{2}$

$$\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} = -\frac{2p}{n} \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\mathcal{B}\left(\frac{n+1}{p'}, \frac{n+1}{p} - 2\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p} - 1\right)} < 0.$$

Поэтому для достаточно малых ε и ρ получаем

$$\mathcal{E}[u] < \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} = \frac{2^{-\frac{n}{p}}}{K^p(n, p)}. \quad (12)$$

При $p = \frac{n+1}{2}$ для достаточно малых ε и ρ также получим (12). Из соображений непрерывности при некотором $\beta > 0$ и $p < \frac{n+1}{2} + \beta$ имеем $\lambda(p, \Omega) < \frac{2^{-\frac{n}{p}}}{K^p(n, p)}$.

Применение предложения 1.1 и леммы 1.1 заканчивает доказательство. \square

Гипотеза 1. Пусть $n \geq 3$, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\frac{n+1}{2} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$, такое, что при $R > R^*$ задача (6) не имеет решения с наименьшей энергией в области Ω_R .

При $p = 2$ формулы (16) и (22) показывают, что первая поправка в градиентном члене и добавка от граничного члена в $\mathcal{E}[u]$ имеют одинаковый порядок. Следующая теорема уточняет результат теоремы 2.1 для гладкой области.

Теорема 2.3. Пусть $n \geq 3$ и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Пусть на $\partial\Omega$ найдется точка x_0 , такая, что $H(x_0) > \frac{2}{n-2}$. Тогда задача (6) с $p = 2$ имеет решение с наименьшей энергией в Ω .

Доказательство. Пусть $n \geq 4$. Тогда формулы (16), (17) и (22) дают

$$\mathcal{E}[u] \leq \frac{E_1}{D_1^{\frac{n-2}{n}}} \left[1 + \left(\left(\frac{n-2}{n} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) H(x_0) + \frac{E_3}{E_1} + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1) \right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right].$$

Прямой подсчет показывает, что при $p = 2$ и $H(x_0) > \frac{2}{n-2}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n-2}{n} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) H(x_0) + \frac{E_3}{E_1} \\ & < \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \left(-\frac{8}{n(n-2)} \cdot \frac{\mathcal{B}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}\right)} + \frac{2}{(n-2)^2} \cdot \frac{\mathcal{B}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n-2}{2}\right)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому для достаточно малых ε и ρ получаем

$$\mathcal{E}[u] < \frac{E_1}{D_1^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{2^{-\frac{2}{n}}}{K^2(n, 2)}. \quad (13)$$

Если же $n = 3$, то формулы (16), (19) и (24) дают

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 & \leq E_1 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \pi(H(x_0) + o_\rho(1)) \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{t^5 dt}{(1+t^2)^3} + \ln(\varepsilon^{-1}) \cdot (\pi + o_\rho(1)) + C(\rho) \\ & \leq E_1 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \pi \ln(\varepsilon^{-1}) \left(1 - \frac{1}{2} H(x_0) + o_\rho(1) \right) + C(\rho). \end{aligned}$$

С учетом (17), при $H(x_0) > \frac{2}{n-2} = 2$ для достаточно малых ε и ρ вновь получаем (13). Применение предложения 1.1 и леммы 1.1 заканчивает доказательство. \square

Сравним результат теоремы 2.3 с примером из [16, теорема 4.2]. Как указано во введении, задача (4) в единичном шаре имеет радиальное решение тогда и только тогда, когда $\alpha < n - 2$. Согласно замечанию из сноски 3, задача

$$-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{2^*-1} \quad \text{в } B_R, \quad (\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u} + \mathbf{u})|_{\partial B_R} = 0 \quad (14)$$

имеет радиальное решение в шаре B_R тогда и только тогда, когда $R < n - 2$. В то же время условие теоремы 2.3 дает $R < \frac{n-2}{2}$. Однако мы покажем, что при $R > \frac{n-2}{2}$ радиальное решение не является решением с наименьшей энергией.

Решение, построенное в [16], равно $\mathbf{u}(x) = C w_\varepsilon(x)$, где функция w_ε определена в (10) с $p = 2$, $\varepsilon = R(n - 2 - R)$, а C — подходящим образом

выбранная константа. Из леммы 2.3 [5] видно, что любое положительное радиальное решение задачи (14) совпадает с \mathbf{u} .

Теорема 2.4. При $\frac{n-2}{2} < R < n-2$ справедливо неравенство $\mathcal{E}[\mathbf{u}] > \frac{2-\frac{2}{n}}{K^2(n,2)}$ и, следовательно, \mathbf{u} не является решением с наименьшей энергией задачи (14).

Доказательство. Записав интегралы в сферических координатах и сделав замену переменной $r^2 = \varepsilon t$, получим

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 dx &= C^2 (n-2)^2 \omega_{n-1} \int_0^R \frac{r^{n+1} dr}{(\varepsilon + r^2)^n} \\ &= C^2 \frac{(n-2)^2 \omega_{n-1}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^{R^2 \varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}} dt}{(1+t)^n}; \\ \int_{\partial B_R} |\mathbf{u}(x)|^2 dS_x &= C^2 \omega_{n-1} \frac{R^{n-1}}{(\varepsilon + R^2)^{n-2}}; \\ \int_{B_R} |\mathbf{u}(x)|^{2^*} dx &= C^{2^*} \omega_{n-1} \int_0^R \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^n} = C^{2^*} \frac{\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \int_0^{R^2 \varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} dt}{(1+t)^n}. \end{aligned}$$

Согласно формуле 2.111.2 [6],

$$\int_0^{R^2 \varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}} dt}{(1+t)^n} = -\frac{2}{n-2} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^{n-1}} \Big|_{t=0}^{t=R^2 \varepsilon^{-1}} + \frac{n}{n-2} \int_0^{R^2 \varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} dt}{(1+t)^n}.$$

Поскольку $\varepsilon = R(n-2-R)$, подстановка сокращается с интегралом по ∂B_R , и мы получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_2^2 &= C^2 \frac{n(n-2)\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^{R^2 \varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} dt}{(1+t)^n}; \\ \mathcal{E}[\mathbf{u}] &= n(n-2) \left(\frac{\omega_{n-1}}{2} \int_0^{R^2 \varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} dt}{(1+t)^n} \right)^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $R^2\varepsilon^{-1} = \frac{R}{n-2-R}$ – возрастающая функция R . Поэтому $\mathcal{E}[\mathbf{u}]$ – также возрастающая функция от радиуса, и остается показать, что при $R = \frac{n-2}{2}$ получается равенство $\mathcal{E}[\mathbf{u}] = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{K^2(n,2)}$.

Из формулы (9) видно, что это равенство равносильно

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{n}{2}-1} dt}{(1+t)^n} = \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right).$$

Замена переменной $t = \operatorname{tg}^2(\frac{\varphi}{2})$ дает

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{n}{2}-1} dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2^n} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(последнее равенство см. формулу 8.380.2 [6]), а равенство $\frac{1}{2^n} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right)$ следует из формулы удвоения Лежандра для Γ -функции (формула 8.335.1 [6]). \square

Гипотеза 2. При $R \leq \frac{n-2}{2}$ функция \mathbf{u} является решением с наименьшей энергией задачи (14), а при $R > \frac{n-2}{2}$ решения с наименьшей энергией у этой задачи не существует.

§3. ЗАДАЧА (6) НА МНОГООБРАЗИИ С КРАЕМ

В этом параграфе Ω – гладкое компактное n -мерное риманово многообразие со строго липшицевым краем, с метрикой g (в дальнейшем слова “гладкое”, “компактное” и “риманово” будут опускаться). Соответственно, Ω_R – “гомотетичный образ” Ω с метрикой $g_R = R^2g$.

Аналогично случаю области в \mathbb{R}^n , условие (11) обеспечивает достижимость инфимума функционала энергии (7) и, таким образом, существование решения задачи (6) с наименьшей энергией.

Доказательство следующей теоремы дословно повторяет доказательства теорем 2.1 и 2.2.

Теорема 3.1. А. Пусть $n \geq 2$, $1 < p < n$, и Ω – произвольное многообразие со строго липшицевым краем. Тогда задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω_R при всех достаточно малых R .

Б. Пусть $n \geq 4$, $\partial\Omega \in C^2$, и на $\partial\Omega$ найдется точка x_0 , такая, что $H(x_0) > 0$. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$ задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω .

Теорема 2.3 также справедлива для многообразий.

Случай, когда средняя кривизна $\partial\Omega$ всюду неположительна, более сложен. Мы рассмотрим его на примере полусферы. Аналогичный результат можно получить для любого многообразия, край которого является вполне геодезическим подмногообразием, если на $\partial\Omega$ найдется точка, в которой скалярная кривизна Ω положительна (ср. [10, Theorem 1]).

Теорема 3.2. Пусть $n \geq 8$, и Ω – n -мерная полусфера. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $3 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω .

Доказательство. Пусть $x_0 \in \partial\Omega$. Для функции u , определенной формулой (15) с $r = \text{dist}(x, x_0)$, из (25), (27) и (22) получаем

$$\|u\|_p^p \leq \begin{cases} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - \tilde{E}_2 (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} + E_3 \varepsilon^{\frac{p-1}{p'}} \right] + C(\rho), & 3 < p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - \tilde{E}_2 (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right] + C \ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - \tilde{E}_2 (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right] + C(\rho), & \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{n+2}{3}. \end{cases}$$

При $3 < p < \frac{n+2}{3}$ отсюда с учетом (26) получаем

$$\mathcal{E}[u] \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 + \left(\frac{p}{p^*} \frac{\tilde{D}_2}{D_1} - \frac{\tilde{E}_2}{E_1} \right) (\mathcal{R}_g + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right].$$

Прямой подсчет показывает, что при $p < \frac{n+2}{3}$

$$\frac{p}{p^*} \frac{\tilde{D}_2}{D_1} - \frac{\tilde{E}_2}{E_1} = -\frac{p}{2n^2} \cdot \frac{\mathcal{B}\left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p} - 3\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p} - 1\right)} < 0.$$

Поэтому для достаточно малых ε и ρ получаем (12).

При $p = \frac{n+2}{3}$ для достаточно малых ε и ρ также получим (12). Из соображений непрерывности при некотором $\beta > 0$ и $p < \frac{n+2}{3} + \beta$ имеем $\lambda(p, \Omega) < \frac{2-\frac{n}{p}}{K^p(n,p)}$. Применение предложения 1.1 и леммы 1.1 заканчивает доказательство. \square

Гипотеза 3. Пусть $n \geq 7$ и $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$, такое, что при $R > R^*$ задача (6) не имеет решения с наименьшей энергией на полусфере с радиусом R .

Следующая теорема уточняет результат части **A** теоремы 3.1 для $p = 3$ на полусфере.

Теорема 3.3. Пусть $n \geq 7$, и радиус R n -мерной полусферы Ω удовлетворяет неравенству $R^2 < \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} \frac{(n-1)(2n+1)(n-3)^2}{72(n-2)}$. Тогда задача (6) с $p = 3$ имеет решение с наименьшей энергией в Ω .

Доказательство. Аналогично теореме 2.3, с использованием при $n \geq 8$ формул (25), (26) и (22), а при $n = 7$ – (25), (26), (27) и (28). \square

§4. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

4.1. Оценки для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, и $x_0 \in \partial\Omega$. Введём функцию

$$u(x) := u(r) := \varphi(r)w_\varepsilon(r), \quad (15)$$

где $r := |x - x_0|$, w_ε определена в (10), а $\varphi(r)$ – гладкая срезающая функция

$$\varphi(r) = \begin{cases} = 1, & \text{для } r \leq \frac{\rho}{2}; \\ \leq 1, & \text{для } \frac{\rho}{2} \leq r \leq \rho; \\ = 0, & \text{для } r \geq \rho, \end{cases}$$

(ρ – некоторое число). Следующие оценки получены в [4]⁴:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq \begin{cases} E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - E_2(H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{1}{p'}} + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+1}{2}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - (H(x_0) + o_\rho(1))F(\varepsilon) + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+1}{2}; \end{cases} \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \geq D_1 \varepsilon^{-\frac{n}{p}} - D_2(H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{1}{p'}} - C\rho^{-\frac{n}{p-1}}, \quad (17)$$

где $H(x_0)$ – средняя кривизна $\partial\Omega$ в точке x_0 (все кривизны мы считаем относительно внутренней нормали),

$$E_1 = \frac{\omega_{n-1}}{2p'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'} + 1, \frac{n}{p} - 1 \right), \quad (18)$$

$$E_2 = \frac{\omega_{n-2}}{2p'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n+1}{p'} + 1, \frac{n+1}{p} - 2 \right),$$

⁴Подчеркнем, что наши обозначения отличаются от принятых в [4].

$$F(\varepsilon) = \frac{\omega_{n-2}}{2} \int_0^{\frac{\rho}{2}\varepsilon^{-\frac{n-1}{n+1}}} \frac{t^{\frac{n^2+1}{n-1}} dt}{(1+t^{\frac{n+1}{n-1}})^n} \geq C \ln(\varepsilon^{-1}); \quad (19)$$

$$D_1 = \frac{\omega_{n-1}}{2p'} \mathcal{B}\left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p}\right), \quad (20)$$

$$D_2 = \frac{\omega_{n-2}}{2p'} \mathcal{B}\left(\frac{n+1}{p'}, \frac{n+1}{p} - 1\right).$$

Теперь оценим

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |u|^p dS_x &\leq \int_{\partial\Omega \cap \{r < \rho\}} \frac{dS_x}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-p}} = \omega_{n-2} \int_0^\rho \frac{r^{n-2} dr}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-p}} \cdot (1 + o_\rho(1)) \\ &= \omega_{n-2} \varepsilon^{1-\frac{n}{p} + \frac{p-1}{p'}} \int_0^{\rho\varepsilon^{-\frac{1}{p'}}} \frac{t^{n-2} dt}{(1+t^{p'})^{n-p}} \cdot (1 + o_\rho(1)). \quad (21) \end{aligned}$$

Заметим, что при $p > \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ (т.е. при $p'(n-p) < n-1$) предпоследний интеграл в (21) ограничен равномерно по ε , а при $p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ равномерно ограничен (т.е. сходится на полуоси) последний интеграл.

При $n \geq 4$ имеем

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p dS_x \leq \begin{cases} E_3 \varepsilon^{1-\frac{n}{p} + \frac{p-1}{p'}} \cdot (1 + o_\rho(1)), & \text{если } p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ C(\rho) \ln(\varepsilon^{-1}), & \text{если } p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ C(\rho), & \text{если } p > \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$E_3 = \frac{\omega_{n-2}}{p'} \mathcal{B}\left(\frac{n-1}{p'}, \frac{n}{p} - 1 - \frac{p-1}{p'}\right). \quad (23)$$

При $n = 3$ мы рассматриваем только случай $p = 2 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} = \frac{n+1}{2}$:

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 dS_x \leq 2\pi \int_0^{\rho\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{t dt}{1+t^2} \cdot (1 + o_\rho(1)) \leq \ln(\varepsilon^{-1}) \cdot (\pi + o_\rho(1)). \quad (24)$$

4.2. Оценки для полусферы. Пусть Ω — n -мерная полусфера с радиусом R , и $x_0 \in \partial\Omega$. Обозначим $r = \text{dist}(x, x_0)$ и введём функцию u по формуле (15). Следующие оценки получены в [4]⁵:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq \begin{cases} E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - \tilde{E}_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \tilde{F}(\varepsilon) + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+2}{3}; \end{cases} \quad (25)$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \geq D_1 \varepsilon^{-\frac{n}{p}} - \tilde{D}_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} - C\rho^{-\frac{n}{p-1}}, \quad (26)$$

где E_1 и D_1 определены в (18), (20) соответственно, $\mathcal{R}_g = n(n-1)R^{-2}$ — скалярная кривизна сферы, и

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 &= \frac{\omega_{n-1}}{12np'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n+2}{p'} + 1, \frac{n+2}{p} - 3 \right), \\ \tilde{F}(\varepsilon) &= \frac{2^{\frac{n-4}{3}} \omega_{n-1}}{3n} \int_0^{\frac{\rho}{2} \varepsilon^{-\frac{n-1}{n+2}}} \frac{t^{\frac{n^2+n+1}{n-1}} dt}{(1+t^{\frac{n+2}{n-1}})^n} \geq C \ln(\varepsilon^{-1}), \\ \tilde{D}_2 &= \frac{\omega_{n-1}}{12np'} \mathcal{B} \left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p} - 2 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

При $n \geq 8$ для оценки интеграла по $\partial\Omega$ мы можем воспользоваться формулами (22) и (23).

При $n = 7$ мы рассматриваем только случай $p = 3 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} = \frac{n+2}{3}$:

$$\int_{\partial\Omega} |u|^3 dS_x \leq \omega_5 \int_0^{\rho \varepsilon^{-\frac{2}{3}}} \frac{t^5}{(1+t^{\frac{3}{2}})^4} dt \cdot (1 + o_\rho(1)). \quad (28)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adimurthi, G. Mancini, *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*.— Nonlinear Analysis, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni (1991), 9–25.
2. Т. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*. — J. Diff. Geom. **11** (1976), 573–598.
3. Н. Brezis, L. Nirenberg, *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*. — Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

⁵В [4] оценивались интегралы по геодезическому шару, поэтому все коэффициенты отличаются от наших множителем 2.

4. А. В. Демьянов, А. И. Назаров, *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем*. — Алгебра и Анализ **17**, No. 5 (2005), 105–140.
5. В. Gidas, W.-M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*. — Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. **5**, Наука, Москва (1971).
7. P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case*. — Rev. Mat. Iberoam. **1** (1985), 45–121, 145–201.
8. P.-L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, *Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions*. — Indiana Univ. Math. J. **37**, No. 2 (1988), 301–324.
9. А. И. Назаров, *Dirichlet and Neumann problems to critical Emden–Fowler type equations*. — J. Global Optim. **40** (2008), 289–303.
10. А. И. Назаров, А. В. Резников, *Attainability of infima in the critical Sobolev trace embedding theorem on manifolds*. — AMS Transl. Series 2. **229** (2010), 197–210.
11. А. И. Назаров, А. П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева*. — Нелин. задачи и теория функций (ИМА. Вып. **27**). Новосиб., Т. Рожковская (2004), 109–136.
12. С. И. Похожаев, *О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . — Докл. АН СССР **165** (1965), no. 1, 36–39.
13. G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*. — Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.
14. P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for Quasilinear Equations in Domains with Conical Boundary Points*. — Comm. PDE. **8**, No. 7 (1983), 773–817.
15. N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*. — Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 721–747.
16. X. J. Wang, *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. — J. Diff. Eqs. **93**, No. 2 (1991), 283–310.

Bustrov D. V., Nazarov A. I. The Robin problem for quasilinear equations with critical growth of the right-hand side.

We consider the Robin problem for an equation driven by p -Laplacian with a critical right-hand side. For the semilinear case ($p = 2$), this problem was investigated by X.-J. Wang (1991). We use a variant of the concentration-compactness method by P.-L. Lions and give some sharp sufficient conditions for the existence of the least energy solution.

С.-Петербургский Государственный Университет Поступило 30 сентября 2024 г.
E-mail: danil.bystrovv@gmail.com

С.-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский Государственный Университет
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com